ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria III: MATEMATYKA STOSOWANA XIX (1982)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

M. DRYJA (Warszawa)

O efektywnych schematach różnicowych dla równania przewodnictwa cieplnego w dowolnych obszarach

(*Praca wpłynęła do Redakcji 7.06.1979*)

W pracy rozpatrywane jest równanie przewodnictwa cieplnego w obszarze $\Omega \times [0, T]$ z warunkami początkowo-brzegowymi Dirichleta (jednorodnym), gdzie Ω jest dowolnym obszarem otwartym w R^2. Dla tego zagadnienia konstruuje się dwa schematy różnicowe Cranka–Nicolsona (C–N) i przemiennych kierunków (ADI) na siatce równomiernej z krokami h_i i τ po zmiennych x_i i t. Do aproksymacji warunków brzegowych wykorzystuje się wielomiany interpolacyjne liniowe. Udowodniona jest stabilność i zbieżność rozpatrywanych schematów z oszacowaniem błędów zbieżności, które wynoszą: $O(\tau^2+h^{3/2})$ w normie H_A, $H = L_h^2(\Omega_h)$ na każdej warstwie czasowej dla schematu C–N i $O(\tau^2+h\tau^{1/2}+h^{5/2}/\tau)$ w normie L_h^2 dla ADI (zob. twierdzenia 2 i 4), gdzie $h = \max\{h_1, h_2\}$.

Realizacja algorytmiczna rozpatrywanych schematów na maszynie cyfrowej jest prosta i tania. Koszt schematu ADI mierzony liczbą działań arytmetycznych jest proporcjonalny do liczby niewiadomych. Do rozwiązywania schematu C–N proponujemy wykorzystać tzw. algorytm George'a [1]. Koszt realizacji z tym algorytmem wynosi $O\left((\log 1/h)/(\tau h^2)+1/h^3\right)$ działań, a więc jest bliski optymalnemu, przy τ proporcjonalnym do h.

Konstrukcja rozpatrywanych w pracy schematów istotnie opiera się na aproksymacji różnicowej zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona w dowolnym obszarze. Temu problemowi poświęcono wiele prac. Wymienimy tylko te, które mają związek z naszą pracą. W pracy [2] przy aproksymacji warunków brzegowych wykorzystuje się siatkę nierównomierną i udowodniono zbieżność w $H_h^1(\Omega_h)$ (analogia różnicowa H^1) z błędem $O(h^{3/2})$. Przy aproksymacji warunku brzegowego na siatce równomiernej i przy wykorzystaniu tylko interpolacji liniowej w pracy [3] podane jest oszacowanie w L_h^2 z błędem $O(h^{1/2})$ (szczególny przypadek wyniku Kreissa). Dodajmy, że istotnym jest to, aby konstruowany schemat był schematem samosprzężonym.

Metoda ADI dla rozważanego zadania jest rozpatrywana w pracach [4], [5]. W pierwszej z nich udowodniona jest zbieżność w L_h^2 na warstwie z błędem $O(\tau+h^{3/2})$, ale aproksymacja rozumiana jest w sensie sumarycznym (zob. [6]), w drugiej zaś pracy tylko z błędem $O(\tau+h^{1/2})$.

Udowodnione twierdzenia pozostają prawdziwe dla schematów N–C i ADI aproksymujących ogólne równanie parabolicze bez mieszanej pochodnej.

1. Schemat Cranka–Nicolsona. Rozpatrujemy zagadnienie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t \in (0,T], \tag{1a}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1b}$$

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T], \tag{1c}$$

gdzie Ω jest obszarem ograniczonym w R^2 z brzegiem $\partial\Omega$. Dla uproszczenia rozważań będziemy dalej zakładać, że Ω jest obszarem jednospójnym.

