MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

О РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ ПЛОСКИМИ И ОБЪЕМНЫМИ СХЕМАМИ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Н. А. ШКАЛИКОВА

Московский энергетический институт, Москва, СССР

В работе рассматриваются схемы из так называемых *клеточных функциональных элементов плоских* и *объемных* (см. [1]).

Допустимые типы элементов плоских схем (три функциональных и три коммутационных) изображены на рисунке 1.

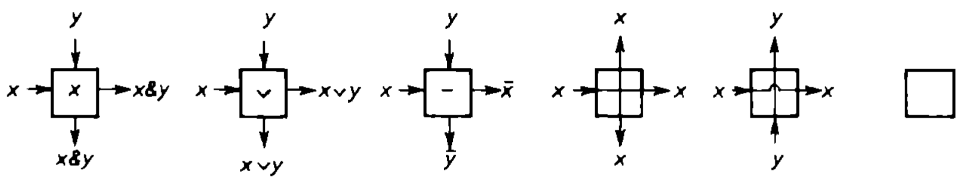


Рис. 1.

Каждый элемент имеет форму единичного квадрата. Каждому функциональному элементу ставятся в соответствие „обычные" функциональные элементы, рассматриваемые, например, в работе [3]. Первые два коммутационные элемента являются „проводниками". Третий элемент является изолятором. Прямоугольник, составленный из таких элементов (каждый элемент может быть повернут на плоскости) будем называть схемой, если при замене клеточных элементов на обыкновенные получим некоторую структуру, удовлетворяющую определению схемы из функциональных элементов, данному в работе [3]. Сложностью схемы будем называть ее площадь.

В работе С. С. Кравцова [1] показано, что для любой булевой функции можно построить реализующую ее плоскую схему и установлено, что порядок соответствующей функции Шеннона равен 2^n.

В данной работе приводятся точные по порядку оценки сложности схем для некоторых конкретных булевских функций и системы булевских функций.

Обозначим через $K(n)$ минимальное число элементов, достаточное для построения схемы, реализующей систему K_n всех конъюнкций $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}\ldots x_n^{\sigma_n}$. Кравцовым в [1] построена схема, реализующая систему K_n, имеющая сложность по порядку равную $n2^n$.

Геометрически эта схема имеет вид, изображенный на рис. 2.

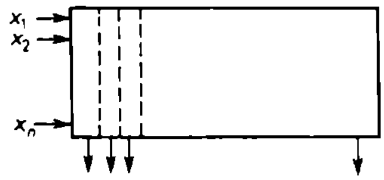


Рис. 2

Переменные x_i проходят через схему слева направо, и в соответствующих столбцах реализуются конъюнкции.

Нижняя оценка. Рассмотрим произвольную схему, реализующую K_n. Очевидно в схеме имеется некоторая сторона h, на которой расположено по крайней мере $n/4$ входов. Аналогично, в схеме имеется некоторая сторона r на которой расположено по крайней мере $2^n/4$ выходов.

Пусть стороны h и r параллельны или совпадают. В этом случае рассечем схему отрезком прямой d, перпендикулярным стороне h, на две подсхемы I и II так, чтобы по обе стороны отрезка было не менее $(n/8)-1$ входов. Покажем, что ширина схемы (то есть количество элементов по отрезку d) имеет порядок n. Тем самым утверждение будет доказано.

Действительно, пусть для определенности в подсхеме II имеется не менее выходов, чем в подсхеме I.

Так как в подсхеме I имеется не менее $(n/8)-1$ входов, то в подсхеме II их не более $\frac{7}{8}n+1$.

Очевидно, что подавая на входы схемы 2^n различных наборов длины n на выходах будем получать 2^n различных набора длины 2^n, каждый из которых состоит из единицы в одном из разрядов и 2^n-1 нулей.

Выделим произвольные 2^{n-1} выходов схемы, расположенных в подсхеме II. Очевидно, что среди 2^n различных выходных наборов 2^{n-1} наборов имеют единицу в разряде, соответствующем одному из выделенных выходов схемы.

