MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

МЕТОД РАЗРЕШЕНИЯ СЕМАНТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ АЛГОРИТМОВ

Ю. И. ЯНОВ

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, Москва, СССР

В начальный период развития теории алгоритмов главной семантической характеристикой алгоритма являлась вычисляемая им функция. Такой подход вполне соответствовал кругу задач этого периода. В дальнейшем, когда появились многочисленные приложения теории алгоритмов в различных математизированных областях науки, возникла необходимость положительного решения некоторых алгоритмически неразрешимых задач. Традиционный подход не дал здесь удовлетворительных результатов, поэтому получили распространение частичные решения, область применимости которых явно не описывалась. При этом как методы решений, так и многие задачи связаны уже не только с функциональной стороной алгоритма, но и с порождаемыми им вычислительными процессами. Например, в явном виде с вычислительными процессами связаны задачи получения оценок сложности вычислений. Таким образом, возникла необходимость фундаментального изучения систем вычислительных процессов, порождаемых алгоритмами. Здесь возможны два направления: во-первых, изучение процессов, порождаемых традиционными понятиями алгоритма, и во-вторых, построение и изучение общего понятия алгоритмического процесса. Настоящая работа возникла в рамках первого направления, причем в качестве основной модели в ней взяты машины Тьюринга. Однако большинство понятий и результатов без труда переносятся на любую другую модель алгоритма. В работе описан подход к проблеме разрешения семантических свойств алгоритмов, основанный на определенных преобразованиях систем вычислительных процессов, порождаемых алгоритмами. В терминах этого подхода возможно описание и изучение различных мер сложности алгоритмов и вычислений, включая традиционные. Доказательства теорем содержатся в [4] и [5].

1. Развертки алгоритмов

Всякий алгоритм применяется к определенному множеству конфигураций, в котором выделены два подмножества — начальных и заключительных конфигураций. Последовательность конфигураций, возникающая в результате применения алгоритма к какой-либо начальной конфигурации, называется вычислением или вычислительным процессом. Вычислительный процесс заканчивается, если в нем встречается заключительная конфигурация. В противном случае вычисление бесконечно. Множество всех вычислений, порождаемых данным алгоритмом, называется его *разверткой*. Развертка алгоритма содержит информацию о семантических свойствах алгоритма в более явном виде, чем его программа, однако сам по себе переход от программы алгоритма к его развертке еще не порождает разрешающих процедур для семантических свойств алгоритмов, поскольку развертки как правило бесконечны. В тех случаях, когда элементарные акты алгоритмов локальны, их развертки удобно представлять в виде ориентированных деревьев. Рассмотрим, например, машины Тьюринга с ленточным алфавитом $B = \{0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1\}$ и внутренними состояниями $s_0, s_1, s_2, \ldots$ Конфигурациями для них являются слова вида $\alpha s_i a \beta$, где $a \in B$, α, β — слова в алфавите B, s_i — внутреннее состояние. Двубуквенное подслово $s_i a$ будем называть *ядром* конфигурации $\alpha s_i a \beta$. Если $s_i = s_1$, то конфигурация называется начальной, если же $s_i = s_0$, то она называется заключительной. *Вычисление* для такой машины Тьюринга — это последовательность конфигураций, первая из которых является начальной, и каждая последующая получается из предыдущей применением одной команды из программы машины. Вычисление конечно тогда и только тогда, когда на некотором шаге будет получена заключительная конфигурация (к которой не применима ни одна из команд).

