dmptm 1982

ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 12 (1990)

Maurice Belanger
Montreal (Kanada)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

BŁĘDY W RACHUNKU ARYTMETYCZNYM: BADANIA I POGLĄDY AMERYKAŃSKIE NA PRZESTRZENI STULECIA(1)

Epokę poznasz
po sloganach.
Ralph Henry Gabriel

1. WSTĘP

Moim zadaniem było przedstawienie przeglądu tego, co inni napisali na temat roli błędu w uczeniu się i nauczaniu matematyki. Zajmę się tu tylko wynikami autorów amerykańskich. Skoncentruję się przy tym na pytaniu, czym jest błąd w nauce matematyki. Jak zobaczymy, nie ma jednej odpowiedzi na to pytanie. Odpowiedź zależy bowiem od tego, kto i w jakim celu stawia pytanie, a także od ogólnego kontekstu kształcenia w danym okresie. Pytanie wychodzi więc daleko poza samą matematykę i obejmuje kwestie społeczne, psychologiczne, ekonomiczne i nawet polityczne. Twierdzę, i będę chciał to uzasadnić, że można mówić o co najmniej dwu postawach dotyczących błędów, które współistniały od początku tego wieku. Wolę używać raczej terminu "postawy" niż "koncepcje", ponieważ każda z nich wydaje się być kompleksem przekonań, ocen oraz stanowisk filozoficznych. (Ponieważ te przekonania, oceny i stanowiska prezentują grupy ludzi gotowych działać, byłoby bardzo kuszące użyć raczej terminu "ideologia" niż "postawa". Jednak "postawa" dostarcza już dostatecznie wielu kłopotów, więc nie sprawiajmy sobie dodatkowych.)

POCZĄTKI BADAŃ W XIX WIEKU

Nie ma prostego sposobu ani wyraźnej linii przewodniej, które ukazałyby postawę wobec błędów w matematyce w oświacie amerykańskiej XIX wieku. Wypowiem więc tylko kilka uwag na ten temat. Pod koniec XIX wieku literatura pedagogiczna była niezwykle obfita. W 1893 roku psycho-pedagog G. Stanley Hall (często nazywany ojcem amerykańskiej psychologii rozwojowej) opublikował wyselekcjonowaną biblio-

(1) Referat wygłoszony na 39 Spotkaniu Międzynarodowej Komisji do Badania i Ulepszania Nauczania Matematyki (CIEAM) w Sherbrooke w Kanadzie w 1989 (zobacz Dydaktyka Matematyki 11).

grafię angielskich, francuskich i włoskich prac pedagogicznych. Pozycja ta zawiera sklasyfikowane zestawienie książek oraz tytułów czasopism i liczy 277 stron. Rozdział "Liczby i matematyka elementarna" obejmuje 36 pozycji traktujących o metodach nauczania matematyki: 4 po angielsku, 1 po francusku (metody nauczania geometrii) i 31 po niemiecku. Te "Metody niemieckie" to część szczegółowej teorii nauczania, opartej na idealistycznej filozofii niemieckiej, modnej w pedagogice amerykańskiej tamtych czasów. Drobiazgowe kilkutomowe "usystematyzowanie pedagogiki", zawierające około 1400 stron, było przetłumaczone na język angielski i wykorzystywane w kształceniu nauczycieli w Ameryce.

2. BŁĘDY A JAKOŚĆ NAUCZANIA

Historycy kształcenia zajmujący się ewolucją badań często odwołują się do pracy Josepha Rice'a, który rozstał się z zawodem lekarza, by zostać dziennikarzem od spraw kształcenia. Opracował on testy sprawdzające znajomość ortografii i arytmetyki i przebadal nimi 30 000 uczniów z zakresu ortografii oraz 6000 uczniów z arytmetyki. Nie potrzeba wielkiej przenikliwości, by zrozumieć znaczenie terminu "błąd" dla Rice'a. "Błąd" był dla niego po prostu "niepoprawnę odpowiedzią". W przypadku arytmetyki sprowadzało się to do podania innego niż żądany wyniku rachunku. Rezultaty badań testowych Rice'a zostały opublikowane w popularnym piśmie "Forum", wydawanym właśnie przez Rice'a. Analiza danych dostarczanych przez badania pozwoliła na sformułowanie wniosku, że nie ma korelacji pomiędzy czasem poświęconym na naukę arytmetyki a poprawnymi odpowiedziami na zadania testowe. Co więcej, Rice zauważył, że niektóre błędy popełniane przez uczniów na pewnym poziomie nauczania, powiedzmy trzeciej klasy (uczniowie 9-letni), występują także na wyższym poziomie. Te rezultaty, jeśli patrzymy na nie z perspektywy osiemdziesięciu lat, wydają się naiwne i banalne. Były one jednak szeroko dyskutowane i jednocześnie ośmieszane przez przedstawicieli oświaty, którzy krytykowali metodę badania, nazywając ją statystycznie naiwną.

Uzyskane dane podawały liczby poprawnych i błędnych odpowiedzi i świadczyły niekorzystnie o systemie nauczania. Dla odrzucenia krytyki pod swoim adresem przedstawiciele oświaty obrali najłatwiejszą taktykę: zaatakowali "metodę" badania, która – trzeba to przyznać – była niedopracowana, nawet w porównaniu ze standardami tamtych czasów. Nie sposób tu przedstawić dramatycznych zmian, jakie miały miejsce w amerykańskim szkolnictwie w latach 1865-1900. Zauważmy tylko, że liczba uczniów w szkołach podstawowych i średnich podwajała się co 10 lat. Wymagało to oczywiście coraz większej liczby nauczycieli, podręczników, budynków szkolnych, bardziej biurokratycznej organizacji i zarządzania, wydatków i podatków; szkolnictwo miało masę kłopotów wewnętrznych. W takiej sytuacji Rice został potraktowany jako intruz, który miał śmiałość sugerować, że szkoły nie zdają egzaminu w zakresie swoich obowiązków wyuczenia podstawowych umiejętności z ortografii i arytmetyki.

W swoim artykule z 1902 r. Rice podniósł dwie kwestie:

W tym artykule przedstawię fakty uzyskane w wyniku przeprowadzenia testu z arytmetyki i skoncentruję się na dwóch fundamentalnych pytaniach, przed którymi stawia się nauczyciela zawsze, kiedy jakiś przedmiot należy do programu szkolnego:

(1) Jakie rezultaty będą osiągnięte?
(2) Ile czasu poświęcimy danej dziedzinie?"
(Rice, 1902, s. 281)

Powyższe pytania – w odniesieniu do nauczania arytmetyki zajmowały pedagogów przez następne trzy dekady, przynosząc szereg publikacji.

3. POMIAR BŁĘDOW W MATEMATYCE (1900-1930)

Istnieje bardzo interesujący dokument, który opublikowali w 1925 r. Buswell i Judd i który może służyć za przewodnik po artykułach oraz pozycjach książkowych poświęconych badaniom amerykańskim nad nauczaniem matematyki tego okresu. Język użyty przez autorów wspomnianego dokumentu jest swoistego rodzaju pamiętnikiem – przypomina hasła i slogany ówczesnej epoki związane z nauczaniem. Za kluczowe słowo, przewijające się w literaturze tego okresu, można by uznać "skuteczność". Komentując ten okres, Callahan przedstawił następującą charakterystykę sił społecznych, które odgrywały wtedy ważną rolę:

"Głównymi elementami były: wielki prestiż biznesmenów oraz wzrastająca akceptacja Amerykanów dla ideologii biznesu. Ten ostatni czynnik jest oczywiście zrozumiały dla generacji wyrosłej z czytelników McGuffeya i literatury sukcesu. Innym czynnikiem był klimat podejrzenia tworzony przez demaskatorskich dziennikarzy i rozwój samego demaskującego dziennikarstwa. Te zespolone czynniki były wzmacniane przez reformatorów, którzy sugerowali, że rozwiążą wiele problemów kraju jeśli nawet nie wszystkie, przez zastosowanie czegoś, co nazwano »metodami nowoczesnego biznesu«" (Callahan, 1964, s. 7-8).

