ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XXII (1983)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

MACIEJ SZYMKAT
Kraków

Postać n-tej iteracji operatora $q = f\frac{d}{dx}$

(Praca wpłynęła do Redakcji 27.11.1980)

Niech $C^n(\mathbb{R})$ oznacza ogół funkcji klasy C^n na $\mathbb{R}$, a f pewną ustaloną funkcję z $C^n(\mathbb{R})$. Zdefiniujmy operator nieliniowy q działający na $C^n(\mathbb{R})$.

$$q: C^n(\mathbb{R}) \ni f_1 \longrightarrow q(f_1) \in C^{n-1}(\mathbb{R}).$$

Jeśli $f_1: \mathbb{R} \ni x \longrightarrow f_1(x) \in \mathbb{R}$, to

$$q(f_1): \mathbb{R} \ni x \longrightarrow f(x) \cdot \frac{df_1(x)}{dx};$$

n-tą iterację operatora q określamy następująco

$$q^n: C^n(\mathbb{R}) \ni f_1 \longrightarrow \underset{1}{q}(\underset{2}{q}(\ldots \underset{n}{q}(f_1)\ldots)) \in C^0(\mathbb{R}).$$

W tej pracy przedstawiono wyniki dotyczące postaci operatora q^n działającego na funkcję f, tę samą, która służyła do zdefiniowania operatora q. Ten szczególny przypadek jest interesujący ze względu na zastosowanie operatora q^n w analizie wartości ekstremalnych przebiegów przejściowych w liniowych układach dynamicznych. W pracy H.Góreckiego [2] podane zostało równanie charakteryzujące własności ekstremalne przebiegów przejściowych w liniowym układzie dynamicznym n-tego rzędu

$$q^{n-1}(f) + a_{n-1}q^{n-2}(f) + \ldots + a_2 q(f) + a_1 = a_0 x .$$

Do jego rozwiązania potrzebna jest znajomość postaci k-tej iteracji operatora q liczonej na funkcji f , dla k = 1,2,... ...,n-1 .

W paragrafie 1 sformułowano i udowodniono twierdzenie o postaci $q^n(f)$. W paragrafie 2 przedstawiono algorytmy pozwalające obliczać współczynniki we wzorze na $q^n(f)$. W paragrafie 3 podano metodę otrzymywania bezpośrednich wzorów na te współczynniki oraz wzory na niektóre wyróżnione współczynniki, a także wzór na ich sumę. W ostatnim paragrafie przedstawiono pewne dodatkowe informacje dotyczące rekurencyjnego i przybliżonego określenia liczby współczynników.

1. TWIERDZENIE O POSTACI $q^n(f)$

DEFINICJA 1. Dla $n = 1,2,3,...$ A_n jest zbiorem wszystkich n-elementowych ciągów liczb całkowitych, nieujemnych postaci $(a_1,a_2,...,a_n)$ spełniających warunki:

(1) $$a_i \geqslant a_{i+1} , \quad i = 1,2,...,n-1 ,$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = n .$$

Każdy element $a \in A_n$, $a = (a_1,a_2,...,a_n)$, można utożsamiać z pewnym ciągiem n+2-elementowym $\bar{a} = (\bar{a}_0,\bar{a}_1,...,\bar{a}_n,\bar{a}_{n+1})$ przyjmując

$$\bar{a}_0 = n + 1 ,$$

$$\bar{a}_i = a_i , \quad i = 1,2,...,n .$$

$$\bar{a}_{n+1} = 0 ,$$

W ten sposób określona została bijekcja

$$g_n: A_n \ni a \longrightarrow \bar{a} \in \bar{A}_n , \quad \text{gdzie} \quad \bar{A}_n = \{\bar{a}: a \in A_n\}.$$

Posługiwanie się ciągami z $\bar{A}_n$ podyktowane jest wygodą w zapisie podstawowego twierdzenia 1.

Między elementami A_{n-1} a A_n wprowadzimy relację poprzedzania $\longrightarrow$.

DEFINICJA 2. Jeśli $a' \in A_{n-1}$, $a'' \in A_n$, to

$$a' \longrightarrow a'' \iff a'_i \leqslant a''_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\ldots,n-1.$$

Dla przykładu - zachodzą następujące poprzedzenia:

$$(2,1,0) \longrightarrow (2,1,1,0) \longrightarrow (3,1,1,0,0) .$$

U w a g a 1.

$$a' \in A_{n-1} , \; a'' \in A_n , \; a' \longrightarrow a''$$
$$\Downarrow$$
$$\exists ! j \in \{1,2,\ldots,n\}: \; \bar{a}'_j = \bar{a}''_j - 1 \text{ i } \bar{a}'_k = \bar{a}''_k , \text{ gdy } k \in \{1,\ldots,j-1,j+1,\ldots n\}.$$

D o w ó d . Ponieważ $\sum_{i=1}^{n-1} a'_i = n - 1$, $a'_i = \bar{a}'_i$, gdy $i = 1,\ldots,n-1$ oraz $\bar{a}'_n = 0$, zachodzi

(i) $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}'_i = n - 1$, podobnie (ii) $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}''_i = n$.

Z założenia o nieujemności wyrazów ciągów z A_n

$$\bar{a}''_n = a''_n \geqslant 0 = \bar{a}'_n .$$

Ponieważ $a' \longrightarrow a''$,

$$\bar{a}''_i \geqslant \bar{a}'_i \quad \text{gdy} \quad i = 1,2,\ldots,n-1 .$$

Stąd (i) i (ii) implikują tezę, wobec tego, że wszystkie wyrazy rozważanych ciągów są całkowite.