Рассмотрим подсхему II. Из сказанного выше следует, что среди всех выходных наборов подсхемы II найдется не менее 2^{n-1} различных (содержащих единицу в одном из разрядов, соответствующих выделенным выходам). Поэтому и среди входных наборов подсхемы II должно быть также не менее 2^{n-1} различных наборов, так как различные выходные наборы могут быть получены только при различных входных. Из сказанного следует, что входные наборы подсхемы II должны состоять не менее, чем из $n-1$ разрядов, а это значит, что количество входов подсхемы II не менее чем $n-1$. Далее, из того, что подсхема II содержит не более $\frac{7}{8}n+1$ входов всей схемы, следует, что по крайней мере $\frac{1}{8}n-2$ входов подсхемы II расположены на отрезке d, то есть отрезок d имеет длину не менее, чем $\frac{1}{8}n-2$. Тем самым доказана.

Теорема 1. $K(n)\asymp n2^n$.

Обозначим через $V(n)$ минимальное количество элементов, достаточное для построения схемы, реализующей одновременно все функции от n переменных.

Теорема 2. $V(n)\asymp n2^{2^n}$.

Для получения верхней оценки упорядочим все функции от n переменных так, чтобы их дизъюнктивные нормальные формы отличались только на одну конъюнкцию (это можно сделать, используя код Грея). В предлагаемой схеме набор входных переменных проходит схему слева направо и в каждом столбце реализуется нужная конъюнкция и новая функция (см. рис. 3).

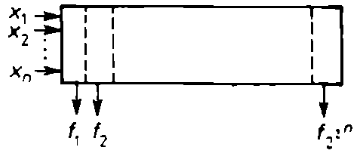


Рис. 3

Нижняя оценка может быть получена методом, описанным выше.

Обозначим через $T(n)$ — минимальное количество элементов, достаточное для построения схемы умножения двух n-разрядных чисел.

Теорема 3. $T(n)\asymp n^2$.

Верхнюю оценку легко получить, моделируя „школьный" алгоритм умножения двух n-разрядных чисел „столбиком".

Для доказательства нижней оценки рассмотрим схему умножения, когда первый сомножитель равен 2^k ($k=0, 1, \ldots, n-1$). Заметим, что в этом случае результатом умножения будет второе число, сдвинутое на k разрядов влево.

Рассмотрим произвольную схему, реализующую умножение двух n-разрядных чисел. Будем рассматривать n входов только второго числа и $(2n-1)$ выходов (все, кроме выхода, соответствующего старшему разряду). Очевидно, в схеме имеется сторона r, содержащая на менее $\frac{1}{4}n$ входов.

Рассечем схему отрезком, перпендикулярным стороне r так, чтобы обе получившиеся подсхемы I и II имели не менее $\frac{1}{8}n-1$ входов. Одна из этих подсхем имеет не менее $n-1$ выходов; пусть, для определенности, это подсхема I. Для доказательства теоремы достаточно показать, что порядок длины отрезка d не менее n.

Очевидно, что если информация, подаваемая на входы подсхемы II должна быть передана в подсхему I, то граница между подсхемами должна иметь ширину не меньшую, чем число входов, с которых подается информация.

Можно доказать, что для произвольных $\frac{1}{8}n-1$ фиксированных входов и для произвольных $n-1$ фиксированных выходов схемы можно подобрать такое натуральное число d, что при сдвиге на d разрядов информация по крайней мере с $((\frac{1}{8}n-2)^2)/8n$ фиксированных входов будет передаваться на фиксированные выходы. То есть через сечение схемы проходит поток информации ширной по порядку не менее n.

Обозначим через $П(n)$ минимальное количество элементов, достаточное для синтеза схемы, реализующей любую наперед заданную перестановку с повторениями набора длины n.

Теорема 4. $П(n) \asymp n^2 \log_2 n$.