W uwagach Buswella i Judda na temat badań związanych z nauczaniem matematyki znajdujemy terminy takie, jak "skuteczność", "metody naukowe", "standardy", "dokładność", "szybkość", "poprawne rozwiązanie", "uniknięte straty". Te terminy są odbiciem pewnych społecznych i psychologicznych sił, składających się na "postawę" owych czasów. Buswell i Judd analizowali serię artykułów z lat 1909-1911 autorstwa Courtisa, uznając je za "początek ruchu w kierunku ujednolicenia arytmetyki". Warto przytoczyć pewne wyjątki tej analizy dla zilustrowania postawy tego okresu:

"[Test Courtisa] wskazywał na potrzebę lepszego poznania zmian, jakie następują w umyśle dziecka przy przejściu z jednej klasy do następnej. Ujawnił to, że efekty obecnego systemu nauczania są niepewne, uświadomił także potrzebę wielostronnego kształcenia w klasach początkowych dla rozwinięcia uzdolnień w klasach wyższych. Jeszcze wyraźniej, przynajmniej w opinii Courtisa, test wykazał, że możliwe jest zmierzenie nie tylko ogólnego stanu nauczania arytmetyki w szkole, wzrostu umiejętności i sprawności uczniów w toku tego nauczania, niedostatków i potrzeb poszczególnych klas lub uczniów, ale także efektów zmian w metodach i organizacji nauczania. Z pomocą serii testów prowadzonych w ciągu kilku lat możliwe jest zbudowanie rzeczywistej wiedzy o nauczaniu i zweryfikowanie ścisłymi metodami eksperymentalnymi dowolnych hipotez pedagogicznych" (Buswell i Judd, 1925).

Pewne wyobrażenie o poglądach Courtisa na nauczanie można sobie wyrobić na podstawie następującego stwierdzenia, pochodzącego z jego artykułu z 1911 roku:

"Nauczanie, przynajmniej z pewnego punktu widzenia, jest procesem produkcyjnym. Surowiec przysyłany do szkoły jest modelowany i kształtowany pod wpływem oddziaływań, jakim jest poddawany".

Testy arytmetyczne Courtisa wykorzystywano przez następne dwie dekady; tworzono też inne testy. Testy i prowadzone za ich pomocą badania analizowano wielokrotnie, a nawet obecnie w pracach na temat matematycznych błędów znajdujemy odwołania do literatury wspomnianego okresu. Należy pamiętać, że w pedagogice amerykańskiej z okresu 1910 -1920 badania w zakresie matematyki stanowiły część szerokiego ruchu obejmującego "pomiary naukowe" oraz "efektywność szkoły". Tworzenie instrumentów tych pomiarów było środkiem do otrzymywania "danych naukowych", które z kolei mogły być wykorzystywane do ulepszenia podręczników, metod nauczania, a nawet polityki oświatowej. Dla naszych celów spróbuję zebrać najważniejsze cechy ówczesnego podejścia do "błędów w matematyce".

3.1. Błędy w arytmetyce jako miary trudności

W okresie 1910-1930 badania testowe ponownie potwierdziły dużą różnorodność odpowiedzi uczniów, które odnosiły się do tego samego zadania, a występowały zarówno na różnych poziomach wiekowych (różne klasy szkoły podstawowej), jak i w obrębie tej samej grupy wiekowej. Kontrowersyjne wyniki Rice'a z początku XX wieku nie mogły być dłużej poddawane w wątpliwość: zmienność była faktem. W okresie kiedy położono wielki nacisk na wydajność szkoły, na błędy patrzono jak na "odpady" i uważano za pożądane "zredukowanie procentu zmienności". Jedną ze strategii osiągnięcia tego celu widziano w zbadaniu, w jakich działach arytmetyki występują błędy, a następnie w obmyśleniu sposobów redukowania tych błędów. Rozważmy jako przykład pomiar trudności związanych z dodawaniem dwu liczb jednocyfrowych. To podejście "działa na tej zasadzie, że liczba błędów popełnionych w różnych rachunkach jest wskaźnikiem trudności rachunku, a najtrudniejszy jest ten z nich, w którym pojawia się największa liczba błędów".

W jednym z takich badań, przeprowadzonym przez Clappa, testowi poddano 700 uczniów klas 4 do 8. Chodziło tu o podanie wyniku dodawania, mnożenia i odejmowania dla 100 par liczb jednocyfrowych. Poniższe zestawienie przedstawia uszeregowanie od najtrudniejszego (8+5) do najłatwiejszego (0+0) wszystkich przykładów dodawania.

Tabela 1

Dodawania uporządkowane według malejących trudności, tj. procentu błędnych odpowiedzi.

8+5	9+0	0+7	7+1
7+9	2+6	0+1	2+9
5+8	9+3	7+2	2+5
9+7	0+6	1+9	2+8
6+8	6+5	0+5	4+4

6+9	3+8	8+1	4+1
5+7	3+4	6+2	3+1
7+8	3+9	0+4	4+0
8+7	2+3	3+6	1+8
9+6	3+5	0+2	9+9
5+9	6+3	2+4	7+7
3+9	7+3	3+0	2+0
8+6	2+7	4+5	6+1
4+7	8+4	0+8	5+4
7+5	4+8	6+0	3+3
4+9	8+0	8+3	1+1
9+5	1+0	8+2	9+2
9+4	5+2	6+4	8+8
6+7	4+2	1+4	1+3
5+6	1+2	9+1	1+6
4+6	5+3	5+0	1+7
7+6	0+3	6+6	2+1
7+4	0+5	3+2	2+2
9+8	5+1	4+3	5+5
3+7	7+0	1+5	0+0

(Clapp, 1924)

Zestawienie to Buswell i Judd (1925) uznali za "bez wątpienia najlepszy z obecnie istniejących wskaźników względnej trudności rachunku". Wykorzystując tabelę 1, można szukać regularności lub postawić na przykład pytanie, czy dodawanie z e r a do l i c z b y jest trudniejsze od dodawania l i c z b y do z e r a. Buswell i Judd upatrują wartość takich zestawień w tym, że "znajomość względnej trudności przykładu dodawania jest istotna, ponieważ bez tej informacji nie można by właściwie d a w k o w a ć ć w i c z e ń". Inni widzieli możliwość wykorzystania wyników tego typu badań do analizy podręczników w celu upewnienia się, że "trudniejszym" przykładom poświęcono więcej czasu i ćwiczeń.

Inną stosowaną metodą było mierzenie czasu potrzebnego na otrzymanie przez ucznia poprawnej odpowiedzi. Buswell i Judd komentują tę metodę tak: "Głównym argumentem przemawiającym za tą metodą jest to, że posługiwanie się rachunkiem do otrzymania poprawnej odpowiedzi spowoduje wydłużenie czasu namysłu, co wskaże, iż uczeń nie zna gotowej odpowiedzi".

Bardzo niewiele uwagi w takich analizach błędów poświęcono pytaniu, dlaczego pewna kombinacja liczb w dodawaniu była "trudniejsza" (wymagała więcej czasu lub spowodowała więcej błędów) od innej. Teoretyczny zasób wiadomości, jaki można było wykorzystać do analizy błędów w tamtym okresie, był bardzo ograniczony. Dominującą "teorią myślenia" panującą w ówczesnych kołach pedagogicznych był asocjacjonizm, przyjmujący za podstawę istnienie wewnętrznych skojarzeń. Jeśli uznać,

że uczenie się jest tworzeniem się wewnętrznych skojarzeń, to w takich pojęciowych ramach niewiele da się wyjaśnić. Czy "błędy" w odpowiedziach należy traktować jako "nieodpowiednie skojarzenia", "brak skojarzeń" czy jeszcze coś innego?

3.2. Typologia błędów

Dawno już zwrócono uwagę na to, że wśród błędów w arytmetyce można wyróżnić pewne typy, a pewne błędy występują przy różnych wersjach programów i metod nauczania. W okresie 1913-1925 Buswell i Judd odnotowali 20 prac poświęconych analizie błędów. Początkowo tworzono globalne kategorie błędów, przynoszące niewiele informacji, jak np. następujące zestawienie:

Tabela 2

Rodzaje błędów	Liczba błędów
Niepoprawne dodawania i mnożenia w pisemnym mnożeniu i dzieleniu	39
Niepoprawne dodawania w zadaniach na dodawanie	14
Niepoprawne odejmowania w zadaniach na odejmowanie	7
Niepoprawne mnożenia w zadaniach na mnożenie	7
Niepoprawne dzielenie w zadaniach na dzielenie	13
Przenoszenie i przepisywanie cyfr	35
Zastępowanie, pod wpływem sugestii, jednego sposobu postępowania innym	14
Trudności w operowaniu symbolami, szczególnie w zakresie ułamków	25
Nieznajomość sposobu postępowania	28

(Smith, 1916)

Ogólną tendencją w analizie błędów we wspomnianym okresie było tworzenie coraz bardziej szczegółowych kategorii błędów dotyczących rachunku arytmetycznego. Konstruowano zestawy testów dla różnych poziomów szkoły i, co za tym idzie – system ich klasyfikowania, uwzględniający informacje na temat częstości występowania pewnych typów błędów na poszczególnych poziomach. Ilustruje to tabela 3. Kategorie błędów dla każdego działania podzielono na podkategorie, takie jak np. "pożyczanie" w odejmowaniu; z kolei zebranie dużej liczby specyficznych "błędów w pożyczaniu" może prowadzić do dalszego podziału tej kategorii.