Uwaga 1 gwarantuje poprawność następującej definicji.

DEFINICJA 3. Niech $a' \in A_{n-1}$, $a'' \in A_n$, $a' \longrightarrow a''$

$$\bar{a}'_j = \bar{a}''_j - 1 \quad \text{dla pewnego} \quad j \in \{1,2,\ldots,\} ,$$

wtedy

$$\delta(a' , a'') := \bar{a}'_{j-1} - \bar{a}'_j .$$

Zostanie sformułowane twierdzenie dotyczące postaci n-tej iteracji operatora q :

$$q^n(f) = q\,(q\,(\ldots\,{}_{n-1}(q\,f)\ldots)) =$$

$$= f\cdot\frac{d}{dx}\Big(f\cdot\frac{d}{dx}\Big(\ldots\Big(f\cdot\frac{df}{dx}\Big)\ldots\Big)\Big).$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenia:

$$f^{(0)} = f\,,\quad f^{(1)} = \frac{df}{dx}\,,\ldots,\quad f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}\,.$$

TWIERDZENIE 1. Zachodzi następujący wzór:

$$q^n(f) = \sum_{a\in A_n} \alpha_a \prod_{i=0}^{n} f^{(i)\,\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}}\,, \tag{3}$$

gdzie współczynniki α_a można wyliczyć rekurencyjnie ze wzoru

$$\alpha_a = \sum_{\substack{b\in A_{n-1}\\ b\to a}} \delta(b,a)\ \alpha_b\,, \tag{4}$$

$$\alpha_a = 1\,,\quad \text{gdy}\quad a\in A_1\,, \tag{4'}$$

lub wprost ze wzoru

$$\alpha_a = \sum_{\substack{(a^1,a^2,\ldots,a^{n-1})\in A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1}\\ a^1\to a^2\to\ldots\to a^{n-1}\to a^n = a}} \prod_{i=1}^{n-1}\delta(a^i,a^{i+1}). \tag{5}$$

Przyjmijmy następującą umowę dotyczącą zapisu

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = 0\,,\quad \prod_{i=k}^{n} a_i = 1\,,\quad \text{jeśli}\quad k > n\,.$$

DEFINICJA 4. C^n jest zbiorem wszystkich n+1-elementowych ciągów liczb całkowitych nieujemnych postaci $c = (c_0,c_1,\ldots,c_n)$ spełniających warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = n + 1\,, \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i\,c_i = n\,. \tag{7}$$

LEMAT 1. Odwzorowanie

$$\bar{h}_n\colon \bar{A}_n \ni (\bar{a}_0,\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_{n+1}) \longrightarrow (\bar{a}_0-\bar{a}_1,\bar{a}_1-\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_n-\bar{a}_{n+1}) \in C_n$$

jest bijekcją oraz

$$\bar{h}_n^{-1}\colon C_n \ni (c_0,c_1,\dots,c_n) \longrightarrow (c_0+c_1+\dots+c_n, c_1+\dots+c_n, \dots, c_n, 0) \in \bar{A}_n.$$

Jeśli przyjmiemy, że $h_n^{-1}(c) = a$, gdy $\bar{h}_n^{-1}(c) = \bar{a}$, to określone w ten sposób odwzorowanie h_n^{-1} jest bijekcją C_n na A_n.

D o w ó d . $\bar{h}_n$ i $\bar{h}_n^{-1}$ określone są poprawnie, bo

$$\sum_{i=0}^{n}(\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}) = \bar{a}_o - \bar{a}_{n+1} = n + 1 \quad \text{oraz}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} ia_i - \sum_{i=1}^{n}(i-1)a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i = n.$$

Wprost z określenia $\bar{h}_n$ i $\bar{h}_n^{-1}$ wynika, że $\bar{h}_n \circ \bar{h}_n^{-1} = id_{C_n}$ oraz $\bar{h}_n^{-1} \circ \bar{h}_n = id_{\bar{A}_n}$, zatem $\bar{h}_n$ jest bijekcją.

UWAGA o h_n^{-1} wynika z faktu, że $h_n^{-1} = q_n^{-1} \circ \bar{h}_n^{-1}$.

LEMAT 2. Niech $c' \in C_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Zachodzi wzór

$$\overset{(0)}{f}\frac{d}{dx}\prod_{i=0}^{n-1}\overset{(i)}{f}c'_i = \sum_{\substack{a\in A_n \\ h_{n-1}^{-1}(c')\longrightarrow a}} \delta\left(h_{n-1}^{-1}(c'),a\right)\prod_{i=0}^{n}\overset{(i)}{f}\bar{h}_n(\bar{a})_i.$$

D o w ó d . Na podstawie własności pochodnej

$$\overset{(o)}{f}\frac{d}{dx}\prod_{i=0}^{n-1}\overset{(i)}{f}c'_i = \sum_{c'_k{}^{k}>0} c'_k \overset{(0)}{f}\prod_{i=0}^{k-1}\overset{(i)}{f}c'_i \cdot \overset{(k)}{f}c'_{k-1}\cdot \overset{(k+1)}{f}c'_{k+1}+1 \times$$

$$\times \prod_{i=k+2}^{n-1}\overset{(i)}{f}c'_i = \sum_{c'_k{}^{k}>0}\delta_k \prod_{i=0}^{n}\overset{(i)}{f}c_i^k$$

(przyjęto $c'_n := 0$).

