dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 18(1996)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Anna Żeromska
WSP Kraków

# Pewne zagadnienia dydaktyczne związane z nauką o indukcji matematycznej

W Programie liceum ogólnokształcącego oraz liceum zawodowego i technikum — Matematyka (MEN, 1990) jest uwzględniany dla klas drugich temat „Zasada indukcji matematycznej i przykłady jej stosowania", zaś w propozycjach tematów nadobowiązkowych dla klas czwartych są m. in. tematy: „Informacje o teoriach aksjomatycznych" oraz „Informacja o aksjomatyce Peano". Natomiast wyżej wymienione tematy nie są uwzględniane w Minimum programowym obowiązującym od 1. IX. 1992r. (MEN, 1992). W podręcznikach zasada indukcji matematycznej jest formułowana w różny sposób (Ehrenfeucht, Stande, 1989)[1]. Można założyć, że każdy absolwent szkoły średniej spotyka się z tym tematem podczas nauczania szkolnego. Tymczasem wciąż obserwuje się wiele różnorodnych trudności, jakie mają uczniowie podczas rozwiązywania zadań dotyczących indukcji matematycznej. Zwracają na to uwagę m. in. (Krygowska, 1977) i (Nowecki, 1978).

Materiały analizowane w niniejszym artykule pochodzą z egzaminu pisemnego z matematyki przeprowadzonego w ramach egzaminu wstępnego dla kandydatów na studia dzienne na kierunek matematyka Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie 4 lipca 1994 roku. W zestawie zadań egzaminacyjnych znalazło się następujące zadanie:

[1] Zasada indukcji matematycznej może pełnić rolę aksjomatu, twierdzenia lub reguły wnioskowania (Grzegorczyk, 1983; Rasiowa, 1984). Może być zastąpiona „zasadą minimum" (Krygowska, 1977; Semadeni, 1973)

**Zadanie E**

*Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ zachodzi nierówność:*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{13}{24}$$

Poczynione, na tle analizy pisemnych rozwiązań tego zadania, wnioski uzupełniono jeszcze i poparto obserwacjami prowadzonymi podczas ćwiczeń z przedmiotu „Wstęp do matematyki" na I roku studiów matematycznych, a także obserwacjami z pojedynczych lekcji w szkole średniej (L. O. w Hrubieszowie, X Liceum Ogólnokształcące w Krakowie, VIII Liceum Ogólnokształcące w Krakowie, VI Liceum Ogólnokształcące w Krakowie).

Wspomniane obserwacje skłaniają do refleksji i podjęcia próby odpowiedzi na następujące pytania:

- Gdzie tkwią główne przyczyny trudności w intuicyjnym i operatywnym opanowaniu treści zasady indukcji matematycznej i w jej stosowaniu?
- Jakie działania dydaktyczne przedsięwziąć, aby maksymalnie te trudności złagodzić lub je wyeliminować?

Odpowiedzi na te pytania są trudne i wymagają zapewne głębszych badań niż te, których wyniki przedstawione zostaną poniżej.

Problemy, jakie mają uczniowie zapoznając się z indukcją matematyczną, można podzielić na dwie grupy:

1) trudności w przyswojeniu treści zasady indukcji matematycznej;

2) trudności w poprawnym stosowaniu jej w zadaniach.

Wspomniane typy trudności różnią się w sposób zasadniczy i łagodzenie ich wymaga od nauczyciela innych zabiegów dydaktycznych. Można zastanawiać się, którego rodzaju trudności występują częściej i które łatwiej jest eliminować. Na podstawie poczynionych obserwacji (podczas lekcji szkolnych i zajęć ze studentami I roku) można stwierdzić, że jeśli zasada indukcji matematycznej zostaje przez ucznia prawidłowo zrozumiana (m. in. potrafi on ją poprawnie sformułować w języku potocznym, przetransponować na język formalny, widzi zasadność spełnienia przez dane twierdzenie obu członów koniunkcji występującej w założeniu zasady indukcji, „czuje", co oznacza prawo przekazywania itd.) wówczas trudności typu 2) występują tylko w znikomym stopniu. Pojawiają się wtedy jedynie „techniczne" problemy przy udowadnianiu implikacji

„indukcyjnej" (prawa przekazywania)[2]. Rozwiązywanie potem dużej liczby zadań na ten temat staje się mało kształcące. Student mówi np. „Po co rozwiązywać dalej te zadania? Po zrobieniu kilku to robi się nudne!"[3]. Można więc z dużym prawdopodobieństwem przypuścić, że jeśli zapobiegnie się trudnościom typu 1), wówczas w niewielkim tylko stopniu pojawią się trudności rodzaju 2). Jeśli natomiast analizuje się czas, jaki nauczyciele poświęcali na wprowadzenie zasady indukcji podczas obserwowanych lekcji, widać, iż niewiele czasu przeznaczono na fazę intuicyjnej „obróbki" tego ogromnie trudnego dla uczniów twierdzenia. Po krótkiej ilustracji istoty indukcji matematycznej na przykładzie odpowiednio ustawionych kostek domina (Ehrenfeucht, Stande, 1989), czy ciągu stacji telegraficznych (Krygowska, 1977) następowała częściowa formalizcja twierdzenia podana w postaci gotowego schematu do stosowania (z podanym wyraźnie sposobem zapisu, który potem niektórzy uczniowie odtwarzali bez zrozumienia) (Ehrenfeucht, Stande, 1989). Po takim krótkim wprowadzeniu rozwiązywany jest w klasie ciąg zadań — dowodów twierdzeń dotyczących liczb naturalnych — w gruncie rzeczy niewiele różniących się od siebie. Rozwiązywanie ich dla uczniów, którzy prawidłowo rozumieją temat, istotnie staje się nudne, natomiast dla innych jest to powtarzanie niezrozumiałego schematu[4]. Obserwacje efektów tych zajęć w postaci np. prób samodzielnego przeprowadzania dowodów indukcyjnych w nietypowych przykładach[5] pokazują, że taka krótka ilustracja zasady indukcji (w opisany wcześniej sposób) często nie wystarcza, a formalizacja następuje zbyt szybko.

