COMPUTATIONAL MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

КОНСТРУИРОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

ЮРИЙ ШОКИН

Вычислительный Центр СО АН СССР,
Красноярск, СССР

1

Практика решения задач прикладной механики показывает, что без создания новых эффективных конечно-разностных алгоритмов, а также методов анализа разностных схем, нельзя получить решение многих классов важных прикладных задач. Появление и практическое использование большого количества разностных схем привело к повышению роли критериев отбора и сравнения схем.

Одним из эффективных методов построения разностных схем с заданными свойствами является метод дифференциального приближения, нашедший в настоящее время широкое применение. Эффективность метода подтверждена обширной практикой. Возможность использования дифференциальных приближений при исследовании разностных схем впервые была указана в 50-х годах А. И. Жуковым для случая простейшего уравнения переноса с постоянными коэффициентами. В 1968 году в работах автора и Н. Н. Яненко было сформулировано понятие первого дифференциального приближения (п.д.п.) для произвольной разностной схемы с постоянными коэффициентами и доказаны теоремы о связи устойчивости простых и мажорантных схем и корректности их п.д.п. для гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка. Впоследствии идея использования дифференциальных приближений при анализе свойств схем получила широкое развитие в исследованиях автора и Н. Н. Яненко, а также в исследованиях других советских и зарубежных математиков. Метод дифференциального приближения позволяет строить новые разностные схемы с заранее определенными свойствами, проводить анализ разностных схем, сравнивать их между собой, а также классифицировать их по определенным признакам.

Литература по методу дифференциального приближения насчитывает в настоящее время свыше 170 наименований. Большинство результатов этих исследований носит эвристический характер, и правильность их подтверждена многочисленными расчетами. Теоремы о связи устойчивости разностных схем и свойств п.д.п. в случае гиперболических систем уравнений доказаны автором и Н. Н. Яненко. Устойчивость разностных схем исследуется методом дифференциального приближения в работах автора, Н. Н. Яненко и их учеников, Н. Н. Анучиной, О. М. Белоцерковского и Ю. М. Давыдова, Т. Харлоу, Ц. Хирта и др. Метод дифференциального приближения оказался весьма полезным при анализе дисперсионных свойств разностных схем. Особенно это видно при исследовании свойств разностных схем методом типа „частиц в ячейке" в работах Н. Н. Анучиной, В. Е. Петренко, Н. Н. Яненко и автора, О. М. Белоцерковского, Ю. М. Давыдова и их учеников, Т. Харлоу и его учеников. На основе дифференциальных приближений в исследованиях Н. Н. Яненко и его учеников развита методика дифференциального анализатора, нашедшего применение при локализации скачков в разностных решениях. Автором, Н. Н. Яненко и А. И. Урусовым предложен метод построения схем на произвольной сетке на основе разностной схемы, заданной на равномерной сетке, основанный на анализе дифференциальных приближений схем. Ан. Г. Марчуком, З. И. Федотовой и автором исследован вопрос о связи свойств п.д.п. и свойства полной консервативности разностных схем в смысле А. А. Самарского – Ю. П. Попова. В работах автора и Н. Н. Яненко введено понятие инвариантных разностных схем, то есть схем, п.д.п. которых допускает некоторую группу преобразований. Практика расчетов показывает, что неинвариантность разностных схем относительно группы преобразований, допускаемых исходной системой дифференциальных уравнений, приводит к нежелательным счетным эффектам, существенно искажающим картину изучаемого физического явления. Автором получено необходимое и достаточное условие инвариантности разностных схем в терминах п.д.п., совместно с Н. Н. Яненко построены классы инвариантных разностных схем для уравнений одномерной и двумерной газовой динамики, результаты расчетов по которым приведены в работах автора, Н. Н. Яненко и З. И. Федотовой. Б. И. Леви, Я. М. Зайделем, В. М. Санкиным продемонстрирована важность использования интервальных разностных схем при численном моделировании задач фильтрации. Основные результаты по методу дифференциального приближения изложены в монографии [1].

2

Сформулируем понятия дифференциального представления и дифференциального приближения разностных схем.