Tabela 3

Procent błędów w odejmowaniu, mnożeniu i dzieleniu

Błędy	Klasa i % błędów				
	IV	V	VI	VII	VIII
ODEJMOWANIE					
Pożyczanie	54	56	52	51	55
Pojedyncze odejmowania	36	38	45	44	41
Opuszczenia	2	1	2	3	1
Odwrócenie kolejności	1	2	0,5	0	0
7–0 jest 0 itp.	5	3	0,5	0	0
Odejmowanie od lewej do prawej	0	0	0	0	2
MNOŻENIE					
Tabliczka mnożenia	79	73	73	77	75
Dodawanie	18	20	22	19	20
Zero w mnożniku	1,5	6	5	4	5
DZIELENIE					
Za duża reszta	34	39	27	19	10
Mnożenie	22	15	19	37	33
Odejmowanie	11	14	18	25	23
Ostatnia reszta zero i zero w dzielnej	7	15	19	7	11
Mnożna większa od dzielnej	7	4	1	1	1
Dzielna nie spisana do końca	7	4	3	0	6
Spisanie niewłaściwej cyfry	2	1	4	4	6
Nie wszystkie cyfry ilorazu wypisane	7	1	1	3	3
Brak zera w ilorazie, np. 98 zamiast 908	3	7	8	4	7

(Gist, 1917)

Tendencja do tworzenia coraz bardziej szczegółowych podkategorii błędów prowadziła do zogniskowania analizy błędów na pojedynczym działaniu arytmetycznym. W rezultacie rozmnożyły się "listy" błędów w literaturze. Przykładem może być tabela 4 listy błędów w dzieleniu:

Tabela 4

Błędy w dzieleniu pisemnym

	Liceum	Klasa				Razem
		VIII	VII	VI	V	
Ogółem błędów	190	61	70	104	145	570
Źle dobrane cyfry	15	19	14	29	13	90
Pożyczanie	9	2	1	3	5	20
Odejmowanie	43	4	7	18	19	91
Operowanie jedną liczbą	0	6	2	2	3	13
Przenoszenie	25	7	5	14	13	64
Odwrócenie kolejności cyfr	3	0	1	0	2	6
Mnożenie	18	3	3	12	10	46
Za duża cyfra ilorazu	13	17	16	14	38	98
Za mała cyfra ilorazu	9	9	13	42	27	100
Błędne kojarzenie	14	13	9	27	12	79
Brak kojarzenia (zgadywanie)	1	3	5	2	1	12
Inne	3	12	11	2	5	24
Niekompletne rozwiązanie	51	7	9	11	10	93

Jedną z trudności związanych z tworzeniem list błędów było to, że każdy autor konstruował swój system kategorii. Tak więc porównanie takich list było bardzo trudne. W najlepszym razie można było studiować kolekcję różnych zestawień błędów w nadziei uzyskania jakiejś ich systematyzacji.

Na przykład kategoria "pożyczania" występuje we wszystkich przytoczonych listach błędów dla odejmowania i dzielenia, należałoby więc, być może, interpretować to tak, że ta kategoria wskazuje na uporczywy błędny schemat myślowy. Występowanie takiej globalnej kategorii jak "pożyczanie" mogło służyć w owym czasie za wskaźnik tego, że algorytm pożyczania wymagał większej liczby ćwiczeń w podręcznikach lub więcej czasu na lekcjach. Mogło to także stymulować tworzenie metod uczenia "pożyczania" i wynajdywanie różnych technik.

3.3. Błędy jako odbicie procesów zachodzących w umyśle ucznia

Pomiary błędów uważano więc za użyteczne do oceny przyswajania arytmetyki w całych grupach uczniów (klasach, szkołach, okręgach szkolnych). Z drugiej jednak strony podkreślono, że mogę one przyczynić się do poznania indywidualnych różnic między uczniami. W XX wieku "różnice indywidualne" stały się powszednim tematem amerykańskiej pedagogiki (i psychologii) i do dzisiaj temat ten jest składnikiem wiary w ideologii kształcenia. Rozwijane ciągle badania testowe potwierdziły daleko większe

zróżnicowanie, niż się spodziewano. Ten temat ciągle przewija się w syntetycznej pracy Buswella i Judda, którzy piszą:

"Jedynym znaczącym wnioskiem, jaki wyciągnięto z pomiaru osiągnięć szkolnych, jest to, że uczniowie ujawniają bardzo wyraźne różnice indywidualne".

Rozpoznanie i uznanie różnic indywidualnych między uczniami miało przynajmniej dwie konsekwencje. Po pierwsze, wyróżniono dwie kategorie uczniów nieco odbiegających od normy: "uczniów wymagających reedukacji" oraz "uczniów uzdolnionych". W jeszcze większej odległości od normy znajdują się "przypadki patologiczne" i "telenty". Po drugie, uświadomiono sobie, że psychologiczna teoria skojarzeń była zbyt słaba, by wyjaśnić, w jaki sposób uczeń dochodzi do poprawnej albo błędnej odpowiedzi w zadaniu arytmetycznym. Na ten temat Buswell i Judd wypowiadają się następujący sposób:

"Kiedy studjuje się uważnie [tę] złożoną różnorodność sposobów dodawania liczb, wartość dydaktyczna formuły, która opisuje sposób dodawania w kategorii prostych skojarzeń, staje się bardzo wątpliwa. (...) Podczas gdy ostatecznym celem nauki dodawnia może być ustalenie prostych powiązań między cyframi – problem dydaktyczny, jak osiągnąć ten cel, nie może być zrozumiany, dopóki nie poznamy intymnego charakteru procesów zachodzących w niedojrzałym umyśle dziecka".

Buswell i Judd często pochlebnie wyrażają się o tzw. "metodzie Uhla". Dotyczy to niewielkiej publikacji Uhla z 1917 r., w związku z którą Buswell i Judd stwierdzają:

"Uhl analizował wyniki obserwacji uczniów w czasie rozwiązywania zadań arytmetycznych i odpowiedzi na zadawane im pytania. Dzięki temu mógł określić niektóre głębokie przyczyny błędu na podstawie informacji odnoszących się do procesów przebiegających w umyśle ucznia. Korzyści tej metody w porównaniu z metodą analizy pracy pisemnej ucznia nie sposób przeceniać".

Interesujące jest, że to, co nazywano wtedy "procesami myślowymi", ma współczesny wydźwięk. Oto przykład z oryginalnej pracy Uhla z 1917 r.:

"[Uczennica 5 klasy] sposób dodawania liczb 4, 9 i 6 wyjaśniła tak : weźmy 6, następnie 3 z 4, wtedy 9 i 9 jest 18 i 1 to 19. Inny przykład został wykonany podobnie: dodanie liczb 3, 9 i 8 wykonała dziewczynka w następujący sposób: 8 i 8 to 16 i 3 to 19 i 1 to 20. Jeszcze inny przykład: dodawanie liczb 5, 6 i 9: sześć, siedem, osiem, dziewięć (liczby na palcach) i 9 to 18, dodać 2 to 20. Ta tendencja do budowania kombinacji ósemek i dziewiątek jest widoczna w jeszcze innym przykładzie: liczby 6, 5 i 8 były dodawane tak: 8 i 8 to 16 i 3 to 19. Prawdopodobnie już w pierwszym przykładzie dziewczynka postępowała podobnie, ale musiałem posłuchać jej metody jeszcze dwukrotnie, zanim ją zrozumiałem".

Byłyby niebezpieczne – z perspektywy 70 lat – nazywać powyższy przykład "obserwacją kliniczną", we współczesnym rozumieniu tego słowa, kiedy dysponujemy licznymi pojęciami teoretycznymi. Ten przykład pokazuje jednak, że przynajmniej niektórzy badacze uświadomili sobie wówczas, iż dotychczasowe listy i kategorie błędów nie są wystarczające. Buswell i Judd stwierdzają:

"Uhl demonstruje wartości techniki, która—jeśli byłaby stosowana systematycznie i wyczerpująco do większej liczby uczniów—mogłaby stać się skutecznym programem diagnostycznym".

W swoim artykule Uhl mówi o "procesach myślowych ucznia" jako "trudnościach", ale Buswell i Judd sądzą, że chodzi tu o coś bardziej subtelnego. Po zapoznaniu się z badaniem, w wyniku którego powstała lista błędów w dzieleniu, napisali:

"Lista typów błędów w dzieleniu jest bardziej wnikliwa, ale istnieje potrzeba prowadzenia dalszej analizy dla ukazania towarzyszących tym błędom procesów myślowych (...). Odkrycie typów błędów jest konieczną podstawą analizy diagnostycznej, ale rzeczywista diagnoza składa się nie tyle z zestawień błędów i nawet identyfikacji typów błędów, co raczej ze szczegółowej analizy procesów myślowych, w wyniku których te błędy powstają".