Poczynione obserwacje wyraźnie pokazują, jak ważna w procesie wprowadzania rozważanego tematu w klasie jest faza intuicyjnego wglądu w sens

[2]Przez implikację „indukcyjną" (lub prawo przekazywania) rozumiemy drugi człon koniunkcji występującej w założeniu zasady indukcji matematycznej, tzn. wyrażenie postaci: $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$, gdzie $T$ jest rozważanym twierdzeniem o liczbach naturalnych. Podobnie przez fakt początkowy rozumiemy zachodzenie twierdzenia $T$ dla pewnej ustalonej liczby naturalnej.

[3]Mowa jest o studencie I roku, którego stopień intuicyjnego pojmowania rozważanego twierdzenia można było uznać w danym momencie za wystarczający (potrafił m. in. swobodnie formułować zasadę indukcji matematycznej w języku potocznym, a potem go przetransponować na język symboli matematycznych). Formułowanie danego twierdzenia czy definicji w języku potocznym może stanowić dobre kryterium pozwalające ocenić stopień poprawności intuicyjnego ujmowania tego pojęcia (Thom, 1974).

[4]Głęboki sens ma rozwiązywanie zadań pokazujących istotność obu członów koniunkcji, występujących w założeniu indukcyjnym (czyli takich, w których twierdzenie o liczbach naturalnych jest fałszywe, ponieważ nie są spełnione oba naraz warunki indukcyjne) (Krygowska, 1977). Np. "Każda liczba naturalna równa jest następnej po sobie liczbie naturalnej" — łatwo pokazać, że zachodzi prawo przekazywania, natomiast nie zachodzi fakt początkowy.

[5]Chodzi tu o zadania, których rozwiązania formułować trzeba w postaci słowno-symbolicznej (nie da się do nich zastosować schematycznego zapisu); np. zadanie o kolorowaniu dwoma barwami płaszczyzny poprzecinanej dowolnymi prostymi.

twierdzenia. Jeśli uczeń odpowiednio poprawnie ujmuje dane twierdzenie w sposób intuicyjny, obrazowy, wówczas szybciej włącza je do systemu swojej wiedzy, a przez to łatwiej może je potem wykorzystywać w dalszej działalności matematycznej. A. Z. Krygowska podkreśla ten fakt w „Zarysie dydaktyki matematyki" (Krygowska, 1977), nazywając go „subiektywnie operatywnym ujmowaniem przez ucznia definicji i twierdzeń". Sprzyjać temu może to, co autorka nazywa ujmowaniem przez ucznia danego twierdzenia „jednym chwytem myśli" (Krygowska, 1977).

Kiedy możemy wnioskować, że uczeń w sposób subiektywnie operatywny rozumie twierdzenie czy definicję? Nie pretendując do pełnej odpowiedzi na to pytanie, można rozważyć niektóre elementy rozumienia definicji lub twierdzenia, które pozwalają stosować je w działaniu, czyli przy wykonywaniu operacji. W praktyce szkolnej znaczy to przede wszystkim, że uczeń osobiście potrafi wykonywać operacje, które dyktuje mu dane twierdzenie czy definicja. Przystępuje do działania, gdyż **wie**, co należy zrobić, by sprawdzić dany warunek definicyjny lub założenia danego twierdzenia. Zamiast zastanawiać się „co to jest?" pyta „jak to zrobić?". Jest zatem dla niego intuicyjnie jasny zbiór warunków, które dany obiekt powinien spełniać, by można do niego stosować rozważane kryterium definicyjne lub też inne.

W przypadku twierdzenia o indukcji matematycznej poprawne ujmowanie jego intuicyjnego sensu „jednym chwytem myśli" powoduje, iż uczeń stając przed dowolnym warunkiem dotyczącym zbioru liczb naturalnych wie, że aby go udowodnić, nie musi zastanawiać się nad istotą i sensem tego warunku. Wie, że wystarczy, jeśli stwierdzi spełnianie go przez jakąś ustaloną liczbę naturalną $n$, a następnie pokaże zachodzenie implikacji „indukcyjnej"; wówczas może mieć pewność, że wszystkie liczby następujące po $n$ również dany warunek będą spełniać (gwarantuje mu to prawo przekazywania). Jeśli to „czuje" — przystępuje do działania. Można więc założyć, że twierdzenie o indukcji matematycznej rozumie on w sposób subiektywnie operatywny.

