POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CLXXVII

H. STEINLEIN

Borsuk–Ulam Sätze und Abbildungen mit kompakten Iterierten

WARSZAWA 1980
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-01-01113-0 ISSN 0012-3862

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung

Zu den bedeutendsten Grundlagen der nichtlinearen Funktionalanalysis zählt der Brouwersche Fixpunktsatz [8], der besagt, dass jede stetige Abbildung einer nichtleeren, konvexen, kompakten Teilmenge eines Raumes R^n in sich mindestens einen Fixpunkt hat (dazu äquivalente Aussagen waren übrigens schon Poincaré [55] und Bohl [5] bekannt). Schon recht bald bemerkte man, dass die vom Blickpunkt der Funktionalanalysis unerfreuliche Beschränkung auf endlichdimensionale Räume unwesentlich ist: Nach ersten Verallgemeinerungen auf spezielle Banachräume (z.B. $C^n[0,1]$, $L_2[0,1]$) durch Birkhoff und Kellogg [4] gelang Schauder [59] ein auf dem Brouwerschen Satz aufbauender Beweis des entsprechenden Resultats für stetige Abbildungen nichtleerer, konvexer, kompakter Teilmengen beliebiger Banachräume in sich. Gleichzeitig gab Schauder noch eine weitere dazu äquivalente Fassung dieses Resultats an:

Schauderscher Fixpunktsatz. *Es sei H eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes E und $f\colon H \to H$ kompakt (d.h. f ist stetig und $\overline{f(H)}$ ist kompakt). Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.*

Die grosse Zahl tiefliegender und bedeutender Anwendungen vor allem beim Beweis der Existenz von Lösungen nichtlinearer Integral- und Differentialgleichungen zeigt die ausserordentliche Tragweite dieses Resultats (bzgl. typischer Anwendungen vgl. z.B. Cronin [17], Smart [61] und Deimling [19]). Deshalb ist es nur allzu verständlich, dass man sich – teilweise angeregt durch konkrete Probleme – um Verallgemeinerungen des Schauderschen Fixpunktsatzes bemühte, um diesem wertvollen Hilfsmittel einen noch grösseren Anwendungsbereich zu erschliessen: So konnte die Klasse der zugrundeliegenden linearen topologischen Räume E erweitert werden (vgl. etwa Tychonoff [72], Hukuhara [32], Klee [37]), es wurden mengenwertige Abbildungen betrachtet (z.B. Kakutani [35], Ky Fan [26], Eilenberg–Montgomery [24], bzgl. eines guten Literaturüberblicks vgl. Dierolf [20]) und die Forderung $f(H) \subset H$ wurde abgeschwächt (vgl. etwa Rothe [56], Altman [1]).

Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit von besonderem Interesse sind Verallgemeinerungen des Schauderschen Fixpunktsatzes, bei denen die Forderung der Kompaktheit von f abgeschwächt wurde. Es ist schon lange bekannt, dass im Falle eines unendlichdimensionalen Raumes E auch für beschränktes H die Stetigkeit von f alleine noch nicht die Existenz eines Fixpunktes sicherstellt (vgl. Kakutani [36], Dugundji [22], ein ausserordentlich einfaches Beispiel von Beals findet man in Browder [10] und Smart [61], Seite 36), jedoch fand man grosse Klassen stetiger, nicht notwendig kompakter Abbildungen, auf die sich der Schaudersche Fixpunktsatz verallgemeinern lässt: Das vermutlich erste Resultat dieser Art stammt von Krasnosel'skiĭ [40] für Abbildungen $f = f_1 + f_2$ mit f_1 kompakt und f_2 kontrahierend. Fast gleichzeitig bewies Darbo [18] ein beträchtlich allgemeineres elegantes Resultat für k-verdichtende Abbildungen, $k < 1$ (bzgl. Bezeichnungen vgl. Kapitel I), das insbesondere von Sadovskiĭ [57], Furi und Vignoli [27] und Petryshyn [54] weiter verallgemeinert wurde.