Niech R_h^2 oznacza siatkę prostokątną na płaszczyźnie R^2 z krokami h_1 i h_2 po zmiennych odpowiednio x_1 i x_2. Za zbiór punktów siatkowych wewnętrznych Ω_h przyjmujemy $R_h^2 \cap \Omega$, a za Γ_h te punkty $x \in R_h^2$, które nie należą do Ω i w swoim otoczeniu $K_h(x) = \{x, T_i^{\pm}x, i = 1,2\}$ zawierają punkty należące do Ω. Tutaj i niżej $T_i^{\pm}$ są operatorami przesunięć postaci $T_i^{\pm}x = x \pm h_i e_i$, gdzie $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$.

Na odcinku $[0,T]$ konstruujemy siatkę

$$\omega_\tau = \{t = n\tau\colon n = 0, \ldots, N;\ N\tau = T\}.$$

Niżej będziemy używać ilorazy różnicowe postaci

$$\partial_i \bar{\partial}_i y(x) = \big(y(T_i^+x) - 2y(x) + y(T_i^-x)\big)/h_i^2,$$

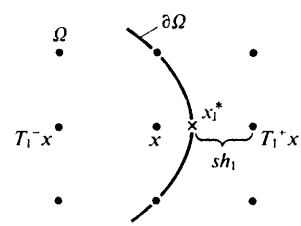
$$y_t^n(x) = \big(y^{n+1}(x) - y^n(x)\big)/\tau; \quad y^n(x) = y(x, n\tau).$$

Zagadnienie (1) na wyżej określonej siatce aproksymujemy schematem różnicowym Cranka–Nicolsona. Równanie (1a) oraz warunek początkowy (1b) aproksymujemy następująco

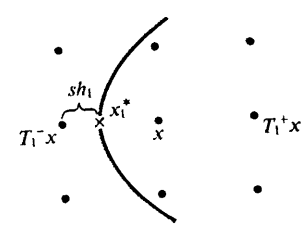
$$y_t^n(x) - \tfrac{1}{2}(\partial_1\bar{\partial}_1 + \partial_2\bar{\partial}_2)\big(y^{n+1}(x) + y^n(x)\big) = f^{n+0.5}(x), \quad x \in \Omega_h, \tag{2a}$$

$$y^0(x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega_h. \tag{2b}$$

Pozostaje napisać aproksymację warunku brzegowego (1c). Do tego celu wykorzystamy interpolację liniową. Niech x_i^* oznacza punkt przecięcia się prostej przechodzącej przez punkty x i T_i^+x z $\partial\Omega$ (zob. rys. 1)



Rys. 1



Rys. 2

Z wielomianu interpolacyjnego opartego na węzłach x i T_i^+x wynika już aproksymacja warunku brzegowego (1c)

$$(2c)\quad \left(\frac{x_i^*-x}{h_i}\right)\left(\frac{y^{n+1}(T_i^+x)+y^n(T_i^+x)}{2}\right)+\left(\frac{T_i^+x-x_i^*}{h_i}\right)\left(\frac{y^{n+1}(x)+y^n(x)}{2}\right)=0.$$

Równanie to odniesiemy do punktu brzegowego $T_i^+x\in\Gamma_h$. Zapiszemy je w innej postaci przyjmując, że $sh_i=|T_i^+x-x_i^*|$, gdzie $0\leqslant s<1$ (oznaczamy tym samym numerem)

$$(2c)\quad \frac{(1-s)}{2}\left(y^{n+1}(T_i^+x)+y^n(T_i^+x)\right)+\frac{s}{2}\left(y^{n+1}(x)+y^n(x)\right)=0.$$

Analogicznie konstruujemy aproksymację warunku brzegowego w przypadku, gdy $x\in\Omega_h$, a $T_i^-x\notin\Omega_h$ (zob. rys. 2).

Schemat różnicowy (2) jest poszukiwaną aproksymacją dla zagadnienia (1). Można wykazać, że błąd lokalnej aproksymacji tego schematu wynosi $O(\tau^2+h^2)$, gdzie $h=\max\{h_1,h_2\}$ o ile rozwiązanie u jest odpowiednio regularne i daje przedłużyć się z zachowaniem regularności na pewien obszar $\tilde{\Omega}\supset\Omega$. Takie przedłużenie istnieje jeśli tylko brzeg $\partial\Omega$ obszaru Ω jest odpowiednio regularny.