Пусть разностная схема

$$\Lambda_1 u^{n+1}(x) = \Lambda_0 u^n(x) \tag{1}$$

аппроксимирует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Zu. \tag{2}$$

Здесь оператор Λ_1 обратим, $Z = Z(t, x, D)$, $\Lambda_k = \Lambda_k(t, x, \tau, h, T)$ $(k = 0, 1)$, $D = \frac{\partial}{\partial x} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right\}$, $T = \{T_1, \ldots, T_s\}$, $x = \{x_1, \ldots, x_s\} \in R_s$, $h = \{h_1, \ldots, h_s\}$, $t = n\tau$, τ — шаг по оси t, h_j — шаг по оси x_j, T_j —оператор сдвига по оси x_j $(j = 1, \ldots, s)$.

При аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой мы совершаем переход от бесконечномерного пространства функций непрерывного аргумента к конечномерному пространству сеточных функций и сведение уравнений для функции непрерывного аргумента к алгебраическим соотношениям. Такое рассмотрение, удобное на практике, вызывает трудности при теоретическом анализе свойств разностных схем, так как сеточная функция и функция непрерывного аргумента определены в разных пространствах. При теоретическом исследовании разностных схем зачастую удобно рассматривать разностные операторы в том же функциональном пространстве, что и аппроксимируемые ими дифференциальные операторы. В этом случае считают, что разностные схемы удовлетворяются функциями непрерывного аргумента в каждой точке рассматриваемой области [2]. Мы придерживаемся именно такого подхода.

Известны следующие операторные представления:

$$T_j = \exp(h_j D_j) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h_j^l}{l!} D_j^l \quad (j = 1, \ldots, s),$$

$$T_0 = \exp(\tau D_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau^l}{l!} D_0^l, \quad \ln(\exp \tau D_0) = \tau D_0,$$

T_0 — оператор сдвига по оси t. Тогда разностную схему (1) можно представить в виде

$$e^{\tau \frac{\partial}{\partial t}} u = \Lambda_1^{-1}(t, x, \tau, h, e^{hD}) \Lambda_0(t, x, \tau, h, e^{hD}) u,$$

где

$$\exp hD = \left\{\exp h_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \exp h_s \frac{\partial}{\partial x_s}\right\},$$

и, в силу аппроксимации, получим

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tau^{l-1}}{l!} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} = Zu + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+l_s=l}^{l} a_{l_1\ldots l_s} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_s^{l_s}}, \tag{3}$$

где $a_{l_1\ldots l_s}$ — коэффициенты, зависящие от t, x, τ, h. Уравнение (3) называется Γ-формой дифференциального представления разностной схемы (1). Дифференциальное представление разностной схемы чаще рассматривают в другой форме, а именно, в Π-форме, которая получается из Γ-формы заменой производных $\partial^l u/\partial t^l$ ($l \geqslant 2$) через производные по x, используя саму Γ-форму дифференциального представления. Из уравнения (3) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \ln\left\{E + \tau\left[Z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+l_s=1}^{l} a_{l_1\ldots l_s} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_s^{l_s}}\right]\right\} u = \tag{4}$$

$$= Zu + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+l_s=1}^{l} c_{l_1\ldots l_s} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_s^{l_s}},$$

где $c_{l_1\ldots l_s}$ — коэффициенты, зависящие от t, x, τ, h, E — тождественный оператор. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Zu + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1+\ldots+\,s=1}^{l} c_{l_1\ldots l_s} \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_s^{l_s}}$$

называется Π-формой дифференциального представления разностной схемы (1).