Для получения верхней оценки можно воспользоваться схемой реализующей все конъюнкции от n переменных, предложенной Кравцовым [1]. Основой схемы являются n таких схем (блоков), расположенных в столбец. Входной набор подается сверху, управляющая информация, задающая перестановку, подается слева. В первом блоке формируется информация, которая будет подаваться на первый выход, на втором блоке — на второй выход и т.д. Слева в i-й блок подается набор длины $]\log_2(n+1)[$ являющийся кодом номера разряда, информация с которого будет подана на i-й выход. Сложность схемы по порядку равна $n^2\log_2 n$. (См. рис. 4.)

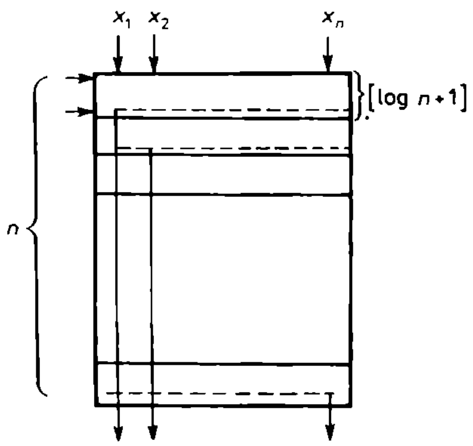


Рис. 4

Нижнюю оценку можно получить приведенным выше рассуждением, учитывая, что число перестановок набора длины n не меньше чем $n!$, а значит код перестановки (подаваемый справа) будет иметь длину не менее, чем $]\log_2 n![$. Далее, следуя описанному выше рассуждению, находим сторону, содержащую по крайней мере $\frac{1}{4}]\log_2 n![$ входов, а затем находим сечение схемы, через которое проходит поток информации ширины порядка n от входов к выходам, расположенным по разные стороны от сечения. Учитывая, что $\log_2 n! \asymp n\log_2 n$, получаем требуемую оценку.

Во всех рассмотренных случаях нижние оценки были получены методом, который кратко можно описать следующим образом.

Находим сторону, длина которой по порядку равна максимальному из чисел входов и выходов. Затем находим перпендикулярное этой стороне сечение, которое отделяет „большое" количество входов от „большого" количества выходов, так что при некоторых условиях все входы должны быть „соединены" со всеми выходами.

Для схем, имеющих один выход этот метод не пригоден, так как потока информации от входов к выходам нет.

Для получения нижних оценок сложности схем с одним выходом докажем два вспомогательных утверждения.

Рассмотрим произвольную схему из функциональных элементов. Пару $t = (b_i, b_j)$ где b_i входной полюс или элемент схемы, а b_j элемент схемы, будем называть каналом схемы, если (при образовании схемы) b_i отождествлен (то есть соединен) с некоторым входным элементом b_j.

Схему, в которой множество входных полюсов и элементов схемы разбито на два подмножества M_1 и M_2 так, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ и каждое из подмножеств содержит по крайней мере один полюс, будем называть *рассеченной*. Канал (b_i, b_j) рассеченной схемы будем называть рассеченным, если b_i и b_j принадлежат разным множествам M_1 и M_2. Множество всех рассеченных каналов будем называть *сечением схемы*.

Нам будет удобно входной набор рассеченной схемы представлять в виде пары наборов $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, где $\bar{\alpha}$ — набор состояний входов, принадлежащих M_1, а $\bar{\beta}$ набор состояний входов, принадлежащих M_2.

Состоянием сечения на некотором входном наборе $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ будем называть совокупность состояний всех рассеченных каналов (обозначение $S(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$).

Лемма 1. *Пусть в рассеченной схеме для некоторых двух входных наборов* $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ *и* $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$ *имеет место равенство*

$$S(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2).$$

Тогда

$$S(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) = S(\bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_2) = S(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2).$$

Лемма является схемным аналогом метода следов для машин Тьюринга.

Обозначим через $F_1(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ и $F_2(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ совокупности состояний выходов схемы, соответствующих выходам элементов, принадлежащим соответственно множествам M_1 и M_2 при входном наборе $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Обозначим через $F(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ набор состояний выходов схемы при входном наборе $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, а через $|S|$ количество элементов в сечении S рассеченной схемы.

