ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXVI (1985)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ALEKSANDER KOWALSKI
DOMINIK SZYNAL
Lublin

Filtr Kalmana w przypadku istnienia korelacji między szumami urządzenia pomiarowego i obiektu

(Praca wpłynęła do Redakcji 29.03.1983)

WSTĘP

W pracy sformułujemy i rozwiążemy problem liniowej filtracji z czasem dyskretnym, dopuszczającej w modelu Kalmana istnienie korelacji między szumem obiektu a szumem urządzenia pomiarowego w chwili k oraz między szumem obiektu w chwili k a szumem urządzenia pomiarowego w chwili k+1. Rozpatrywany model pojawia się wtedy, gdy szum urządzenia pomiarowego zniekształca stan układu w chwili pomiaru i wpływa na stan układu w chwili następnej. Ponadto podajemy rozwiązanie problemu dualnego w rozważanym uogólnieniu filtracji Kalmana.

1. PROBLEM ESTYMACJI ŚREDNIOKWADRATOWEJ STANU UKŁADU DYNAMICZNEGO

Niech na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ będzie określony proces stochastyczny $(x(k), y(k), k \geqslant 0)$, w którym $x(k)$ oznacza n-wymiarowy wektor stanu układu dynamicznego, a $y(k)$ - m-wymiarowy

wektor wielkości obserwowalnych, tj.

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \qquad y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ . \\ . \\ . \\ y_m(k) \end{bmatrix},$$

gdzie $Ex_i^2(k) < \infty$ i $Ey_j^2(k) < \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$
Ponadto zakładamy, że $y(0), y(1), \ldots, y(k)$ są liniowo niezależne. Fakt ten oznacza, że każda obserwacja wnosi „istotnie nową" informację o stanie układu dynamicznego.

Problem liniowej estymacji średniokwadratowej stanu układu polega na znalezieniu n-wymiarowego wektora losowego $\hat{x}(j|k)$, stanowiącego optymalną w sensie średniokwadratowym liniową ocenę wektora $x(j)$, bazującą na obserwacjach $y(0), \ldots, y(k)$.

Wektor $\hat{x}(j|k)$ nazywamy filtrem, jeśli $j=k$, predyktorem, gdy $j > k$, i oceną wygładzającą, gdy $j < k$.

Niech

$$Z_k^1 = \left\{ z: z = \sum_{i=0}^{k} N_z(i)\, y(i) , \; N_z(i) \in L(R^m, R^1) \;\; i=0, 1, \ldots, k \right\}$$

$$X_k = Z_k^n, \qquad Y_k = Z_k^m .$$

Wiadomo, że Z_k^1 jest domkniętą, liniową podprzestrzenią przestrzeni

$L_2^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ z iloczynem skalarnym

$$(x,y) = E[x^T y] = \operatorname{tr} E[xy^T]$$

i normą $\|x\| = (x,x)^{1/2}$.

W terminach teorii przestrzeni Hilberta ocena z wektora $z \in L_2^1(\Omega,\mathcal{A},P)$ na podstawie obserwacji $y(0), \ldots, y(k)$ jest ortogonalną projekcją ocenianego wektora na przestrzeń Z_k^1.

Ortogonalizując metodą Gramma-Schmidta wektory losowe $y(0),\ldots,y(k)$, wprowadźmy bazę ortogonalną w y_k:

$$\begin{aligned}
&\tilde{y}(0|-1) = y(0),\\
&\tilde{y}(1|0) = y(1) - \operatorname{proj} y(1)|Y_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tilde{y}(k|k-1) = y(k) - \operatorname{proj} y(k)|Y_{k-1}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ocenę $\hat{z}$ można zapisać w postaci

$$\text{(P)} \qquad \hat{z} = \operatorname{proj} z|Z_k^1 =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} E[z\,\tilde{y}^T(r|r-1)]\,(E[\tilde{y}(r|r-1)\tilde{y}^T(r|r-1)])^{-1}\,\tilde{y}(r|r-1).$$