Przechodzimy do badania stabilności schematu (2) metodą nierówności energetycznych (zob. np. [6]). W tym celu zadanie (2) zapiszemy jako równanie operatorowe. Niech $L_h^2(\Omega_h)$ oznacza przestrzeń Hilberta funkcji siatkowych określonych w Ω_h z następującym iloczynem skalarnym i normą

$$(u,v)_h=h_1h_2\sum_{x\in\Omega_h}u(x)v(x);\qquad ||u||_h^2=(u,u)_h.$$

Wprowadzimy operator A przekształcający $L_h^2(\Omega_h)$ na $L_h^2(\Omega_h)$ postaci

$$A=\Lambda+C,$$

gdzie $\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2$, $C=C_1+C_2$,

$$(3)\quad (\Lambda_i y)(x)=-\partial_i\bar{\partial}_i y(x),\qquad x\in\Omega_h\quad\text{dla}\quad y(x)=0,\ x\in\Gamma_h,$$

$$(4)\quad (C_i y)(x)=\begin{cases}0\cdot y(x) & \text{dla}\quad x\in\Omega_h\quad\text{jeśli } T_i^+x\in\Omega_h \text{ i } T_i^-x\in\Omega_h,\\ \dfrac{1}{h_i^2}\dfrac{s(x)}{(1-s(x))}y(x) & \text{dla pozostałych } \Omega_h.\end{cases}$$

Postać operatorowa schematu (2) w przestrzeni $L_h^2(\Omega_h)$ jest następująca:

$$(5a)\quad y_t^n+A\left(\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\right)=f^{n+0.5},\qquad n=0,\ldots,N-1,$$

$$(5b)\quad y^0=\varphi,$$

gdzie $\varphi, y^n, f^n\in L_h^2(\Omega_n)$.

Operator $A=\Lambda+C$ otrzymujemy w wyniku eliminacji z równania (2a) wartości $y^n(x)$ dla $x\in\Gamma_h$ na podstawie warunku brzegowego (2c).

LEMAT 1. *Operator* A: $L_h^2\to L_h^2$ *jest samosprzężony i dodatnio określony*:

$$A=A^*>\delta E,$$

gdzie δ *jest stałą dodatnią zależną tylko od średnicy* Ω.

Samosprzężoność i nieujemność C_i jest oczywista ($0 \leqslant s < 1$), $A = A_1 + A_2$ jest aproksymacją różnicową 5-punktową laplasjanu, która jak wiadomo określa w L_h^2 operator samosprzężony i dodatnio określony (zob. np. [6]). Podamy teraz twierdzenie o stabilności schematu (2). Niech H_A, $H = L_h^2(\Omega_h)$, oznacza przestrzeń energetyczną generowaną przez operator A z następującym iloczynem skalarnym i normą

$$(u, v)_A = (Au, v)_h, \quad ||u||_A^2 = (Au, u)_h.$$

TWIERDZENIE 1. *Rozwiązania schematu* (5) *spełniają następującą nierówność*

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} ||y^n||_A^2 \leqslant M \sum_{n=0}^{N-1} ||f^{n+0.5}||^2 + ||y^0||_A^2,$$

gdzie M jest stałą dodatnią, która nie zależy od h i τ.

Dowód tego twierdzenia wynika z ogólnego twierdzenia zawartego w [6], str. 371, dlatego pomijamy go tutaj.