Следствие. Если $S(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = S(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2)$, то

$$F_1(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) = F_1(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2); \qquad F_2(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_2) = F_2(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2).$$

Рассмотрим произвольную рассеченную схему из функциональных элементов.

Пусть $P = \{(\bar{\alpha}_1^1, \bar{\alpha}_2^1); (\bar{\alpha}_1^2, \bar{\alpha}_2^2); (\bar{\alpha}_1^3, \bar{\alpha}_2^3); \ldots (\bar{\alpha}_1^n, \bar{\alpha}_2^n)\}$ некоторое множество входных наборов, где $\bar{\alpha}_1^i$ и $\bar{\alpha}_2^i$ наборы, подаваемые на входы, принадлежащие соответственно множествам M_1 и M_2. Обозначим через P^* множество всех наборов $(\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^j)$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Лемма 2. *Пусть для рассеченной схемы с сечением S найдется множество входных наборов P таких, что*

(1) $|P| = n$,

(2) *для всех наборов $\bar{\alpha}^i = (\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^i)$ из P выходные наборы схемы совпадают (и равны, скажем, наборы $\bar{\gamma}$),*

(3) *для любого набора $\bar{\beta}$, из P^*, $F(\bar{\beta}) \neq \bar{\gamma}$.*

Тогда $|S| \geqslant \log_2 n$.

Обозначим через $B(n)$ минимальное количество элементов, достаточное для реализации любой симметрической функции.

Теорема 5. $B(n) \asymp n \log_2 n$.

Для получения верхней оценки можно взять схему, составленную из двух блоков. Первый блок вычисляет число единиц в наборе длины n (набор подается сверху). На выходе блока реализуется набор длины $]\log_2(n+1)[$, являющийся двоичной записью числа единиц (выходы справа). Второй блок является схемой, реализующей все конъюнкции от $]\log_2(n+1)[$ переменных. При правильном пространственным присоединении блоки составляют схему, реализующую все элементарные симметрические функции. „Соединяя" нужные выходы легко получить любую симметрическую функцию от n переменных. На основе этой схемы легко построить схему, реализующую любую наперед заданную симметрическую функцию. Для этого достаточно подвести управляющую информацию, являющуюся кодом заданной функции, и выделить и объединить нужные выходы для элементарных симметрических функций. Сложность схемы во всех случаях по порядку равна $n \log_2 n$.

Для получения нижней оценки рассмотрим элементарную симметрическую функцию, принимающую значение единица на наборах имеющих $[\frac{1}{2}n]$ единиц и 0 на остальных.

Покажем, что эта функция требует для своей реализации сложности по порядку не меньшей чем $n\log_2 n$.

Пусть схема реализует заданную функцию. Существует сторона, содержащая по крайней мере $\frac{1}{4}n$ входов. Рассечем схему отрезком, перпендикулярным этой стороне так, чтобы по обе стороны отрезка было не менее $[\frac{1}{2}(n-1)]$ входов. (В случае, когда это не возможно утверждение очевидно). Докажем, что сечение схемы имеет длину по порядку равную $n\log_2 n$.

Пусть $P = \{(\bar{\alpha}_1^1, \bar{\alpha}_2^1); (\bar{\alpha}_1^2, \bar{\alpha}_2^2); (\bar{\alpha}_1^3, \bar{\alpha}_2^3); \ldots; (\bar{\alpha}_1^{[\frac{n}{2}]}, \bar{\alpha}_2^{[\frac{n}{2}]})\}$ множество входдных наборов схемы, где $\bar{\alpha}_1^i$ и $\bar{\alpha}_2^i$ поднаборы, подаваемые на входы полученных после сечения подсхем I и II, причем набор $\bar{\alpha}_1^i$ состоит из i единиц и остальных нулей, а набор $\bar{\alpha}_2^i$ состоит из $[\frac{1}{2}n]-i$ единиц и остальных нулей. Очевидно, что в наборе $(\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^i)$ содержится ровно $[\frac{1}{2}n]$ единиц, а в наборе $(\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^j)$, где $i \neq j$ число единиц не равно $[\frac{1}{2}n]$. Поэтому при входном наборе $(\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^i)$ на выходе схемы реализуется 1, а при входном наборе $(\bar{\alpha}_1^i, \bar{\alpha}_2^j)$ где $i \neq j$ на выходе схемы реализуется 0.