Указанный формальный способ построения Γ-формы и Π-формы дифференциального представления разностной схемы на практике можно выполнить следующим образом. Сделаем это на примере разностной схемы

$$u^{n+1}(x) = A(t, x, \tau, h, T_0, T) u^n(x), \tag{5}$$

аппроксимирующей уравнение (2) с порядком γ, причем, предположим, что $h = h(\tau)$. В общем случае процесс выполняется аналогично. Разлагая в разностной схеме (5) функции вида $u^{n+\alpha}(x_1 + \beta_1 h_1, \ldots, x_s + \beta_s h_s)$, где $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_s$ — некоторые числа, в ряд по параметрам τ, h_j, получим

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \bar{Z}(t, x, \tau, h, D_0, D)u = Z^1(t, x, \tau, h, D_0, D)u + R,$$

где

$$Z^1 u = Zu + \tau P_1(t, x, D_0, D)u + \ldots + \tau^\gamma P_\gamma(t, x, D_0, D)u,$$

$$R = \sum_{l>\gamma} \tau^l P_l(t, x, D_0, D)u.$$

Уравнение (6) есть Γ-форма дифференциального представления разностной схемы (5). Π-форма дифференциального представления

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{Z}(t, x, \tau, h, D)u$$

разностной схемы (5) получается из Γ-формы (6) заменой в правой части уравнения (6) производных по t и смешанных производных по t и x производными по x, используя Γ-форму дифференциального представления.

В работе [1] дан алгоритм получения Π-формы дифференциального представления. Для разностных схем, используемых на практике при аппроксимации уравнения переноса с постоянными коэффициентами, даны рекуррентные формулы для коэффициентов Π-формы дифференциального представления.

Предположим, что разностная схема (1) имеет порядки аппроксимации γ_1 и γ_2 по t и x соответственно. Тогда, отбрасывая в уравнении (3) члены $O(\tau^{\gamma_1+1}, h^{\gamma_2+1})$, получим уравнение

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots + \frac{\tau^{\gamma_1}}{(\gamma_1+1)!}\frac{\partial^{\gamma_1+1} u}{\partial t^{\gamma_1+1}} = Zu + Z_1(D)u,$$

где $Z_1(D)$ — некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют порядки $O(\tau, \ldots, \tau^{\gamma_1}, h, \ldots, h^{\gamma_2})$, и которое называется Γ-формой первого дифференциального приближения (п.д.п.) разностной схемы (1). Если в Π-форме дифференциального представления (4) отбросить члены порядка $O(\tau^{\gamma_1+1}, h^{\gamma_2+1})$, то получим Π-форму п.д.п.

$$(8)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = Zu + \tilde{Z}_1(D)u.$$

Здесь $\tilde{Z}_1(D)$ — некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого имеют порядок $O(\tau^{\gamma_1}, h^{\gamma_2})$. В случае разностной схемы (5) Γ-форма п.д.п. имеет вид $\partial u/\partial t = Z^1 u$, а Π-форма п.д.п. $\partial u/\partial t = Zu + \tau^\gamma P_\gamma(t, x, D)u$. Нетрудно видеть, что Π-форма п.д.п. (8) разностной схемы (1) получается из Γ-формы п.д.п. (7) в силу аппроксимации формальной заменой производных по t до порядка γ_1 через производные по x, используя исходное дифференциальное уравнение.

Отбрасывая в уравнении (4) члены порядка $O(\tau^{\gamma_1+2}, h^{\gamma_2+2})$, $O(\tau^{\gamma_1+3}, h^{\gamma_2+3})$ и т.д., получим соответственно Π-формы второго, третьего и т.д. дифференциальных приближений. Аналогично определяются Γ-формы второго, третьего и последующих дифференциальных приближений.

В дальнейшем, где не оговорено особо, под дифференциальным представлением и п.д.п. разностной схемы будем понимать Π-форму дифференциального представления и Π-форму п.д.п.

3

Сформулируем определения ряда свойств разностных схем в терминах п.д.п. Вначале определим свойства $K_j^{(p,\gamma)}$, $D_j^{(p,\gamma)}$, $P_j^{(p,\gamma)}$ разностной схемы p-го порядка аппроксимации для гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Эти свойства означают, что в γ-ом дифференциальном приближении j-й инвариант не подвергается действию диссипации за счет аппроксимационной вязкости и подвергается дисперсии и дополнительному переносу вдоль j-ой характеристики.