Aby dowieść (P), wystarczy wykazać, że wektor $\tilde{z} = z - \hat{z}$ jest ortogonalny do przestrzeni Z_k^1. W tym celu zauważmy, że można Z_k^1 przedstawić w postaci

$$Z_k^1 = \Big\{ z:\ z = \sum_{i=0}^{k} M_z(i)\,\tilde{y}(i|i-1),\ M_z(i) \in L(R^m, R^1),$$

$$i = 0, 1, \ldots, k \Big\},$$

i dla każdego $u \in Z_k^1$

$$E\left[(z-\hat{z})u^T\right] = E\Big[\Big\{z - \sum_{i=0}^{k} E\left[z\tilde{y}^T(i|i-1)\right]\left(E\left[\tilde{y}(i|i-1)\,\tilde{y}^T(i|i-1)\right]\right)^{-1}$$

$$\times\, \tilde{y}(i|i-1)\Big\}\Big(\sum_{r=0}^{k} N_z(r)\,\tilde{y}(r|r-1)\Big)^T =$$

$$= \sum_{r=0}^{k} E\left[z\tilde{y}^T(r|r-1)\right] N_z^T(r) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} E\left[z\tilde{y}^T(i|i-1)\right] \times$$

$$\times\, \left(E\left[\tilde{y}(i|i-1)\,\tilde{y}^T(i|i-1)\right]\right)^{-1} E\left[\tilde{y}(i|i-1)\,\tilde{y}^T(r|r-1)\right] N_z^T(r) = 0,$$

co wraz z faktem, że

$$E\left[(z-\hat{z})^T\, u\right] = \mathrm{tr}\, E\left[(z-\hat{z})u^T\right]$$

dowodzi (P).

2. FILTRY DLA LINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Rozważamy liniowy układ dynamiczny z czasem dyskretnym postaci Kalmana, tj.

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + C(k)\,w(k), \tag{1}$$

$$y(k) = B(k)\,x(k) + v(k), \tag{2}$$

gdzie $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ są odpowiednio $n\times n$, $n\times m$, $n\times p$ wymiarowymi macierzami rzeczywistymi, a

$x(k)$ - stan układu,

$y(k)$ - obserwacja stanu układu,

$w(k)$ - zakłócenia na wejściu (szum obiektu),

$v(k)$ - niepewność obserwacji (szum urządzenia pomiarowego),

przy czym $Ex(0) = \bar{x}(0)$, $Ew(k) = 0$, $Ev(k) = 0$, $E[x(0)w^T(k)] = 0$, $E[x(0)v^T(k)] = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Filtracja w sensie Kalmana polega na rekurencyjnym wyznaczeniu oceny $\hat{x}(k|k)$, zwanej filtrem, i macierzy kowariancji $P(k|k)$ błędu tej oceny, przyjmując, że $\hat{x}(0|0) = \bar{x}(0)$ i

$$P(0|0) = E\left[\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)\left(x(0) - \bar{x}(0)\right)^T\right]$$

oraz zakładając, że dane są macierze kowariancji wektorów $w(k)$ i $v(l)$:

$$E\left[w(k)w^T(l)\right] = Q(k)\sigma_{kl}, \qquad E\left[v(k)v^T(l)\right] = R(k)\sigma_{kl},$$

$$E\left[w(k)v^T(l)\right] = 0, \qquad k,l = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\sigma_{kl} = 1$ dla $k=l$ i $\sigma_{kl} = 0$ dla $k\neq l$.

R.E. Kalman wykazał, że przy powyższych założeniach i warunkach początkowych

$$\hat{x}(0|-1) = \bar{x}(0), \qquad P(0|-1) = E\left[(x(0) - \bar{x}(0))\,(x(0) - \bar{x}(0))^T\right],$$

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - B(k)\hat{x}(k|k-1)\right], \tag{3}$$

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1), \tag{4}$$

gdzie macierz K(k), zwana współczynnikiem wzmocnienia, dana jest wzorem

$$K(k) = P(k|k-1)B^T(k)\left[B(k)P(k|k-1)B^T(k) + R(k)\right]^{-1}, \tag{5}$$

a macierze kowariancji błędów spełniają równania

$$P(k|k) = \left[I - K(k)B(k)\right]P(k|k-1), \tag{6}$$

$$P(k+1|k) = A(k)P(k|k)A^T(k) + C(k)Q(k)C^T(k). \tag{7}$$

M.N. Simkin [5] rozważał problem filtracji Kalmana w przypadku istnienia korelacji między szumami w(k) i v(k), k = 0, 1, 2, ... Wykazał, że jeśli

$$E[x(k)w^T(l)] = Q(k)\delta_{kl}, \qquad E[v(k)v^T(l)] = R(k)\delta_{kl},$$
$$E[w(k)v^T(l)] = S(k)\delta_{kl}, \qquad k,l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

to

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - B(k)\hat{x}(k|k-1)\right], \tag{9}$$

$$\hat{x}(k+1|k) = A_0(k)\hat{x}(k|k) + F(k)y(k), \tag{10}$$

gdzie

$$A_0(k) = A(k) - F(k)B(k), \tag{11}$$

$$F(k) \stackrel{\text{df}}{=} C(k)S(k)R^{-1}(k), \tag{12}$$

$$K(k) = P(k|k-1)B^T(k)\left[B(k)\ P(k|k-1)\ B^T(k) + R(k)\right]^{-1}, \tag{13}$$