W ostatnim wyrażeniu przyjęto oznaczenia:

$$\delta_k = c'_k ,$$

$$c^k = (c^k_o, c^k_1, \ldots, c^k_n),$$

$$c^k = \begin{cases} (c'_o, c'_1 + 1, c'_2, c'_3, \ldots, c'_{n-1}, c'_n), & \text{gdy } k = 0, \\ c'_o+1, c'_1, c'_2, \ldots, c'_k - 1, c'_{k+1}+1, c'_{k+2}, \ldots, c'_n, & \end{cases}$$

$$\text{gdy } 0 < k \leqslant n - 1.$$

Niech $\bar{a}' = \bar{h}^{-1}_{n-1}$, $\bar{a}^k = \bar{h}^{-1}_n (c^k)$. Otrzymujemy

$$\bar{a}' = \Big(n, \sum_{i=1}^{n-1} c'_i, \sum_{i=2}^{n-1} c'_i, \ldots, c'_{n-1}, 0\Big),$$

$$\bar{a}^k = \begin{cases} \Big(n+1, 1 + \sum_{i=1}^{n-1} c'_i, \sum_{i=2}^{n-1} c'_i, \ldots, c'_{n-1}, 0, 0\Big), & \text{gdy } k = 1, \\ \Big(n+1, \sum_{i=1}^{n-1} c'_i, \ldots, \sum_{i=k}^{n-1} c'_i, 1 + \sum_{i=k+1}^{n-1} c'_i, \sum_{i=k+2}^{n-1} c'_i, \ldots, c'_{n-1}, 0, 0\Big), & \end{cases}$$

$$\text{gdy } 0 < k \leqslant n - 1 .$$

Łatwo zauważyć, że $\bar{a}^k \in \bar{A}_n$ i $a' \longrightarrow a^k$ oraz że $\delta(a', a^k) = \delta_k$. Ponieważ w sumie występują te składniki, dla których $c'_k > 0$, a więc $\bar{a}'_k - \bar{a}'_{k+1} > 0$, czyli $\bar{a}'_k > \bar{a}'_{k+1}$, oraz $\bar{a}^k_{k+1} = \bar{a}'_{k+1} + 1$, sumować można po wszystkich możliwych $a \in A_n$, dla których $a' \longrightarrow a$.

D o w ó d t w i e r d z e n i a 1. Dowód przeprowadzony zostanie metodą indukcji.

Warunek (3) dla $n = 1$:

Jedynym elementem $\bar{A}_1$ jest ciąg $\bar{a}' = (2,1,0)$. Zgodnie z (4') , $\alpha_{a'} = 1$. Stąd

$$q(f) = 1 \cdot f^{(0)\,2-1}\, f^{(1)\,1-0} = f^{(0)}\, f^{(1)}.$$

Warunki (3) i (4) dla n = 2:

Na podstawie określenia q zachodzi $q^2(f) = f^{(0)}\, f^{(1)\,2} + f^{(0)\,2}\, f^{(2)}$.

Z drugiej strony, ponieważ

$$\bar{A}_2 = \{\underbrace{(3,2,0,0,)}_{\bar{a}^1},\ \underbrace{(3,1,1,0)}_{\bar{a}^2}\},$$

na podstawie (3)

$$q^2(f) = \alpha_{a^1} f^{(0)\,3-2}\, f^{(1)\,2-0} + \alpha_{a^2} f^{(0)\,3-1}\, f^{(2)\,1-0} =$$

$$= \alpha_{a^1} f^{(0)(1)\,2} + \alpha_{a^2} f^{(0)\,2}\, f^{(2)}.$$

Ponieważ $a' \longrightarrow a^1$ i $a' \longrightarrow a^2$ $\left(\bar{a}' = (2,1,0)\right)$, na podstawie (4) otrzymujemy

$$\alpha_{a^1} = \delta(a', a^1)\ \alpha_{a'} = (2-1)\cdot 1 = 1,$$

$$\alpha_{a^2} = (a', a^2)\ \alpha_{a'} = (1-0)\cdot 1 = 1.$$

Warunek indukcyjny:

Zakładamy, że (3) zachodzi dla $n = 1$, $n \geqslant 2$; pokażemy, że (3) i (4) zachodzą dla n. Z lematu 1 otrzymujemy

$$q^{n-1}(f) = \sum_{a' \in A_{n-1}} \alpha_{a'} \prod_{i=0}^{n-1} f^{(i)\,\bar{a}'_i - \bar{a}'_{i+1}} =$$

$$= \sum_{c' \in C_{n-1}} \alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')} \prod_{i=0}^{n-1} f^{(i)\,\bar{h}_{n-1}^{-1}(c')_i - \bar{h}_{n-1}^{-1}(c')_{i+1}} =$$

$$= \sum_{c' \in C_{n-1}} \alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')} \prod_{i=0}^{n-1} f^{(i)\,\sum_{k=i}^{n-1} c'_k - \sum_{k=i+1}^{n-1} c'_k} =$$

$$= \sum_{c' \in C_{n-1}} \alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')} \prod_{i=0}^{n-1} f^{(i)\,c'_i}.$$

Obliczymy teraz

$$q^n(f) = q\left(q^{n-1}(f)\right) = {}^{(o)}f \cdot \frac{d}{dx}\left(q^{n-1}(f)\right).$$