Przechodzimy do ustalenia szybkości zbieżności rozpatrywanego schematu. Tutaj nie możemy skorzystać bezpośrednio z twierdzenia Laxa, które głosi, że ze stabilności i aproksymacji wynika zbieżność, bowiem stabilność zbadaliśmy tylko względem prawej strony równania, a aproksymacja warunku brzegowego nie jest dokładna. W takiej sytuacji zwykle zbieżność bada się bezpośrednio wypisując schemat (2) dla błędu $z^n = y^n - u^n$ z prawą stroną równą błędowi aproksymacji lokalnej, gdzie y^n jest rozwiązaniem (2), a u^n — zadania (1). Następnie schemat zapisuje się w postaci operatorowej (5) i korzysta się z twierdzenia 1. Postępowanie takie w naszej sytuacji prowadzi do obniżenia rzędu zbieżności, a mianowicie do tego, że $||z^n||_A = O(\tau^2 + h^{1/2})$. Niżej pokażemy, wykorzystując specyfikę zadania, że $||z^n||_A = O(\tau^2 + h^{3/2})$.

TWIERDZENIE 2. *Jeśli funkcje* $\partial^5 u/\partial t \partial x_i^4$, $\partial^3 u/\partial t^3$, $i = 1, 2$, *są ograniczone w* $\bar{\Omega} \times [0, T]$, *to*

$$\max_n ||y^n - u^n||_A \leqslant M(\tau^2 + h^{3/2}), \tag{6}$$

gdzie u^n *i* y^n *są rozwiązaniami zadań odpowiednio* (1) *i* (2), *M zaś jest stałą dodatnią, która nie zależy od* τ *i* h, $h = \max\{h_1, h_2\}$.

Dowód. Podstawiając $y^n = z^n - u^n$ do (5) otrzymujemy równanie dla błędu

$$z_t^n + A\left(\frac{z^{n+1} + z^n}{2}\right) = F_0^n + F_1^n + F_2^n, \tag{7a}$$

$$z^0 = 0, \tag{7b}$$

gdzie

$$(F_0^n)(x) = f^{n+0.5}(x) - u_t^n - (\partial_1 \bar{\partial}_1 + \partial_2 \bar{\partial}_2)\left(\frac{u^{n+1}(x) + u^n(x)}{2}\right),$$

$$(F_i^n)(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1 - s(x))h_i^2}\left((1 - s(x))(u^{n+1} + u^n)(T_i^{\pm} x) + s(x)(u^{n+1} + u^n)(x)\right)/2 \\ \qquad \text{dla } x \in \Omega_h \text{ i jeśli } T_i^{+} x \notin \Omega_h \text{ lub } T_i^{-} x \notin \Omega_h, \\ 0 \quad \text{dla pozostałych } x \in \Omega_h. \end{cases}$$

Z postaci F_0^n widać, że $||F_0^n||_h = O(\tau^2+h^2)$. Zauważmy dalej, że F_i^n możemy przedstawić w postaci $F_i^n = C_i\tilde{F}_i^n$, przy czym

$$(8)\qquad ||\tilde{F}_i^n||_h = O(h^{5/2}),\quad ||C_i^{1/2}\tilde{F}_i^n||_h = O(h^{3/2}),\quad ||C_i^{1/2}\tilde{F}_{it}^n||_h = O(h^{3/2}).$$

Oszacowania te sprawdzamy bezpośrednio rozwijając w szereg Taylora funkcje $u^n(x)$ i $u^{n+1}(x)$ względem punktu x_i^* (zob. rys. 1 i 2) i uwzględniając, że F_i^n jest różna od zera tylko w punktach przybrzegowych, których liczba jest rzędu $1/h$ (zakładamy, że h_1 i h_2 są wielkościami tego samego rzędu).