a macierze kowariancji błędów dane są równaniami

$$P(k|k) = \left[I - K(k)B(k)\right]P(k|k-1), \tag{14}$$

$$P(k+1|k) = A_0(k)P(k|k)A_0^T(k) + Q_0(k), \tag{15}$$

gdzie

$$Q_0(k) = C(k)Q(k)C^T(k) + F(k)R(k)F^T(k). \tag{16}$$

Celem pracy jest znalezienie filtrów typu Kalmana, w przypadku istnienia korelacji między w(k) i v(k) oraz w(k) i v(k+1). Ponadto rozważamy problem dualny w zagadnieniu Simkina i w zagadnieniu sformułowanym wyżej.

3. STRUKTURA FILTRU

Rozważmy najpierw przypadek, w którym dopuszcza się istnienie korelacji między w(k) i v(k) oraz w(k) i v(k+1).

Niech

$$E\left[w(k)\,w^T(k)\right] = Q(k), \qquad E\left[v(k)\,v^T(l)\right] = R(k)\delta_{kl},$$

(17)

$$E\left[w(k)\,v^T(l)\right] = S(k)\delta_{kl} + S_1(k)\delta_{k+1,l}, \qquad k,l = 0, 1, \ldots$$

LEMAT 1. Wektor w(k) da się przedstawić w postaci następującej sumy ortogonalnych składników:

$$w(k) = F(k)v(k) + G(k)v(k+1) + w_0(k), \tag{18}$$

gdzie

$$E\left[w_0(k)\,v^T(k)\right] = E\left[w_0(k)\,v^T(k+1)\right] = 0, \tag{19}$$

$$E\left[w_0(k)\,w_0^T(k)\right] = Q_0(k), \tag{20}$$

$$F(k) = S(k)R^{-1}(k), \tag{21}$$

$$G(k) = S_1(k)R^{-1}(k+1), \tag{22}$$

$$Q_0(k) = Q(k) - S(k)R^{-1}(k)S^T(k) - S_1(k)R^{-1}(k+1)S_1^T(k+1). \tag{23}$$

D o w ó d. Niech

$$V_l = \left\{v:\ v = M\,v(l),\ M \in L(R^m, R^p)\right\}, \qquad l = 0, 1, \ldots$$

V_1 jest liniową, domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $L_2^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Ponieważ $E[v(k)v^T(k+1)] = 0$, więc

$$w(k) = \text{Proj } w(k)\,|\,V_k + \text{Proj } w(k)\,|\,V_{k+1} +$$

$$+ \left[w(k) - \text{Proj } w(k)\,|\,V_k - \text{Proj } w(k)\,|\,V_{k+1}\right].$$

Pierwszy składnik należy do V_k, drugi do V_{k+1}, a trzeci jest ortogonalny do nich.

Zatem składniki te mają postać

$$\text{Proj } w(k)\,|\,V_k = F(k)v(k),$$

$$\text{Proj } w(k)\,|\,V_{k+1} = G(k)v(k+1),$$

$$w(k) - F(k)v(k) - G(k)v(k+1) = w_0(k).$$

Stąd otrzymujemy reprezentację (18). Z (17) i (18) mamy

$$0 = F(k)E[v(k)v^T(k+1)] = E[(w(k) - G(k)v(k+1) -$$

$$- w_0(k))v^T(k+1)] = S_1(k) - G(k)R(k+1),$$

co daje (22).

Podobne rozważanie prowadzi do postaci (21) macierzy $F(k)$. Dalej

$$Q_0(k) = E\left[w_0(k) w_0^T(k)\right] = Q(k) - F(k) R(k) F^T(k) -$$

$$- G(k) R(k+1) G^T(k+1) .$$

WNIOSEK. Jeżeli $E\left[w_0(k) w_0^T(l)\right] = Q_0(k)\delta_{kl}$ i $E\left[w_0(k) v^T(l)\right] = 0$, $k,l = 0,1, \ldots,$ to

$$E\left[w(k+1) w^T(k)\right] = E\left[\left(S(k+1) R^{-1}(k+1) v(k+1) +\right.\right.$$

$$+ S_1(k+1) R^{-1}(k+2) v(k+2) + w_0(k+1)\big)\left(S(k) R^{-1}(k) v(k) +\right.$$

$$\left.\left. + S_1(k) R^{-1}(k+1) v(k+1) + w_0(k)\right)\right]^T = S(k+1) R^{-1}(k+1) S_1^T(k) .$$