Ze względu na liniowość operatora różniczkowania możemy każdy składnik postaci $\prod_{i=0}^{n-1} {}^{(i)}f^{c'_i}$ różniczkować z osobna, a następnie mnożyć przez $\alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')}\, {}^{(o)}f$ i zsumować. Tak więc na podstawie lematu 2

$$q^n(f) = \sum_{c' \in C_{n-1}} \alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')} \sum_{\substack{a \in A_n \\ h_{n-1}^{-1}(c') \to a}} \delta\left(h_{n-2}^{-1}(c'), a\right) \times$$

$$\times \prod_{i=0}^{n} {}^{(i)}\bar{h}_n(\bar{a})_i =$$

$$= \sum_{a \in A_n} \sum_{\substack{c' \in C_{n-1} \\ h_{n-1}^{-1}(c') \to a}} \delta\left(h_{n-1}^{-1}(c'), a\right) \alpha_{h_{n-1}^{-1}(c')} \prod_{i=0}^{n} {}^{(i)}\bar{h}_n(\bar{a})_i =$$

$$= \sum_{a \in A_n} \sum_{\substack{a' \in A_{n-1} \\ a' \to a}} \delta(a', a)\, \alpha_{a'} \prod_{i=0}^{n} {}^{(i)}f^{\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}}.$$

W ostatniej równości wykorzystano raz jeszcze lemat 1. Jeśli przez α_a oznaczymy

$$\alpha_a = \sum_{\substack{a' \in A_{n-1} \\ a' \to a}} \delta(a', a)\ \alpha_{a'},$$

otrzymujemy (3) i (4) dla n.

Pozostaje do sprawdzenia warunek (5). Jest on prostą konsekwencją (4) dla $k = 1,2,\ldots,n-1, n$. Zachodzi bowiem

$$\alpha_{a^n} = \sum_{\substack{a^{n-1} \\ a^{n-1} \to a^n}} \delta(a^{n-1}, a^n)\, \alpha_{a^{n-1}} =$$

$$= \sum_{\substack{a^{n-1} \\ a^{n-1} \to a^n}} \left(\delta(a^{n-1}, a^n) \sum_{\substack{a^{n-2} \\ a^{n-2} \to a^{n-1}}} \delta(a^{n-2}, a^{n-1}) \alpha_{a^{n-2}} \right) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{\substack{a^{n-1} \\ a^{n-1} \to a^n}} \Big(\delta(a^{n-1}, a^n) \times$$

$$\times \sum_{\substack{a^{n-2} \\ a^{n-2} \to a^{n-1}}} \Big(\delta(a^{n-2}, a^{n-1}) \sum_{\substack{a^{n-3} \\ a^{n-3} \to a^{n-2}}} \Big(\delta(a^{n-3}, a^{n-2}) \ldots$$

$$\ldots \Big(\delta(a^2, a^3) \sum_{\substack{a^1 \\ a^1 \to a^2}} \delta(a^1, a^2) \Big) \ldots \Big) \Big) \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{a^1, a^2, \ldots, a^{n-1} \\ a^1 \to a^2 \to \ldots \to a^{n-1} \to a^n}} \prod_{i=1}^{n-1} \delta(a^i, a^{i+1}) .$$

W ten sposób dowód twierdzenia 1 został zakończony.

2. ALGORYTMY WYLICZANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW

Twierdzenie 1 dostarcza istotnej informacji o charakterze współczynników i odpowiadających im składników występujących w sumie (3) określającej $q^n(f)$. Jak się okazało, dogodną metodą ich oznaczania jest użycie słabo malejących ciągów nieujemnych n liczb całkowitych o sumie równej n (A_n). Z lematu 1 wynika, że równoważne jest stosowanie jako indeksów rozwiązań układu (6),(7). Jest ich tyle samo, co różnych rozwiązań w liczbach całkowitych, nieujemnych równania

$$(7') \qquad \sum_{i=1}^{n} i\, c_i = n ,$$

a c_0 można zawsze obliczyć ze wzoru

$$c_0 = n + 1 - \sum_{i=1}^{n} c_i .$$

Metoda rozwiązywania równania (7') podana została m.in. w [3], str. 99. Metoda ta polega na kolejnym wyliczaniu rozwiązań w porządku leksykograficznym. Interesujące jest to, że ta sama metoda indeksowania stosowana jest we wzorze Bruno na n-tą pochodną funkcji złożonej([3], str. 52). Występujące w tym wzorze współczynniki, tzw. liczby Bella , ze zrozumiałych względów są różne od współczynników w (3) . Udowodnione wzory (4) i (5) dają jednak wystarczającą podstawę do skonstruowania efektywnych algorytmów wyliczania współczynników $\{\alpha_a\}_{a \in A_n}$.

ALGORYTM 1. M e t o d a d r z e w a p o - p r z e d z a n i a .

Niech $a \in A_n$, $n \geqslant 2$

0. $a^1 := a$, $i := 1$.

1. Dla wszystkich określonych wcześniej $a^{k_1,\ldots,k_i}$

$$A^{k_1,\ldots,k_i} := \left\{ a \in A_{n-i} : a \rightarrow a^{k_1,\ldots,k_i} \right\},$$

$a^{k_1,\ldots,k_i,k_{i+1}}$:= element $A^{k_1,\ldots,k_i}$ o numerze k_{i+1} w porządku leksykograficznym.

2. Gdy $i < n - 2$, $i := i + 1$, przejść do 1.

Gdy $i = n - 2$, przejść do 3.

