ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XIX (1982)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

ZDZISŁAW JABŁOŃSKI (Grodzisk Mazowiecki)

Rozwiązanie równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju z zastosowaniem funkcji sklejanych

(*Praca wpłynęła do Redakcji 26.01.1979*)

Praca ta poświęcona jest metodzie aproksymacji równania całkowego Fredholma [4] funkcjami sklejanymi wielomianowymi trzeciego stopnia. Mianowicie, rozwiązanie przybliżone tego równania przedstawiamy w postaci kombinacji liniowej funkcji sklejanych, które tworzą rozkład jedności na odcinku $[0, 2\pi]$. Błąd aproksymacji w naturalny sposób łączymy z doskonałością rozpatrywanego rozkładu jedności.

Ze znanych twierdzeń teorii potencjału (zob. [8]) wynika równoważność wewnętrznego ($\lambda = -1$) i zewnętrznego ($\lambda = 1$) zagadnienia Dirichleta w obszarze płaskim D ograniczonym krzywą Jordana C z następującym równaniem całkowym

$$f(s) - \lambda \int_C K(s, t) f(t) dt = \varphi(s), \tag{1}$$

gdzie: $f(t)$ gęstość potencjału zadana na brzegu C obszaru D, $K(s, t)$ jądro równania całkowego dane wzorem

$$K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \left(\ln \frac{1}{r_{st}} \right) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}},$$

r_{st} odległość punktu s od punktu t krzywej C (punkty odpowiadające wartości parametru, którym jest długość łuku na krzywej), $\varphi(s) = \frac{1}{\pi} g(s)$ zadana na brzegu funkcja ciągła.

Podobnie zagadnienie wewnętrzne i zewnętrzne Neumana równoważne jest z równaniem całkowym

$$h(s) - \lambda \int_C K(t, s) h(t) dt = \psi(s),$$

gdzie $h(s)$ ciągła gęstość potencjału, $\lambda = 1$, $\psi(s) = -\frac{1}{\pi} k(s)$ zagadnienie wewnętrzne, $\lambda = -1$, $\psi(s) = \frac{1}{\pi} k(s)$ zagadnienie zewnętrzne, $k(s)$ zadana na brzegu funkcja ciągła, $K(t, s)$ jądro sprzężone z jądrem $K(s, t)$ (zob. [4]).

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z następujących pojęć teorii funkcji sklejanych (zob. [1] i [2]).

Niech $\{t_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $t_j < t_{j+1}, j = 0, \mp 1, \ldots$ Dla naturalnego k definiujemy funkcje:

$$g_k(s;t) := (s-t)_+^{k-1},$$

$$(s-t)_+^{k-1} := \begin{cases} (s-t)^{k-1} & \text{dla } s > t, \\ 0 & \text{dla } s \leqslant t \end{cases} \tag{2}$$

oraz funkcje

$$M_{ik}(t) := g_k(t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}; t) :=$$

$$:= \frac{g_k(t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}; t) - g_k(t_i, \ldots, t_{i+k-1}; t)}{t_{i+k} - t_i} =$$

$$= \sum_{j=i}^{i+k} \frac{(t_j - t)_+^{k-1}}{\omega'(t_j)},$$

$$\omega'(t_j) = \prod_{\substack{l=i \\ l \neq j}}^{i+k} (t_j - t_l).$$

Zauważmy, że nośnikiem funkcji $M_{ik}(t)$ jest przedział $[t_i, t_{i+k}]$.

Funkcję

$$N_{ik}(t) := (t_{i+k} - t_i) M_{ik}(t) \tag{3}$$

nazywamy *unormowaną funkcją bazową Schoenberga.*

Łatwo zauważyć, że

$$N_{i1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

TWIERDZENIE 1 (zob. [2]). *Dla funkcji $M_{ik}(t)$ zachodzi wzór:*

$$M_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} M_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} M_{i+1,k-1}(t), \qquad k \geqslant 2.$$