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\frac{\partial w}{\partial x},$$

где $w = w(x, t)$ — вектор-функция с m компонентами, A — $m\times m$ постоянная матрица, имеющая различные собственные значения. Обозначим через X_j и Y_j соответственно левый и правый собственные вектора матрицы A, отвечающие собственному числу μ_j, через r_j — инвариант, переносящийся без изменения вдоль j-ой характеристики с наклоном $dx/dt = \mu_j$ и удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial r_j}{\partial t} = \mu_j \frac{\partial r_j}{\partial x}. \tag{9}$$

В общем случае п.д.п. разностной схемы порядка аппроксимации p имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A\frac{\partial w}{\partial x} + C_r^{(p)}\frac{\partial^r w}{\partial x^r} + \ldots + C_1^{(p)}\frac{\partial w}{\partial x},$$

где r — натуральное число, $C_\alpha^{(p)} = O(h^p)$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$.

Определение 1. *Разностная схема обладает свойством $K_j^{(p,1)}$ или, что то же, свойством K вдоль j-ой характеристики в п.д.п. (принадлежит классу $K_j^{(p,1)}$), если $X_jC_\beta^{(p)} = 0$ $(\beta = 2, 4, \ldots, 2[r/2])$.*

Если $C_\beta^{(p)} = 0$, то будем рассматривать второе д.п. разностной схемы и говорить соответственно о свойстве $K_j^{(p,2)}$. Аналогично можно ввести свойство $K_j^{(p,\gamma)}$.

В дальнейшем мы будем опускать индексы и писать просто K (в частности, в случае газовой динамики, связывая это свойство с инвариантом — энтропией).

Определение 2. *Разностная схема обладает сильным свойством K_j (сильным свойством K вдоль j-ой характеристики), если $X_j G = e^{i\varkappa\mu_j\xi} X_j$, где G — матрица перехода разностной схемы.*

Определение 3. *Разностная схема обладает свойством $D_j^{(p,1)}$ или, что то же, свойством D (дисперсии) вдоль j-ой характеристики в п.д.п. (принадлежит классу $D_j^{(p,1)}$) если по крайней мере одна из величин $X_j C_\beta^{(p)} Y_j \neq 0$ $(\beta = 3, 5, \ldots, 2[(r+1)/2]-1)$.*

Аналогично определяется свойство $D_j^{(p,\gamma)}$, если в дифференциальных приближениях до $(\gamma-1)$-го порядка включительно отсутствуют все величины с нечетными производными, начиная с третьей производной, а в дифференциальном приближении порядка γ есть по крайней мере один член с нечетной производной порядка не меньше третьего.

Определение 4. *Разностная схема p-го порядка аппроксимации обладает свойством $P_j^{(p,1)}$ или, что то же, переноса вдоль j-ой характеристики в п.д.п. (принадлежит классу $P_j^{(p,1)}$), если $X_j C_1^{(p)} Y_j \neq 0$. При этом вдоль j-ой характеристики происходит перенос с опережением (свойство $P_{j+}^{(p,1)}$), если $X_j C_1^{(p)} Y_j < 0$ и с запаздыванием (свойство $P_{j-}^{(p,1)}$), если $X_j C_1^{(p)} Y_j > 0$.*

В случае, когда в дифференциальных приближениях разностной схемы до $(\gamma-1)$-го порядка включительно отсутствуют члены вида $C_1^{(p)} \dfrac{\partial w}{\partial x}$, а в дифференциальном приближении порядка γ такой член присутствует, будем говорить о свойстве $P_j^{(p,\gamma)}$ (класс $P_j^{(p,\gamma)}$).

Заметим, что если разностная схема принадлежит классу $K_j^{(p,1)}$ и не принадлежит классу $D_j^{(p,1)} \cap P_j^{(p,1)}$, то соответствующий инвариант r_j в п.д.п. переносится без изменения вдоль j-ой характеристики с наклоном μ_j и, следовательно, удовлетворяет в п.д.п. уравнению (9).