Развертку произвольной машины Тьюринга, т.е. множество всех ее вычислений, можно представить в виде дерева следующим образом. Пусть x обозначает переменную, значениями которой являются буквы ленточного алфавита B, и пусть B^* — множество всех слов в алфавите B. Слова вида $\alpha s_i x$ и $s_i x \beta$, где α, $\beta \in B^*$, будем называть обобщенными или кратными конфигурациями. Кратную конфигурацию $\alpha s_i x$ ($s_i x \beta$) мы рассматриваем как запись множества всевозможных конфигураций, содержащих подслово αs_i ($s_i a \beta$, где a — произвольная буква из B) и имеющих произвольное продолжение как влево, так и вправо. Таким образом, множество всех начальных конфигураций представляет обобщенная конфигурация $s_1 x$. Если простая конфигурация имеет не более одного непосредственного последователя (для детерминированных машин), то каждая незаключительная кратная конфигурация имеет ровно $k = |B|$ непосредственных последователей, соответствующих значениям переменной x. Таким образом, если исходить из обобщенной начальной конфигурации $s_1 x$, то мы получим ориентированное дерево, вершинами которого являются конфигурации (обычные или кратные), причем из каждой, незаключительной вершины выходят либо одна, либо k дуг. В последнем случае дуги помечаем буквами ленточного алфавита в соответствии со значениями переменной x. Такое дерево мы будем называть *вычислительным деревом* (ВД) для данной машины Тьюринга. Любое вычисление для рассматриваемой машины является последовательностью вершин в некоторой ветви ВД при условии, что переменная x в кратных конфигурациях заменена на соответствующую букву из алфавита B. Например, рассмотрим машину Тьюринга с ленточным алфавитом $\{0, 1\}$, заданную программой на рис. 1. ВД для этой машины изображено на рис. 2, где в рамки помещены заключительные конфигурации.

	0	1
s_1	$0Rs_1$	$0Rs_2$
s_2	$1Ls_3$	$1Rs_2$
s_3	$0Rs_0$	$1Ls_3$

Рис. 1

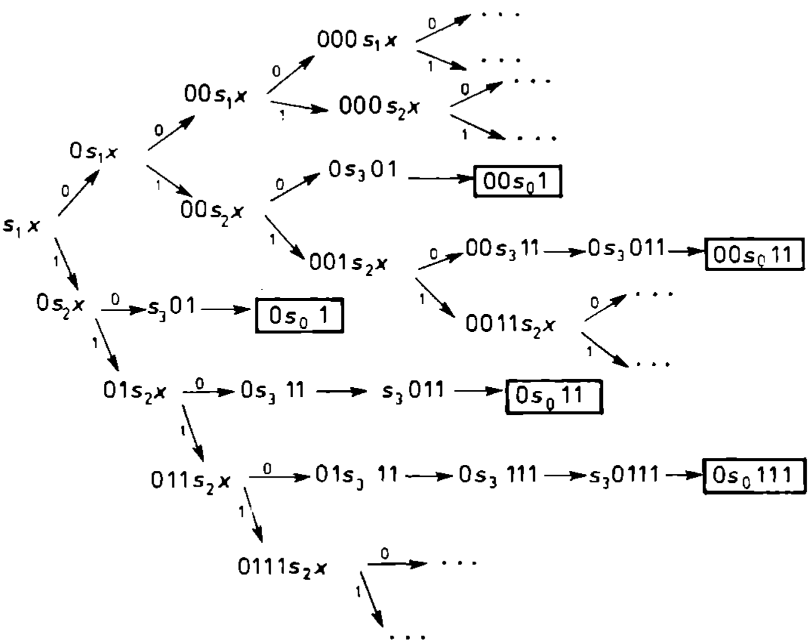

Рис. 2

2. Основная идея

Как известно, такие семантические свойства машин Тьюринга, как существенность команды (т.е. когда команда применяется хотя бы один раз), циклическая существенность (когда команда применяется бесконечное число раз), непустота или бесконечность множества конечных (бесконечных) вычислений и т. п. в классе всех машин Тьюринга алгоритмически неразрешимы. Ниже описывается подход, позволяющий разрешать подобные свойства либо частично (т. е. не во всем классе алгоритмов), либо относительно некоторых операций, которые не всегда эффективны. Подход позволяет также выделять подклассы алгоритмов, на которых та или иная проблема разрешима. Он может оказаться эффективным и в применении к индивидуальным алгоритмам. Основная идея указанного метода состоит в следующем. Если рассматривать развертки алгоритмов, то оказывается, что единственной причиной неразрешимости многих семантических свойств алгоритмов является бесконечность их разверток. Предположим, что имеется некоторая операция, которая бесконечные развертки преобразует в конечные графы. Такие операции мы называем сверточными операциями. Если в результате применения сверточной операции мы получаем конечный граф, который обладает или не обладает некоторым свойством P одновременно с исходной разверткой, и свойство P разрешимо на множестве конечных графов, то в классе тех алгоритмов, для разверток которых сверточная операция эффективна, свойство P разрешимо. .Важной особенностью этого подхода является то, что сверточные операции могут не сохранять никакие другие свойства разверток, кроме интересующего нас свойства P. Это позволяет получать разрешающие процедуры на более широких классах алгоритмов, чем если бы мы пользовались эквивалентными преобразованиями.