Wykorzystując (3) i twierdzenie 1 otrzymujemy:

$$N_{ik}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t). \tag{4}$$

Zauważmy, że w ustalonym punkcie na prostej co najwyżej k funkcji bazowych jest różnych od zera, oraz że

$$\operatorname{supp} N_{ik}(t) = [t_i, t_{i+k}].$$

Określimy teraz bazę funkcji sklejanych wielomianowych trzeciego stopnia, które tworzą rozkład jedności na odcinku skończonym (zob. [1]). Rozpatrzmy podział przedziału $[0, 2\pi]$ z równym krokiem $h = 2\pi/n$. Ze wzoru (3), po trzykrotnym zastosowaniu (4), mamy:

$$N_{i4}(t) = \frac{1}{6h^3}\Big((t - t_i)^3 N_{i1}(t) + \tag{5}$$

$$+\big((t-t_i)^2(t_{i+2}-t)+(t-t_i)(t_{i+3}-t)(t-t_{i+1})+$$
$$+(t_{i+4}-t)(t-t_{i+1})^2)N_{i+1,1}(t)+\big((t-t_i)(t_{i+3}-t)^2+$$
$$+(t_{i+4}-t)(t-t_{i+1})(t_{i+3}-t)+(t_{i+4}-t)^2(t-t_{i+2}))N_{i+2,1}(t)+$$
$$+(t_{i+4}-t)^3N_{i+3,1}(t)\big), \quad i=0, \mp 1, \ldots$$

Teraz zajmiemy się konstrukcją rozkładu jedności. Do danego podziału odcinka $[0, 2\pi]$ dołączamy następujące punkty węzłowe $t_{-3} < t_{-2} < t_{-1}$ oraz $t_{n+3} > t_{n+2} > t_{n+1}$. Na układzie węzłów $t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < \ldots < t_n < t_{n+1} \leq t_{n+2} < t_{n+3}$ budujemy funkcje bazowe sklejane według wzoru (5).

Łatwo sprawdzić (zob. [6], [10]), że zachodzi zależność

$$\sum_{i=-3}^{n-1} N_{i4}(t) = 1 \quad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Układ $\{N_{i4}(t)\}_{i=-3}^{n-1}$ stanowi rozkład jedności na odcinku $[0, 2\pi]$. Zauważmy (zob. wzór (5)), że ostatnią sumę można zapisać w postaci

$$\sum_{i=-3}^{n-1} N_{i4}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} W_{i4}(t)N_{i1}(t) \quad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi],$$

gdzie

$$W_{i4}(t) = \frac{1}{6h^3}\big((t_{i+1}-t)^3+(t-t_{i-2})(t_{i+1}-t)^2+(t_{i+2}-t)(t-t_{i-1})(t_{i+1}-t)+$$
$$+(t-t_{i-1})^2(t_{i+1}-t)+(t_{i+2}-t)^2(t-t_i)+$$
$$+(t-t_{i-1})(t_{i+2}-t)(t-t_i)+(t_{i+3}-t)(t-t_i)^2+(t-t_i)^3\big).$$

Przyjmiemy oznaczenia

$$e_{i4}(t) = W_{i4}(t)N_{i1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aproksymacja rozwiązania równania całkowego. Dalsze rozważania ograniczymy do zagadnienia wewnętrznego Dirichleta ($\lambda = -1$).

Niech

$$K_1 f(s) = \int_C K(s, t)f(t)dt;$$

równanie (1) przyjmie postać

$$f(s)+K_1 f(s) = \varphi(s). \tag{6}$$

Rozważmy równanie

$$f_\delta + K_{1\delta} f_\delta = \varphi, \tag{7}$$

którego rozwiązanie dokładne f_δ będziemy traktować jako rozwiązanie przybliżone dla równania (6), przy czym $K_{1\delta} = K_1 T_\delta$, a T_δ jest określone wzorem

$$T_\delta f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)e_{i4}(t). \tag{8}$$

Podstawiając (8) do (7) otrzymujemy

$$f_\delta(s) + \sum_{i=0}^{n-1} f_\delta(t_i) K_1 e_{i4}(s) = \varphi(s). \tag{9}$$

Współczynniki $f_\delta(t_i)$ obliczamy z układu równań liniowych

$$f_\delta(t_l) + \sum_{i=0}^{n-1} f_\delta(t_i) K_1 e_{i4}(t_l) = \varphi(t_l), \tag{10}$$

który wynika z (9) dla $s = s_l = t_l$, $l = 0, 1, \ldots, n-1$.

Oszacowanie błędu metody podamy korzystając z następującego pojęcia doskonałości rozkładu jedności (zob. [3]).