Die Fortentwicklung des Brouwerschen bzw. Schauderschen Fixpunktsatzes verlief teilweise parallel zu entsprechenden Erweiterungen des Leray–Schauderschen Fixpunktprinzips (vgl. den Fall $z = 0$ von Punkt 6 auf Seite 14) bzw. des Lefschetzschen Fixpunktsatzes (die jeweils den Brouwerschen und Schauderschen Fixpunktsatz mit umfassen), doch können mit Ausnahme des Fixpunktsatzes von Eilenberg–Montgomery [24] alle oben erwähnten Verallgemeinerungen recht einfach direkt auf den Brouwerschen bzw. Schauderschen Fixpunktsatz zurückgeführt werden.

Im Gegensatz dazu handelt es sich bei dem Problem, das den Betrachtungen dieser Arbeit zugrunde liegt, um eine Verallgemeinerung des Schauderschen Fixpunktsatzes, die aller Voraussicht nach nicht direkt auf diesen Satz zurückgeführt werden kann, sondern – wenn überhaupt – nur mit aufwendigen Methoden der asymptotischen Fixpunkttheorie gelöst werden kann:

Problem 1. *Es sei E ein normierter Raum und $H \subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, und es sei $f\colon H \to H$ stetig mit f^{m_0} kompakt für ein $m_0 \in N$. Hat dann f einen Fixpunkt?*

Bevor auf Problem 1 näher eingegangen wird, zunächst einige Anmerkungen zur asymptotischen Fixpunkttheorie. Am besten lässt sie sich anhand der grundlegenden Beweismethode beschreiben: Sie umfasst Fixpunktsätze, die sich erst auf dem Umweg über Eigenschaften von Iterierten der Abbildung bzw. approximierender Abbildungen unter wesentlichem Einsatz des Lefschetzschen Fixpunktsatzes oder des Leray–Schauderschen Abbildungsgrades (bzw. verwandter Konzepte) beweisen lassen. Nicht notwendig spiegelt sich dieser Rückgriff auf Iterierte schon in den Voraussetzungen des Satzes wider, in Problem 1 ist er allerdings offenkundig.

Die Anfänge der asymptotischen Fixpunkttheorie gehen zurück auf Browder (vgl. etwa [9], [11], [12], [13]), dessen Methoden insbesondere durch Nussbaum beträchtlich ausgebaut wurden (siehe vor allem [48], [49], [50]). Ein alternativer Zugang beruht auf den sogenannten „mod p-Sätzen" (vgl. [63], [74], [64], [65], [67], [52]), die im Gegensatz zum ursprünglichen algebraisch–topologischen Zugang auch analytische Beweismethoden ermöglichten. Anwendungen fand die asymptotische Fixpunkttheorie bei Fragen der Existenz periodischer Lösungen von Differential – bzw. Funktionaldifferentialgleichungen (siehe etwa [30], [33], [34], [41], [14], [50], [51], [73]).

Es ist fraglich, ob Problem 1, bei dem es sich um das älteste und bekannteste ungelöste Problem der asymptotischen Fixpunkttheorie handelt, von der Anwendung her Beachtung verdient. Sicher ist aber, dass die Beschäftigung mit diesem Problem die asymptotische Fixpunkttheorie stark beeinflusst hat, denn manche ihrer Methoden waren Nebenprodukte der mehr oder minder erfolgreichen Bemühungen, Problem 1 zu lösen.