Ogromnie istotne jest więc obrazowe ujmowanie sensu twierdzenia oparte na jego oczywistości dla ucznia i o konieczności występowania tego rodzaju intuicji możemy mówić w przypadku niemalże wszystkich twierdzeń w nauczaniu szkolnym. Jest to aspekt bardzo istotny dla budowania prawidłowej struktury subiektywnej wiedzy ucznia. Często podkreśla się znaczenie dowodu danego twierdzenia jako kryterium jego prawdziwości, gdyż jest to dla matematyka **jedyne** kryterium pozwalające na gruncie danej teorii stwierdzić, czy twierdzenie jest prawdziwe, czy nie. Tę samą zasadę staramy się wprowadzać również w nauczaniu szkolnym i jest to działanie w sposób oczywisty słuszne, skoro jednym z celów nauczania jest ukazywanie matematyki jako teorii dedukcyjnej. Nie można jednak w matematyce szkolnej przeceniać „siły

przekonującej dowodu matematycznego" (Dąbrowski, 1993). Najistotniejszą siłę przekonującą dla ucznia ma głębokie intuicyjne rozumienie faktów i pojęć matematycznych, a formalny dowód spełnia wówczas jedynie rolę ostatecznego potwierdzenia subiektywnych odczuć ucznia.

W przypadku zasady indukcji matematycznej należy szczególnie mocno podkreślić inne jeszcze aspekty intuicji matematycznej, konieczne do prawidłowego rozumienia tego twierdzenia, brak których może stanowić przyczynę niektórych trudności uczniów podczas stosowania rozważanego twierdzenia. Są to intuicje związane ze strukturą zbioru liczb naturalnych i rekurencyjnością, a także intuicje dotyczące pojęcia nieskończoności (Grzegorczyk, 1983). Intuicje rekurencyjności kształcone są u ucznia od początku nauki o liczbie. Istnieją poglądy, że intuicja rekurencyjności jest pierwotną intuicją matematyczną. Poglądy na ten temat wśród psychologów zajmujących się rozwojem logicznej myśli dziecka są różne, między innymi są i takie, że nie istnieje pierwotna intuicja rekurencyjności, a rozwija się ona dopiero w długotrwałym procesie kształtowania w umyśle dziecka pojęcia liczby i działań na liczbach. Potwierdzenie tego można znaleźć u A. Z. Krygowskiej (Nowecki, 1978). A zatem należałoby rozważyć, czy u uczniów II klasy szkoły średniej intuicje rekurencyjności są na tyle wykształcone, iż może nastąpić proces formalizacji naturalnej rekurencji, jakim jest sformułowanie zasady indukcji matematycznej. Problem ten wymaga odrębnych badań, jednakże o ewentualnym braku rozważanego rodzaju intuicji w systemie wiedzy ucznia należy pamiętać i mieć na uwadze to, iż może on być przyczyną wielu trudności, być może nie do końca uświadamianych sobie przez uczących. Bardzo istotna również dla prawidłowego rozumienia i stosowania twierdzenia o indukcji matematycznej jest dobrze wykształcona intuicja nieskończoności, a w szczególności rozumienie zapisów typu: „+...+", które często pojawiają się w tematach zadań na stosowanie indukcji. Np.

*Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n:*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uczniowie często nie rozumieją takiego zapisu i traktują wyrażenie występujące po lewej stronie takiej równości jako zwykłe wyrażenie algebraiczne (szczególnie, że po drugiej stronie zwykle takie właśnie wyrażenie algebraiczne się znajduje). Podstawiają więc, jak przy obliczaniu wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego, np. $n = 1$ i otrzymują:

$$L = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1.$$

Prowadzi to do wniosku, że: $L \neq P$.

Oczywiście równość ta powinna być przez ucznia rozumiana jako ciąg równości:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2},$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2} \text{ itd}^6.$$

Uczniowie czasami nie radzą sobie z zapisami tego typu i spora część błędów uczniowskich może wynikać z niedostrzegania lub lekceważenia przez uczących tej nieumiejętności.

Jako metodę ustalania i usystematyzowania rozważanych trudności uczniów w niniejszym artykule obrano **analizę błędów** poczynionych podczas rozwiązywania zadania egzaminacyjnego E i innych zadań rozwiązywanych na zajęciach ze studentami i na lekcjach w szkole średniej. Uczyniono tak dlatego, iż, jak pisze Ciosek (1992), współczesna dydaktyka uznaje analizę błędów uczniowskich za dział podstawowy dla tej nauki. Błędy informują nas w ogromnym stopniu o sposobie rozumienia pojęcia, twierdzenia czy w ogóle metody matematycznej częstokroć lepiej niż odpowiedzi prawidłowe (Ciosek, 1992). A zatem przedstawiona analiza ma na celu przede wszystkim próbę wyróżnienia najczęściej powtarzających się błędów i ustalenia ich hipotetycznej przyczyny. Jeśli wiemy, jakie są najczęściej występujące błędy i jaka jest ich domniemana przyczyna (czyli w naszym przypadku przyczyna trudności typu 1)), możemy starać się tak zmieniać proces nauczania, aby ich w jak największym stopniu uniknąć.