3. Общие понятия

Значительную часть предлагаемого аппарата удобно формулировать в более общих терминах, чем развертки машин Тьюринга или других конкретных алгоритмов. В частности, понятие ВД удобно включить в более общее понятие A, k-диаграммы.

Будем называть диаграммой ориентированный мультиграф (конечный или бесконечный), в котором (1) выделена одна начальная вершина, называемая корнем, (2) существует натуральное число k такое, что из каждой вершины выходит не более k дуг, и (3) в любую вершину существует (ориентированный) путь из корня.

Ветвью диаграммы назовем ориентированный путь из корня, который либо бесконечен, либо заканчивается в вершине, не имеющей последователей (такие вершины будем называть заключительными). Если v — вершина диаграммы D ($v \in D$), то будем обозначать через D_v

полную поддиаграмму диаграммы D, т. е. минимальный подграф, содержащий v и все ее последователи. Вершина v является корнем поддиаграммы D_v.

Поддиаграмму диаграммы D (не обязательно полную) будем называть висячей, если в ее внутренние вершины (т. е. отличные от ее корня) ведут только такие дуги, которые выходят из ее же вершин. Таким образом, если диаграмма является деревом, то любая ее поддиаграмма — висячая.

Пусть A — конечное или бесконечное множество, k — натуральное число. A, *k-диаграммой* назовем диаграмму, для которой выполнены следующие условия:

(1) каждой ее вершине приписан элемент множества A,

(2) из каждой вершины выходит не более k дуг, которым взаимно однозначно приписаны элементы множества $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Всякое ВД для машины Тьюринга является A, k-диаграммой, где A – множество конфигураций данной машины, а $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ — ленточный алфавит. Однако можно рассматривать и другие представления, например, в качестве A можно взять множество ядер конфигураций и тогда множество A будет конечным.

4. Φ-сверточные операции

Пусть Φ-бинарное отношение на множестве диаграмм. Определим Φ-сверточную операцию γ_Φ на множестве диаграмм следующим образом. Пусть D — диаграмма и D_u, D_v — ее полные поддиаграммы такие, что: (1) $D_u \Phi D_v$, (2) поддиаграмма D_u — висячая и (3) вершина v не является последователем вершины u. Тогда к диаграммам D, D_u, D_v применима Φ-сверточная операция γ_Φ и результатом ее применения является диаграмма $\gamma_\Phi(D, D_u, D_v) = D'$, которая получается из диаграммы D удалением поддиаграммы D_u и присоединением всех дуг, которые в диаграмме D вели в вершину u, к вершине v (см. рис. 3).

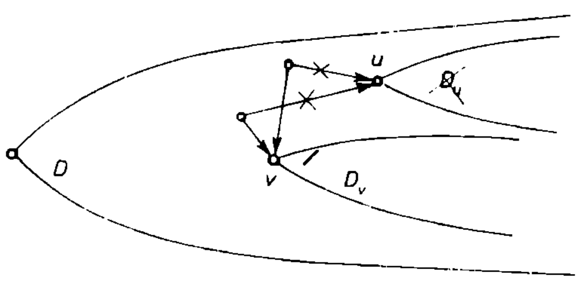

Рис. 3

Обозначим: $D \overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}} D' \Leftrightarrow \exists u, v(\gamma_\Phi(D, D_u, D_v) = D')$. Рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\overset{\Phi}{\underset{1}{\succ}}$ обозначаем через $\overset{\Phi}{\succ}$. Если $D \overset{\Phi}{\succ} D'$, то диаграмма D' называется Φ-сверткой диаграммы D.

Пусть Φ_1, Φ_2 — бинарные отношения на множестве диаграмм. Отношение Φ_1 называется Φ_2-устойчивым, если $\overset{\Phi_2}{\succ} \subseteq \Phi_1$, т. е. произвольная диаграмма и ее Φ_2-свертка находятся в отношении Φ_1. Отношение Φ будем называть устойчивым, если оно Φ-устойчиво.

