Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

David Siegmund
**Sequential Analysis. Tests and Confidence Intervals.**
Springer Series in Statistics, Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1985, XII+272 str., ISBN 0-387-96134-8.

David Siegmund jest znanym matematykiem amerykańskim pracującym na Uniwersytecie Stanforda w Kalifornii. Prócz analizy sekwencyjnej osiągnął wybitne wyniki w spokrewnionej z nią teorii optymalnych reguł zatrzymania.

*1. O analizie sekwencyjnej ogólnie.* Pierwsze proste procedury analizy sekwencyjnej pojawiły się w końcu lat dwudziestych naszego wieku. Jej rozwój jako teorii nastąpił podczas II wojny światowej dzięki badaniom przede wszystkim Abrahama Walda w USA, a pobudzany był przez potrzeby przemysłu zbrojeniowego - przez problemy statystycznej kontroli jakości.

Postępowanie sekwencyjne polega, najogólniej mówiąc, na tym, że po pobraniu kolejnego elementu próby podejmuje się decyzję, czy zakończyć pobieranie próby i na jej podstawie przeprowadzić wnioskowanie statystyczne, czy też dokonać następnej obserwacji. Zatem liczność próby jest zmienną losową.

Zalety metod sekwencyjnych mogą być dwojakiego rodzaju. Po pierwsze: metody te pozwalają poprawić efektywność procedury statystycznej, co oznacza tu zmniejszenie liczności próby. Po drugie: pozwalają rozwiązać problemy, dla których nie istnieją metody oparte na próbie o ustalonej liczności. Przykładem dla pierwszego przypadku jest osiągnięcie Walda, czyli sekwencyjny test ilorazowy(sequential probability ratio test, SPRT), konstruowany następująco: niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie prostą próbą losową o gęstości rozkładu $f_\theta(x)$. Testujemy hipotezę zerową $H_0 : \theta = \theta_0$ przeciw hipotezie alternatywnej $H_1 : \theta = \theta_1$. Niech $l_n = \prod_{i=1}^n f_{\theta_1}(X_i) / \prod_{i=1}^n f_{\theta_0}(X_i)$; niech $a$ i $b$ będą danymi stałymi takimi, że $0 < a < b$. Przyjmujemy hipotezę $H_0$, jeżeli $l_n \leq a$, odrzucamy ją jeżeli $l_n \geq b$, kontynuujemy pobieranie próby, jeżeli $l_n \in (a, b)$. Zatem losowa liczność próby wynosi $T = \inf\{n \geq n_0 : l_n \notin (a, b)\}$, gdzie $n_0$ jest pewną minimalną licznością próby. $T$ jest regułą zatrzymania procedury sekwencyjnej. Spośród wszystkich testów podanych wyżej hipotez, których błędy I i II rodzaju nie przekraczają ustalonych wartości, SPRT Walda spełniający te warunki ma najmniejszą oczekiwaną liczność próby.

Przykładem dla drugiego przypadku, tj. braku rozwiązania niesekwencyjnego, jest konstrukcja przedziału ufności o zadanej długości i zadanym poziomie ufności dla wartości oczekiwanej zmiennej losowej o rozkładzie normalnym z nieznaną wariancją.

Książka Siegmunda dotyczy prawie wyłącznie testów sekwencyjnych. Postępowanie sekwencyjne ma tu na celu poprawienie efektywności wnioskowania.

*2. Zawartość książki.* Dla metod sekwencyjnych regułę zatrzymania liczność próby można interpretować jako moment przekroczenia pewnej bariery przez odpowiedni proces stochastyczny. W książce procesem tym – dla czasu dyskretnego – jest błądzenie przypadkowe, a dla czasu ciągłego – proces ruchu Browna (proces Wienera). Interpretacja ta bierze początek z możliwości przedstawienia ilorazu wiarygodności jako sumy niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Bariera zatrzymania procesu może być funkcją czasu, także nieliniową.

Autor starał się uprzystępnić treść książki, przesuwając bardziej zaawansowane pojęcia i dowody do ostatnich rozdziałów.