Można powiedzieć, że przynajmniej przez 30 lat—do 1925 roku—istniało w Stanach Zjednoczonych zainteresowanie zagadnieniem błędów popełnianych przez uczniów w arytmetyce. Jednakże ówczesne ramy pojęciowe utrudniały zharmonizowanie wszystkich kategorii błędów, nadanie sensu mnożącym się listom specyficznych błędów rachunkowych. Pojęcie skojarzenia myślowego nie było dostatecznie płodne, by sugerować jakąś znaczącą interpretację teorii i podejść badawczych. Prace na temat błędów operowały kluczowymi w ówczesnym kontekście polityki oświatowej hasłami: efektywność, metoda naukowa i standaryzacja. Co by było, gdyby "technika Ulha" stała się główną metodą badawczą a "procesy myślowe" przestały być interpretowane jako "trudności" i stały się wskaźnikami "sposobów pracy umysłu"? Historia badań potoczyła się jednak całkiem inaczej.

4. MODEL MEDYCZNY A MATEMATYKA

Równolegle do rozwijanego kierunku pomiaru naukowego pojawił się w Stanach Zjednoczonych, jak i innych krajach, ruch "diagnozy i terapii", który był częścią ogólniejszego ruchu przeciwdziałania odchyleniom. Monika Vial, socjolog francuski, w jednej ze swoich prac przeprowadziła analizę dziewiętnastowiecznych sił społecznych, politycznych, ekonomicznych i prawa ustawodawczego, które spowodowały powstanie pewnej koncepcji medycznej, wykorzystanej we francuskiej pedagogice na początku XX wieku. Nie znam żadnej pracy o podobnym charakterze w U.S.A.

Przez model medyczny rozumiem postawę, którą charakteryzują trzy cechy:

(1) wiara w istnienie (stworzenie, wymyślenie) pewnej uzgodnionej normy, egzekwowanej przez wpływową grupę,

(2) tolerancja dla pewnego stopnia odchyleń od tej normy; przekroczenie granicy tej tolerancji wymaga interwencji w celu przywrócenia normy,

(3) potrzeba stworzenia metod i techniki dla: (a) ustalenia systemu kategoryzacji odchyleń, (b) gromadzenia wskaźników rozpoznania odchyleń, (c) przywracania normy.

W wyniku ewolucji ta medyczna koncepcja przyjęła się na początku naszego stulecia także na gruncie amerykańskiego szkolnictwa. Wkradła się ona również do kształcenia matematycznego i splotła się z ruchem pomiaru naukowego, który mimo wszystko

mógł dostarczyć pewnych technik i metod gromadzenia wskaźników odchyleń. Ale to nie metody i techniki są ważne z punktu widzenia naszych rozważań, ale fakt, że stawianie diagnozy i poszukiwanie środków zaradczych stało się ruchem (z własnymi organizacjami zawodowymi i czasopismami), który stworzył swoją własną koncepcję tego, "czym jest błąd matematyczny".

Podręcznik arytmetyki Leo Brueckner z 1930 roku może służyć za indykator znaczeń przypisywanych błędowi matematycznemu z punktu widzenia diagnozy i teorii. Do roku 1930 liczba testów z zakresu arytmetyki rozmnożyła się; wykorzystanie tych testów dla celów diagnostycznych znalazło się w centrum zainteresowania Brueckner a. Pisze on:

"Wcześniejsze testy osiągnięć szkolnych zostały w dużym stopniu ulepszone przez to, że stały się bardziej analityczne. Zamiast gromadzenia wielu umiejętności w jednym teście, konstruuje się dobrze przemyślane testy diagnostyczne oddzielnie dla każdej umiejętności. Dzięki tym testom nauczyciel może zlokalizować specyficzne elementy danej umiejętności, które mogę powodować trudności uczniów."

Język, jakiego używa Brueckner w podsumowaniu swej książki, ujawnia sens przypisywany przez autora błędowi (wyróżnienia pochodzą ode mnie):

1) wyniki ważnych badań przeprowadzonych w celu wypracowania odpowiednich niezawodnych metod określenia osiągnięć (ucznia) w arytmetyce:

2) n a u k o w e t e c h n i k i d i a g n o z o w a n i a natury t r u d n o ś c i i b r a k ó w, które mogą przeszkadzać uczniowi w osiągnięciu zadowalającego postępu w zakresie opanowania poszczególnych procedur oraz umiejętności rozwiązywania zadań;

3) typy ć w i c z e ń t e r a p e u t y c z n y c h i t r e n i n g o w y c h, które można wykorzystać do usunięcia specyficznych typów trudności uczniów i podniesienia wyników w arytmetyce do zadowalającego poziomu.

Wyróżnione terminy w powyższym streszczeniu mogą wskazywać na sens, jaki Brueckner przypisuje błędowi. I tak błędy uczniów ujawniają trudności, które mogą być przypisane brakom. Podziały błędów na kategorie są użyteczną linią przewodnią dla typów możliwych trudności, ale powinniśmy iść dalej – szukać podstawowych korzeni tych trudności, tj. szukać odpowiedzi na pytanie, jakie braki tłumaczą te błędy. Być może tę ogólną ideę można scharakteryzować w następujący sposób:

(1) błędy można ujawniać przez testy i wywiady z uczniami,

(2) błędy są indykatorami (modelami) t r u d n o ś c i,

(3) trudności mogą być przypisane b r a k o m (wytłumaczone brakami).

W bardziej współczesnym żargonie moglibyśmy nazwać to modelem braku. Jednakże trudno jest wyjaśnić do końca pojęcie trudności i braków Brueckner a, ponieważ w swej książce używa on czasem zamiennie takich słów, jak "zdolności", "nawyki", "umiejętności", "procedury", "sposoby postępowania". Innym razem używa na przykład wyrażenia "błędny nawyk postępowania", gdy mówi o błędzie w stosowaniu reguły. Zakres pojęcia błędnego nawyku postępowania jest zresztą u Brueckner a szeroki i może obejmować: słowny opis stosowanej reguły, liczenie różnymi metodami (np. na palcach), brak porządku w pracy pisemnej, niepoprawne wyrażenie stosowanej reguły wzorem i wiele innych.

Przy takiej charakterystyce kluczowe słowo "trudności" staje się terminem rodzajowym, który zastępuje termin "błąd" w bardziej ograniczonym podejściu tekstów i pomiarów. T a b e l e b ł ę d ó w we wcześniejszej pracy Buswella i Judda stały się u Brueckner a t a b e l a m i t r u d n o ś c i. Prowadzi to do typowania jako trudności rzeczy, które dzisiaj scharakteryzowalibyśmy całkiem inaczej. Oto dobry przykład dotyczący liczenia. Brueckner przytacza go z "psychologicznej diagnozy trudności 45 uczniów klas 4-6":

"Typy ujawnionych trudności były bardzo interesujące.

Najpospolitszym uchybieniem okazał się nawyk liczenia. Nauczyciele pracowali sumiennie, by doprowadzić do automatyzacji wszystkich rachunków, ale pomimo ich wysiłku 23 uczniów jakoś prześliznęło się. Ci ostatni liczyli przezabawnymi sposobami: poruszając ustami, językiem, pomagając sobie palcami u rąk i nóg".

Brueckner prezentuje listę trudności dotyczących dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Zestawienie liczy 15 stron. Dla ilustracji kilka przykładów:

Liczenie: uczniowie dochodzą do odpowiedzi pomagając sobie uderzeniem ołówka, palcami, poruszając wargami itd.

Rozbijanie na składniki:

$$\begin{array}{r} 66 \\ 47 \\ +\ 99 \\ \hline 212 \end{array}$$

Uczeń tworzy takie sumy, których wyniki zna: "9 plus 3 to 12; 12 plus 4 to 16; 16 i 6 to 22."

Dodawanie przez uzupełnianie do dziesiątki:

$$\begin{array}{r} 114 \\ 5 \\ 7365 \\ +\ 59 \\ \hline \end{array}$$

Uczeń mówi: "5 plus 5 to 10; 10 plus 9 plus 1 to 20; 20 dodać 3 jest 23."

Choć postępowanie uczniów w każdym z powyższych przykładów mogło prowadzić do poprawnej odpowiedzi i, co za tym idzie, w testowej ocenie nie być uznane za "błędne", Brueckner klasyfikuje je jako trudności. Przypuszczalnie dlatego, że nie uznaje za poprawne wykonywanie dodawania ani przez rozbijanie na składniki, ani przez uzupełnianie do dziesiątek, ani przez odliczanie z pomocą np. palców. Tak więc nie tylko odpowiedzi traktuje się jako poprawne lub błędne, ale także poprawne lub błędne mogą być metody otrzymywania tych odpowiedzi. Jeśli uczeń stosuje złą metodę – zalicza się to do trudności, a to z kolei może być przypisane jakiemuś brakowi. Co może być brakiem w takim przypadku? Brueckner znajduje proste rozwiązanie dla "wyjaśnienia" trudności: trudności przypisuje w a d l i w e m u

n a w y k o w i, co niczego nie wyjaśnia, ale nawiązuje do konstrukcji pojęciowej (nawyk), mającej w opisywanym okresie wysoką estymę u psychologów.