3. Dla wszystkich określonych $a^{k_1,\ldots,k_{n-1}}$,

$$\alpha_{a}^{k_1,\ldots,k_{n-1}} = 1.$$

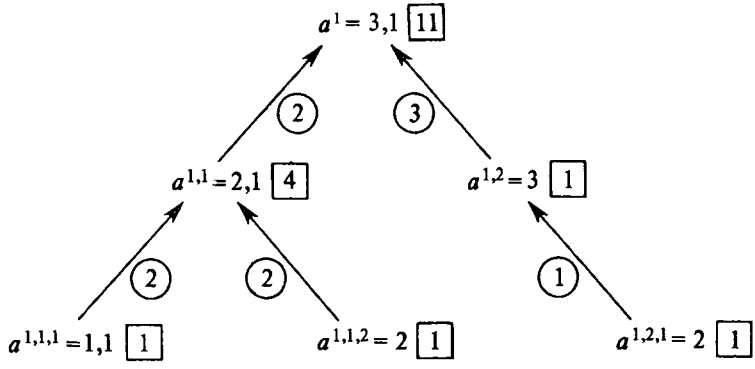
4. Dla wszystkich określonych wcześniej $a^{k_1,\ldots,k_i}$,

$$\alpha_{a}^{k_1,\ldots,k_i} := \sum_{a \in A^{k_1,\ldots,k_i}} \alpha_a \cdot \delta(a, a^{k_1,\ldots,k_i}).$$

5. Gdy $i > 1$, $i := i + 1$, przejść do 4.

Gdy $i = 1$, $\alpha_a := \alpha_{a^1}$, stop.

Algorytm 1 opiera się bezpośrednio na wzorze (4) oraz na fakcie, że współczynniki w sumie określającej $q^2(f)$ są równe 1, co sprawdzono w dowodzie twierdzenia.1. Zastosowaną metodę zilustrujemy przykładem dla $a \in A_4$, $a = (3,1,0,0)$. W dalszej części pracy w odniesieniu do ciągów z A_n stosować będziemy zapis skrócony z pominięciem zer i nawiasów, w zapisie tym $a = 3,1$.



Oznaczenia: strzałkom odpowiadają relacje poprzedzania,

○ oznaczono $\delta(a^{k_1,\ldots,k_{i+1}}, a^{k_1,\ldots,k_i})$,

□ oznaczono $\alpha_{a^{k_1,\ldots,k_{i+1}}}$.

Rys.1. Działanie algorytmu 1

ALGORYTM 2. M e t o d a ł a ń c u c h ó w p o - p r z e d z a n i a.

Niech $a \in A_n$, $n \geqslant 2$.

0. $k_1 := 1$, $a^{k_1} := a$, $\alpha_{a^{k_1}} := 1$, $i := 1$.

1. $A^{k_1,\ldots,k_i} := \{a \in A_{n-i} : a \rightarrow a^{k_1,\ldots,k_i}\}$,

$a^{k_1,\ldots,k_i,k_{i+1}}$:= element zbioru $A^{k_1,\ldots,k_i}$ o numerze k_{i+1} w porządku leksykograficznym,

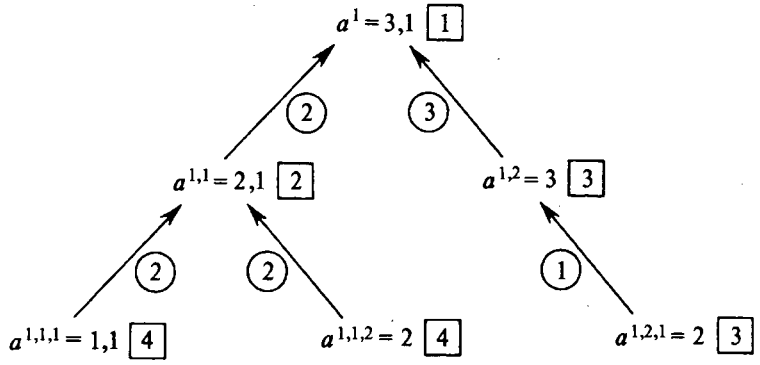
$$\alpha_{a^{k_1,\ldots,k_i,k_{i+1}}} := \alpha_{a^{k_1,\ldots,k_i}} \cdot \delta(a^{k_1,\ldots,k_i,k_{i+1}}, a^{k_1,\ldots,k_i}).$$

2. Gdy $i < n - 2$, $i := i + 1$, przejść do 1.

Gdy $i = n - 2$, $\alpha_a := \sum_{k_1,\ldots,k_{n-1}} \alpha_{a^{k_1,\ldots,k_{n-1}}}$, stop

Algorytm 2 opiera się bezpośrednio na wzorze (5) i na fakcie, że $\delta(a', a'') = 1$ dla wszystkich $a' \in A_1$, $a'' \in A_2$, co sprawdzono w dowodzie twierdzenia 1. Działanie algorytmu 2 zilustrujemy przykładem dla $a \in A_4$, $a = 3,1$ (zapis skrócony)

Algorytm 2 ma przewagę nad algorytmem 1, polegającą na lepszej organizacji obliczeń, mniejszej liczbie koniecznych do zapamiętania wielkości, jakkolwiek liczba obliczeń w obu algorytmach jest jednakowa.