Przedstawimy teraz krótkie ilościowe zestawienie rezultatów rozwiązywania zadania egzaminacyjnego E:

| | | |
|---|---|---|
| Liczba osób przystępujących do egzaminu | 225 | 100% |
| Liczba osób podających rozwiązanie Zadania E | 165 | 73% |
| Liczba osób prawidłowo rozwiązujących Zadanie E | 22 | 9,7% |

Z powyższego zestawienia widać, że wielu zdających nie podejmuje próby (a przynajmniej nie umieszcza w czystopisie) rozwiązywania Zad. E. Widać również, że jest aż 143 prace (co stanowi 86,7% wszystkich, w których zamieszczono rozwiązanie) z błędnymi rozwiązaniami rozważanego zadania. Wśród nich należy wyróżnić 27 prac, w których piszący nie stosują zasady indukcji

[6] W matematyce, jak wiadomo, eliminuje się kłopotliwe „+...+" przez wprowadzenie na sumę znaku $\sum$.

matematycznej. Piszą oni np., że rozważana suma jest sumą ciągu arytmetycznego lub geometrycznego itp. Te prace, mimo iż zawierają rozwiązania błędne, nie podlegają analizie ze względu na cel prezentowanej analizy. Pod uwagę wzięte zostały tylko te rozwiązania, w których rozpoznano stosowanie zasady indukcji matematycznej. Łącznie podczas egzaminu powstało **116 błędnych rozwiązań**, w których próbowano wykorzystać zasadę indukcji. A zatem było **22 prace z prawidłowo** sformułowaną i prawidłowo zastosowaną zasadą indukcji matematycznej.

- Jako pierwszy rodzaj błędu (który wydaje się mało groźny), można rozważyć sytuację, kiedy rozwiązujący prawidłowo formułuje oba kroki indukcyjne, ale **nie potrafi przeprowadzić dowodu prawdziwości implikacji „indukcyjnej"**. Prac zawierających tylko ten rodzaj błędu jest 31 (spośród 116). Do tej grupy klasyfikujemy te prace, w których błąd najprawdopodobniej wynika z tego, iż nierówność, zachodzenie której należało udowodnić, była dosyć trudna i większość nieprawidłowości wynika z nieumiejętności dokonania tu pewnych przekształceń czy oszacowań.

- W 9 pracach **brak jest „pierwszego kroku indukcyjnego"** (pokazania zachodzenia faktu początkowego). Rozwiązujący z jakiejś przyczyny nie udowadnia koniunkcji występującej w założeniu twierdzenia o indukcji. Możliwe, że robi to świadomie, „czuje", że dla $n = 2$ twierdzenie jest prawdziwe. Ale możliwe jest również, że nie widzi on koniunkcji występującej w założeniu twierdzenia o indukcji. Ten fakt potwierdzają obserwacje z zajęć ze studentami (zajęcia ze „Wstępu do matematyki" w latach 1993-1995 na I roku studiów na kierunku matematyka Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie). Student poprawnie wypowiada treść zasady indukcji, wypowiada spójnik „i", ale podczas próby dokonywania zaprzeczenia tego twierdzenia widać wyraźnie, że nie widzi on rozważanej koniunkcji. Obserwacje prowadzone na tych ćwiczeniach pokazują, że tworzenie zaprzeczenia zasady indukcji matematycznej jest ćwiczeniem, podczas którego można dobrze sprawdzić stopień rozumienia logicznej struktury tego skomplikowanego twierdzenia.

  W analizowanych pracach są także przypadki, kiedy rozwiązujący dochodzi do wniosku, że nierówność z Zadania E nie jest spełniona na podstawie tego, iż jego zdaniem nie jest ona prawdziwa dla $n = 2$. Pisze wtedy: „... na zasadzie indukcji matematycznej możemy stwierdzić, że nierówność jest sprzeczna" lub „korzystając z zasady indukcji matematycznej mogę stwierdzić, że twierdzenie nie jest prawdziwe dla żadnej liczby naturalnej".

- Ze skomplikowanej logicznie postaci zasady indukcji wynikają **błędy w używaniu kwantyfikatorów** występujących w twierdzeniu. Przykładem takiego błędu jest sytuacja, kiedy rozwiązujący zadanie, chcąc udowodnić prawo przekazywania, pisze:

*Założenie:*

$$\bigvee_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{13}{24}$$

*Teza:*

$$\bigvee_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{13}{24}$$

Rozwiązujący używa kwantyfikatora szczegółowego, co świadczy o nierozumieniu sensu udowadnianej implikacji. Kandydat stosuje zapis symboliczny, formalny, ale nie zdaje sobie sprawy z konsekwencji takiego zapisu. Widać to wyraźnie w dalszej części rozwiązania, w której nigdzie nie korzysta się z założenia; zadanie rozwiązywane jest tak, jakby w zapisie był kwantyfikator ogólny. Widać, iż uczeń nie rozumie sensu kwantyfikatorów, operuje symboliką matematyczną bez prawidłowego wyobrażenia myślowego na temat istoty tego zapisu. Być może jest to efekt zbyt wczesnego, w tym przypadku, wprowadzenia symbolicznego zapisu zasady indukcji (kiedy nie nastąpiło jeszcze wystarczające intuicyjne jej zrozumienie). Symbolika logiczna występująca w zapisie rozważanego twierdzenia jest dla ucznia szkoły średniej bardzo skomplikowana. Przesłanka ma postać implikacji, co upodabnia ją do całego twierdzenia, i do udowodnienia tej właśnie implikacji właściwie sprowadza się cały dowód. Występowanie spowodowanych tym trudności potwierdzają obserwacje dokonywane na ćwiczeniach ze studentami I roku. Student pyta np. „Dlaczego zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe, skoro tego jeszcze nie wiemy? Przecież to właśnie chcemy dopiero udowodnić!". Również jeden z kandydatów, rozwiązując Zadanie E, pisze: „jeżeli dla $n = k$ zachodzi ta nierówność, to z zasady indukcji matematycznej dla $n = k+1$ nierówność musi być prawdziwa". Inny kandydat pisze: „Jeżeli twierdzenie jest słuszne dla wszystkich $n$, to oznacza to, że dla następnika liczby $k$ też musi być spełnione". Świadczy to o tym, że ten rozwiązujący założenie implikacji „indukcyjnej" utożsamia z tezą całego twierdzenia o indukcji. Nie rozumie, że dowodzi implikacji, a nie prawdziwości następnika tej implikacji.