Для устойчивых транзитивных отношений Φ можно дать довольно простой критерий существования конечных Φ-сверток для произвольных диаграмм. Назовем сечением диаграммы D такое множество V ее вершин (отличных от корня), что любая бесконечная ветвь без циклов содержит одну вершину из V. Обозначим: $D_V = \{D_v |\ v \in V\}$, $\bar{D}_V = D - D_v$, т. е. $\bar{D}_V$ получается из D удалением всех поддиаграмм из множества D_V.

В [5] доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть Φ-устойчивое транзитивное отношение на множестве диаграмм. Бесконечная диаграмма D имеет конечную Φ-свертку тогда и только тогда, когда в D существует конечное сечение V такое, что выполняются условия*: (1) *для любой вершины v из V поддиаграмма D_v висячая и* (2) *для любой вершины v из V в $\bar{D}_V$ найдется такая вершина v', что $D_v \Phi D_{v'}$.*

Из этой теоремы для диаграмм, являющихся деревьями, получаем следующее достаточное условие существования конечной Φ-свертки. Пусть Φ-бинарное отношение на множестве $\mathfrak{A}$. Подмножество $\mathfrak{B}$ множества $\mathfrak{A}$ назовем Φ-базисом множества $\mathfrak{A}$, если $\Phi^{-1}\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

Следствие из теоремы 1. Если множество всех полных поддеревьев дерева D имеет конечный Φ-базис, где отношение Φ такое же, как в теореме 1, то существует конечная Φ-свертка дерева D.

Устойчивость отношений является важным условием сохранения свойств диаграмм сверточными операциями. Пусть P — некоторое свойство (т. е. предикат) на множестве $\mathfrak{A}$ диаграмм (для простоты рассматриваем одноместное свойство P). Мы скажем, что бинарное отношение Φ сохраняет свойство P, если для любых диаграмм D и D' из $\mathfrak{A}$ условие $D\Phi D'$ влечет $P(D)\Leftrightarrow P(D')$.

Очевидно, что если отношение Φ_1, Φ_2-устойчиво и Φ_1 сохраняет свойство P, то и отношение $\overset{\Phi_2}{\succ}$ сохраняет свойство P. Поэтому верна следующая

Теорема 2. *Если Φ_2-устойчивое отношение Φ_1 сохраняет свойство P, разрешимое на конечных диаграммах, и существует эффективная проце-*

дура, дающая конечную Φ_2-свертку для произвольной диаграммы из некоторого множества диаграмм $\mathfrak{A}$, то свойство P разрешимо на множестве $\mathfrak{A}$.

5. Некоторые виды отношений на множестве A, k-диаграмм

Естественно, что отношения Φ, с помощью которых строятся сверточные операции, должны иметь содержательную связь с вычислениями и вычислительными деревьями. На языке A, k-диаграмм некоторые виды таких отношений можно определить следуюшим образом.

Если D-диаграмма, то обозначим через WD множество всех ее ветвей. Для произвольной ветви w, A, k-диаграммы обозначим через Aw последовательность элементов множества A, приписанных вершинам ветви w. Пусть имеются две A, k-диаграммы D_1 и D_2. Биекцию (инъекцию) φ: $WD_1 \to WD_2$ назовем строгой, если для произвольных ветвей w_1, w_2 из WD_1, у которых m-ые по порядку дуги различны, в ветвях φw_1, φw_2 для некоторого $n \leqslant m$, n-ые по порядку дуги различны.

Пусть f-бинарное отношение на множестве $A^{\circledast} = A^{*} \cup A^{\infty}$ конечных и бесконечных последовательностей элементов множества A. Назовем f-изоморфизмом I_f следующее отношение на множестве A, k-диаграмм: $D_1 I_f D_2 \Leftrightarrow$ существует строгая биекция φ: $WD_1 \to WD_2$ такая, что для любой ветви w из WD_1 выполняется отношение $AwfA\varphi w$. Если в этом определении в качестве φ взять строгую инъекцию WD_1 в WD_2, то мы получим отношение f-эндоморфизма, которое обозначим через I'_f.

Другие виды бинарных отношений на множестве A, k-диаграмм мы получаем путем ослабления требований к отображению φ. Если φ-функция, отображающая WD_1 на (в) WD_2, то соответствующее отношение на множестве A, k-диаграмм назовем f-гомоморфизмом D_1 на (в) D_2 и обозначим Ψ_f (Ψ'_f).