Oznaczenia: strzałkom odpowiadają relacje poprzedzania,

○ oznaczono $\delta(a^{k_1,\ldots,k_i}, k_{i+1}, a^{k_1,\ldots,k_i})$,

□ oznaczono $\alpha_{a^{k_1,\ldots,k_i}, k_{i+1}}$

Rys.2. Działanie algorytmu 2

3. WZORY NA WSPÓŁCZYNNIKI

Wzór (4) umożliwia znalezienie bezpośrednich wzorów na współczynniki α_a. Wzory te nie określają wszystkich współczynników, lecz odnoszą się do danego typu współczynników. Typ współczynnika zostanie zdefiniowany następująco:

DEFINICJA 5. Jeśli $a \in A_n$, to:

- a jest typu b, gdzie $b \in A_m$ $(m \leqslant n-1)$, jeśli

  $a_{i+1} = b_i$ dla $i = 1,2,\ldots,m$

  $a_{m+k} = 0$ dla $k = 2,3,\ldots,n-m$;

- a jest typu 0, jeśli

  $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$.

W ten sposób uzyskaliśmy rozkład zbioru wszystkich współczynników $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ na rozłączne zbiory współczynników danego typu. Dla przykładu:

1,1,1; 2,1,1; 5,1,1; są typu 1,1,

1; 2; 5; są typu 0

(stosujemy zapis skrócony).

DEFINICJA 6. n-ty współczynnik typu b oznaczamy i określamy następująco:

- gdy $b \in A_m$,

$$\alpha^b(n) = 0, \quad \text{jeśli} \quad n < m + b_1 ,$$

$$\alpha^b(n) = \alpha_{n-m,b_1,b_2,\ldots,b_m}, \quad \text{jeśli} \quad n \geqslant m + b_1 ;$$

- gdy $b = 0$,

$$\alpha^0(n) = \alpha_n \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

(uwaga: zapis skrócony).

Podaną definicję ilustrują przykłady:

$$\alpha^{2,1}(5) = \alpha_{2,2,1} , \quad \alpha^{2,1}(6) = \alpha_{3,2,1} , \quad \alpha^0(5) = \alpha_5 .$$

W zbiorze par typów $A_m \times A_{m+1}$ $(m \geqslant 1)$ mamy już zdefiniowaną relację poprzedzania $\longrightarrow$, którą uzupełnimy następującym określeniem dla przypadku $A_0 \times A_1$:

$$0 \longrightarrow 1$$

Po wprowadzeniu dodatkowo uporządkowania leksykograficznego w zbiorach A_m, typy można w naturalny sposób ponumerować

$$b^1 = 0$$
$$b^2 = 1$$
$$b^3 = 1,1$$
$$b^4 = 2$$
$$b^5 = 1,1,1$$
$$b^6 = 2,1$$
$$b^7 = 3$$
$$\vdots$$

Tym samym uzyskaliśmy możliwość ponumerowania współczynników (przy ustalonym n), a zatem i składników w sumie we wzorze (3). Skoro indeks a współczynnika wyznaczony jest jednoznacznie przez jego typ i n, to i na tych samych danych opierając się możemy odtworzyć cały składnik.

U w a g a 2. Jeśli $\alpha_a = \alpha^0(n)$, to

$$(8') \qquad \prod_{i=0}^{n} f^{(i)\,\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}} = f^{(0)}\, f^{(1)}\, n .$$

Jeśli $\alpha_a = \alpha^b(n)$, $b \in A_m$, to

$$(8) \qquad \prod_{i=0}^{n} f^{(i)\,\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}} = f^{(0)}_{m+1}\, f^{(1)}\, n-m-b_1 \left(\prod_{i=2}^{m} f^{(i)\, b_{i-1} - b_i} \right) f^{(m+1)\, b_m} .$$

Dowód wzorów (8') i (8) wynika wprost z definicji 6.

Na podstawie (8) i (8') możemy (3) zapisać następująco:

Niech $m(b) = m$, jeśli $b \in A_m$;

$$(9) \qquad q^n(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{b^k}(n)\, q_k^n(f) \quad , \text{ gdzie } q_0^n(f) = f^{(0)}\, {}_1 f^{(1)}\, n ,$$

gdy $k \geqslant 1$,

$$q_k^n(f) = f^{(0)}_{m(b^k)+1}\, f^{(1)}\, n-m(b^k)-b_1^k \times$$

$$\times \left(\prod_{i=2}^{m(b^k)} f^{(i)\, b_{i-1}^k - b_i^k} \right) f^{(m(b^k)+1)\, b_m^k(b^k)} .$$

W tabeli 1 przedstawiono wartości $\alpha^{b^k}(n)$ dla $k, n = 1, 2, \ldots, 7$.

U w a g a 3. $a \in A_n$ jest typu b, $a' \in A_{n-1}$ jest typu b' $(n \geqslant 2)$. Wtedy $a' \longrightarrow a \implies b' \longrightarrow b$.

D o w ó d . Jeśli $b \in A_m (m \geqslant 1)$, to a ma postać

$$a = (a_1, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0).$$

Na podstawie uwagi 1 zachodzi

Tabela 1. Początkowe wartości $\alpha^{b^k}(n)$

k	1	2	3	4	5	6	7
b^k	0	1	1,1	2	1,1,1	2,1	3
$m(b^k)$	0	1	2	2	3	3	3
n $\quad q_k^n(f)$	$(o)_1\ (1)_n$	$(o)_2\ (1)_{n-2}\ (2)_1$	$(o)_3\ (1)_{n-3}\ (3)_1$	$(o)_3\ (1)_{n-4}\ (2)_2$	$(o)_4\ (1)_{n-4}\ (4)_1$	$(o)_4\ (1)_{n-5}\ (2)_1\ (3)_1$	$(o)_4\ (1)_{n-6}\ (2)_3$
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0	0
4	1	11	7	4	1	0	0
5	1	26	32	34	11	15	0
6	1	57	122	180	76	192	34
7	1	120	423	768	426	1494	496

(+) $a' = (a_1 - 1, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$

lub

(++) $a' = (a_1, b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i - 1, b_{i+1}, \ldots, b_m, 0, 0)$ dla

pewnego $i \in \{1,2,\ldots,m\}$.