Определение 5. *В случае системы уравнений газовой динамики разностная схема обладает свойством M (принадлежит классу M), если в ее п.д.п. выполнен закон сохранения массы.*

Определение 6. *В случае системы уравнений газовой динамики разностная схема обладает свойством $\bar{K}$, если в п.д.п. энтропия сохраняется.*

Определение 7. *В случае системы уравнений газовой динамики разностная схема обладает свойством Г (принадлежит классу Г), если ее п.д.п. инвариантно относительно преобразования Галилея.*

Определение 8. *Разностная схема обладает свойством I (принадлежит классу I), если ее п.д.п. допускает ту же группу преобразований, что и исходная система дифференциальных уравнений.*

В таблице 1 приведены п.д.п. разностных схем для уравнения переноса в случае постоянных коэффициентов и в нелинейном случае, а также даны сведения о консервативности и инвариантности относительно сдвигов по t, x и преобразований Галилея и растяжения.

В таблице 2 показаны п.д.п. ряда разностных схем для уравнений газовой динамики как в эйлеровых, так и в лагранжевых координатах, и дана информация о принадлежности этих схем к классам K, M, I.

В таблице 3 содержатся сведения о разностных схемах для уравнений газовой динамики в недивергентной форме в лагранжевых координатах.

Таблица 1

No	Схема	П.д.п. для уравнения $Lu = u_t + au_x = 0$
1	Лакса	$Lu = \frac{h^2}{2\tau}(1 - \varkappa^2 a^2) u_{xx}$
2	Годунова	$Lu = \frac{h}{2}(a \operatorname{sign} a - \varkappa a^2) u_{xx}$
3	Русанова	$Lu = \frac{h}{2}(\omega a \operatorname{sign} a - \varkappa a^2) u_{xx}$
4	Инвариантная	$Lu = \frac{h^2}{2\tau} a u_{xx}$
5	Лакса-Вендроффа	$Lu = \frac{h^3}{6\tau}(\varkappa^3 a^3 - \varkappa a) u_{xxx}$
6	Неявная с центральной аппроксимацией	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma - 1) a^2 u_{xx}, & \gamma \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{h^2}{6} a (2 + \varkappa^2 a^2) u_{xxx}, & \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$
7	Неявная с односторонней аппроксимацией	$Lu = \frac{ha}{2}[(2\gamma - 1)\varkappa a + \operatorname{sign} a] u_{xx}$
8	Предиктор-корректор с центральными разностями в предикторе	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma - 1) a^2 u_{xx}, & \gamma \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{h^2}{6} a (\varkappa^2 a^2 + 2) u_{xxx}, & \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$

Продолжение табл. 1

9	Предиктор-корректор с односторонними разностями в предикторе	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma-1)a^2u_{xx}, & \gamma \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{\tau h}{4}(\operatorname{sign} a)a^2u_{xxx} - \frac{\tau^2}{12}a^3u_{xxx} - \frac{h^2}{6}au_{xxx}, & \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$
10	Двухпараметрическое семейство $\mathscr{L}^{a}_{\beta,0}$	$Lu = \frac{h^3}{6\tau}(\varkappa^3a^3 - \varkappa a)u_{xxx}$
11	Двухпараметрическое семейство $\mathscr{L}^{a}_{0,\varepsilon}$	$Lu = \frac{h^3}{6\tau}(\varkappa^3a^3 - \varkappa a)u_{xxx}$
12	„leap-frog"	$Lu = \frac{h^3}{6\tau}(\varkappa^3a^3 - \varkappa a)u_{xxx}$
13	Итерационные схемы	$Lu = \theta\tau a^2u_{xx}$
14	Двухпараметрическое семейство $\mathscr{L}^{a,\omega}_{1/2,0}$	$Lu = \frac{1}{6}\tau h^2a^2\left(1 - \frac{\varkappa^2a^2}{4}\right)u_{xxxx} - \omega\frac{h^4}{24\tau}u_{xxxx}$
15	Трехпараметрическое семейство $\mathscr{L}^{a,\omega}_{0,\varepsilon}$	$Lu = \frac{1}{6}\tau h^2a^2\left(1 - \frac{\varkappa^2a^2}{4}\right)u_{xxxx} - \omega\frac{h^4}{24\tau}u_{xxxx}$
16	Балакина третьего порядка аппроксимации	$Lu = \frac{5}{48}\tau h^2a^2u_{xxxx} - \frac{\tau^3}{24}a^4u_{xxxx} - \frac{3h^4}{128\tau}u_{xxxx}$
17	Балакина четвертого порядка аппроксимации	$Lu = -\frac{h^5}{120\tau}\varkappa a(1-\varkappa^2a^2)(4-\varkappa^2a^2)u_{xxxxx}$
18	Тушевой	$Lu = \frac{h^5}{180\tau}\varkappa a(1-\varkappa^4a^4)u_{xxxxx}$