DEFINICJA. *Doskonałością rozkładu jedności* $Z = \{e_i\}$ nazywamy liczbę

$$\eta(Z) = \sup\big(d(\operatorname{supp} e_i)\colon\ e_i \in Z\big),$$

gdzie $d(\operatorname{supp} e_i) = \sup(|t_1 - t_2|\colon\ t_1, t_2 \in \operatorname{supp} e_i)$.

W naszym rozkładzie $\eta(Z) = h$. Przez $C[a, b]$ oznaczamy przestrzeń funkcji ciągłych określonych na odcinku $[a, b]$.

Niech

$$\begin{aligned} \omega(f, \delta) &:= \sup\big(|f(t_1) - f(t_2)|\colon\ t_1, t_2 \in [a, b],\ |t_1 - t_2| < \delta\big), \\ \omega(K_1, \delta) &:= \sup\big(\omega(K_1 f, \delta)\colon f \in C[a, b],\ \|f\| \leqslant 1\big); \end{aligned} \tag{11}$$

jeżeli K_1 jest operatorem ciągłym na $C[a, b]$, to $\omega(K_1, \cdot)$ jest funkcją nieujemną, niemalejącą, ograniczoną na $[0, \infty)$ i zachodzi:

$$\omega(K_1, \delta) \underset{\delta \to 0}{\to} 0, \qquad \omega(K_1 f, \delta) \leqslant \|f\| \omega(K_1, \delta).$$

Dla funkcji $T_\delta f$ określonej przez (8) zachodzą oszacowania:

$$\|T_\delta\| \leqslant 1, \qquad \|T_\delta f - f\| \leqslant \omega(f, \delta).$$

Teraz podamy za Jörgensem (zob. [3]) twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu (10) oraz oszacowanie błędu.

TWIERDZENIE 2. *Niech dany będzie przedział* $[a, b]$ *i określony na nim rozkład jedności* $Z = \{e_{i4}(t)\}_{i=0}^{n-1}$ *taki, że* $\eta(Z) \leqslant \delta$, $t_i \in \operatorname{supp} e_{i4}(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, K_1 *operator ciągły na* $C[a, b]$ *i* $\omega(K_1, \cdot)$ *funkcja zdefiniowana w* (11). *Jeżeli dla każdej funkcji* $\varphi \in C[a, b]$

$$\omega(K_1, \delta)\|R(K_1)K_1\| \leqslant 1, \qquad R(K_1) \text{ rezolwenta operatora } K_1,$$

to układ (10) *ma jednoznaczne rozwiązanie.*

Dla funkcji f_δ *i* $f = R(K_1)\varphi$ *będącej rozwiązaniem zagadnienia* (6) *zachodzi oszacowanie*:

$$\|f_\delta - f\| \leqslant \frac{\|R(K_1)K_1\|\big(\omega(\varphi, \delta) + \|R(K_1)\varphi\|\omega(K_1, \delta)\big)}{1 - \|R(K_1)K_1\|\omega(K_1, \delta)}.$$

Dowód twierdzenia można znaleźć w pracy [3], str. 117.

Wprowadźmy parametryzację krzywej C równaniami:

$$C\colon\ x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ r = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{12}$$

Jądro $K(s, t)$ przedstawimy wzorem (zob. [8], str. 82)

$$K(s, t) = \frac{(y(s)-y(t))x'(t)-(x(s)-x(t))y'(t)}{\pi\left((x(s)-x(t))^2+(y(s)-y(t))^2\right)}; \tag{13}$$

wykorzystując (12) mamy

$$K(s, t) = \frac{-(\sin s-\sin t)\sin t-(\cos s-\cos t)\cos t}{\pi\left((\cos s-\cos t)^2+(\sin s-\sin t)^2\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{s+t}{2}\cos t-\cos\frac{s+t}{2}\sin t}{2\pi\sin\frac{s-t}{2}} = \frac{\sin\frac{s-t}{2}}{2\pi\sin\frac{s-t}{2}} = \frac{1}{2\pi}.$$