Jest kwestią indywidualną, u każdego ucznia czy studenta, moment, w którym można przejść z intuicyjnego ujmowania i wypowiadania treści

zasady indukcji w języku potocznym do jej zapisu symbolicznego. Może to nastąpić wtedy, gdy możemy przypuszczać, że uczący się rozumie sens takich logicznych funktorów zdaniotwórczych jak koniunkcja i implikacja, umie się posługiwać kwantyfikatorami, rozumie pojęcie implikacji i to, kiedy uznaje się jej prawdziwość. Są to rzeczy trudne jeszcze dla studenta pierwszego roku, który jest po krótkim kursie logiki (od którego zaczyna się program przedmiotu „Wstęp do matematyki"), a tym bardziej jest to trudne dla ucznia szkoły średniej, który w programie takiego kursu nie ma[7].

Dokonane obserwacje skłaniają do wyciągnięcia ostrożnego wniosku, iż na pewnym etapie formalna „obróbka" twierdzenia o indukcji (po odpowiednio długim etapie intuicyjnym), może stanowić istotny przyczynek do prawidłowego jego rozumienia, zapamiętania i stosowania. Podczas zajęć ze studentami (na ćwiczeniach ze „Wstępu do matematyki" na kierunku fizyka z matematyką) zauważono, że w niektórych przypadkach (jeśli częściowo sformalizowany zapis zasady indukcji utworzony został przez studentów w efekcie intuicyjnych rozważań i użyto do niego jawnej symboliki logicznej), mógł później stanowić punkt odniesienia przy weryfikacji poprawności przeprowadzanych dowodów indukcyjnych. Studenci w kilku przypadkach wyraźnie się do takiej formalnej postaci zasady indukcji odwoływali; np. „tu jest koniunkcja, ale dotyczy ona całej implikacji indukcyjnej, a nie tylko jej poprzednika" lub „ponieważ jeden człon koniunkcji jest fałszywy, więc koniunkcja będzie fałszywa niezależnie od prawdziwości drugiego członu, można więc już stwierdzić, że zasada indukcji nie jest spełniona" itd. Już samo tworzenie zapisu symbolicznego pozwoliło niektórym studentom zsyntetyzować i uświadomić sobie strukturę twierdzenia o indukcji, a efektem tego może być „subiektywnie operatywne" ujęcie tego twierdzenia w ich umysłach.

Należy jednak przy tym pamiętać, że zbyt wczesny formalizm może być bardzo szkodliwy. Szczególnie jeśli dotyczy on uczniów szkoły średniej, a nie studentów, których doświadczenie matematyczne można uznać za większe. Na obserwowanych na użytek tych badań lekcjach w szkołach, uczniowie nie posługiwali się terminologią logiczną (choć elementy logiki matematycznej zostały im wprowadzone niezależnie od wskazań programowych). Trudno więc ocenić ich wpływ na przyswajanie zasady indukcji przez uczniów — jest to problem wymagający odrębnych badań,

[7]W programie nauczania (MEN, 1990) nie ma jawnie występującego hasła o elementach logiki i teorii mnogości. W uwagach o realizacji tego programu zaleca się uczenie praw logiki przez stosowanie ich na każdej lekcji.

aczkolwiek wiele przedstawianych tu błędów może stanowić dowód zbyt wczesnej formalizacji i schematyzacji.

- Innym przykładem **błędu w stosowaniu kwantyfikatorów** jest sytuacja, kiedy rozwiązujący pisze:

*Założenie:*

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq\frac{13}{24}$$

*Teza:*

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)}\geq\frac{13}{24}$$

Ten rodzaj błędu pojawia się w 14 pracach. Jest więc błędem dosyć często występującym, a jego uporczywe pojawianie się również można przypisać nierozumieniu sensu implikacji „indukcyjnej" jako prawa przenoszenia własności z jednej liczby na następną. Kwantyfikator ogólny dotyczy całej implikacji „indukcyjnej", a stawianie go również w jej tezie zmienia cały sens twierdzenia. Możliwe, że w niektórych przypadkach błąd ten wynika tylko z nieumiejętności operowania symbolicznym językiem matematyki (a zatem nie jest tu nieprawidłowo rozumiany sens) lub odtwarzania źle przyswojonego schematu zapisu dowodu indukcyjnego.