Równanie (7a) mnożymy skalarnie w L_h^2 przez $2\tau z_t^n$, a następnie sumujemy po n od 0 do $k-1$. Daje to wyrażenie postaci (indeks h opuszczamy)

$$(9)\qquad \tau\sum_{n=0}^{k-1}\Big(2||z_t^n||^2+\big(A(z^{n+1}+z^n),z_t^n\big)\Big) = 2\tau\sum_{n=0}^{k-1}\big((F_0^n,z_t^n)+(F_1^n,z_t^n)+(F_2,z_t^n)\big).$$

Przekształcimy składniki tego równania. Składnik drugi lewej strony równania (9), uwzględniając, że $A = A^* > 0$ (zob. lemat 1), przyjmuje postać

$$(10)\qquad \sum_{n=0}^{k-1}\big(A(z^{n+1}+z^n),z_t^n\big) = (||z^k||_A^2-||z^0||_A^2).$$

Drugi i trzeci składnik prawej strony (9) przekształcimy w następujący sposób:

$$2\tau\sum_{n=0}^{k-1}(F_i^n,z_t^n) = 2\Big((F_i^{k-1},z^k)-(F_i^0,z^0)-\tau\sum_{n=0}^{k-2}(F_{it}^n,z^{n+1})\Big).$$

Uwzględniając fakt, że $F_i^n = C_i\tilde{F}_i^n$ oraz że $z^0 = 0$ i wykorzystując ε-nierówność $(2ab \leqslant a^2/\varepsilon+\varepsilon b^2,\ \varepsilon > 0)$, otrzymujemy

$$(11)\qquad 2\tau\sum_{n=0}^{k-1}(F_i^n,z_t^n) \leqslant \varepsilon_i\Big(||C_i^{1/2}z^k||^2+\tau\sum_{n=1}^{k-1}||C_i^{1/2}z^n||^2\Big)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_i}\Big(||C_i^{1/2}\tilde{F}_i^{k-1}||^2+\tau\sum_{n=0}^{k-2}||C_i^{1/2}\tilde{F}_{it}^n||^2\Big).$$

Podstawiając (10) i (11) do równania (9) i szacując pierwszy wyraz prawej strony (9) za pomocą ε-nierówności, mamy

$$(12)\qquad ||z^k||_A^2-\sum_{i=1}^{2}\varepsilon_i||C_i^{1/2}z^k||^2+2\tau(1-\varepsilon_0)\sum_{n=0}^{k-1}||z_t^n||^2 \leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{2}\Big(\frac{1}{\varepsilon_i}\Big(||C_i^{1/2}\tilde{F}_i^{k-1}||^2+\tau\sum_{n=0}^{k-2}||C_i^{1/2}\tilde{F}_{it}^n||^2\Big)+\varepsilon_i\tau\sum_{n=1}^{k-1}||C_i^{1/2}z^n||^2\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{k-1}||F_0^n||^2.$$

Zauważmy, że (zob. lemat 1)

$$||z^k||_A^2 \geqslant \sum_{i=1}^{2} ||C_i^{1/2} z||^2.$$

Uwzględniając powyższą nierówność, oszacowania (8) oraz przyjmując $\varepsilon_i = 0.5$ dla $i = 0, 1, 2$, i wykorzystując nierówność Gronwalla (zob. np. [6]) z nierówności (12) otrzymujemy oszacowanie (6), co należało wykazać.

U w a g a. Oszacowanie z^n w normie $||\cdot||_A$ implikuje oszacowania w normie L_h^2 funkcji z^n i jej ilorazów różnicowych pierwszego rzędu.

Przy rozwiązywaniu schematu (5) proponujemy wykorzystać algorytm George'a [1]. Według tego algorytmu dokonujemy faktoryzacji macierzy $\mathbf{E}+\mathbf{A}$, $\mathbf{E}+\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, gdzie $\mathbf{L}$ jest macierzą trójkątną dolną. Rozkład ten należy zapamiętać i wykorzystywać przy rozwiązywaniu (5) dla każdego $n = 1, \ldots, N$. Koszt takiego postępowania wynosi $O\left(\left(\log\frac{1}{h}\right)/(\tau h^2) + 1/h^3\right)$ działań arytmetycznych i jest bliski minimalnemu co do rzędu, jeśli założyć, że τ jest proporcjonalne do h.