W dowodach lematów i twierdzeń wygodna będzie następująca postać równań (1) i (2):

$$(1') \qquad x(k) = \left(\prod_{i=1}^{k} A(k-i)\right) x(0) + \sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=1}^{i-1} A(k-j)\right) C(k-i) w(k-i) ,$$

$$(2') \qquad y(k) = B(k)\left[\left(\prod_{i=1}^{k} A(k-i)\right) x(0) + \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{i-1} A(k-j)\right) C(k-i) w(k-i) + v(k)\right.$$

LEMAT 2.

$$(24) \qquad \operatorname{Proj}\left(y(k) \mid Y_{k-1}\right) = B(k)\hat{x}(k|k-1) .$$

D o w ó d.

$$\text{Proj } y(k) \mid Y_{k-1} = \text{Proj}\left[B(k)x(k) + v(k)\right] \mid Y_{k-1} =$$

$$= \text{Proj } B(k)x(k) \mid Y_{k-1} + \text{Proj } v(k) \mid Y_{k-1}.$$

Na mocy wzoru (P) pierwszy składnik równa się $B(k)\hat{x}(k|k-1)$, a drugi z uwagi na definicję przestrzeni Y_{k-1} i wzory (2′) i (18) równa się 0, co dowodzi (24).

TWIERDZENIE 1. Załóżmy, że spełnione są następujące warunki:

$$E[x(0)] = \bar{x}(0),\ E[w(k)] = 0,\ E[v(k)] = 0,\ E[x(0)w^T(k)] = 0,$$

$$E[x(0)v^T(k)] = 0,\ E[w(k)w^T(k)] = Q(k),\ E[w(k)v^T(l)] = R(k)\delta_{kl},$$

$$E[w(k)v^T(l)] = S(k)\delta_{kl} + S_1(k)\delta_{k+1,l},$$

(25) $$E[w_0(k)w_0^T(l)] = Q_0(k)\delta_{kl},\ E[w_0(k)v^T(l)] = 0,$$

i niech

$$\hat{x}(0|-1) = \bar{x}(0),\ P(0|-1) = E\left[(x(0) - \bar{x}(0))(x(0) - \bar{x}(0))^T\right].$$

Wtedy

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - B(k)\hat{x}(k|k-1)\right], \tag{26}$$

$$\hat{x}(k|k-1) = A_0(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) + C(k-1)F(k-1)y(k-1), \tag{27}$$

gdzie

$$K(k) = \left[P(k|k-1)B^T(k) + C(k-1)S_1(k-1)\right]\left[B(k)P(k|k-1)B^T(k) + B(k)C(k-1)S_1(k-1) + S_1^T(k-1)C^T(k-1)B^T(k) + R(k)\right]^{-1}, \tag{28}$$

$$A_0(k) = A(k) - C(k)S(k)R^{-1}(k). \tag{29}$$

Macierze kowariancji błędu predyktora $\hat{x}(k|k-1)$ i filtra $\hat{x}(k|k)$ dane są wzorami

$$P(k|k-1) = A_0(k-1)P(k-1|k-1)A_0^T(k-1) + C(k-1)S_1(k-1)R^{-1}(k)S_1^T(k-1)C^T(k-1) + C(k-1)Q_0(k-1)C^T(k-1), \tag{30}$$

$$P(k|k) = \left[I - K(k)B(k)\right]P(k|k-1) = K(k)S_1^T(k-1)C^T(k-1). \tag{31}$$

Ponadto mamy

$$(32)\qquad \tilde{x}(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) =$$

$$= A_0(k-1)\,\tilde{x}(k-1|k-1) + C(k-1)\,G(k-1)\,v(k) + C(k-1)\,w_0(k-1),$$

$$(33)\qquad \tilde{x}(k|k) = x(k) - \hat{x}(k|k) = \left[I - K(k)B(k)\right]\tilde{x}(k|k-1) - K(k)\,v(k).$$

Zauważmy najpierw (przed podaniem dowodu), że założenie (25) oznacza, iż „resztowy" szum $(w_0(k),\ k = 0, 1, \ldots)$ jest procesem ortogonalnym i nieskorelowanym z szumem $(v(k),\ k = 0, 1, \ldots)$. Stanowi ono przeniesienie klasycznego założenia dotyczącego szumu $(w(k),\ k = 0, 1, \ldots)$ na szum $(w_0(k),\ k = 0, 1, \ldots)$. Przykładem procesu $(w(k),\ k = 0, 1, \ldots)$ spełniającego założenia twierdzenia 1 jest np. proces normalny postaci

$$\left(w(k) = w_0(k) + S(k)R^{-1}(k)\,v(k) + S_1(k)R^{-1}(k+1)\,v(k+1),\right.$$