W niektórych pracach kwantyfikator nie występuje jawnie. Rozwiązujący podczas formułowania założenia indukcyjnego pisze:

*Sprawdzam, czy jeśli nierówność jest prawdziwa dla $n = k$, to jest prawdziwa dla $n = k + 1$.*

Trudno bez rozmowy z badanym stwierdzić, czy widzi on dowolność wyboru liczby $n$, którą odzwierciedla pisząc „$n = k$" (w domyśle $k$ dowolnie ustalone). Zapisywanie implikacji „indukcyjnej" przez ustalenie zmiennej w sposób przedstawiony wyżej (tzn. zapis $n = k$ itd.) jest często pojawiającą się konwencją wprowadzaną na lekcjach o indukcji w szkole. Należałoby zastanowić się, czy taki zapis jest dla uczniów ułatwieniem, czy też przeciwnie. Analiza zebranych materiałów uprawnia do postawienia hipotezy, że takiego zapisu raczej należałoby zaniechać, gdyż w wielu przypadkach jest on przyczyną błędów i to nierzadko błędów popełnianych przez osoby, u których można założyć, że etap intuicyjnego zrozumienia przebiegał w sposób zadowalający (obserwacje z lekcji szkolnych i zajęć ze studentami). Hipotezę potwierdzają również niektóre prace egzaminacyjne. Np. zapis:

$$n \geq 2 : T(k) \Longrightarrow T(n+1)$$

lub

$$Z : dla\ n = k \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} \geq \frac{13}{24}$$

$$T : dla\ n = t \quad \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \ldots + \frac{1}{2t} \geq \frac{13}{24}$$

Obie nierówności dla $k$ i $t$ są napisane tak, jak w założeniu indukcyjnym (nie dla liczby $n$ i dla liczby następnej $n + 1$), czyli ta sama nierówność jest i w założeniu i w tezie. Błąd może wynikać z niepotrzebnego nagromadzenia symboli zmiennych. Sens implikacji nie był też chyba dobrze rozumiany, choć w rozwiązywaniu było widać pewne manipulacje, świadczące o tym, że rozwiązujący wie, co powinien udowodnić.

- Kolejna grupa błędów także dotyczy **błędnego rozumienia implikacji „indukcyjnej"**. Błędów tego rodzaju jest wiele i są one bardzo różnorodne. Jest to dowód na to, że implikacja „indukcyjna" jest istotnie najtrudniejszym elementem w budowie i stosowaniu twierdzenia o indukcji matematycznej. Być może jednym z powodów jest niezbyt dobrze wykształcona u uczniów zdolność do rozumowania typu rekurencyjnego (a ilustrowanie problemu przy pomocy kostek domina czy ciągu stacji telegraficznych nie wystarcza). Możliwe, że pomocne może być tu m. in. operowanie wzorami rekurencyjnymi ciągów, o jakim mówi Z. Szapiel (Szapiel, 1993). Można w tym miejscu również po raz kolejny zastanowić się, czy zasada minimum[8] lepiej niż zasada indukcji pochodząca od Peano nadaje się do wprowadzania w szkole (Krygowska, 1968). Porównując je z punktu widzenia sformułowania spostrzegamy, że zasada minimum jest prostsza, bardziej oczywista intuicyjnie dla ucznia, a przede wszystkim w swoim sformułowaniu nie zawiera rekurencji. A zatem nie wymaga specjalnej analizy logicznej. Problem pojawia się dopiero przy jej stosowaniu, gdyż wtedy również rekurencja się pojawia, a oprócz tego pojawia się jeszcze problem metodologiczny przeprowadzania dowodu przez sprowadzenie do sprzeczności (dowód „nie wprost"). W obu przypadkach nie da się zatem uniknąć rozumowania z wykorzystaniem rekurencyjności. Być może jednak głębsze badania na ten temat mogłyby stwierdzić większą użyteczność zasady minimum w szkole.

[8]Zasada minimum: W każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza (Rasiowa, 1984; Semadeni, 1973).

Przykładem błędu wynikającego również z nieprawidłowego rozumienia implikacji „indukcyjnej" jest sytuacja, kiedy rozwiązujący, po sprawdzeniu prawdziwości twierdzenia dla $n = 2$, od razu chce je sprawdzać dla $n + 1$, gdyż twierdzi, że już sprawdził dla $n$ (bo sprawdził dla $n = 2$). A więc dla tego kandydata implikacja „indukcyjna" ma postać: $T(2) \Longrightarrow T(n + 1)$. Takiej samej natury błędy wystąpiły w 9 pracach egzaminacyjnych. W jednej z innych prac kandydat pisze: „zakładamy prawdziwość twierdzenia dla $n = 2$ i zakładamy jego prawdziwość dla $n+1$". Dalej występujące rozwiązanie pokazuje, że rozwiązujący nie jest świadomy, jakiej implikacji dowodzi.

- W 7 pracach pojawia się **indukcja przyrodnicza zamiast indukcji matematycznej**. Błędy tego rodzaju można podzielić na dwie grupy: jedna, to prace, gdzie indukcja przyrodnicza jest jedynym elementem metodologicznym rozstrzygającym o prawdziwości twierdzenia. Rozwiązujący sprawdza prawdziwość rozważanej nierówności dla dwóch lub trzech (a w jednym przypadku nawet pięciu) liczb naturalnych i na tej podstawie wyciąga wniosek o jej zachodzeniu dla wszystkich liczb naturalnych. Brak tu jakiegokolwiek odniesienia do zasady indukcji matematycznej. Ten rodzaj błędu często się powtarza w rozwiązaniach nie tylko tego zadania. Druga grupa błędów to prace, gdzie rozwiązujący powołuje się na treść twierdzenia, sprawdza zachodzenie nierówności dla $n = 2$, a następnie pisze: „twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$, sprawdźmy czy jest ono prawdziwe dla $n + 1$ czyli $n = 3$". Po sprawdzeniu tego uczeń pisze dalej: „Ponieważ twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 2$ i ponieważ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Longrightarrow T(n + 1)$, to twierdzenie $T(n)$ jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$". A tymczasem implikacja, którą sprawdził, ma postać: $T(2) \Longrightarrow T(3)$, przy czym prawdziwość tezy rozwiązujący sprawdzał nie wykorzystując założenia. W tym przypadku widać, że rozwiązujący wyraźnie powołuje się na korzystanie z zasady indukcji, choć wcale z niej nie korzysta. Co gorsze, powołuje się później na rzekomo sprawdzoną przez siebie implikację „indukcyjną", której w istocie nie udowadnia. Jest to bardzo poważny błąd i może on świadczyć nie tylko o nierozumieniu zasady indukcji, ale także o tym, że rozwiązujący nie wie, co to znaczy wykazać prawdziwość implikacji w ogóle (zastosować regułę odrywania).