Brueckner prezentuje w oddzielnych rozdziałach swojej książki trudności dotyczące liczb całkowitych, ułamków zwykłych oraz dziesiętnych. Po długich listach umiejętności, przedstawionych w sposób opisowy, następują jeszcze dłuższe listy trudności. Na przykład dla działań na ułamkach taka lista zajmuje 18 stron.

Mogę być posądzony o zbytnie uproszczenie modelu medycznego Bruecknera z roku 1930, lecz jest to naprawdę model bardzo prymitywny, oparty częściowo na bardzo zawężonym poglądzie na rachunek. Na jednej z początkowych kart swej książki Brueckner napisał:

"Arytmetyka składa się z dużej liczby specyficznych umiejętności, z których każda musi być wyrobiona przez staranne ćwiczenie".

Poza posługiwaniem się pojęciem nawyku niewiele jest w jego książce prób stworzenia psychologicznej konstrukcji pojęciowej, która mogłaby dostarczyć pełniejszej teorii braków dla wytłumaczenia trudności. Ta książka z roku 1930 była próbą zebrania badań nad błędami z ubiegłych trzydziestu lat, podejmowanych z pozycji testów i pomiarów jako metody badania procesu nauczania i uczenia się arytmetyki. Mam chyba rację oceniając, że była to prymitywna próba w kierunku konstrukcji modelu medycznego, doskonalonego w ciągu następnych pięćdziesięciu lat. Wyznawcy podejścia diagnostyczno-terapeutycznego poszukiwali bowiem bardziej adekwatnych konstrukcji i schematów pojęciowych, zapożyczanych z innych dziedzin nauki.

5. DALSZE BADANIA NAD BŁĘDAMI: LATA 1926-1977

5.1. Tworzenie typologii błędów

Jak wspomniałem, praca Buswella i Judda zawierała syntetyczną informację o badaniach nad błędami w okresie lat 1900-1925. W roku 1926 Buswell i John opublikowali najpełniejsze z dotychczasowych zestawień błędów w rachunku arytmetycznym, oparte na własnych badaniach uczniów klas 3-6. Prezentuje je tabela 5. Zauważmy, że kategoria "pożyczanie" jest rozbita na podkategorie. Jak w oryginale, tabela została zatytułowana "częstość nawyków w odejmowaniu", podczas gdy w książce z roku 1930 Brueckner zebrał je pod nagłówkiem "najpospolitsze błędy". Zestawienie Buswella i Johna stało się wzorcem, do którego przez następne 50 lat odwoływano się i który doskonalono, dodając inne szczegóły i nowe rodzaje błędów.

Tabela 5

Częstość nawyków w odejmowaniu

	Klasy				Łącznie
	III	IV	V	VI	
1. Błędne pojedyncze odejmowanie	62	75	69	36	246
2. Pożyczanie					
a) pożyczanie nie uwzględnione	19	50	57	36	162

	Klasy				Łącznie
	III	IV	V	VI	
b) błędy spowodowane zerem w odjemniku	25	39	26	15	105
c) odjęcie odjemnej od odjemnika	47	33	12	4	96
d) brak pożyczania, zero jako wynik	21	20	14	4	59
e) zmniejszenie cyfry odjemnej, gdy pożyczanie zbędne	2	8	10	5	25
f) zmniejszenie cyfry odjemnej o dwa	1	5	8	6	20
g) zwiększenie cyfry odjemnej	2	2	6	2	20
h) pożyczanie od lewej do prawej	1	0	1	0	2
3. Rachowanie	43	44	39	10	136
4. Nieprawidłowe postępowanie					
a) odwrócenie danego przykładu	21	38	29	12	100
b) dodanie zamiast odjęcia	18	9	19	1	47
c) użycie tej samej cyfry w dwu rzędach	18	15	3	4	40
d) ominięcie jakiegoś rzędu	9	13	8	5	35
e) rozdzielenie liczb	7	5	10	2	24
f) pominięcie	12	6	2	3	23
g) traktowanie odjemnej lub odjemnika jako reszty	10	6	2	0	18
h) odejmowanie od lewej ku prawej	2	0	1	0	3
5. Pomyłki itp.					
a) przyjęcie danej cyfry za szukaną	12	9	13	3	37
b) błąd w odczytaniu zapisu	14	5	13	10	42
c) błąd spowodowany różną ilością cyfr w odjemnej i odjemniku	1	5	10	3	19
d) zmiana kolejności w reszcie	4	7	2	4	17
e) pomylenie odejmowania z dzieleniem lub mnożeniem	5	6	3	2	16
f) przeskakiwanie rzędów	3	4	7	0	14
g) korzystanie w odejmowaniu ze znanych iloczynów	1	2	3	0	6
h) błąd w zapisie odpowiedzi	2	1	0	1	4
Łącznie	84	109	109	70	372

(Buswell i John, 1926; Brueckner, 1930)

Przez całe lata na takich zestawieniach błędów były oparte testy kontrolne do diagnozy indywidualnej. Uczeń otrzymywał serię zadań rachunkowych, z których każde było typowym przypadkiem potencjalnego błędu, i rejestrowano każdą odpowiedź. Aż do dzisiaj tworzy się zestawy diagnostyczne rozmaitej postaci, jak arkusze testowe, materiały konkretne, formularze zestawień, normy statystyczne, schematy do wykonania wykresów itp. Zestawy są nowe, lecz ich idea pochodzi sprzed lat.

5.2. Poszukiwanie błędów systematycznych

Zestawienia błędów zawierają wiele przypadków pojawiających się rzadko, a nawet zupełnie wyjątkowo. Już w roku 1924 Meyers zauważył, że u niektórych uczniów pewne błędy miały tendencję do utrwalania się i powtarzały się uporczywie. W latach trzydziestych Brueckner (1932) badał uporczywość błędów w mnożeniu ułamków, zaś Grossnickle (1935) – w dzieleniu liczb całkowitych. Szczegółowe opracowanie badań nad tym zagadnieniem opublikowała Linda Cox (1974). Według niej błąd systematyczny pojawia się wtedy, gdy "powtarza się wielokrotnie niepoprawna odpowiedź tam, gdzie wynik jest oczywistym rezultatem pewnego algorytmu. To błędne postępowanie występuje w trzech na pięć zadań danego typu." Cox zestawiła ponad pięćdziesiąt tabel z danymi dotyczącymi błędów w działaniach arytmetycznych, odnoszącymi się do dzieci z klas 2-6 i porównującymi dzieci "normalne" z "upośledzonymi". Badania powtórzono rok później w tej samej grupie 115 (spośród 191 badanych poprzednio) dzieci. Pokazały one, że 14% badanej populacji popełniło "rok później identycznie ten sam błąd". Tabele Lindy Cox zawierają charakterystykę błędów w kategoriach zastosowanych sposobów postępowania. Tabela 6 zawiera analizę czterech (spośród czternastu) błędów w odejmowaniu.

Tabela 6

Błędy w odejmowaniu liczby jednocyfrowej od dwucyfrowej

Liczba błędów		Przykład	Rodzaj błędu
Dzieci			
normalne	upośledzone		
27	16	$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 6 \\ \hline 34 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ -\ 8 \\ \hline 58 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ -\ 5 \\ \hline 21 \end{array}$	Nie przegrupowano odjemnej. Od większego odjemnika (w rzędzie jedności) odjęto mniejszą odjemną.
0	6	$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ -\ 8 \\ \hline 52 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ -\ 5 \\ \hline 29 \end{array}$	Odjęto poprawnie w rzędzie jedności, ale w rzędzie dziesiątek różnicy podano wyjściową cyfrę dziesiątek odjemnej.

Liczba błędów		Przykład	Rodzaj błędu
Dzieci			
normalne	upośledzone		
3	2	$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ -\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ -\ 5 \\ \hline 9 \end{array}$	Wykonano poprawnie odejmowanie w rzędzie jedności, ale nie dopisano cyfry dziesiątek w różnicy.
1	1	$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$ $\begin{array}{r} 50 \\ -\ 8 \\ \hline 50 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ -\ 5 \\ \hline 20 \end{array}$	Pozostawiono zero w rzędzie jedności; w rzędzie dziesiątek przepisano wyjściową cyfrę dziesiątek odjemnej.