Schon lange sind recht weitgehende Teilresultate bekannt: Browder [13] zeigte die Existenz eines Fixpunktes unter der zusätzlichen Voraussetzung der lokalen Kompaktheit von f. Dies Resultat wurde in [63] dahingehend verschärft, dass schon die zusätzliche Voraussetzung der Kompaktheit von f in einer Umgebung der Fixpunkte von f^p für eine Primzahl $p > m_0$ die Existenz eines Fixpunktes garantiert. In [65] wurde ein entsprechendes Resultat mit jeweils „verdichtend" anstelle von „kompakt" bewiesen (bei diesen beiden Resultaten wie auch beim folgenden wurden nur Banachräume E zugelassen). Das wohl interessanteste Teilresultat zu Problem 1 stammt von Nussbaum [49]:

Satz. *Es sei E ein Banachraum, $H \subset E$ nichtleer, abgeschlossen, beschränkt und konvex mit $\mathring{H} \neq \emptyset$, und es sei $f\colon H \to H$ stetig mit f^{m_0} k-verdichtend für ein $k < 1$ und $m_0 \in N$ (dies ist insbesondere erfüllt, wenn f^{m_0} kompakt ist). Weiter sei $M := \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{f^j(H)} \subset \mathring{H}$, und für eine Umgebung V von M sei $f|_V$ stetig Fréchet-differenzierbar. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.*

Leider lassen sich die Beweise der hier angegebenen Teilresultate nicht auf den allgemeinen Fall übertragen. Der Grund hierfür liegt in der Instabilität der Voraussetzung „f^{m_0} kompakt" gegenüber Abänderungen von f, während in den obigen Teilresultaten die Zusatzvoraussetzungen gerade die für den Beweis notwendige Stabilität sichern.

In [66] wurde ein neuer Beweisansatz für Problem 1 vorgestellt, der in der vorliegenden Arbeit weiter ausgebaut werden soll. Dieser Ansatz beruht auf einem iterativen Approximationsverfahren, das auch unter den Voraussetzungen von Problem 1 durchgeführt werden kann, jedoch nicht unbeschränkt: Der Verzicht auf Zusatzvoraussetzungen muss bezahlt werden mit einer Instabilität der Eigenschaft „f^{m_0} kompakt", die sich dahingehend auswirkt, dass man mit jedem Approximationsschritt zu höheren Iterierten der approximierenden Abbildungen übergehen muss, für die die Kompaktheit gesichert ist. Man kann bisher noch nicht ausschliessen, dass man in manchen Fällen aufgrund dieses Kompaktheitsverlustes das Iterationsverfahren abbrechen muss, bevor es zum Ziel geführt hat.

Allerdings wurden in dieser Frage gegenüber [66] wesentliche Fortschritte erzielt, die in der vorliegenden Arbeit dargestellt werden. So konnte die Abschätzung für die Zahl der möglichen Iterationsschritte beträchtlich verbessert werden (vgl. Satz 14) und umgekehrt eine – allerdings möglicherweise nicht optimale – Abschätzung für die Zahl der nötigen Iterationsschritte gefunden werden (vgl. Satz 15).

Über Satz 15 ergab sich ein recht überraschender Zusammenhang mit dem Überdeckungssatz von Borsuk–Ljusternik–Schnirelmann und dem Koinzidenzsatz von Borsuk–Ulam (vgl. [6]) sowie mit neueren Verallgemeinerungen des letzteren Satzes von Švarc [69], Munkholm [46] und Cohen, Connett und Lusk [15], [16]. In Kapitel II der vorliegenden Arbeit wurden hierbei insbesondere die Methoden von Švarc wiederaufgegriffen und zum Teil etwas weiter ausgebaut, die einen sehr allgemeinen und elementaren Rahmen für Sätze dieses Typs ermöglichen.

Noch einige kurze Bemerkungen zur Anlage dieser Arbeit:

Um sie möglichst weitgehend in sich abgeschlossen zu machen, wird in Kapitel I eine Übersicht gegeben über die wichtigsten verwendeten Begriffe und Methoden. Hierbei wird bei der (nur axiomatischen) Einführung des Leray–Schauderschen Abbildungsgrades besonders auf die leider bisher in der Lehrbuchliteratur vernachlässigte Kommutativitätseigenschaft eingegangen: Es wird eine Herleitung gegeben, die im Vergleich zum üblichen Beweis (vgl. Dold [21], Granas [28]) zwar sicher nicht einfacher ist, die aber die zugrundeliegende algebraische Aussage klar herausstellt.