Наконец, если φ — произвольное отношение на $WD_1 \times WD_2$ такое, что $\forall\, w \in WD_1 (\varphi w \neq \varnothing)$ и $\varphi WD_1 = WD_2$ (или $\varphi WD_1 \subseteq WD_2$) (т. е. φ можно рассматривать как многозначную, отображающую множество WD_1 на (в) WD_2), то соответствующее отношение на множестве A, k-диаграмм обозначим Ω_f (Ω'_f) и назовем f-морфизмом D_1 на (в) D_2, а именно, $D_1 \Omega_f D_2$ $(D_1 \Omega'_f D_2) \Leftrightarrow \forall\, w \in WD_1 \forall\, w' \in \varphi w$ выполняется отношение $AwfAw'$.

Следующий вопрос, который здесь возникает, это вопрос о разумных отношениях f. В простейшем случае в качестве f может быть взято отношение какой-либо эквивалентности. Если в качестве f взять отношение равенства, то отношение I_f будет сохранять функцию ВД и потому конечные I_f-свертки будут получаться только в классе алгоритмов с разрешимым отношением функциональной эквивалентности, например, в классе конечных автоматов. Рассмотрим отношение $\sim$ на множестве вычислений, определяемое совпадением последовательностей ядер конфигураций, т. е.

$$\xi_1\xi_2\ldots\sim\xi'_1\xi'_2\ldots\Leftrightarrow Я\xi_1 Я\xi_2\ldots = Я\xi'_1 Я\xi'_2\ldots,$$

где $Я\xi$ — ядро конфигурации ξ. Для отношения $\Gamma'_\sim$ легко указать достаточно широкий класс машин Тьюринга, для вычислительных деревьев которых существует простой алгоритм получения конечных $\Gamma'_\sim$-сверток. Таким классом является класс так называемых циклических машин Тьюринга. Как известно, программу машины Тьюринга можно задать в виде диаграммы, аналогичной диаграмме Мура для конечного автомата. Машина Тьюринга называется циклической, если в ее диаграмме любой ориентированный цикл проходит через начальное состояние s_1. Пример такой машины изображен на рис. 4.

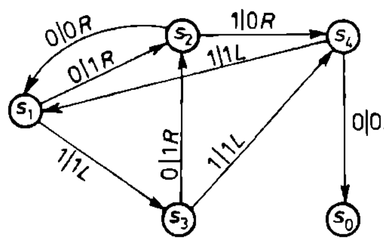

Рис. 4

Ясно, что в ВД произвольной циклической машины Тьюринга любая бесконечная ветвь проходит через вершину, отличную от корня и содержащую конфигурацию с начальным состоянием s_1. Но очевидно, что для любой конфигурации ξ с состоянием s_1 выполняется отношение: $D_\xi \Gamma'_\sim D_{s_1 x}$. Поэтому в силу теоремы 1 ВД любой циклической машины Тьюринга имеет конечную $\Gamma'_\sim$-свертку. Алгоритм получения такой свертки состоит в просмотре начальных отрезков ветвей, длины которых не превосходят длину максимального цикла в диаграмме машины.

Вернемся теперь к примеру ВД на рис. 2. Нетрудно убедиться, что

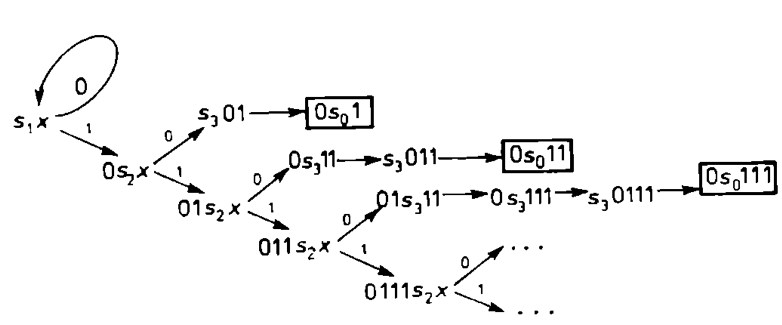

Рис. 5

в этом ВД поддерево с корнем $0s_1 x$ находится в отношении $I_{\sim}$ со всем ВД, поэтому мы можем применить к ним $I_{\sim}$-сверточную операцию. В результате мы получим диаграмму, изображенную на рис. 5. В этой диаграмме $I_{\sim}$-сверточная операция к бесконечным поддиаграммам уже не применима, поэтому конечной $I_{\sim}$-свертки мы не получим. Ниже мы рассмотрим другие отношения f на множестве вычислений, с помощью которых мы получим конечную I_f-свертку для этой диаграммы.