(Cox, 1974)

W roku 1977 Graeber i Wallace opublikowały wyniki badań przeprowadzonych w grupie 1038 uczniów klas ósmych dla uzyskania dokładniejszej informacji o typach i częstości występowania błędów systematycznych. Stosowały te same kryteria jak w badaniach Lindy Cox, mianowicie "błąd nie był zaliczany do błędów systematycznych, dopóki w co najmniej trzech przykładach nie uwidocznił się ten sam wzorzec postępowania". W badaniach Graeber i Wallace każdy błąd z listy L. Cox powtórzył się; jeśli został wykryty jakiś inny błąd – został on dołączony do tabeli. Raz jeszcze błędy zestawiono w długich tabelach, oddzielnie dla dodawania, odejmowania i mnożenia, z częstością ich występowania i porównaniem z błędami opisanymi przez L. Cox. Wybrane przykładowo błędy dla odejmowania pokazano w tabeli 7. Graeber i Wallace nazywają błędem systematycznym "błąd popełniany przez zastosowanie stale tej samej nieodpowiedniej reguły".

Tabela 7

Błędy w odejmowaniu liczby jednocyfrowej od dwucyfrowej

Przykłady	Opis	Częstość (%) występowania
$\begin{array}{r} 51 \\ -\ 6 \\ \hline 55 \end{array}$ $\begin{array}{r} 43 \\ -\ 8 \\ \hline 45 \end{array}$ $\begin{array}{r} 76 \\ -\ 9 \\ \hline 73 \end{array}$	Mniejsza cyfra jedności odjemnej została odjęta od większej cyfry jedności odjemnika, a jako cyfrę dziesiątek różnicy zapisano cyfrę dziesiątek odjemnej.	33 (40,7)
$\begin{array}{r} 51 \\ -\ 6 \\ \hline 05 \end{array}$ $\begin{array}{r} 43 \\ -\ 8 \\ \hline 05 \end{array}$ $\begin{array}{r} 76 \\ -\ 9 \\ \hline 03 \end{array}$	Mniejsza cyfra jedności odjemnej została odjęta od większej cyfry jedności odjemnika, a jako cyfrę dziesiątek różnicy zapisano zero.	2 (2,5)

Przykłady	Opis	Częstość (%) występowania
51 43 76 − 6 − 8 − 9 50 40 70	W rzędzie jedności różnicy zapisano zero. Jako cyfrę dziesiątek różnicy zapisano cyfrę dziesiątek odjemnej.	2 (2,5)

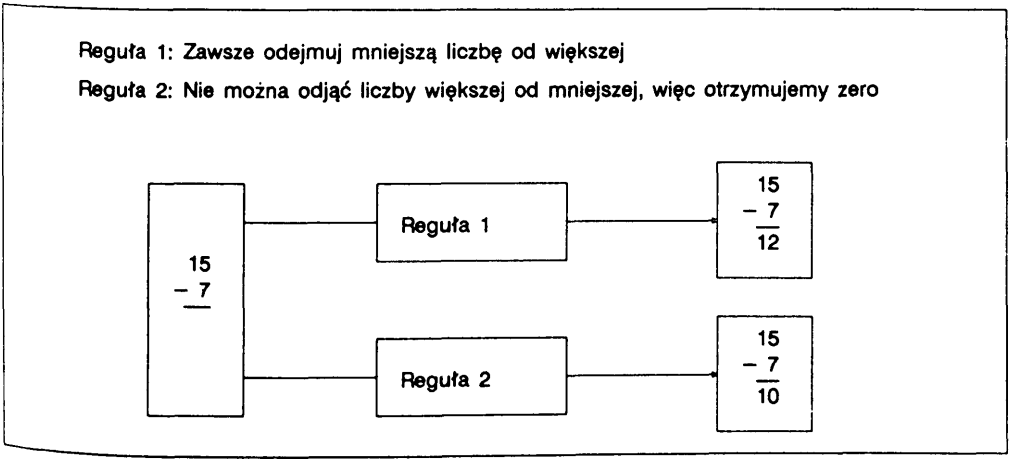
(Graeber i Wallace, 1977)

U w a g a. Te same błędy wystąpiły w badaniu L. Cox (1974). Osiem dalszych błędów tej listy pomijamy.

Jeśli porównamy zestawienia i kategorie błędów rachunkowych pojawiające się w ciągu ostatnich siedemdziesięciu lat, zauważymy, że wiele takich samych błędów występuje w każdym zestawieniu. Możemy zmieniać etykietę przypisywaną błędowi, np. "nieprawidłowy nawyk", "błąd algorytmiczny" lub "oparty na regule" – pozostaje faktem, że generacja po generacji dzieci popełniają te same błędy rachunkowe.

Wszystkie przykłady błędów w tabelach 5, 6 i 7 dotyczą odejmowania. W każdej z nich występuje błąd, który uznano za najbardziej pospolity dla odejmowania. W związku z zadaniem: wykonaj odejmowanie 15–7 – niektóre dzieci w wywiadach mówią: "nie można odjąć 7 od 5, więc 7–5 jest dwa", inne stwierdzają: "Siedem odjąć od pięciu jest niemożliwe, więc to będzie zero".

Nie trzeba uciekać się do terminów "nieprawidłowy nawyk" czy "brak", ale – jak Graeber i Wallace – możemy patrzeć na błąd jako wynik zastosowania reguły skonstruowanej przez dziecko. Reguła 1, którą zilustrowano na rysunku 1, prowadzi do najczęściej występującego błędu w odejmowaniu (ponad 40% w badaniach Graeber i Wallace) w ciągu ostatnich siedemdziesięciu lat. Reguła 2 (rysunek 1) prowadzi do innego pospolitego błędu, notowanego we wszystkich zestawieniach błędów w odejmowaniu w badaniach amerykańskich. Charakteryzowanie błędu jako wyniku zastosowania skonstruowanej przez dziecko reguły wskazuje na zmianę postawy badaczy wobec błędu; ta postawa stała się powszechna w latach 1970 i 1980.



Rys. 1

5.3. Szybki rzut oka wstecz

W powyższych uwagach zająłem się błędami arytmetycznymi po prostu dlatego, że do roku 1970 większość badań dotyczyła błędów arytmetycznych. Rozważania na temat błędów w rozwiązywaniu zadań występujące w literaturze amerykańskiej (od około 1910 roku) są bardzo skromne i niejasne, toteż pominąłem je tutaj świadomie. W latach dwudziestych i trzydziestych błędy w rozwiązywaniu zadań wiązane były z trudnościami "czytania" i "rozumowania", jednak – według mnie – badanie te nie rzuciły wiele światła ani na jedne, ani na drugie. Badania nad "czytaniem" i "rozumowaniem" w związku z tzw. zadaniami tekstowymi w matematyce wymagałyby oddzielnego potraktowania.

Koncentrację badań na błędach rachunkowych należy rozpatrywać w kontekście zainteresowań i sloganów w pedagogice amerykańskiej obecnego wieku. Położenie nacisku na "metody naukowe" i dążenie do ścisłości, "pomiar" oraz "efektywność" powoduje, że błędy rachunkowe są stosunkowo wygodne do badania. Przez badania testowe można szybko policzyć błędy, zestawić je i sklasyfikować. Równoległe do podejścia testowo-pomiarowego, koncentrowanie się na indywidualnych różnicach i odchyleniach powoduje powstanie nauczania specjalnego, w którym nauczanie matematyki ma skromny udział. Jednakże w ostatnich dwu dekadach obserwuje się, widoczne w literaturze, przesunięcie zainteresowań osób badających proces uczenia się – z błędów rachunkowych na szerzej widzianą matematykę szkolną, aż do poziomu uniwersyteckiego.

6. WYBRANE ZAGADNIENIA OBECNEJ DOBY

6.1. Błędy – algorytmy, strategie i reguły

W późnych latach sześdziesiątych i siedemdziesiątych często charakteryzowano błędy jako wynik stosowania "wadliwego algorytmu" lub "niepoprawnej techniki algorytmicznej" (Ashlock, 1976). Jak pamiętamy, w 1977 roku Graeber i Wallace opublikowały swoją pracę na temat błędów systematycznych, przypisując błędy "stosowaniu się do nieodpowiedniej reguły". W tym samym roku Herbert Ginsburg (1977) wydał książkę pt. "Arytmetyka dzieci", w której jeden rozdział poświęcił pomyłkom. Pisze tam:

"Nie jest użyteczne wyjaśnianie błędów w kategoriach niskiej inteligencji lub małych zdolności matematycznych. Te pojęcia zaciemniają fakt, że błędy są wynikiem stosowania systematycznych strategii, które mają sensowne pochodzenie. Tak jak poprawne odpowiedzi, błędy dzieci należy przypisywać idiosynkratycznym, ale sensownym strategiom".

Przypisywanie błędów stosowaniu algorytmu, strategii czy reguły reprezentuje postawę charakteryzującą się tym, że przenosi uwagę z błędów jako takich – na procesy, które te błędy rodzą.