Таким образом все условия леммы 2 выполнены. Значит сечение схемы состоит не менее чем из $\log_2[\frac{1}{2}n]$ рассеченных каналов, что и требовалось доказать.

Из доказанного утверждения следует нижняя оценка для всех элементарных симметрических функций, любой симметрической функции и т.д.

Рассмотрим так называемые объемные схемы из функциональных элементов. Схемой будем называть параллелепипед, составленный из указанных элементов (см. рис. 5), так, чтобы ему естественным образом можно было поставить в соответствие схему из функциональных элементов. Элементы могут быть повернуты в пространстве, входы и выходы расположены на гранях, сложностью схемы будем называть ее объем.

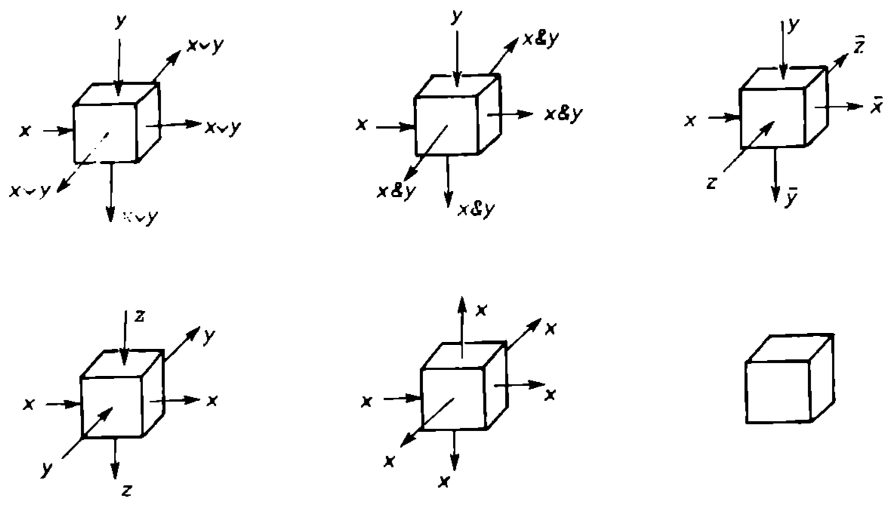


Рис. 5

Введем следующие обозначения.

1. F — некоторая система функций.

2. $L_2(P)$ — (соответственно $L_3(P)$) — сложность плоской (соответственно объемой) схемы P.

3. $L_2(F) = \min L_2(P)$, где минимум берется по всем плоским схемам P, реализующим систему функций F.

4. $L_3(F) = \min L_3(P)$, где минимум берется по всем объемным схемам P, реализующим систему функций F.

5. $\mathfrak{M}_3(V)$ — множество систем функций F, для которых $L_3(F) \leqslant V$.

6. $\mathfrak{M}'_3(V)$ — множество функций f, для которых $L_3(f) \leqslant V$.

7. $A_{23}(V) = \max\limits_{F\in\mathfrak{M}_3(V)} L_2(F)$.

8. $A'_{23}(V) = \max\limits_{f\in\mathfrak{M}'_3(V)} L_2(F)$.

Очевидно, что $A'_{23}(V) \leqslant A_{23}(V)$.

Теорема 6. $A_{23}(V) \asymp V^{3/2}$.

Теорема 7. $A'_{23}(V) \asymp V^{3/2}$.

Для получения верхних оценок разработан метод, позволяющий для любой объемной схемы, имеющей объем V, построить эквивалентную плоскую схему, имеющую сложность по порядку не более $V^{3/2}$.

Для получения нижних оценок воспользуемся методом сечений, описанным выше.