In Kapitel II, in dem Überdeckungssysteme und zugeordnete Überdeckungszahlen (letztere entsprechen dem von Švarc [68], [69] eingeführten „Geschlecht") für Fixpunktmengen von Primzahl-Iterierten stetiger Abbildungen betrachtet werden und darauf aufbauend die oben angekündigten Borsuk–Ulam Sätze bewiesen werden, wurde ein möglichst allgemeiner topologischer Rahmen angestrebt. Demgegenüber wird Problem 1 zwar allgemeiner als in [66] in normierten Räumen untersucht (der Übergang von Banachräumen auf normierte Räume ist unproblematisch und zudem von Bedeutung im Hinblick auf die Einbettbarkeit metrischer absoluter Umgebungsretrakte; vgl. Arens–Eells [3] und Granas [28]), die Betrachtung noch allgemeinerer linearer topologischer Räume erschien aber vorläufig nicht angemessen, da es zunächst darauf ankommt, die Chancen des hier dargestellten Ansatzes auszuloten.

Herzlich danken möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Wienholtz für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen und für stete Förderung. Mein Dank gilt auch dem Mathematischen Institut der Rutgers University, New Brunswick, USA für die Gastfreundschaft während eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten Forschungsaufenthalts im Herbst 1972, bei dem die ersten Ansätze der hier dargestellten Untersuchungen entwickelt wurden. Danken möchte ich auch allen meinen Kollegen, die mir mit Rat, Kritik und

Anregungen geholfen haben. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Ulrich Koschorke, der mir durch ein Gegenbeispiel aus einer schwerwiegenden Sackgasse bei den ersten Untersuchungen zu Kapitel II herausgeholfen hat, sowie Herrn Prof. Dr. A. Granas, der mich auf die wichtigen Arbeiten von Švarc hingewiesen hat.

I. Ein Überblick über verwendete Bezeichnungen, Begriffe und Resultate

1. Einige allgemeine Bezeichnungen

Auf Seite 107–109 wurde eine Liste verwendeter Symbole zusammengestellt. Soweit es sich dabei nicht um sehr gebräuchliche Bezeichnungen handelt, sollen diese schon im folgenden eingeführt werden.

Zur Vermeidung von fruchtlosen Fallunterscheidungen wird für alle im folgenden betrachteten linearen Räume (bzw. linearen Teilräume) L grundsätzlich $L \neq \{0\}$ vorausgesetzt.

Der grosse Buchstabe E (häufig auch indiziert E_1, E_2 etc.) bezeichnet stets einen normierten Raum über $\boldsymbol{R}$. Die Beschränkung auf reelle normierte Räume bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit: Fixpunktaussagen der in dieser Arbeit behandelten Form bleiben ungeändert, wenn man den zugrundeliegenden normierten Raum durch seine reelle Einschränkung ersetzt, umgekehrt wäre die komplexe Multiplikation an einigen Stellen eher hinderlich.

Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $N \subset M$, $x \in M$ sowie $\varepsilon > 0$. Dann bezeichnet N^ε die offene ε-Umgebung von N und $K(x, \varepsilon)$ die offene ε-Kugel um x, d.h.

$$N^\varepsilon := \begin{cases} \{z \in M \mid \operatorname{dist}(z, N) < \varepsilon\}, & \text{falls} \quad N \neq \emptyset, \\ \emptyset, & \text{falls} \quad N = \emptyset \end{cases}$$

und

$$K(x, \varepsilon) := \{x\}^\varepsilon = \{z \in M \mid d(x, z) < \varepsilon\}.$$

Es sei L ein linearer Raum und $f\colon D(f) \to L$ sowie $g\colon D(g) \to L$ zwei Abbildungen. Mit $f+g$ sei die Abbildung von $D(f) \cap D(g)$ nach L gemeint, die jedem $x \in D(f) \cap D(g)$ den Punkt $f(x)+g(x) \in L$ zuordnet.