6. Отношения на множестве вычислений

Как это следует из предыдущего, построение устойчивых отношений на множестве диаграмм связано с построением подходящих отношений на множестве вычислений (или на его образе — множестве $A^{®}$). При этом необходимо иметь в виду сохранение определенных свойств вычислений. Например, во многих случаях требуется совпадение множеств ядер конфигураций до и после сверточных преобразований. Этому требованию удовлетворяют так называемые побуквенные отношения.

Пусть $\alpha \in A^{®}$. Обозначим: $|\alpha|$ — длина α, если $\alpha \in A^*$ и $|\alpha| = \infty$, если $\alpha \in A^\infty$. Если $1 \leqslant i \leqslant |\alpha|$, то $\alpha[i]$ будет обозначать i-й член последовательности α; $\alpha[1, i]$ — начало α длины i, т. е. $\alpha[1, i] = \alpha[1]\alpha[2] \ldots \alpha[i]$,

$$N_\alpha = \begin{cases} \{1, 2, \ldots, |\alpha|\}, & \text{если } \alpha \in A^*, \\ \{1, 2, \ldots\}, & \text{если } \alpha \in A^\infty. \end{cases}$$

Бинарное отношение $f \subseteq A^{®} \times A^{®}$ называется побуквенным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) $$\alpha f \beta \Rightarrow \alpha, \beta \in A^* \vee \alpha, \beta \in A^\infty,$$

(2) $\alpha f \beta \Rightarrow$ существует сюръекция ν множества N_α на множество N_β такая, что $\forall i \in N_\alpha$, $\alpha[i] = \beta[\nu i]$,

(3) $$\alpha, \beta \in A^* \& \alpha f \beta \& \gamma f \delta \Rightarrow \alpha\gamma f \beta\delta,$$

(4) отношение f рефлексивно и транзитивно.

Функцию ν из условия (2) будем называть функцией, осуществляющей отношение f для данных α и β.

Побуквенное отношение f называется отношением без предвосхищения, если для любых α, β таких, что $\alpha f \beta$, это отношение осуществляется функцией ν, удовлетворяющей условию:

(5) $$\forall i \in N_\alpha (\nu i \leqslant i).$$

Рассмотрим один важный пример побуквенного отношения без предвосхищения — отношение h. Для произвольных α, β из $A^{®}$ полагаем:

$\alpha h \beta \Leftrightarrow$ выполняются условия:

(6) $\alpha, \beta \in A^*$ или $\alpha, \beta \in A^\infty$,

(7) существует сюръекция ν: $N_\alpha \to N_\beta$ такая, что $\nu|\alpha| = |\beta|$ (если $\alpha, \beta \in A^*$), и $\forall\ i \in N_\alpha$, $\alpha[i] = \beta[\nu i]$, и если $\nu i > 1$ и $1 \leqslant m < \nu i$ то $\exists\ n < i$ такое, что $\nu n = m$.

Нетрудно убедиться, что h — побуквенное отношение без предвосхищения, причем на множестве A^* это отношение рекурсивно. Условие (7) эквивалентно тому, что β можно получить из α вычеркиванием некоторых не первых вхождений элементов множества A. Из определения отношения h следует, что I_h-сверточные операции (т. е. отношение $\overset{I_h}{\succ}$) сохраняют множество элементов из A, приписанных вершинам диаграмм, сохраняют также непустоту, конечность или бесконечность множества конечных ветвей и т. п. Одну важную особенность отношения h описывает следующая

Теорема 3. *Если множество A конечно, то любое подмножество множества $A^{\circledast}$ имеет конечный h-базис.*

Продемонстрируем на примере ВД на рис. 2, как можно получить для него конечную I_h-свертку, если считать, что вершинам ВД приписаны ядра соответствующих конфигураций, т. е. $A = \{s_i a|\ a \in \{0, 1, x\},\ 0 \leqslant i \leqslant 3\}$. Поскольку $I_\sim \subseteq I_h$, то диаграмма на рис. 5 является бесконечной I_h-сверткой ВД на рис. 2. В этой диаграмме, как нетрудно убедиться, $D_{011s_2x} I_h D_{01s_2x}$. Применив соответствующую операцию I_h-свертки, мы получим конечную диаграмму, изображенную на рис. 6.