Продолжение табл. 1

No	П.д.п. для уравнения $Lu = u_t + f_x = 0$, $f = u^2/2$	Консервативность	Инвариантность
1	$Lu = \frac{h^2}{2\tau}[(1-\varkappa^2u^2)u_x]_x$	да	нет
2	$Lu = \frac{h}{2}[(u\operatorname{sign} u - \varkappa u^2)u_x]_x$	да	нет
3	$Lu = \frac{h}{2}[(\omega\operatorname{sign} u - \varkappa u)uu_x]_x$	да	нет
4	$Lu = \frac{h^2}{2\tau}(au_x)_x$, $\partial a/\partial u = 0$	да	да

Продолжение табл. 1

5	$Lu = \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}$	да	нет
6	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma-1)(u^2u_x)_x, \ \gamma \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{\tau^2}{12}(u^3u_x)_{xx} - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}, \ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$	да	нет
7	$Lu = \frac{\tau}{2}(2\gamma-1)(u^2u_x)_x + \frac{h}{4}(\operatorname{sign} u)(u^2)_{xx}$	да	нет
8	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma-1)(u^2u_x)_x, \ \gamma \neq \frac{1}{2} \\ \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \frac{\tau^2}{8}[u^2((u^2)_{xx} + (u_x)^2)]_x - \\ \qquad - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}, \ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$	да	нет
9	$Lu = \begin{cases} \frac{\tau}{2}(2\gamma-1)(u^2u_x)_x, \ \gamma \neq \frac{1}{2} \\ -\frac{\tau h}{4}(\operatorname{sign} u)(u^2u_{xx})_x + \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \\ -\frac{\tau^2}{8}[u^2((u^2)_{xx} + (u_x)^2)]_x - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}, \ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$	да	нет
10	$Lu = \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \frac{\tau^2}{4}a(u^2(u_x)^2)_x - \frac{\tau h(1-2\beta)}{4}(u(u_x)^2)_x - \frac{h^2\beta(\beta-1)}{4a}((u_x)^2)_x - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}$	да	нет
11	$Lu = \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \frac{a\tau^2}{4}(u^2(u_x)^2)_x - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx} - \frac{\tau h}{4}(1-2\varepsilon)(u(u_x)^2)_x$	да	нет
12	$Lu = \frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx} - \frac{h^2}{12}(u^2)_{xxx}$	да	нет
13	$Lu = \tau\theta[2u(u_x)^2 + u^2u_{xx}]$	да	нет
14	$Lu = \frac{\tau h^2}{24a}(4au_x^3 + (18a-1)uu_xu_{xx} + 4au^2u_{xxx})_x + \frac{\tau^3}{18a}[(3+2a)u^3u_xu_{xx} + (3+4a)u^2(u_x)^3]_x - \frac{\tau^3}{24}(u^4u_x)_{xxx} - \frac{\omega h^4}{24\tau}u_{xxxx}$	да	нет