Рассмотрим набор функций $Q = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{nn}\}$, где $f_{ij} = t_{ij} \vee (x_{ij} \oplus y_i \oplus z_j)$; $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

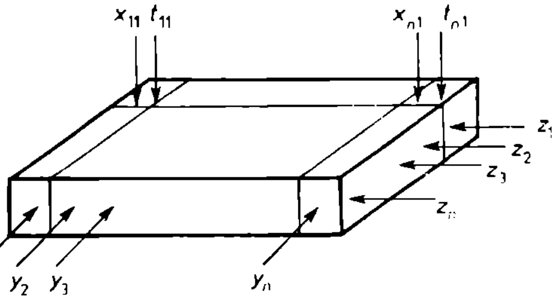


Рис. 6

Объемую схему, реализующую данный набор функций можно построить со сложностью по порядку равной n^2. Общий вид схемы изображен на рисунке 6. Верхняя грань имеет площадь по порядку равную n^2, а высота схемы конечна.

Рассмотрим функцию $f = f_{11} \& f_{12} \& f_{13} \& \ldots \& f_{nn}$.

Схему, реализующую функцию можно построить также со сложностью по порядку равной n^2.

Для доказательства нижней оценки рассмотрим произвольную плоскую схему, реализующую данную функцию. Очевидно, что в схеме найдется сторона, содержащая не менее $\frac{1}{4}n^2$ входов для переменных x_{ij}.

Обозначим эту сторону через d. Возможны два случая.

1. Одна из сторон, перпендикулярных стороне d, содержит не менее $\frac{1}{3}n^2$ входов для переменных x_{ij}. В этом случае сложность схемы по порядку равна n^4, и утверждение доказано.

2. Каждая из сторон, перпендикулярных стороне d содержит менее $\frac{1}{3}n^2$ входов для переменных x_{ij}.

Разделим схему отрезком прямой, перпендикулярным стороне d так, чтобы по обе стороны отрезка, то есть в каждой получившейся части схемы, было не менее $[\frac{1}{2}n^2]-1$ ходов для переменных x_{ij}. Назовем полученные в результате разделения две части схемы соответственно правой и левой.

Очевидно, что по крайней мере одна из этих двух частей содержит не менее n входов для переменных y_j и z_j вместе. Пусть это будет левая часть.

Можно доказать, что верно одно из следующих двух утверждений.

1. В правой части найдется $n/20$ входов для переменных $x_{i_1j_1}$, $x_{i_2j_2}$, $x_{i_3j_3}$, $\ldots$, $x_{i_{n/20}j_{n/20}}$, а в левой — $n/20$ входов для переменных y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}, $\ldots$, $y_{k_{n/20}}$, удовлетворяющих соотношениям $k_v = i_v$, где $1 \leqslant v \leqslant n/20$.

2. В правой части найдется $n/20$ входов для переменных $x_{i_1j_1}$, $x_{i_2j_2}$, $x_{i_3j_3}$, $\ldots$, $x_{i_{n/20}j_{n/20}}$, а в левой части $n/20$ входов для переменных z_{t_1}, z_{t_2}, z_{t_3}, $\ldots$, $z_{t_{n/20}}$, удовлетворяющих соотношениям $t_v = j_v$, где $1 \leqslant v \leqslant n/20$.

Для определенности будем считать, что выполняется условие 1.