6.2. Błędy i niewłaściwe rozumienie pojęć

W ostatnich dwudziestu latach obserwuje się w literaturze koncentrację uwagi właśnie nie na "błędnych odpowiedziach", ale raczej na wiedzy dzieci i młodzieży

konstruowanej przez nich samych, która jest w jakiś sposób niezgodna z wiedzą powszechnie akceptowaną lub wiedzą ekspertów. Czasopismo "The Journal of Mathematical Behaviour" zawiera wiele przykładów, które nie dotyczą już rachunku arytmetycznego, ale wiadomości matematycznych z daleko szerszego zakresu, także u studentów i ludzi dorosłych.

Związek błędów z niewłaściwym rozumieniem stał się również przedmiotem zainteresowania dydaktyków przedmiotów przyrodniczych. W jednym z artykułów Fisher i Lipson (1986) piszą:

"Błędy w uczeniu się przedmiotów przyrodniczych dostarczają szkiełka, dzięki którym można uchwycić przebłyski funkcjonowania umysłu. Błędy są cennym i normalnym zjawiskiem w procesie uczenia się przedmiotów przyrodniczych".

Tak jak w nauczaniu matematyki, dydaktycy przedmiotów przyrodniczych analizują niewłaściwe rozumienie i błędy popełniane przez uczących się fizyki, biologii, chemii, zarówno na poziomie szkoły średniej, jak i uniwersyteckim. Wzrastająca liczba prac na temat tego zagadnienia może być zwiastunem przyszłej współpracy dydaktyków matematyki i nauk przyrodniczych. Podobnie jak błędy w matematyce, błędy w naukach przyrodniczych również wydają się mieć sensowne pochodzenie.

6.3. Błędy – podstawowe konstrukcje pojęciowe i tworzenie modelu

W przeszłości były próby powiązania błędów w matematyce z różnymi teoriami uczenia się (behawioryzm, teoria postaci itp.) i psychoanalizą. Wydaje się. że obecnie analiza błędów koncentruje się na poszukiwaniu podstawowych konstrukcji pojęciowych (przyjętych lub adaptowanych z wielu dziedzin wiedzy), które mogłyby być pomocne w wyjaśnieniu zachowań matematycznych. Robert Davis, który zajmował się tym problemem przez wiele lat, zamieścił w swej ostatnio wydanej książce następujące stwierdzenie:

"Słabością teorii pedagogicznej jest to, że próbuje uniknąć postulowania podstawowych konstrukcji pojęciowych. Ta postawa doprowadziła do zubożenia dyskusji teoretycznych, a przecież właśnie budowanie teorii jest najistotniejszą cechą nauki." (Davis, 1986, s. 356.)

Podczas gdy badania na temat błędów rachunkowych w okresie 1900-1970 były dotknięte "zubożeniem dyskusji naukowych" – obecnie badania w zakresie nauczania matematyki mają do budowania modeli i mini-teorii pod dostatkiem konstrukcji pojęciowych, szczególnie tych pochodzących z teorii poznania, informatyki i lingwistyki. Teraz już proste rozpoznanie i klasyfikowanie błędów jako takich jest mało interesujące, mimo że w obecnym wieku poświęcono temu zagadnieniu 70 lat pracy. Analiza błędów jest współcześnie interesująca wtedy, gdy może stanowić weryfikację jakiegoś modelu czy mini-teorii. Może ona również spełniać skromniejszą funkcję.

Jednym z kluczowych haseł ostatnich lat jest "komputer". Pojęcia z dziedziny informatyki są coraz częściej zapożyczane jako pojęciowo użyteczne metafory, nawet w tak różnych dziedzinach, jak muzyka i ekonomia. W technice komputerowej rozwiązuje się zadanie za pomocą skończonego ciągu czynności, mówiąc krótko – programu. Zachęcające jest użycie terminu "program" jako metafory do scharakteryzowania

procedur, jakie dziecko stosuje, wykonując rachunek arytmetyczny. Jeśli dopuścimy to, że program może kończyć się złą odpowiedzią (błędem), to błąd może być wyjaśniony za pomocą innych wyrażeń, takich jak "błąd programu", "błąd procedury" lub nawet "zapluskwiony program". Wyrażenia te wiążą się dobrze z terminami "wadliwy algorytm", "nieodpowiednia reguła" itd.

Jednak przejście od dawniej używanego terminu "nieodpowiedni nawyk" do terminu "pluskwa" w odniesieniu do błędu jest czymś daleko więcej niż tylko zwykłą zmianą metafory. Jeśli już zaczęliśmy zapożyczać pojęcia, to nie wolno nam zapomnieć o tym, że temu zabiegowi towarzyszy cały bagaż teoretyczny. Być może w tym momencie najbardziej drażliwym problemem związanym z analizą błędów nie są—jak na ironię—błędy jako takie, ale raczej to, jaki model matematycznego zachowania najlepiej reprezentuje i wyjaśnia poprawne lub niepoprawne sposoby postępowania. To, jak ktoś definuje dzisiaj błąd, zależy od tego, jaki model wybiera lub konstruuje. Traktowanie błędu jako "złej odpowiedzi" nie jest wystarczające; chcemy wiedzieć, dlaczego taka odpowiedź powstała, wyjaśnić ją, wytłumaczyć. Buswell i Judd dostrzegli to w 1925 roku, ale wtedy nie można było zbudować dobrego modelu, operując pojęciami skojarzenia i nawyku. Dzisiaj w literaturze odnoszącej się do nauczania matematyki mamy całą masę teoretycznych konstrukcji pojęciowych i modeli.

Na początku wieku mieliśmy zalew list i zestawień błędu do tego stopnia, że przyszedł moment, iż stało się konieczne skonstruowanie systemu klasyfikacji błędów. W ostatnich latach jednym z bardzo eksploatowanych badawczo tematów był rozwój pojęcia liczby u małych dzieci; błędy popełniane przez dzieci odegrały w tych badaniach znaczącą rolę. W latach osiemdziesiątych skonstruowano tak wiele "pojęciowych modeli rozwoju liczby u małych dzieci", że Paul Cobb (1987) zaproponował schemat klasyfikacji dla niektórych z tych modeli. Nie jest moim zadaniem wchodzić tu w dyskusję na temat klasyfikacji modeli rozwoju liczby podanej przez Cobba, chcę tylko zwrócić uwagę na fakt, że nawet dla kogoś, kto opanował warsztat badań dydaktycznych, podział modeli stał się problemem. Problem ten jest ogólniejszy i dotyczy także przyszłych badań skierowanych na błędy.

Jeśli chcemy wyjść poza oczywiste i być może powierzchowne pojęcie błędu jako "złej odpowiedzi", to zgodnie z obiegową sentencją—"żeby osiągnąć postęp, trzeba mieć model" (jest to odmiana frazesu "do postępu przez teorię"). W pewnym sensie zrobiliśmy obrót o kąt pełny. Na początku wieku badacze pokładali nadzieję w pomiarze, uznając go za kapitalną drogę do dydaktyki matematyki jako nauki. Obecnie wysiłek inwestuje się w badanie modeli. Ta wiara pociąga za sobą trudności, ale być może doprowadzi do jakiegoś rozwiązania.

6.4. Błędy—jaki model, ramy pojęciowe lub teoria?

Na początku wieku ograniczenie pojęcia błędu do złej odpowiedzi było prawdopodobnie wystarczające. Odpowiadało to poglądowi, że istnieją poprawne metody rachunku arytmetycznego i jeśli są tylko dobrze przekazane oraz odpowiednio ćwiczone, to błędy można złagodzić do akceptowanego poziomu. Poza tym, błąd jako zła odpowiedź pasował dobrze do modelu pomiaru. Model diagnozy i terapii trwa do dzisiaj, przyozdobiony chwiejnymi konstrukcjami pojęciowymi, takimi jak:

"niezdolność do uczenia się" (zob. Allardice i Ginsberg, 1983) i "dyskalkulia" (zob. Baruk, 1973)

Współczesne próby zrozumienia błędów poprzez modele wydają się być bliższe złożoności działalności matematycznej człowieka niż dawne koncepcje. W swej książce pod prowokującym tytułem "Społeczeństwo umysłu" M. Minsky (1986) napisał:

"Jak dochodzimy do rozumienia czegoś? Prawie zawsze, jak sądzę, przez wykorzystanie takiego lub innego rodzaju analogii – to znaczy przez wyobrażenie sobie każdej nowej rzeczy, jak gdyby przypominała ona coś, co już znamy. Kiedy nowa rzecz jest zbyt odległa od tego, co znamy, lub zbyt skomplikowana, by ująć ją bezpośrednio w całości, przedstawiamy jakąś jej część, tę, którą potrafimy, w kategoriach dobrze nam znanych haseł i znaków. W ten sposób z każdej nowości czynimy coś, co wydaje się nam podobne do pewnej zwykłej dla nas rzeczy. Jest wielkim odkryciem użycie znaków, symboli, słów i nazw. One pozwalają na to, że nasz umysł przeobraża nieznane w codzienne zjawisko".