Rozdział I ("Wstęp i przykłady", 7 stron) zawiera wprowadzenie do problematyki książki poprzez postawienie kilku zagadnień i pokrótce streszcza następne rozdziały. W rozdziale II ("Sekwencyjny test ilorazowy", 26 stron) następuje wykład teorii SPRT z przybliżeniami dla wartości błędów i oczekiwanej liczności próby, tożsamościami Walda, dyskusją optymalności, uwagami o testowaniu hipotez złożonych oraz o następującym wówczas pogorszeniu własności testu. Ostatni paragraf dotyczy znanych w statystycznej kontroli jakości procedur sum skumulowanych (CUSUM).

Najważniejszą część książki stanowią rozdziały III–V. Proces stochastyczny będący źródłem danych jest zdefiniowany jako ruch Browna $W(t)$ z parametrem dryfu $\mu$ (tzn. $EW(t) = \mu t$). Dowody wyników dla procesów z czasem dyskretnym (błądzenia przypadkowego) są odłożone do późniejszych rozdziałów. W rozdziale III ("Przybliżenia brownowskie i testy ucięte", 36 stron) rozważa się SPRT dla parametru dryfu, testy ucięte (zabezpieczenie przed nadmierną licznością próby), faktyczny rozmiar testu ("$p$-value"), porusza się wstępnie problem jakości przybliżeń za pomocą procesu Wienera. Omawia się modyfikacje mające na celu na przykład przyspieszenie akceptacji hipotezy zerowej, gdy jest ona prawdziwa, a również uwzględnienie parametrów zakłócających. Bariery zatrzymania testu są tutaj liniowe, a dokładne wyniki co do mocy i oczekiwanej liczności próby można uzyskać w najprostszych przypadkach.

Rozdział IV ("Testy o nieliniowych barierach zatrzymania", 35 stron) rozpoczyna się jako wstęp do teorii sekwencyjnych testów o mocy 1, tj. testów na poziomie istotności $\alpha$ hipotezy $H_0 : \mu = 0$ przeciw hipotezie $H_1 : \mu \neq 0$ o takiej regule zatrzymania $T$, że $P_0\{T < \infty\} \leq \alpha$ oraz dla wszystkich $\mu \neq 0$ $P_\mu\{T < \infty\} = 1$. Czytelnik otrzymuje wykład teorii sekwencyjnych testów istotności (zwanych w książce "repeated significance tests"). Bariery zatrzymania dla takich testów są nieliniowe. Także i tu uzyskuje się przybliżenia dla mocy i oczekiwanej liczności próby z dokładnymi wynikami w szczególnych przypadkach. Pod koniec rozdziału rozważa się testy sekwencyjne dla jednoparametrowych rodzin rozkładów.

Rozdział V ("Przykłady sekwencyjnych testów istotności", 36 stron) za-

wiera pewne zastosowania i rozwinięcia teorii: do danych o rozkładzie Bernoulliego, do porównania wyników doświadczeń klinicznych, do danych o rozkładzie normalnym z nieznaną wariancją i do analizy funkcji przeżycia.

Rozdziały VI i VII zawierają opisy szczególnych zagadnień. Rozdział VI ("Alokacja metod leczenia", 14 stron) dotyczy planowania doświadczeń klinicznych w sensie przydzielania obserwowanym pacjentom porównywalnych metod terapii. Rozdział VII ("Estymacja przedziałowa z zadaną dokładnością", 10 stron) jest bardzo zwięzłym wprowadzeniem do konstrukcji przedziałów ufności o zadanej długości i zadanym poziomie ufności. Zastosowania dotyczą wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym o nieznanej wariancji oraz dla porównania dwóch prób o rozkładach Bernoulliego z prawdopodobieństwami sukcesu i porażki $p_1, q_1$ i $p_2, q_2$ za pomocą logarytmu ilorazu szans $\theta = \log\{(p_1 q_2)/(p_2 q_1)\}$ ("log odds ratio").