- Zaskakująco dużo jest prac, w których występują **błędy związane ze złym rozumieniem zapisu typu: „+...+"** (o których już wcześniej wspominaliśmy). Niektórzy rozwiązujący lewą stronę nierówności z Zadania E traktują jak wyrażenie algebraiczne, wartość którego liczą.

Obliczając więc rozważaną sumę dla $n = 2$ otrzymują sumę:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4} \geq \frac{13}{24}.$$

W czterech przypadkach rozwiązujący obliczają tę sumę tak, jakby składała się tylko z trzech składników. W innych pracach również widać nierozumienie tego symbolu; np. kandydat pisze:

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(n+2)(n+3)}$$

Sprowadza zatem tę sumę do wspólnego mianownika. Zachowuje się tak, jakby nie zauważał występujących tam kropek, symbolizujących dodawanie $n$ składników. Jest to rozumowanie dosyć zaskakujące i chyba tylko rozmowa z badanym mogłaby wskazać powód, dla którego taki zapis wystąpił. Nie można wykluczyć, że rozwiązujący po raz pierwszy zetknął się z takim zapisem symbolicznym. Problem złego rozumienia sumy $n$ składników pojawia się również często w pracy ze studentami, a przecież w większości dowodów indukcyjnych używa się rozważanego zapisu (Ehrenfeucht, Stande, 1989), (Somiński, 1955). Jeśli uczniowie nie w pełni zapis: „+...+" rozumieją, wówczas już przeprowadzenie pierwszego kroku indukcyjnego (czyli sprawdzenie faktu początkowego) sprawia niektórym z nich trudności: czym innym jest obliczenie wartości wyrażenia algebraicznego (występującego po prawej stronie) dla np. $n = 3$, a czym innym jest tworzenie sumy 4 składników.

Przedstawione tu badania po raz kolejny potwierdzają, że dowody indukcyjne twierdzeń dotyczących liczb naturalnych należą do najtrudniejszych w nauczaniu szkolnym. Twierdzenie o indukcji jest jedynym twierdzeniem o tak skomplikowanej strukturze logicznej, z jakim spotyka się uczeń w szkole. Należy jeszcze raz podkreślić, że omawiane zadanie jest zadaniem dosyć nietypowym w swoim sformułowaniu (prawa strona nierówności jest stałą) i ten fakt, co już podkreślaliśmy, mógł stanowić niepotrzebną przeszkodę przy sprawdzaniu wiadomości na tak trudny temat.

W rozważanym przez nas przypadku ujawnione błędy powinny spełniać przede wszystkim rolę „terapeutyczną i profilaktyczną" (Krygowska, 1977). Ciągłe występowanie tak dużej liczby powtarzających się błędów powinno skłonić do prób zmiany poglądów i działań dydaktycznych podejmowanych dla realizacji tematu: „Zasada indukcji matematycznej i przykłady jej stosowania". Należałoby albo z realizacji tego tematu zrezygnować (zważywszy na

to, iż bardzo rzadko się do niego wraca w późniejszym nauczaniu), albo też poświęcić mu w programie i jego realizacji więcej czasu i odpowiednich zabiegów dydaktycznych. Można w tym miejscu przypomnieć o niektórych propozycjach dydaktycznych, które mogą być wykorzystywane podczas uczenia o indukcji. Warte podkreślenia są uwagi przedstawione przez Z. Szapiela (1993). Wymienia tam się podstawowe trudności uczniów przy dowodzeniu twierdzeń za pomocą indukcji matematycznej. Jako sposób eliminacji wymienionych trudności proponuje się przeformułowanie twierdzeń dotyczących liczb naturalnych tak, aby zawierały rekurencyjne określenia ciągów. Jego zdaniem taki sposób nie tylko pogłębia wiadomości o ciągach, ale ułatwia nauczanie dowodzenia za pomocą zasady indukcji matematycznej. Ten sposób ma niewątpliwie zalety jako swojego rodzaju środek poglądowy w nauczaniu, aczkolwiek zauważyć należy, że nie wszystkie dowody indukcyjne można przeprowadzić za pomocą tej metody[9]. Inną propozycję można znaleźć w artykule G. Studnickiego (1979). Podaje on kilka przykładów prostych sytuacji mogących stanowić punkt wyjścia do wprowadzenia i sformułowania zasady indukcji matematycznej. Zaletą rozważań prowadzonych w podanych przykładach jest fakt, iż nawet jeśli nie doprowadzą do sformułowania zasady indukcji, to bardzo dobrze kształtują one intuicje rekurencji, które potem mogą ułatwić zrozumienie indukcji w dalszej nauce.