Prawdopodobnie każdego z nas, kto spędził jakiś czas na pogawędce z dziećmi o ich matematyce, uderzyła odwaga, z jaką dzieci usiłują wyjaśnić własny sens rzeczy, które z naszego punktu widzenia są nieporozumieniem pojęciowym, błędem. Czasem te wysiłki mogą nas zauroczyć i zadziwić, rezultaty, do jakich dzieci dochodzą, mogą być niepoprawne, ale niepoprawne pomysłowo – tak jak u prawdziwych matematyków. Modele zachowania w matematyce, które zapełniają ostatnio książki i czasopisma, są w istocie rozmaitymi próbami wyjaśnienia tego, w jaki sposób ludzie nadają sens światu, lub – jak to ktoś sformułował – są próbami zrozumienia rozumienia. Każdy jednak autor-badacz w swych próbach nadania sensu sposobom postępowania dzieci dysponuje własną kolekcją analogii, które uznaje za użyteczne. Kiedy preferowane analogie i zapożyczone (z innych dziedzin) pojęcia są ustrukturowane w model, to nie tylko dostajemy rozmaitość modeli, ale także modele sprzeczne. To nie jest narzekanie, ale krótki opis wielu spotkań dydaktyków matematyki, w których uczestniczyłem w ostatnich latach, a także po prostu refleksja na temat szerokiego wyboru "słów i nazw", które mogą być zapożyczone z innych dziedzin. To, które z modeli okażą się najbardziej płodne, jest zagadnieniem dotyczącym badań i ich kryteriów.

Jak przypomniał nam Minsky, użycie "znaków, symboli, słów i nazw" jest wielkim odkryciem dla przeobrażania tego, co nieznane, w codzienne zjawiska. Ci, którzy są zainteresowani budowaniem modelu zachowania matematycznego, mają do wyboru wyjątkowo dużą liczbę "słów i nazw". Istnieją rodziny modeli, mówi się o modelach "inspirowanych przez Piageta" czy "opartych na schematach", inne – przejmują analogie z "procesu przetwarzania informacji", "informatyki" i "sztucznej inteligencji". Czasem dochodzi do nieporozumień pomiędzy tymi, którzy reprezentują stanowisko "wiedzy pojęciowej", a tymi, którzy skupiają się na "wiedzy proceduralnej". Kiedy analizuje się błędy, jedni widzą je w związku z "nieporozumieniami pojęciowymi", inni kładą nacisk na "pluskwy proceduralne". Na jeszcze innym poziomie są próby budowania modeli inspirowanych przez zapożyczenia z "teorii poznania", które z kolei obejmują pojęcia z informatyki, psychologii i lingwistyki, a nawet meta-poznania i meta-ligwistyki. To, jak

błędy będą pojmowane i definiowane, zależeć będzie od wyboru teoretycznych konstrukcji pojęciowych użytych do budowania danego modelu interpretacyjnego.

W ostatnich latach zbudowano struktury wiedzy bardzo wysokiego rzędu, gdzie błędy można interpretować zupełnie nowymi sposobami. Jednym z przykładów są "ramy" zaproponowane po raz pierwszy przez Minsky'ego (1975). Książka Roberta Davisa (1986) szeroko pokazuje, jak ramy prowadzą do bardzo różnych interpretacji trudności i błędów. Inną strukturą naukową wysokiego rzędu, stworzoną przez Schranka na podstawie badań nad interpretacją sytuacji codziennych (w szczególności "opowiadań"), są "skrypty" (Schrank, 1984), które wydają się być szczególnie użyteczne do badania błędów występujących przy rozwiązywaniu zadań tekstowych. Najbardziej intrygujące są ostatnie propozycje Minsky'ego (1986) na temat "czynników myślenia" jako struktury teoretycznej do badania błędów (i bardzo wielu dalszych interesujących zagadnień!).

Nie zamierzam omawiać tutaj tych kierunków. Jest jednak jasne, że oddaliliśmy się znacznie od prymitywnego spojrzenia na błędy matematyczne z lat 1900-1970. Nie jest już dziś możliwe określenie "błędu" niezależnie od kontekstu i wyznaczonego systemu pojęciowego. Możemy borykać się dowoli z określeniem rzeczownika "błąd", lecz "błądzić" to czasownik, który starożytni zwięźle scharakteryzowali w przysłowiu "Błądzić jest rzeczą ludzką".

Bibliografia

Allardice i Ginsberg, 1983, Children's psychological difficulties in mathematics, w: Ginsberg (red.), The Development of Mathematical Thinking, Academic Press.

Ashlock, R., 1976, Error Patterns in Computation, Charles Merrill Publishing Co., Columbus, Ohio.

Baruk Stella, 1983, Echec et maths, Editions du Seuil, Paris.

Brueckner, L., 1930, Diagnostic and Remedial Teaching in Arithmetic, J. C. Winston.

Brueckner L. J., Elwell, M., 1932, Reliability of diagnosis of error in multiplication of fractions, Journal of Educational Research (Nov.).

Burrow, J. K., 1976, A Review of the Literature on Computational Errors with Whole Numbers. Dokument wydany przez: Mathematics Education Diagnostic and Instructional Center, The University of British Columbia, Vancouver.

Buswell, G. T., John, L., 1926, Diagnostic Studies in Arithmetic, Educational Monograph, Univ. of Chicago Press.

Buswell, G. T., Judd, C. H., 1925, Summary of Educational Investigations Relating to Arithmetic, The University of Chicago, Chicago.

Callahan, R., 1964, Changing Conceptions of Superintendency in Public Education, 1865-1964, Fifth Simpson Lecture, New England School Development Council.

Clapp, F. L., 1924, The Number Combinations.

Courtis, S.A., Measurement of growth and efficiency in arithmetic, Elementary School Teacher, X(1909), XI(1910), XI(1911).

Cox, L., 1974, Analysis, Classification and Frequency od Systematic Error Computation Patterns in Addition, Subtraction and Division, Vertical Algorithms for Grades 2-6 and Special Education Classes, Univ. of Kansas Medical Center, Kansas City, Kansas.

Davis, R., 1986, Learning Mathematics; The Cognitive Science Approach to Mathematics Education, Ablex Publishing Corporation.

Ginsburg, H., 1977, Children's Arithmetic, D. Van Nostrand Co., New York.

Gist, A. S., 1917, Errors in fundamentals of arithmetic, School and Society.

Graeber, A., Wallace L., 1977, Identification of Systematic Errors, Final Report, Research for Better Schools Inc., Philadelphia.

Grossnickle, F. E., 1939, Reliability of diagnosis of certain types of error in long division with a one-figure divisor, Journal of Experimental Education (Sept.).

Hall, G. S. Mansfied, J., 1893, Bibliography of Education, D.C. Heath, Boston.

Lankford, F., 1976, Some Computational Strategies of Seventh Grade Pupils, HEW, Office of Education, Washington.

Minsky, M., 1986, The Society of Mind, Simon and Schuster, New York.

Minsky, M., 1975, A Framework for Representing Knowledge, w: The Psychology of Computer Vision, McGraw-Hill, New York.

Monroe, W., 1918, Studies in Arithmetic, 1916-1917, Indiana University Studies, No. 36.

Myers, G. C., 1924, Persistence of errors in arithmetic, Journal of Educational Research (June).

Rice, J. M., Educational research: A test in arithmetic, Forum.

Rice, J. M., Educational research: Causes of success and failure in arithmetic, Forum XXXIV.

Robert, G., 1968, The failure strategies of third grade arithmetic pupils, The Arithmetic Teacher (May).

Schrank, R., 1984, The Cognitive Computer, Addison-Wesley.

Smith, J. H. 1916, Individual variations in arithmetic, Elementary School Journal.

Uhl, W. L., 1917, The use of standardized materials in arithmetic for diagnosing pupils method of work, Elementary School Journal (Nov.).

Vial, M., 1979, Les débuts de l'enseignement spéciale en France, SRESAS, Vol. 18, Institut Nationale de Recherche Pédagogique, Paris.

Z angielskiego tłumaczyli: Marianna Ciosek i Stefan Turnau.

ERRORS IN ARITHMETIC COMPUTATION: A CENTURY OF AMERICAN SPECULATION

Summary

The article is a panorama of research on children's mathematical errors, spanning the period between J. M. Rice's testing of spelling and arithmetic (1902) and Marvin Minsky's most recent idea of "agents of mind" (1986). It reprints and compares tables of classified errors in arithmetic based on different conceptual frameworks.