W przypadku (+) mamy $b' = b$, w przypadku (++) natomiast $b' \in A_{m-1}$ gdy $m > 1$ lub $b' = 0$ gdy $m = 1$, zatem z definicji 2

$$b' \longrightarrow b .$$

Jeśli $b = 0$, to a' musi mieć postać

$$a' = (a_1 - 1, 0, \ldots, 0),$$

tak więc jest również typu 0 .

Uwaga 3 w połączeniu z wzorami (4),(4') umożliwia rekurencyjne określanie $\alpha^b(n)$ za pomocą $\alpha^b(n-1)$ i współczynników $\alpha^{b'}(n-1)$, dla b' takich, że $b' \longrightarrow b$. W tej sytuacji przy założeniu, że dane są już bezpośrednie wzory dla wszystkich współczynników o typach b' poprzedzających b , możemy sformułować równanie różnicowe zwyczajne pierwszego rzędu określające $\alpha^b(n)$. Warunek początkowy zadajemy następująco:

$$\alpha^b(0) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } b \in A_m , \quad m = 1,2,3,\ldots, \\ 1, & \text{gdy } b = 0 . \end{cases}$$

Uzyskanie wzoru bezpośredniego na $\alpha^b(n)$ sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego równania różnicowego. Można to uczynić stosując na przykład transformację $\mathcal{Z}$ w sposób opisany m.in. przez Kaufmanna [3] , str. 24 .

W tabeli 2 zestawiono równania rekurencyjne dla współczynników pierwszych siedmiu typów i uzyskane za pomocą transformacji $\mathcal{Z}$ ich rozwiązania. Współczynniki pierwszych siedmiu typów odpowiadają wszystkim tym składnikom $q_k^n(f)$, w których $f^{(o)} = f$ występujące w potędze mniejszej od 5.

Wzór (9) wraz z danymi tabeli 2 pozwala na przedstawienie $q^n(f)$ w zwartej postaci, przydatnej do aproksymacji przy funkcji f dostatecznie bliskiej zeru.

Podane zostanie teraz twierdzenie dotyczące wartości sumy współczynników α_a występujących we wzorze (3) na $q^n(f)$

TWIERDZENIE 2. Dla $n = 1,2,\ldots$ zachodzi

$$(10) \qquad \sum_{a \in A_n} \alpha_a = n! .$$

D o w ó d . Ze wzorów (4) lub (5) można zauważyć, że współczynniki α_a, $a \in A_n$, nie zależą od f, a jedynie od struktury $A_1,\ldots,A_n$. Tak więc funkcję f można przyjąć dowolnie. Załóżmy, że f jest funkcją wykładniczą, czyli

$$f = \exp .$$

Wzór (10) udowodnimy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ na podstawie (4')

$$\alpha_a = 1 \quad \text{dla} \quad a \in A_1 .$$

Stąd, ponieważ A_1 jest zbiorem jednoelementowym, mamy (10). Załóżmy, że (10) zachodzi dla $n - 1$. Dla każdego $a \in A_{n-1}$ mamy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \exp^{(i)\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{d^i \exp}{dx^i}\right)^{\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}} =$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \exp^{\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1}} = \exp^{\sum_{i=0}^{n-1}(\bar{a}_i - \bar{a}_{i+1})} = \exp^{\bar{a}_0 - \bar{a}_n} = \exp^n .$$

Ostatnia równość wynika z określenia $\bar{a} \in \bar{A}_{n-1}$. Zatem na podstawie (3)

$$q^{n-1}(\exp) = \sum_{a \in A_{n-1}} \alpha_a \exp^n = \left(\sum_{a \in A_{n-1}} \alpha_a\right) \exp^n .$$

Z założenia indukcyjnego

$$(\times) \qquad q^{n-1}(\exp) = (n - 1)! \exp^n .$$

T a b e l a 2. Wzory dla początkowych $\alpha^{b^k}(n)$

k	
1	$\alpha^{0}(n) = \alpha^{0}(n-1)$ $\alpha^{0}(0) = 1$
	$\alpha^{0}(n) = 1$
2	$\alpha^{1}(n) = 2\alpha^{1}(n-1) + (n-1)\,\alpha^{0}(n-1)$ $\alpha^{1}(0) = 0$
	$\alpha^{1}(n) = 2^{n} - n - 1$
3	$\alpha^{1,1}(n) = 3\,\alpha^{1,1}(n-1) + (n-3)\,\alpha^{1}(n-1)$ $\alpha^{1,1}(0) = 0$
	$\alpha^{1,1}(n) = \frac{1}{4}\,3^{n} - 2^{n} + \frac{1}{2}\,n + \frac{3}{4}$
4	$\alpha^{2}(n) = 3\alpha^{2}(n-1) + (n-2)\,\alpha^{1}(n-1)$ $\alpha^{2}(0) = 0$
	$\alpha^{2}(n) = \frac{3}{4}\,3^{n} - n2^{n} + \frac{1}{2}\,n^{2} - \frac{3}{4}$
5	$\alpha^{1,1,1}(n) = 4\,\alpha^{1,1,1}(n-1) + \alpha^{1,1}(n-1)$ $\alpha^{1,1,1}(0) = 0$
	$\alpha^{1,1,1}(n) = \frac{1}{18}\,4^{n} - \frac{1}{4}\,3^{n} + \frac{1}{2}\,2^{n} - \frac{1}{6}\,n - \frac{11}{36}$
6	$\alpha^{2,1}(n) = 4\,\alpha^{2,1}(n-1) + (n-4)\,\alpha^{1,1}(n-1) + 2\,\alpha^{2}(n-1)$ $\alpha^{2,1}(0) = 0$
	$\alpha^{2,1}(n) = \frac{4}{9}\,4^{n} - \left(\frac{1}{4}n + \frac{3}{2}\right)3^{n} + \frac{3}{2}n2^{n} - \frac{1}{2}n^{2} - \frac{1}{12}n + \frac{19}{18}$
7	$\alpha^{3}(n) = 4\,\alpha^{3}(n-1) + (n-5)\,\alpha^{2}(n-1)$ $\alpha^{3}(0) = 0$
	$\alpha^{3}(n) = \frac{1}{2}\,4^{n} - \left(\frac{3}{4}n - \frac{3}{4}\right)3^{n} + \left(\frac{1}{2}n^{2} - n - \frac{1}{2}\right)2^{n} - \frac{1}{6}n^{3} + \frac{1}{2}n^{2} + \frac{5}{12}n - \frac{3}{4}$