$$\left.S(k),\ S_1(k) \in L(R^m, R^p),\ k = 0, 1, \ldots\right)$$

o $E\left[w(k)\right] = 0$ i

$$E\left[w(k)\,w^T(k)\right] = Q_0(k) + S(k)R^{-1}(k)S^T(k) + S_1(k)R^{-1}(k+1)\,S_1^T(k),$$

gdzie procesy $(v(k), k = 0, 1, \ldots)$ i $(w_0(k), k = 0, 1, \ldots)$ są nieskorelowanymi procesami normalnymi o ortogonalnych wartościach, średnich zero i macierzach kowariancji $Q_0(k) = E\left[w_0(k)\,w_0^T(k)\right]$ i $R(k) = E\left[v(k)\,v^T(k)\right]$, $\det R(k) \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots$

D o w ó d. Biorąc pod uwagę, że $\hat{x}(k|k) = \mathrm{Proj}\, x(k)\big|X_k$ da się

przedstawić wzorem (P), mamy

$$\hat{x}(k|k) = \text{Proj}\, x(k)|X_k = \text{Proj}\, x(k)|X_{k-1} +$$

$$+ E\left[x(k)\tilde{y}^T(k|k-1)\right]\left(E\left[\tilde{y}(k|k-1)\,\tilde{y}^T(k|k-1)\right]\right)^{-1}\tilde{y}(k|k-1).$$

Ale na mocy (24)

$$\tilde{y}(k|k-1) = y(k) - \text{Proj}\, y(k)|Y_{k-1} = y(k) - B(k)\hat{x}(k|k-1).$$

Stąd kładąc

$$K(k) = E\left[x(k)\tilde{y}^T(k|k-1)\right]\left(E\left[\tilde{y}(k|k-1)\,\tilde{y}^T(k|k-1)\right]\right)^{-1},$$

otrzymujemy (26).

Aby udowodnić (27) zauważmy najpierw, że

$$\hat{x}(k|k-1) = \text{Proj}\, x(k)|X_{k-1} =$$

$$= \text{Proj}\left[A(k-1)x(k-1) + C(k-1)w(k-1)\right]|X_{k-1} =$$

$$= A(k-1)\,\text{Proj}\, x(k-1)|X_{k-1} + \text{Proj}\, C(k-1)w(k-1)|X_{k-1}.$$

Na mocy zależności (18) drugi składnik możemy przedstawić w postaci

$$\text{Proj}\, C(k-1)w(k-1)|X_{k-1} = \text{Proj}\, C(k-1)F(k-1)v(k-1)|X_{k-1} +$$

$$+ \operatorname{Proj} C(k-1)\, G(k-1)\, v(k) \,|\, X_{k-1} + \operatorname{Proj} C(k-1)\, w_0(k-1) \,|\, X_{k-1}.$$

Z definicji przestrzeni X_{k-1}, ze wzoru (2'),z założeń modelu oraz z (17) i (24) wynika, że

$$E\left[C(k-1)\, G(k-1)\, v(k)\, y^T(i)\right] = E\left[C(k-1)\, w_0(k-1)\, y^T(i)\right] = 0,$$

$0 \leqslant i \leqslant k-1$, co dowodzi, że

$$\operatorname{Proj} C(k-1)\, G(k-1)\, v(k-1) \,|\, X_{k-1} = \operatorname{Proj} C(k-1)\, w_0(k-1) \,|\, X_{k-1} = 0.$$

Zatem mamy

$$\operatorname{Proj} C(k-1)\, w(k-1) \,|\, X_{k-1} = \operatorname{Proj} C(k-1)\, F(k-1)\, v(k-1) \,|\, X_{k-1} =$$

$$= \operatorname{Proj}\left[C(k-1)\, F(k-1)\, y(k-1) - C(k-1)\, F(k-1)\, B(k-1)\, x(k-1)\right] \,|\, X_{k-1}.$$

Biorąc pod uwagę, że $C(k-1)\, F(k-1)\, y(k-1) \in X_{k-1}$, a

$$\operatorname{Proj} C(k-1)\, F(k-1)\, B(k-1)\, x(k-1) \,|\, X_{k-1} =$$

$$= C(k-1)\, F(k-1)\, B(k-1)\, \hat{x}(k-1 \,|\, k-1),$$

otrzymujemy (27).

Wzory (32) i (33) otrzymamy po prostych przekształceniach algebraicznych z (1), (2), (18), (26), (27) i (29).