Obliczymy obecnie wartość wyrażenia

$$K_1 e_{i4}(s) = \int_C K(s, t)e_{i4}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}e_{i4}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e_{i4}(t)\,dt = \frac{h}{2\pi}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Możemy teraz układ równań algebraicznych (10) zapisać w postaci

$$\mathbf{H}F = \Phi,$$

gdzie

$$F = (\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{n-1})^T \tilde{f}_k = f_\delta(t_k), \qquad \Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})^T \varphi_k = \varphi(t_k),$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1+\frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} & \cdots & \frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} \\ \frac{h}{2\pi} & 1+\frac{h}{2\pi} & \cdots & \frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} & \cdots & 1+\frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} \\ \frac{h}{2\pi} & \frac{h}{2\pi} & \cdots & \frac{h}{2\pi} & 1+\frac{h}{2\pi} \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznacznik macierzy $\mathbf{H}$ (zob. [5], str. 53, zad. 10a)

$$\det\mathbf{H} = 1+\frac{nh}{2\pi} = 2,$$

uwzględniliśmy, że $nh = 2\pi$.

Teraz znajdziemy macierz odwrotną $\mathbf{H}^{-1}$ (zob. [5], str. 53 zad. 10b oraz [7], str. 46–47) oraz jej normę.

$$H_{ik}^{-1} = \begin{cases} 1-\dfrac{h}{2\pi} & \text{dla } i = k, \\ -\dfrac{h}{4\pi} & \text{dla } i \neq k, \end{cases} \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$(14) \qquad ||H^{-1}|| = \sup_i \sum_{k=0}^{n-1} |H_{ik}^{-1}| = \left|1-\frac{h}{4\pi}\right| + (n-1)\left|\frac{-h}{4\pi}\right| \leqslant 1+\frac{nh}{4\pi} = \frac{3}{2}.$$

Obliczymy normę operatora K_1.

$$||K_1|| := \sup_{\substack{f\in D(K_1)\\ f\neq 0}} \frac{||K_1 f||}{||f||} = \sup_{||f||=1} ||K_1 f|| = \sup_{||f||=1} \int_C \int_C K(s,t) f(t)\, dtds =$$

$$= \sup_{||f||=1} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} f(t)\, dtds \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} dtds = 2\pi,$$

przez $D(K_1)$ rozumiemy dziedzinę operatora K_1.

Dalej zauważmy, że

$$\omega(K_1 f, \delta) = \sup\{|K_1 f(s_1) - K_1 f(s_2)| : s_1, s_2 \in [0, 2\pi],\ |s_1 - s_2| < \delta\},$$

$$|K_1 f(s_1) - K_1 f(s_2)| = \left| \int_C K(s_1, t) f(t)\, dt - \int_C K(s_2, t) f(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_C |K(s_1, t) - K(s_2, t)|\ |f(t)|\, dt = 0;$$

stąd

$$(15) \qquad \omega(K_1 f, \delta) = 0, \quad \omega(K_1, \delta) = 0.$$

Z twierdzenia 2 wynika istnienie i jednoznaczność rozwiązania układu (10), bo

$$\omega(K_1, \delta)||R(K_1)K_1|| = 0.$$

Zatem założenia twierdzenia 2 są spełnione i wobec tego możemy napisać oszacowanie błędu

$$||f - f_\delta|| \leqslant \tfrac{3}{2}\omega(\varphi, \delta) \quad \text{dla} \quad h \leqslant \delta,$$

gdzie $\omega(\varphi, \delta)$ moduł ciągłości funkcji φ ze stałą δ.

Prace cytowane

[1] M. C. Cox, J. Inst. Math. Appl. 21 (1978), str. 135–143.

[2] B. Curry and I. L. Schoenberg, *The fundamental spline functions and their limits*, L'Analyse Mathematique, Vol. XVII, 1966.

[3] K. Jörgens, *Lineare Integraloperatoren*, Stuttgard 1970.
[4] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, PWN, Warszawa 1957.
[5] P. Lankaster, *Teorija matric*, Moskwa 1978.
[6] M. Marsden and I. J. Schoenberg, *On variation diminishing spline approximation methods*, Mathematica 8(31)(1)(1966), str. 61–82.
[7] M. Parodi, *Lokalizacija charakteristiczeskich cziseł matric i ich primienienija*, Moskwa 1960.
[8] A. Piskorek, *Równania całkowe*, WNT, Warszawa 1971.
[9] P. M. Prenter, *Splines and variational methods.*
[10] I. J. Schoenberg, *On spline functions inequalities*, edited by Oved Shisna.