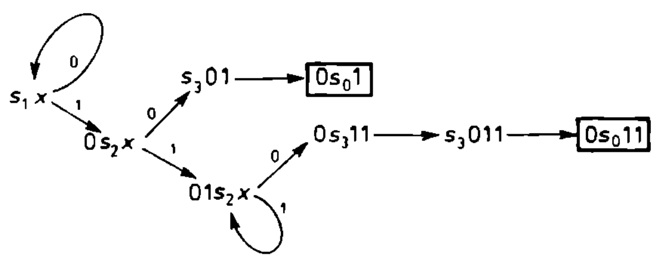

Рис. 6

По этой свертке мы можем заключить, что данная машина Тьюринга останавливается для бесконечного множества начальных конфигураций. Более того, если считать 0 пустой буквой, то из свертки видно, что машина останавливается для любой конечной начальной конфигурации (т. е. с конечным числом вхождений буквы 1). Поскольку в I_h-свертке встречаются все ядра команд рассматриваемой машины, а отношение h сохраняет множество ядер, то в программе машины все команды существенны.

7. Достаточные условия устойчивости

Устойчивость бинарных отношений на множестве диаграмм, помимо того, что она используется в теореме 1, представляет интерес еще и в силу того, что для устойчивого отношения Φ отношение $\overset{\Phi}{\succ}$ сохраняет все те свойства диаграмм, которые сохраняет Φ. Для разных видов отношений на множестве A, k-диаграмм, порождаемых побуквенными отношениями на множестве $A^{\circledast}$, некоторые достаточные условия устойчивости даются ниже в теореме 5.

Будем говорить, что последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, где для всех n $\alpha_n \in A^{\infty}$, сходится к α из A^{∞} (что обозначим: $\alpha_n \to \alpha$) если существует монотонно возрастающая арифметическая функция t, определенная на множестве N всех натуральных чисел, такая, что $\forall\, n \in N$, $\alpha_n[1, t(n)] = \alpha[1, t(n)]$.

Побуквенное отношение f называется замкнутым относительно предельного перехода, если для произвольной последовательности α_0, $\alpha_1, \ldots$, сходящейся к α, из того, что $\forall n$ $\alpha_0 f \alpha_n$ следует $\alpha_0 f \alpha$.

Теорема 4. *Если побуквенное отношение $f \subseteq A^{\circledast} \times A^{\circledast}$ замкнуто относительно предельного перехода, то отношения I'_f, Ψ'_f, Ω_f, Ω'_f устойчивы на множестве всех A, k-диаграмм, а отношения I_f и Ψ_f устойчивы на множестве таких A, k-диаграмм, для которых Φ-сверточные операции $\gamma_{\Phi}(D, D_v, D_u\}$, где $\Phi \in \{I_f, \Psi_f\}$, применимы только в таких случаях, когда вершина v не является последователем вершины u, либо диаграмма D_u состоит из одной ветви.*

Следует заметить, что способность сверточных операций сохранять свойства диаграмм зависит не только от операций, но и от самих свойств. Можно описать классы свойств, которые сохраняются весьма широкими классами сверточных операций.

8. Другие виды сверточных операций

Операция Φ-свертки является простейшей среди возможных преобразований диаграмм. Естественно, что для расширения класса диаграмм, имеющих конечные свертки, необходимо усилить сверточные операции, не забывая при этом о необходимости сохранения определенных свойств диаграмм. Мы рассмотрим одно естественное обобщение Φ-сверточных операций с помощью операции замены поддиаграмм. Пусть Φ — бинарное отношение на множестве диаграмм. Операция Φ-замены состоит в том, что какая-либо висячая полная поддиаграмма D_v диаграммы D заменяется диаграммой D'_v такой, что $D_v \Phi D'_v$. Если в результате одного применения такой операции к диаграмме D получается диаграмма D', то мы пишем: $D \xrightarrow[1]{\Phi} D'$. Рефлексивное и транзитивное замыкание отношения $\xrightarrow[1]{\Phi}$ обозначаем $\xrightarrow{\Phi}$. Устойчивое относительно этой операции отношение Φ (т. е. если $\xrightarrow{\Phi} \subseteq \Phi$) будем называть квазиконгруенцией. Симметричная квазиконгруенция является отношением эквивалентности и называется конгруенцией. Нетрудно доказывается следующая лемма.