Es seien M_1, M_2 Mengen und $f\colon D(f) \to M_1$ sowie $g\colon D(g) \to M_2$ Abbildungen. Unter $g \circ f$ werde die Abbildung mit Definitionsbereich $D(g \circ f) := \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = D(f) \cap f^{-1}(D(g))$ nach M_2 verstanden, die jedem $x \in D(g \circ f)$ den Punkt $g(f(x))$ zuordnet.

Entsprechend wird für $f\colon D(f) \to M$ rekursiv $f^0 := \mathrm{id}_{D(f)}$ und $f^k := f \circ f^{k-1}$ für $k = 1, 2, \ldots$ definiert. Dies bedeutet, dass $D(f^k) = \{x \in D(f) \mid$

$f^j(x) \in D(f)$ für $j = 1, \ldots, k-1\}$ ist. Insbesondere gilt dann auch $D(f) \supset D(f^2) \supset D(f^3) \supset \ldots$.

Für die Menge der Fixpunkte einer Abbildung $f\colon M_1 \to M_2$ wird das Symbol $\mathscr{F}[f]$ verwendet, d.h. $\mathscr{F}[f]\colon = \{x \in M_1 \mid x = f(x)\}$.

Eine Abbildung $f\colon D(f) \subset E_1 \to E_2$ heisst *kompakt*, wenn f stetig ist und $\overline{R(f)}$ kompakt ist ($R(f)$ = „Wertebereich von f", vgl. Seite 108). f heisst *lokal kompakt*, wenn es zu jedem $x \in D(f)$ eine Umgebung U_x gibt mit $f|_{D(f) \cap U_x}$ kompakt.

In den letzten Jahren waren sogenannte *Masse der Nicht-Kompaktheit* Gegenstand vieler Untersuchungen in der nichtlinearen Funktionalanalysis. Entsprechend den Bedürfnissen der vorliegenden Arbeit wird folgende verallgemeinerte Definition gewählt:

Definition 1. Eine Abbildung $\gamma\colon 2^E \to \overline{R^+}$ heisst *Mass der Nicht-Präkompaktheit*, wenn

(a) $\gamma(M) = 0$ genau dann, wenn $M \subset E$ präkompakt,

(b_1) $\gamma(M) \leqslant \gamma(N)$, falls $M \subset N \subset E$,

(b_2) $\gamma(M \cup \{x\}) = \gamma(M)$ für alle $M \subset E, x \in E$,

(c) $\gamma(\operatorname{co} M) = \gamma(M)$ für alle $M \subset E$.

(b_1) und (b_2) sind insbesondere dann erfüllt, wenn (a) und

(b) $\gamma(M \cup N) = \max(\gamma(M), \gamma(N))$ für alle $M, N \subset E$

gelten. Im Falle eines Banachraumes E ist Präkompaktheit gleich relativer Kompaktheit, und man spricht deshalb (etwas unpräzise) auch vom „Mass der Nicht-Kompaktheit" γ. Das bekannteste (in vielen Veröffentlichungen schlechthin „das") Mass der Nicht-Kompaktheit geht schon auf Kuratowski [42] zurück: Er definierte (in dieser anscheinend ersten Veröffentlichung über Masse der Nicht-Kompaktheit) für beschränkte Teilmengen M eines metrischen Raumes

$$\gamma(M)\colon = \inf\{\delta > 0 \mid \text{Es gibt endlich viele Mengen } M_i \subset M \text{ mit } \operatorname{diam} M_i < \delta \text{ und } M = \bigcup M_i\}.$$

Im Sinne unserer Definition müsste noch $\gamma(M) = \infty$ für alle unbeschränkten M gesetzt werden.