2. Schemat przemiennych kierunków. Przechodzimy do przedstawienia schematu różnicowego dla zadania (1), którego koszt jest proporcjonalny do liczby niewiadomych. Będzie to schemat przemiennych kierunków (ADI), który zapisany jako równanie operatorowe w przestrzeni L_h^2 ma postać

$$(E+0.5\tau A_1)(E+0.5\tau A_2)y^{n+1} = (E-0.5\tau A_1)(E-0.5\tau A_2)y^n + \tau f^{n+0.5}, \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{13a}$$

$$y^0 = \varphi, \tag{13b}$$

gdzie $A = A_1 + A_2$, $A_i = \Lambda_i + C_i$ (zob. wzory (3) i (4)), a E jest operatorem tożsamościowym.

Realizacja algorytmiczna tego schematu przy każdym ustalonym n sprowadza się do rozwiązania dwóch zadań

$$(E+0.5\tau A_1)v^{n+1} = F^n,$$
$$(E+0.5\tau A_2)y^{n+1} = v^{n+1}.$$

Każde z tych dwóch zadań sprowadza się do rozwiązywania układów równań z macierzami trójdiagonalnymi. Liczba tych układów będzie równa odpowiednio liczbie warstw po zmiennych x_2 i x_1.

Stabilność schematu (13) wynika z następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 3. *Rozwiązania schematu* (13) *dla* $n = 1, 2, \ldots, N$ *spełniają następującą nierówność*

$$||A_2^+ y^n||_h \leqslant ||A_2^+ y^0||_h + \tau \sum_{k=0}^{n-1} ||(A_1^+)^{-1} f^{k+0.5}||_h, \tag{14}$$

gdzie $A_i^+ = E + 0.5\tau A_i$.

D o w ó d. Przepiszemy schemat (13) w postaci

$$A_2^+ y^{n+1} = (A_1^+)^{-1} A_1^- A_2^- y^n + \tau (A_1^+)^{-1} f^{n+0.5},$$

gdzie $A_i^- = E - 0.5\tau A_i$.

Stąd (h opuszczamy)

$$||A_2^+ y^{n+1}|| \leqslant ||(A_1^+)^{-1} A_1^-|| \, ||A_2^- (A_2^+)^{-1}|| \, ||A_2^+ y^n|| + \tau ||(A_1^+)^{-1} f^{n+0.5}||.$$

Łatwo jest sprawdzić, że $(A_1^+)^{-1} A_1^- = A_1^- (A_1^+)^{-1}$.

Ponieważ $A_i > 0$, wychodząc z definicji normy wykazujemy, że

$$||A_i^- (A_i^+)^{-1}|| \leqslant 1.$$

Wykorzystując powyższe oszacowanie otrzymujemy nierówność

$$||A_2^+ y^{n+1}|| \leqslant ||A_2^+ y^n|| + \tau ||(A_1^+)^{-1} f^{n+0.5}||,$$

z której wynika oszacowanie (14).

Przechodzimy do wykazania szybkości zbieżności schematu (13).

TWIERDZENIE 4. *Jeśli spełnione są założenia twierdzenia* 2, *to*

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} ||y^n - u^n||_h \leqslant M(\tau^2 + h^2 + \tau h^{1/2} + h^{5/2}/\tau), \tag{15}$$

gdzie u^n i y^n są rozwiązaniami zadań odpowiednio (1) *i* (13), *M zaś jest dodatnią stałą, która nie zależy od τ i h.*

D o w ó d. Podstawiając $y^n = z^n - u^n$ do (13) otrzymujemy dla funkcji błędu z^n schemat, który po prostych przekształceniach przyjmuje postać

$$z_t^n + A\left(\frac{z^{n+1} + z^n}{2}\right) + \frac{\tau^2}{4} A_1 A_2 z_t^n = \sum_{i=0}^{3} F_i^n,$$

gdzie F_i^n dla $i = 0, 1, 2$ mają tę samą postać co i w dowodzie twierdzenia 2 (zob. str. 8), a $F_3^n = (\tau^2/4) A_1 A_2 u_t^n$.