Współczynnik wzmocnienia K(k) wyznaczymy z zależności

$$E\left[\tilde{x}(k|k)\,y^T(k)\right] = 0.$$

Na mocy wzoru (33) powyższa równość jest równoważna

$$0 = \left[I - K(k)B(k)\right] E\left[\tilde{x}(k|k-1)\,y^T(k)\right] - K(k)E\left[v(k)\,y^T(k)\right].$$

Ale

$$E[\hat{x}(k|k-1)\,y^T(k)] =$$

$$= E[\tilde{x}(k|k-1)\,(B(k)\tilde{x}(k|k-1) + B(k)\hat{x}(k|k-1) + v(k)^T] =$$

$$= P(k|k-1)B^T(k) + E[\tilde{x}(k|k-1)\,v^T(k)],$$

natomiast

$$E\left[v(k)\,y^T(k)\right] = E\left[v(k)\,\left(B(k)\tilde{x}(k|k-1) + B(k)\hat{x}(k|k-1) + v(k)\right)^T\right] =$$

$$= E\left[v(k)\tilde{x}^T(k|k-1)\right] B^T(k) + E\left[v(k)\hat{x}^T(k|k-1)\right] B^T(k) + R(k).$$

Korzystając teraz z faktu, że $\hat{x}(k|k-1) \in X_{k-1}$ oraz z zależności (1') i (17), widzimy, że $E\left[v(k)\,\hat{x}^T(k|k-1)\right] = 0$. Zatem

$$E\left[v(k)\tilde{x}^T(k|k-1)\right] = E\left[v(k)\,\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)^T\right] = E\left[v(k)\,x^T(k)\right] =$$

$$= E\left[v(k)\,x^T(k-1)\right] A^T(k-1) + E\left[v(k)\,v^T(k-1)\right] F(k-1)\,C^T(k-1) +$$

$$+ E\left[v(k)v^T(k)\right] G^T(k-1) C^T(k-1) + E\left[v(k)w_0^T(k)\right] C^T(k-1) =$$

$$= R(k) G^T(k-1) C^T(k-1).$$

Stąd

$$(34) \quad 0 = \left[I - K(k)B(k)\right] P(k|k-1) B^T(k) + C(k-1) G^T(k-1) R(k) -$$

$$- K(k) R(k) G^T(k-1) C^T(k-1) B^T(k) - K(k) R(k),$$

co dowodzi (28).

Wyznaczymy teraz macierze kowariancji błędu predykcji. Ponieważ $\tilde{x}(k-1|k-1)$ jest kombinacją liniową wektorów losowych $x(k-1)$ i $y(0), \ldots, y(k-1)$, więc ze wzorów (1'), (2'), (17) i (19) wynika, że wszystkie składniki wyrażenia (32) są ortogonalne, co pozwala na zapisanie macierzy kowariancji $P(k|k-1)$ w postaci

$$P(k|k-1) = E\left[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)\right] =$$

$$= E\left[\left(A_0(k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) + C(k-1)G(k-1)v(k) + C(k-1)w_0(k-1)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(A_0(k-1)\tilde{x}(k-1|k-1) + C(k-1)G(k-1)v(k) + C(k-1)w_0(k-1)\right)^T\right] =$$

$$= A_0(k-1) P(k-1|k-1) A_0^T(k-1) + C(k-1) S_1(k-1) R^{-1}(k) S_1^T(k-1) \times$$

$$\times C^T(k-1) + C(k-1) Q_0(k-1) C^T(k-1).$$

Aby dowieść (31), zauważmy, że

$$P(k|k) = E\left[\tilde{x}(k|k)\tilde{x}^T(k|k)\right] = \left[I - K(k)B(k)\right] E\left[\tilde{x}(k|k-1)\tilde{x}^T(k|k-1)\right] \times$$

$$\times\left[I - K(k)B(k)\right]^T - K(k)R(k)K^T(k) - \left[I - K(k)B(k)\right] \times$$

$$\times E\left[\tilde{x}(k|k-1)v^T(k)\right] K^T(k) - K(k)E\left[v(k)\tilde{x}^T(k|k-1)\right]\left[I - K(k)B(k)\right]^T.$$

Podobnie, jak w dowodzie wzoru (28), mamy

$$E\left[v(k)\tilde{x}^T(k|k-1)\right] = R(k)G^T(k-1)C^T(k-1),$$

więc

$$P(k|k) = \left[I - K(k)B(k)\right] P(k|k-1) - \left\{\left[I - K(k)B(k)\right]P(k|k-1)B^T(k)\right.$$

$$+ C(k-1)G(k-1)R(k) - K(k)R(k)G^T(k-1)C^T(k-1)B^T(k) +$$

$$\left. + K(k)R(k)\right\} K^T(k) - K(k)R(k)G^T(k-1)C^T(k-1),$$

co na mocy (34) daje (28).