Przy okazji uczenia o indukcji matematycznej pojawia się wiele, często nie wykorzystywanych, okazji do realizacji takich celów dydaktycznych, jak:

— odkrywanie i formułowanie twierdzeń o liczbach naturalnych[10];

— kształcenie odczucia potrzeby uzasadniania wysuniętych hipotez;

— nauka dowodzenia (stosowanie reguły odrywania przy wykazywaniu prawdziwości prawa przekazywania);

— wyraźne uzmysłowienie uczniowi różnic pomiędzy indukcją matematyczną a indukcją przyrodniczą (indukcja matematyczna jako potwierdzenie intuicji i indukcji przyrodniczej);

— stosowanie w sposób poprawny symboliki i języka matematycznego (przy rozwiązywaniu zadań, gdzie oba kroki indukcyjne trzeba przeformułować

[9] Np. zadanie: „Udowodnij, że średnia geometryczna $n$ liczb nieujemnych jest nie większa niż ich średnia arytmetyczna" (Szapiel, 1993).

[10] Mamy tu na myśli takie formułowanie zadań na zastosowanie zasady indukcji matematycznej, by jednym z etapów rozwiązywania takiego zadania było odkrycie pewnych zależności zachodzących dla liczb naturalnych, a następnie sformułowanie ich w postaci hipotezy. Np. „Jaka jest suma kolejnych liczb naturalnych?" lub „Co jest większe: $2^n$ czy $n^2$ dla $n$-naturalnego?" Po przeczytaniu tak sformułowanego zadania uczeń nie siedzi bezczynnie.

z języka potocznego na jezyk symboli; np. „Spośród $2n$ liczb: $1, 2, 3, \ldots, 2n$ wybieramy dowolne $n+1$ liczb. Dowieść, że wśród wybranych liczb znajdują się przynajmniej dwie, z których jedna jest podzielna przez drugą";

— pokazywanie różnych sposobów rozwiązywania tego samego zadania (odchodzenie od stosowania schematów); np. zadanie:„Udowodnij, że każdą całkowitą liczbę złotych (nie mniejszą niż 4 zł), można wypłacić dwu- lub pięciozłotówkami" (Ehrenfeucht, Stande, 1989) można rozwiązać nie stosując dowodu indukcyjnego;

— ugruntowywanie intuicyjnej rekurencji (wiązanie liczb $n$ i $n+1$ z pojęciem liczby i liczby następnej, odnajdywanie $n-1$, $n+1$ składnika sumy $n$ liczb).

A zatem wydaje się, że opracowywanie zasady indukcji matematycznej w szkole może być kształcącym elementem ukazywania uczniom fragmentów wiedzy matematycznej i należy dążyć do tego, aby uczniowie przyjęli ten fragment do struktury swoich wiadomości, a dowód indukcyjny uznali za naturalną drogę weryfikacji prawdziwości twierdzeń dotyczących liczb naturalnych.

## Literatura


C i o s e k M.: 1992, Błędy popełniane przez uczących się matematyki i ich hipotetyczne przyczyny, *Dydaktyka Matematyki* 13.

D ą b r o w s k i M.: 1993, O akceptowalności dowodów przez uczniów na przykładzie dowodów istnienia liczb niewymiernych, *Dydaktyka matematyki* 15.

E h r e n f e u c h t A., S t a n d e O.: 1987, *Algebra dla kl. II Liceum Ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum*, WSiP, Warszawa.

E h r e n f e u c h t A., S t a n d e O.: 1989, *O nauczaniu algebry w kl. II LO*, PZWS, Warszawa.

G r z e g o r c z y k A.: 1983, *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN Warszawa.

K r y g o w s k a Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, część 1*, WSiP Warszawa.

K r y g o w s k a Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, część 2*, WSiP Warszawa.

K r y g o w s k a Z.: 1968, Zasada indukcji w nauczaniu szkolnym, *Matematyka* 5.

MEN: 1990, *Program liceum ogólnokształcącego oraz liceum zawodowego i technikum. Matematyka*, WSiP, Warszawa.

MEN: 1992, *Matematyka. Szkoła średnia. Minimum programowe obowiązujące od 1992*, Warszawa.

Nowecki B.: 1978, (red.), *Wykłady telewizyjne dla nauczycieli matematyki. Cz. II*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Rasiowa H.: 1984, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

Semadeni Z.: 1973, *Matematyka współczesna w nauczaniu dzieci*, PWN, Warszawa.

Siwek H.: 1974, *Rozumienie implikacji przez uczniów liceum*, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków.

Sominski J.: 1955, *Metody indukcji matematycznej*, PWN, Warszawa.

Studnicki G.: 1979, Problemy dotyczące rekurencji i indukcji matematycznej, *Matematyka* 3.

Szapiel Z.:1993, Jak wprowadzać dowodzenie twierdzeń za pomocą indukcji matematycznej, *Matematyka* 3.

Thom R.: 1974, Matematyka „nowoczesna": pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiadomości Matematyczne* 18.

## Selected didactic issues concerning teaching mathematical induction

Summary

The present paper deals with difficulties which students come across when they are presented with the principle of mathematical induction and when they have to apply it. Errors and mistakes are analyzed which were made by students solving a problem during the entrance examination to the Department of Mathematics of the Pedagogical University (WSP) in Kraków.