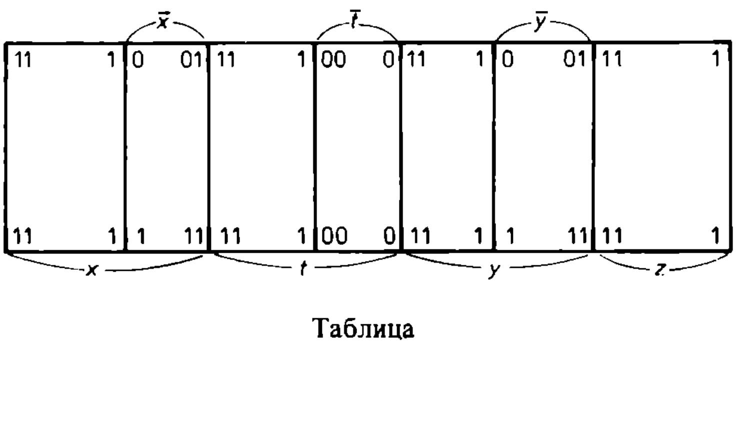
Обозначим для удобства наборы

$$x_{i_1j_1},\ x_{i_2j_2},\ x_{i_3j_3},\ \ldots,\ x_{i_{n/20}j_{n/20}},$$

$$t_{i_1j_1},\ t_{i_2j_2},\ t_{i_3j_3},\ \ldots,\ t_{i_{n/20}j_{n/20}},$$

$$y_{k_1},\ y_{k_2},\ y_{k_3},\ \ldots,\ y_{k_{n/20}},$$

где $i_v = k_v$ соответственно через $\bar{x}$, $\bar{t}$ и $\bar{y}$.



Таблица

Рассмотрим $2^{n/20}$ различных входных набора $\bar{\alpha}(0), \bar{\alpha}(1), \bar{\alpha}(2), \ldots$ $\ldots, \bar{\alpha}(2^{n/20}-1)$, где $\bar{\alpha}(i)$ есть входной набор, у которого все переменные z_i равны 1, переменные t_{ij}, входящие в набор $\bar{t}$, равны 0, остальные переменные t_{ij} равны 1, переменные x_{ij}, не входящие в набор $\bar{x}$, равны 1, переменные y_k, не входящие в набор $\bar{y}$, равны 1, наборы переменных, соответствующие входам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ представляют собой двоичную запись числа i с нулями в „неиспользованных" старших разрядах (см. таблицу).

Обозначим через $l(\bar{\alpha}(i))$ и $r(\bar{\alpha}(i))$ входные поднаборы набора $\bar{\alpha}(i)$, подаваемые соответственно на левую и правую части схемы.

Заметим, что на всех входных наборах $\bar{\alpha}(i)$ функция принимает значение 1, а на любом входном наборе $\big(l(\bar{\alpha}(i)), r(\bar{\alpha}(j))\big)$, где $i \neq j$, функция принимает значение 0.

Обозначим через M_1 и M_2 входы схемы и функциональные элементы, расположенные соответственно в левой и правой частях схемы, а в качестве рассеченных каналов будем рассматривать проводники, составленные из коммутационных элементов, осуществляющие связь между левой и правой частями схемы.

Очевидно, что рассматриваемая схема удовлетворяет определению рассеченной схемы.

Рассмотрим отрезок, разделяющий схему на две части. Очевидно, что длина этого отрезка не меньше, чем число рассеченных каналов.

Воспользуемся леммой 2. В качестве множества P возьмем $2^{n/20}$ входных наборов $\bar{\alpha}(i)$, а в качестве множества P^* возьмем множество входных наборов вида $\big(l(\bar{\alpha}(i)), r(\bar{\alpha}(j))\big)$, где $i \neq j$. Легко убедиться, что условия леммы 2 для рассматриваемых функций, схемы и входных наборов P и P^* выполнены.

Таким образом получаем, что ширина схемы должна быть не меньше, чем $n/20$, а сложность всей схемы — не меньше чем $C \cdot n^3$.

Нижнюю оценку сложности схемы, реализующей одну функцию f можно получить аналогично.

Таким образом получена оценка соотношения сложностей плоских и объемных схем из функциональных элементов, а также нижняя оценка по порядку равная $n^{3/2}$ для функции от n переменных.

Подробные доказательства приведенных результатов можно найти в работах автора [2] и [4].

Литература

[1] С. С. Кравцов, *О реализации булевых функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов*, Сб. Проблемы кибернетики, вып. 19.

[2] Н. А. Шкаликова, *О сложности реализации некоторых функций клеточными схемами*, Сборник работ по математической кибернетике, вып. 1 (1976), Академия наук СССР.

[3] О. Б. Лупанов, *Об одном методе синтеза схем*, Известия ВУЗ, Радиофизика 1, №1 (1958).

[4] Н. А. Шкаликова, *О соотношении сложностей плоских и объемных схем из функциональных элементов. Методы дискретного анализа в исследовании функциональных систем*, Новосибирск 1982.

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computation Theory
September 16–December 14, 1985