U w a g a 1. Struktura filtru z twierdzenia 1 redukuje się do przypadku klasycznego Kalmana, w przypadku gdy $S_1(k) = S(k) = 0$ i do przypadku rozważanego przez Simkina, gdy $S_1(k) = 0$.

Jeśli natomiast założymy, że $S_1(k) \neq 0$ i $S(k) = 0$, to otrzymujemy postać filtru w przypadku klasycznym, w którym dodatkowo za-

kłada się, że szum urządzenia pomiarowego v(k) zakłóca stan układu x(k).

U w a g a 2. W pracy [4] wyprowadzono równania filtracji dla układu dynamicznego (1)-(2) nie czyniąc żadnych założeń odnośnie do korelacji między szumami - żądając jednak aby filtr miał z góry zadaną postać. Z prowadzonych tam rozważań wynika, że do uzyskania ocen stanu układu w chwili k potrzebna jest znajomość wszystkich parametrów układu aż do chwili k. Fakt ten praktycznie uniemożliwia wykorzystanie uzyskanych wzorów w zastosowaniach. Spostrzeżenie to uzasadnia potrzebę, przeprowadzonej analizy układów dynamicznych, w których korelacja między szumami spełnia warunki wymienione we wstępie pracy.

4. PROBLEM DUALNY

Z własności projekcji ortogonalnej wynika, że

$$E\left[a^T(x(k) - \hat{x}(k|j))\right]^2 = \min_{y \in X_k} E\left[a^T(x(k) - y)\right]^2$$

dla każdego $a \in R^n$.

Kalman wykazał (dowód w [2] str. 238), że zagadnienie wyznaczenia oceny stanu $\hat{x}(k|k-1)$ stochastycznego układu dynamicznego opisanego równaniami (1) i (2), minimalizującej funkcjonał

$$f(y) = E\left[(x(k) - y)^T(x(k) - y)\right], \qquad y \in X_{k-1},$$

jest równoważne zagadnieniu znalezienia sterowania $(u(k-1), u(k-2), \ldots, u(0))$, $u(i) \in R^n$ dla deterministycznego układu dynamicznego:

$$z(t) = A^T(t+1)\,z(t+1) + B^T(t+1)\,u(t+1), \tag{35}$$

$$e(t) = C^T(t)\,z(t), \qquad t = -1, 0, \ldots, k-1;\ z(k-1) = a, \tag{36}$$

minimalizującego funkcjonał

$$g\left(u(0), u(1), \ldots, u(k-1)\right) = z^T(-1)\,P(0|0)\,z(-1) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{k-1} \left(z(t)\,C(t)\,Q(t)\,C^T(t)\,z^T(t) + u'^T(t)\,R(t)\,u'(t)\right), \qquad u'(t) \in R^m.$$

Sformułujemy tu i rozwiążemy problem dualny w zagadnieniu Simkina i w uogólnieniu przez nas rozważanym.

TWIERDZENIE 2. Problem znalezienia optymalnej w sensie średniokwadratowym oceny $\hat{x}(k|k-1)$ stanu układu (1) i (2), gdy spełnione są warunki (17) i (25) oraz $x(0) = 0$ jest równoważny problemowi znalezienia sterowania $(u(k-1), u(k-2), \ldots, u(0))$, $u(i) \in R^m$, dla układu dualnego (35), (36) minimalizującego funkcjonał

$$(37)\qquad g(u'(0), u'(1), \ldots, u'(k-1)) = z^T(-1)P(0|0)z(-1) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{k-1}(z(t)C(t)Q(t)C^T(t)z^T(t) + u'^T(t)R(t)u'(t) -$$

$$- 2z^T(t)C(t)S(t)u'(t) +$$

$$+ 2\sum_{t=0}^{k-2}(z(t+1)C(t+1)S(t+1)R^{-1}(t+1)S_1^T(t)C^T(t)z^T(t) -$$

$$- u'^T(t+1)S_1(t)C^T(t)z^T(t)), \qquad u'(t) \in R^m,\ t = 0, 1, \ldots, k-1.$$

D o w ó d. Z rozważań wstępnych wynika, że $\hat{x}(k|k-1)$ minimalizuje

$$(38)\qquad f(y) = E[a^T x(k) - a^T y]^2, \qquad y \in X_{k-1},$$

dla wszystkich $a \in R^n$. Ponieważ $\hat{x}(k|k-1)$ jest liniową kombinacją wektorów losowych $y(0), \ldots, y(k-1)$, przeto $a^T\hat{x}(k|k-1)$ można przedstawić w postaci sumy

$$(39)\qquad a^T\hat{x}(k|k-1) = -\sum_{t=0}^{k-1} u^T(t)y(t).$$

Problem znalezienia $a^T \hat{x}(k|k-1)$, a więc i $\hat{x}(k|k-1)$ sprowadza się teraz do wyznaczenia wektorów $u(0), \ldots, u(k-1)$ minimalizujących funkcjonał (38).