Na podstawie twierdzenia 3 dla funkcji z^n mamy następujące oszacowanie (h opuszczamy):

$$||A_2^+ z^n|| \leqslant ||A_2^+ z^0|| + \tau \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{3} ||(A_1^+)^{-1} F_i^n||.$$

Pierwszy wyraz prawej strony jest równy zeru, bowiem $z^0 = 0$. Będziemy teraz szacować kolejno $||(A_1^+)^{-1} F_i^n||$ dla $i = 0, \ldots, 3$. Ponieważ $||(A_1^+)^{-1}|| \leqslant 1$, więc

$$||(A_1^+)^{-1} F_0^n|| \leqslant ||F_0^n|| \leqslant M(\tau^2 + h^2).$$

Rozpatrzymy teraz $||(A_1^+)^{-1} F_i^n||$ dla $i = 1, 2$. Funkcja F_i^n jest różna od zera tylko w punktach przybrzegowych $\Gamma_{ih} := \{x \in \Omega_h : T_i^+ x \notin \Omega_h \text{ lub } T_i^- x \notin \Omega_h\}$. W przestrzeni $L_h^2(\Gamma_{ih})$ operatory A_1^+ i C_i są przemienne — macierze odpowiadające tym operatorom są diagonalne. Uwzględniając te fakty oraz to, że $F_i^n = C_i \tilde{F}_i^n$ (zob. dowód twierdzenia 2, str. 8) mamy (w przestrzeni $L_h^2(\Gamma_{ih})$)

$$||(A_1^+)^{-1} F_i^n|| \leqslant ||(A_1^+)^{-1} C_i \tilde{F}_i^n|| \leqslant \frac{2}{\tau} ||\tilde{F}_i^n||.$$

Ponieważ $\tilde{F}_i^n = O(h^2)$ dla $x \in \Gamma_{ih}$, a liczba punktów zbioru Γ_{ih} jest rzędu $1/h$, to

$$||(A_1^+)^{-1}F_i^n|| \leqslant M(h^{5/2}/\tau), \quad i = 1, 2.$$

Pozostaje oszacować $||(A_1^+)^{-1}F_3^n||$. Oznaczmy $v = A_2 u_t^n$, i zauważmy, że $v(x) = O(1)$ dla $x \in \Omega_h$. Niech $\Omega_h = \tilde{\Omega}_h \cup \Gamma_{1h}$, gdzie Γ_{1h} jest określone wyżej i przedstawmy $w = A_1 v \equiv A_1 A_2 u_t^n$ w postaci $w = w_0 + w_1$, gdzie

$$w_0 = \begin{cases} w, & x \in \tilde{\Omega}_h, \\ 0, & x \in \Gamma_{1h}; \end{cases} \qquad w_1 = \begin{cases} 0, & x \in \tilde{\Omega}_h, \\ w, & x \in \Gamma_{1h}. \end{cases}$$

Mamy więc

$$||(A_1^+)^{-1}w|| \leqslant ||(A_1^+)^{-1}w_0|| + ||(A_1^+)^{-1}w_1||.$$

Ponieważ $||(A_1^+)^{-1}|| \leqslant 1$ i $w_0 = O(1)$, więc

$$||(A_1^+)^{-1}w_0|| \leqslant ||w_0|| \leqslant M. \tag{15}$$

Oszacujemy wyraz $||(A_1^+)^{-1}w_1||$. W tym celu wprowadźmy następujące funkcje

$$g_0(x) = \begin{cases} v(x), & x \in \Gamma_{1h}, \\ 0, & x \in \tilde{\Omega}_h; \end{cases}$$