15	$Lu = \frac{\tau^2 h}{6}\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)[(u^3 u_{xx}+u^2(u_x)^2)_x+u(u^2u_x)_{xx}]_x+$ $+\frac{\tau h^2}{12}[u^2u_{xxx}+3uu_xu_{xx}+(u^2u_x)_{xx}]_x+\frac{\tau^3\alpha}{6}[u^3u_xu_{xx}+$ $+u^2(u_x)^3]_x+\frac{\tau^3}{9}[uu_x(u^2u_x)_x]_x-\frac{\tau^3}{24}(u^4u_x)_{xxx}-\frac{\omega h^4}{24\tau}u_{xxxx}$	да	нет
16	$Lu = \frac{\tau h^2}{48}(12uu_xu_{xx}+5u^2u_{xxx}+2(u_x)^3)_x+\frac{\tau^3}{18}(4u^2(u_x)^3+$ $+u^3u_xu_{xx}-u^2(u_x)^3)_x-\frac{3}{128}\frac{h^4}{\tau}\cdot u_{xxxx}-\frac{\tau^3}{24}(u^4u_x)_{xxx}$	да	нет
17	$Lu = \frac{h^2}{12}u_xu_{xx}-\frac{25}{72}\tau^2[u^2(u_x)^2]_x-\frac{\tau^2}{6}[u(u^2u_x)_x]_x+$ $+\frac{\tau^2}{6}(u^3u_x)_{xx}$	да	нет
18	$Lu = \frac{h^4}{180}[-120\varkappa^4u(u_x)^5-300\varkappa^3u^3u_x(u_{xx})^2-$ $-200\varkappa^4u^3(u_x)^2u_{xxx}+u(1-\varkappa^4u^4)u_{xxxxx}-$ $-600\varkappa^4u^2(u_x)^3u_{xx}+10(1-5\varkappa^4u^4)u_{xx}u_{xxx}+$ $+5(1-5\varkappa^4u^4)u_xu_{xxxx}]$	да	нет

Таблица 2

Схема	Π-форма п.д.п.	Свойства		
		K	M	I
Неймана–Рихтмайера	$u_t+\bar{p}_x = (z_1p_{xx}+z_2u_x^2)_x,$ $v_t-u_x = -(z_1u_x)_{xx},$ $E_t+(u\bar{p})_x = [z_1up_{xx}+p(z_1u_x)_x+2z_1u_xp_x+z_2uu_x^2]_x$ или $\varepsilon_t+\bar{p}u_x = z_1u_xp_{xx}+z_2u_x^3+[p(z_1u_x)_x+2z_1u_xp_x]_x$ $z_1=\frac{\tau^2\varrho^2c^2}{24}-\frac{h^2}{24},\ z_2=(\varrho^2c^2p_\varepsilon+p^2p_{\varepsilon\varepsilon}-2pp_{\varepsilon v}+p_{vv})$ $\bar{p}=p+\omega.$	нет	нет	да
Полностью консерпативная Попова и Самарского	$u_t+p_x = -\left(\frac{\tau}{2}-\alpha\tau\right)(\varrho^2c^2u_x)_x$ $v_t-u_x = 0$ $E_t+(up)_x = -\left(\frac{\tau}{2}-\alpha\tau\right)(\varrho^2c^2uu_x)_x$ $\varepsilon_t+pu_x = -\left(\frac{\tau}{2}-\alpha\tau\right)\varrho^2c^2u_x^2$	да	да	да

Таблица 3

Схема	Π-форма п.д.п.	эйлеровы координаты			лагранжевы координаты		
		K	M	I	K	M	I
1	2	3			4		
Лакса	$w_t+f_x=\frac{h^2}{2\tau}[(I-\varkappa^2A^2)w_x]_x$	нет	нет	нет	нет	нет	да
Русанова	$w_t+f_x=\frac{h}{2}[(\omega\sigma I-\varkappa A^2)w_x]_x$ $\sigma=\begin{cases}\varrho c & \text{(лагранжевы координаты)}\\ \lvert u\rvert+c & \text{(эйлеровы координаты)}\end{cases}$	нет	нет	нет	нет	нет	да
Инвариантная с весами	$w_t+f_x=\frac{h^2}{2\tau}[(\Omega-\varkappa^2(1-2a)A^2)w_x]_x$	да при специальном выборе матрицы Ω	да	да	да	да	да
Лакса–Вендроффа	$w_t+f_x=\frac{\tau^2}{6}[f_{ww}f_x^2+A(Af_x)_x]_x-\frac{h^2}{6}f_{xxx}$	нет	нет	нет	нет	нет	да
Лерэ–Пейрэ $\mathscr{L}^a_{\beta,0}$	$w_t+f_x=\frac{\tau^2}{2}\left[\frac{2-a}{2}(f_{ww}f_x^2)+A(Af_x)_x\right]_x-\frac{h^2}{6}f_{xxx}-$ $-\frac{h^2\beta(\beta-1)}{4a}(f_{ww}w_x^2)_x-\frac{\tau h(1-2\beta)}{4}(f_{ww}w_xf_x)_x$	нет	нет	нет	нет	нет	да
Варминга, Кутлера, Ломакса $\mathscr{L}^a_{0,\varepsilon}$	$w_t+f_x=\frac{\tau^2}{2}\left[\frac{2-a}{2}(f_{ww}f_x^2)+A(Af_x)_x\right]_x-\frac{h^2}{6}f_{xxx}-$ $-\frac{\tau h}{4}(1-2\varepsilon)(f_{ww}w_xf_x)_x$	нет	нет	нет	нет	нет	да