Speziell für dieses Kuratowskische Mass der Nicht-Kompaktheit haben sich folgende Bezeichnungen eingebürgert: Eine Abbildung $f\colon D(f) \subset E \to E$ heisst *k-verdichtend* (englisch *k-set-contraction*) mit einem $k \geqslant 0$, falls f stetig ist und $\gamma(f(M)) \leqslant k\gamma(M)$ für alle beschränkten $M \subset D(f)$ gilt. f heisst *verdichtend* (englisch *condensing* oder *densifying*), falls f stetig ist und für alle $M \subset D(f)$ mit $\gamma(M) \neq 0$ $\gamma(f(M)) < \gamma(M)$ gilt.

Schliesslich noch einige Bezeichnungen zu Simplexen und simplizialen Komplexen: Ein von den Punkten $x_0, \ldots, x_k$ aufgespanntes offenes, affines Simplex wird mit $(x_0 \ldots x_k)$ bezeichnet, d.h. $(x_0 \ldots x_k) = \{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,$

$\lambda_i > 0$ für $i = 0, \ldots, k\}$. Ist M ein simplizialer Komplex, so wird mit $|M|$ das dadurch definierte Polyeder bezeichnet. Sind M, N simpliziale Komplexe und $f\colon M \to N$ eine simpliziale Abbildung, so bezeichnen wir auch die dadurch induzierte Abbildung von $|M|$ nach $|N|$ mit f (Verwechslungen sind keine zu befürchten).

2. Tietzescher Ergänzungssatz, Sardsches Lemma und Glättungssatz

Die folgenden Resultate werden mehrfach entscheidend verwendet werden. Man beachte, dass hier jeweils nicht die allgemeinste Form angeführt ist, sondern nur eine Fassung, die für das folgende benötigt wird.

TIETZESCHER (bzw. TIETZE–DUGUNDJISCHER) ERGÄNZUNGSSATZ (vgl. Tietze [71] und Nagumo [47] (Fall E endlichdimensional) sowie Dugundji [22], einen übersichtlichen Beweis der hier angegebenen Fassung findet man auch bei Deimling [19]). *Es sei M ein metrischer Raum, $N \subset M$ abgeschlossen und $f\colon N \to E$ stetig. Dann gibt es ein stetiges $\bar{f}\colon M \to E$ mit $\bar{f}|_N = f$ und $R(\bar{f}) \subset \operatorname{co}(R(f))$.*

TIETZE–URYSOHNSCHER ERGÄNZUNGSSATZ. *Es sei M ein normaler Raum, $N \subset M$ abgeschlossen, E endlichdimensional und $f\colon N \to E$ kompakt (d.h. es ist f stetig und $R(f)$ beschränkt). Dann gibt es ein stetiges $\bar{f}\colon M \to E$ mit $\bar{f}|_N = f$ und $R(\bar{f}) \subset \overline{\operatorname{co}(R(f))}$.*

Diese Form des Tietze–Urysohnschen Satzes folgt trivial aus Schubert [60], Satz 4 auf Seite 83, wenn man berücksichtigt, dass jede n-dimensionale, konvexe, kompakte Menge ($n < \infty$) homöomorph zu einem abgeschlossenen n-dimensionalen Quader ist.

SARDSCHES LEMMA (vgl. Sard [58]). *Es sei E ein endlichdimensionaler normierter Raum, $M \subset E$ offen und $f\colon M \to E$ aus $C^1(M)$. Es sei $N_f(M) := \{x \in M \mid J[f, x] = 0\}$. Dann ist $f(N_f(M))$ eine Lebesgue-Nullmenge, also insbesondere $E \backslash f(N_f(M))$ dicht in E.*

GLÄTTUNGSSATZ (vgl. Weierstrassscher Approximationssatz oder Friedrichssche Glättung). *Es seien E_1, E_2 endlichdimensionale normierte Räume, $D \subset E_1$ abgeschlossen und beschränkt, $f\colon D \to E_2$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\bar{f}\colon E_1 \to E_2$ aus $C^1(E_1)$ mit $\|\bar{f}(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in D$.*