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Gamma_{1h}, \\ v(x), & x \in \tilde{\Omega}_h \text{ jeśli } T_1^+ x \in \Gamma_{1h} \text{ lub } T_1^- x \in \Gamma_{1h}, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Zauważmy, że $w_1(x)$ dla $x \in \Gamma_{1h}$ ma postać

$$w_1(x) = (A_1 v)(x) = (\Lambda_1 v)(x) + (C_1 v)(x).$$

Stąd widać, że funkcja w_1 daje się zapisać w postaci

$$w_1(x) = \frac{2g_0(x)}{h_1^2} - \frac{g_1(x)}{h_1^2} + C_1 v(x) = \Lambda_1 g_0(x) - \tfrac{1}{2}\Lambda_1 g_1(x) + C_1 v(x).$$

Z powyższego przedstawienia, uwzględniając, po pierwsze, że $\frac{1}{2}\tau||(A_1^+)^{-1}\Lambda_1|| \leqslant 1$ i $\frac{1}{2}\tau||(A_1^+)^{-1}C_1|| \leqslant 1$, po drugie, że liczba punktów przybrzegowych jest rzędu $1/h$ i $v(x) = O(1)$, otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$||(A_1^+)^{-1}w_1|| \leqslant M\frac{h^{1/2}}{\tau}.$$

Z tego oszacowania i (15) wynika, że

$$||(A_1^+)^{-1}F_3^n|| \leqslant M(\tau^2 + \tau h^{1/2}),$$

co kończy dowód twierdzenia 4.

U w a g i. 1. Sformułowane wyżej twierdzenia są również prawdziwe dla schematów Cranka–Nicolsona i przemiennych kierunków aproksymujących równanie paraboliczne z ogólnym operatorem eliptycznym nie zawierającym mieszanej pochodnej, przy czym operator ten nie musi być zapisany w postaci samosprzężonej (zob. [5]).

2. Założenia w twierdzeniach 2 i 4 o regularności rozwiązania mogą być osłabione, np. wymaganie, że $\partial^5 u/\partial t \partial x_i^4 \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ można zastąpić następującym $\partial u/\partial t \in H^4(\Omega)$ dla każdego $t \in [0, T]$, gdzie H^4 jest przestrzenią Soboleva. Dowodzi się tego na innej drodze niż wyżej, z wykorzystaniem lematu Brambla–Hilberta (zob. [7]).

3. Do aproksymacji warunku Dirichleta możemy wykorzystać wielomian interpolacyjny oparty na trzech punktach $T_i^- x, x, T_i^+ x$ (zob. rys. 1), co podnosi rząd lokalnej aproksymacji o jeden względem h. Schematy różnicowe rozpatrywane wyżej z taką aproksymacją warunku brzegowego są stabilne i zbieżne, przy czym oszacowania błędu są o jeden rząd (względem h) wyższe od zawartych w twierdzeniach 2 i 4. Mankamentem tych schematów jest to, że nie są one samosprzężone.

Prace cytowane

[1] A. George, *Nested dissection of a regular finite element mesh*, SIAM J. Numer. Anal. 13(1973), str. 345–363.

[2] А. А. Самарский, И. В. Фрязинов, *О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами*, ЖВМиМФ, 11,№ 2(1971), str. 384–410.

[3] V. Pereyra, W. Proskurowski, O. Widlund, *High order fast Laplace solvers for the Dirichlet problem on general regions*, Math. Comput. 31,137 (1977), str. 1–16.

[4] А. В. Гулин, И. В. Фрязинов, *О точности схем переменных направлений для уравнения теплопроводности в произвольной области*, Ж. Дифф. уравнения, XII, № 10 (1976), str. 1904–1916.

[5] М. Дрыя, *О схеме с расщепляющимся оператором для параболического уравнения в произвольной области*, University Annual—Applied Mathematics, t. XI, Book 2 (Conf. on Diff. Equat. and Application, Russian, 30 VI–4 VII 1975).

[6] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Из-во „Наука", Москва 1977.

[7] M. Dryja, *Capacitance matrix method for the difference parabolic problem*, Sprawozdanie Instytutu Informatyki, Uniw. Warsz., 73 (1978).