Rozdziały VIII–X zawierają podstawy matematyczne konieczne do uzyskania dobrych przybliżeń dla charakterystyk testów w przypadku czasu dyskretnego i niektórych innych wyników podanych wcześniej bez dowodów. Rozdział VIII ("Błądzenie przypadkowe i teoria odnowy", 23 strony) opiera się na teorii wielkich odchyleń, teorii błądzenia przypadkowego i teorii odnowy, skąd można otrzymać przybliżenia dla przypadku liniowych barier zatrzymania (SPRT, CUSUM).

W rozdziale IX ("Nieliniowa teoria odnowy", 25 stron) głównym narzędziem jest nieliniowa teoria odnowy stosowana do testów o nieliniowych barierach zatrzymania (sekwencyjnych testów istotności), a także do przedziałów ufności o zadanej dokładności dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym.

Rozdział X ("Poprawione przybliżenia brownowskie", 16 stron) poświęcony jest problemom dającym się przeskalować tak, że ruch Browna stanowi przybliżenie I rzędu. Podaje się poprawki wyższych rzędów, uwzględniające dyskretność czasu. Wyniki są zastosowane do testów uciętych.

Rozdział XI, ostatni ("Różne problemy związane z przekroczeniem bariery", 12 stron), ma charakter częściowo techniczny. Wyniki teoretyczne są zastosowane do badania oczekiwanej liczności próby przy porównywaniu metod terapii oraz do szacowania momentu zmiany rozkładu ("change point") w ciągu losowych obserwacji.

Każdy rozdział zakończony jest zestawem problemów i zadań do samodzielnego rozwiązania. Czteroczęściowy dodatek podaje zwięzłe wprowadzenia w zagadnienia teorii procesów stochastycznych: ruch Browna, teorię kolejek i ryzyka ubezpieczeniowego, martyngały i całki stochastyczne, teorię odnowy. Bibliografię poprzedzają komentarze dotyczące źródeł do poszczególnych rozdziałów.

*3. Charakter książki.* Omawiana monografia nie jest wykładem metod sekwencyjnych o zakresie porównywalnym z książkami Govindarajulu (1987)

lub Wetherilla i Glazebrooka (1986). Nie znajdziemy tutaj wcale problemów estymacji sekwencyjnej (poza zwięzłym rozdziałem o przedziałach ufności), teorii sekwencyjnych reguł decyzyjnych wraz z problemami dostateczności, zupełności, niezmienniczości i optymalności, teorii bayesowskiej, a także części zagadnień sekwencyjnego testowania hipotez. Jest to głęboka i wyczerpująca monografia teorii sekwencyjnych testów ilorazowych i sekwencyjnych testów istotności dla procesu Wienera, traktowanego jako przybliżenie bardziej adekwatnych modeli statystycznych. Jej lektura wymaga znajomości analizy matematycznej przynajmniej na poziomie wykładu politechnicznego.

*4. Drobne usterki.* Książka zawiera usterki redakcyjne polegające na nieobecności w bibliografii niektórych pozycji, do których autor odwołuje się w tekście. Zauważone braki to: Lehmann (1959), Cox i Hinkley (1974) (w wielu miejscach książki), Sellke (1982, 1985) (paragraf V.5), Worsley (1983) (par. XI.3). Dwa pierwsze braki łatwo uzupełnić (zob. niżej), gdyż są to powszechnie znane monografie; co do pozostałych, okazało się to zbyt trudne.

*Literatura*

D. R. Cox i D. V. Hinkley, *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London 1974 (istnieje przekład rosyjski z 1978 r.)

Z. Govindarajulu, *The Sequential Analysis of Hypotheses Testing, Point and Interval Estimation, and Decision Theory*, 2nd edition, American Sciences Press, Columbus, Ohio 1987 (wydanie I w 1981 r.)

E. L. Lehmann, *Testing Statistical Hypotheses*, J. Wiley & Sons, New York 1959 (istnieje przekład polski z 1968 r.; ukazało się wydanie II poprawione, 1986 r.)

G. B. Wetherill i K. D. Glazebrook, *Sequential Methods in Statistics*, 3rd edition, Chapman and Hall, London-New York 1986.

MAREK MĘCZARSKI