Analogicznie otrzymujemy

$$(xx) \qquad q^n(\exp) = \Big(\sum_{a \in A_n} \alpha_a \Big) \exp^{n+1} .$$

Z drugiej strony, korzystając z definicji q , z (x) mamy

$$q^n(\exp) = q\left(q^{n-1}(\exp)\right) = \exp \frac{dq^{n-1}(\exp)}{dx} =$$

$$= \exp \frac{d(n-1)!\ \exp^n}{dx} = (n-1)!\ \exp \cdot n \cdot \exp \cdot \exp^{n-1} =$$

$$= n!\ \exp^{n+1}$$

Ponieważ $\exp \neq 0$, z porównania otrzymanego wyniku z (xx) otrzymujemy

$$\sum_{a \in A_n} \alpha_a = n! ,$$

co kończy dowód.

4. LICZBA WSPÓŁCZYNNIKÓW

Zgodnie z twierdzeniem 1 liczba współczynników odpowiadająca liczbie składników w sumie (3) jest równa mocy zbioru indeksów A_n . Elementami tego zbioru są słabo malejące, n-elementowe ciągi liczb całkowitych, nieujemnych, o sumie n . Zauważmy, że każdemu takiemu ciągowi odpowiada pewne przedstawienie liczby n w postaci sumy liczb całkowitych i dodatnich, przy nieuwzględnianiu ich kolejności i dopuszczeniu powtórzeń. Na odwrót, każdemu takiemu rozkładowi odpowiada dokładnie jeden ciąg z A_n . Dopuszczamy tu dowolną liczbę składników, bowiem ich liczba i tak nie może przekroczyć n , maksymalna liczba składników jest osiągnięta przy rozkładzie na same jedynki i wynosi n . Jeśli w rozkładzie występuje mniejsza liczba składników, to w odpowiadającym mu ciągu występuje dopełniająca do n liczba zer. Problem na ile sposobów można tak rozłożyć liczbę n jest fundamentalnym zagadnieniem tak zwanej addytywnej teorii liczb. Liczbę rozkładów n na sumę liczb całkowitych i dodatnich, bez uwzględniania ich kolejności i przy dopuszczeniu powtórzeń, oznacza się $p(n)$; jest to tak zwana

funkcja rozkładu (unrestricted partition function; [1], str.307). p(n) jest więc zarazem równa mocy A_n, a zatem określa szukaną liczbę współczynników α_a w (3).

Problem rekurencyjnego określenia p(n) został rozwiązany przez Eulera. Otrzymane przez niego wyniki - twierdzenie o liczbach pięciokątnych i rekurencyjny wzór na p(n) - można zapisać następująco:

TWIERDZENIE 3 (Eulera). Zachodzi

$$(11) \qquad p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[p\big(n-w(k)\big) + p\big(n-w(-k)\big) \right],$$

gdzie w(k) są to liczby pięciokątne określone wzorem

$$w(k) = (3k^2 - k)/2 .$$

Wzór (11) można zapisać w postaci

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \ldots$$

Dowód twierdzenia 3 można znaleźć między innymi w [1], str. 312-316 .

Oprócz postaci rekurencyjnej znany jest również przybliżony wzór na p(n) pozwalający ocenić charakter wzrostu funkcji rozkładu przy n dążącym do nieskończoności. Wzór ten został podany przez Rademachera w [4] , ma on postać

$$(12) \qquad p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{4n\sqrt{3}} \qquad \text{przy} \quad n \longrightarrow \infty .$$

Przy n = 20 i n = 200 oszacowanie (12) określa p(n) z dokładnością odpowiednio rzędu 10% i 3% . W tabeli 3 podano początkowe wartości p(n) .

T a b e l a 3. Początkowe wartości p(n)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

BIBLIOGRAFIA

[1] T.APOSTOL, Introduction to Analytic Number Theory. Springer Verlag, New York 1976.

[2] H.GÓRECKI, Przeregulowania w liniowych i nieliniowych układach automatyki, Archiwum Automatyki i Telemechaniki, 10(1965).

[3] A.KAUFMANN, Wwiedienie w prikładnuju kombinatoriku (tłum. z franc.) Izd. Nauka, Moskwa 1975.

[4] H.RADEMACHER, On the partition function p(n) , Proc. London Math. Soc. 43(1937), 241-254 .