Uwzględniając warunek początkowy $z(k-1) = a$, otrzymamy

$$(40) \qquad a^T x(k) = z^T(k-1)x(k) =$$

$$= z^T(-1)x(0) + \sum_{t=0}^{k-1} \left(z^T(t)x(t+1) - z^T(t-1)x(t)\right).$$

Na mocy (1) i (35) mamy

$$z^T(t)x(t+1) = z^T(t)A(t)x(t) + z^T(t)C(t)w(t),$$

$$z^T(t-1)x(t) = z^T(t)A(t)x(t) + u^T(t)B(t)x(t).$$

Wstawiając powyższe wielkości do równania (40), otrzymamy

$$(41) \qquad a^T x(k) = z^T(-1)x(0) + \sum_{t=0}^{k-1} \left(z(t)C(t)w(t) - u^T(t)B(t)x(t)\right).$$

Równania (2) i (39) dają

$$(42) \qquad a^T \hat{x}(k|k-1) = -\sum_{t=0}^{k-1} \left(u^T(t)B(t)x(t) + u^T(t)v(t)\right).$$

Odejmując ostatnią wielkość od (41), uzyskujemy

$$a^T x(k) - a^T\hat{x}(k|k-1) = z^T(-1)x(0) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{k-1}\left(z^T(t)C(t)w(t) + u^T(t)w(t)\right).$$

Stąd po uwzględnieniu założeń (17) i (24) mamy

$$E\left[a^T x(k) - a^T\hat{x}(k|k-1)\right]^2 = E\left[\left(a^T x(k) - a^T\hat{x}(k|k-1)\right)\left(a^T x(k) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - a^T\hat{x}(k|k-1)\right)^T\right] = z^T(-1)\,E\left[x(0)x^T(0)\right]z(-1) +$$

$$+ \sum_{t=0}^{k-1}\left(z^T(t)C(t)E\left[w(t)w^T(t)\right]C^T(t)z(t) + u^T(t)E\left[v(t)v^T(t)\right]u(t) -\right.$$

$$\left. - 2\,z^T(t)C(t)E\left[w(t)v^T(t)\right]u(t)\right) +$$

$$+ 2\sum_{t=0}^{k-2}\left(z^T(t+1)C(t+1)E\left[w(t+1)w^T(t)\right]C^T(t)z(t) -\right.$$

$$\left. - u^T(t+1)E\left[v(t+1)w^T(t)\right]C^T(t)z(t)\right) =$$

$$= z^T(-1)P(0|0)z(-1) + \sum_{t=0}^{k-1}\left(z^T(t)C(t)Q(t)C^T(t)z(t) +\right.$$

$$\left. + u^T(t)R(t)u(t) - 2\,z^T(t)C(t)S(t)u(t)\right) +$$

$$+ 2 \sum_{t=0}^{k-2} \left(z^T(t+1) C(t+1) S(t+1) R^{-1}(t+1) S_1^T(t) C^T(t) z(t) - \right.$$

$$\left. - u^T(t+1) S_1^T(t) C^T(t) z(t) \right),$$

co kończy dowód twierdzenia 2.

WNIOSEK. Jeśli $S_1(k) = 0$ - przypadek rozpatrywany przez Simkina [5], to problem optymalnej oceny stanu liniowego układu dynamicznego jest równoważny problemowi sterowania optymalnego minimalizującego funkcjonał

$$z^T(-1) P(0|0) z(-1) + \sum_{t=0}^{k-1} \left[z^T(t) C(t) Q(t) C^T(t) z(t) + \right.$$

$$\left. + u^T(t) R(t) u(t) - 2 z^T(t) C(t) S(t) u(t) \right].$$

PRACE CYTOWANE

[1] K. Astrom, Introduction to Stochastic Control, Academic Press, New York 1970.

[2] R.E. Kalman, R.S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Proediction Theory, Trans ASME Ser. D, J. Basic Eng. (1961) 83, 95-107.

[3] W. Mlak, Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta, PWN, Warszawa 1970.

[4] Nguyen Thuc Loan, Hoang Hong Son, Ob optimal'noj fil'tracii pri

korrelirovannych šumach i vyroždennych korreljacionnych matricach, Avtomatika i telemechanika, (1982), Nr 5, 107-116.

[5] M.M. Simkin, O rekurrentnoj fil'tracii pri vzaimo korrelirovannych šumach ob''ekta i izmeritelja, Avtomatika i telemechanika (1980), Nr 1, 71-80.