1	2	3			4		
Неявная с весами	$w_t+f_x = -\frac{\tau}{2}(1-2\alpha)(A^2 w_x)_x,\ \alpha \neq \frac{1}{2}$	нет	нет	нет	да	нет	да
	$w_t+f_x = -\frac{\tau^2}{12}[f_{ww}f_x^2+A(Af_x)_x]_x-\frac{h^2}{6}f_{xxx},\ \alpha=\frac{1}{2}$	нет	нет	нет	нет	нет	да
"leap-frog"	$w_t+f_x = \frac{\tau^2}{6}[f_{ww}f_x^2+A(Af_x)_x]_x-\frac{h^2}{6}f_{xxx}$	нет	нет	нет	нет	нет	да
Предиктор-корректор	$w_t+f_x = -\frac{\tau}{2}(1-2\gamma)(A^2 w_x)_x,\ \gamma \neq \frac{1}{2}$	нет	нет	нет	да	нет	да
	$w_t+f_x = \frac{\tau^2}{24}[f_{ww}f_x^2+4A(Af_x)_x-6A^2f_{xx}]_x-\frac{\tau h}{4}(AGw_{xx})_x-\frac{h^2}{2}f_{xxx},\ \gamma=\frac{1}{2}$	нет	нет	нет	нет	нет	да при $G\equiv 0$
Инвариантная схема типа предиктор-корректор в эйлеровых координатах	$w_t+f_x = \frac{h^2}{2\tau}(\Omega w_x)_x$	да	да	да	—		
		при специальном выборе матрицы Ω					

4

Построение разностных схем с заданными свойствами, определенными в терминах п.д.п., а так определяются почти все основные свойства разностных схем, сводится к построению (в случае, например, системы уравнений одномерной газовой динамики) матрицы порядка 3×3, элементы которой должны удовлетворять ряду алгебраических соотношений.

Действительно, возьмем для системы уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

разностную схему первого порядка аппроксимации (для простоты явную)

$$\frac{w^{n+1}(x)-w^n(x)}{\tau}+\frac{f^n(x+h)-f^n(x-h)}{2h}= \tag{10}$$

$$=\left[\Omega\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{w^n(x+h)-w^n(x)}{h^2}-\Omega\left(x-\frac{h}{2}\right)\frac{w^n(x)-w^n(x-h)}{h^2}\right].$$

Здесь Ω — пока неизвестная 3×3 матрица, элементы которой есть $O(\tau)$, $w=(\varrho u,\varrho,\varrho E)'$, $f=(\varrho u^2+p,\varrho u,\varrho u(E+p/\varrho))'$, u — скорость, $v=1/\varrho$ — удельный объем, $p=p(\varepsilon,\varrho)$ — давление, ε — удельная внутренняя энергия, $E=\varepsilon+u^2/2$. П.д.п. разностной схемы (10) имеет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где $C=\Omega-\frac{\tau}{2}A^2$, $A=df/dw$. Тогда, как показано в [1], разностная схема (10) принадлежит классу I, если элементы матрицы Ω удовлетворяют ряду соотношений. Далее, разностная схема принадлежит классу K, если $XC=0$ ($X\Omega=-\frac{1}{2}\tau u^2X$), где $XA=uX$ и т.д.

Литература

[1] Ю. И. Шокин, *Метод дифференциального приближения*, „Наука", Сибирское отделение, Новосибирск 1979, 224с.

[2] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений*, „Наука", Москва 1978, 688с.

Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20—May 30, 1980