Лемма. *Если f — побуквенное отношение, то все отношения $I_f, I'_f, \Psi_f, \Psi'_f, \Omega_f, \Omega'_f$ являются квазиконгруенциями.*

Пусть Φ_1, Φ_2 — бинарные отношения на множестве диаграмм. $Z\Phi_1, \Phi_2$-сверточной операцией назовем конечную композицию операций Φ_1-замены и Φ_2-свертки. Отношение, порождаемое этой операцией, обозначим $\overset{Z\Phi_1,\Phi_2}{\succ}$. Вместо $Z\Phi, \Phi$ будем писать $Z\Phi$.

О возможностях $Z\Phi_1, \Phi_2$-сверточных операций дает представление следующая теорема.

Теорема 5. *Если побуквенное отношение $f \subseteq A^{\circledast} \times A^{\circledast}$ таково, что любое подмножество множества $A^{\circledast}$ имеет конечный f-базис, то для любой A, k-диаграммы существует конечная $Z\Psi_f, I_f$-свертка.*

Отсюда и из теоремы 4 следует, что для конечного множества A любая A, k-диаграмма имеет конечную $Z\Psi_h, I_h$-свертку.

Из доказательства теоремы 5 извлекается тот факт, что для любой A, k-диаграммы D и ее $Z\Psi_f, I_f$-свертки D' выполняется отношение $D\Psi_f D'$, т. е. отношение Ψ_f устойчиво относительно $Z\Psi_f, I_f$-сверточных операций. Таким образом, из теоремы 5 следует, что существуют универсальные сверточные операции, которые дают конечные свертки для всех A, k-диаграмм и в то же время сохраняют некоторые нетривиальные свойства диаграмм. Это означает, что вопрос о разрешимости таких свойств в классе всех диаграмм сводится только к задаче эффективного получения конечных сверток. Универсальность в указанном смысле обладает определенной избыточностью, поскольку относится не только к разверткам алгоритмов, но к произвольным диаграммам. На самом деле можно описать сверточные операции, универсальные в более узком смысле, а именно, дающие конечные свертки только таких диаграмм, которые являются развертками алгоритмов.

9. Некоторые другие вопросы

По аналогии с конечными автоматами сложность минимальной конечной свертки ВД можно рассматривать как определенную меру сложности алгоритма. Эта мера отражает не только синтаксическую сложность самого алгоритма, но и сложность порождаемых им вычислительных процессов. Правда, для получения таких традиционных мер, как временная или ленточная сложность, необходимо рассматривать не просто свертки ВД, а последовательности сверток определенных начальных поддеревьев. Ряд результатов в этом направлении содержится в работе С. П. Юкны [6], который таким путем получил нижние оценки ленточной сложности представления некоторых языков машинами Тьюринга.

Другой круг вопросов связан с изучением различных моделей алгоритмов с точки зрения порождаемых ими систем вычислительных процессов. Если с функциональной точки зрения такие классы алгоритмов, как ОРС [3], машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова и машины Шефердсона–Стэджиса [2] эквивалентны, то как показал К. И. Костенко [1], относительно морфизмов разверток эти системы образуют строгую иерархию (в вышеуказанном порядке). Этот факт является еще одним подтверждением того, что системы вычислительных процессов, порождаемые алгоритмами, характеризуют алгоритмы более тонко, чем вычисляемые ими функции.

Литература

[1] К. И. Костенко, *Классы алгоритмов и вычислений*, ДАН СССР т. 280, №1 (1985).

[2] J. C. Shepherdson, H. E. Sturgis, *Computability of recursive functions*, J. ACM 10 (1963).

[3] H. R. Strong, *Algebraically generalized recursive function theory*, IBM J. Res. Devel 12 (1968), 465–475.

[4] Ю. И. Янов, *Метод сверток для разрешения свойств формальных систем*, Препринт ИПМ АН СССР 11 (1977).

[5] —, *Несколько теорем о свертках*, Препринт ИПМ АН СССР 95 (1978).

[6] S. P. Jukna, *Convolutional characterization of computability and complexity of computations*, Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai. Theory of algorithms (1984, Pecs, Hungary) 44 (1985).

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computational Theory
September 16–December 14, 1985