3. Der Leray-Schaudersche Abbildungsgrad

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, ist es recht charakteristisch für die asymptotische Fixpunkttheorie, dass ihre Beweismethoden wesentlich vom Leray–Schauderschen Abbildungsgrad oder den verwandten Konzepten des Fixpunktindex oder der Lefschetzzahl Gebrauch machen – im Gegensatz etwa zum Brouwerschen Fixpunktsatz, zu dessen Beweis nicht die volle Kraft dieser Hilfsmittel erforderlich ist und dementsprechend auch einfachere

Beweise unter Umgehung dieser Konzepte möglich sind (vgl. etwa Knaster–Kuratowski–Mazurkiewicz [38], Dunford–Schwartz [23]). Lefschetzzahl, Fixpunktindex und Leray–Schauderscher Abbildungsgrad stellen jeweils Verwirklichungen der Idee einer möglichst effektiven Abzählung der Fixpunkte von Operatoren bzw. der Lösungen gewisser Typen von Gleichungen dar. Sie geben dabei im allgemeinen nicht die tatsächliche Zahl der Fixpunkte bzw. Gleichungslösungen an, sondern nur eine „algebraische Anzahl". Dieser nur scheinbare Mangel verhilft umgekehrt zu einer wichtigen Stetigkeitseigenschaft (Homotopie), der man grossenteils die Anwendbarkeit, vielfach auch die Berechenbarkeit von Lefschetzzahl bzw. Fixpunktindex bzw. Leray–Schauderschem Abbildungsgrad verdankt.

Im folgenden wird eine möglichst knappe Einführung in die Theorie des Leray–Schauderschen Abbildungsgrades (im folgenden auch oft nur kurz „Abbildungsgrad" genannt) gegeben. Dabei ist es am günstigsten, im wesentlichen axiomatisch vorzugehen und bzgl. der Existenz- und Eindeutigkeitsfrage auf die Literatur zu verweisen. Zunächst zur Existenzfrage: Im Gegensatz zur ursprünglich kombinatorisch-topologischen Einführung des Abbildungsgrades hat sich heute in der Literatur ziemlich allgemein der dem Wesen des Abbildungsgrades mehr entsprechende analytische Zugang von Heinz [31] durchgesetzt, dessen Grundidee auf Kronecker zurückgeht. Eine gut lesbare Darstellung der Konstruktion des Leray–Schauderschen Abbildungsgrades bringt insbesondere Deimling [19].

Die folgende axiomatische Einführung des Leray–Schauderschen Abbildungsgrades ist geringfügig allgemeiner gehalten als in [19]:

Es sei E ein normierter Raum und

$$L_E := \{[\mathrm{id}-f, M, z] \mid M \subset E \text{ offen}, z\in E, f\colon D(f)\subset E\to E \text{ lokal kompakt mit } M\subset D(f) \text{ und } \{x\in M \mid x-f(x)=z\} \text{ kompakt}\}.$$

Der Leray–Schaudersche Abbildungsgrad ist eine Abbildung $d := L_E \to \mathbf{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $d[\mathrm{id}-f, M, z] = d[\mathrm{id}-f-z, M, 0]$.

2. *Normierung.* Es sei E endlichdimensional, $[\mathrm{id}-f, M, z]\in L_E$, $f\in C^1(M)$ und $J[\mathrm{id}-f, x]\neq 0$ für alle $x\in M$ mit $x-f(x)=z$. Dann ist $d[\mathrm{id}-f, M, z] = \sum_{\substack{x\in M\\ x-f(x)=z}} \operatorname{sign} J[\mathrm{id}-f, x]$.

3. *Homotopie bzw. Stetigkeit.* Es sei $\Omega\subset E\times[0,1]$ offen, $z\in E$, $F\colon D(F)\subset E\times[0,1]\to E$ lokal kompakt mit $\Omega\subset D(F)$ und $\{(x,t)\in\Omega \mid x-F(x,t)=z\}$ kompakt. Für $t\in[0,1]$ sei $\Omega_t := \{x\in E \mid (x,t)\in\Omega\}$, und $F_t\colon \Omega_t\to E$ sei definiert durch $F_t(x) := F(x,t)$. Dann ist $[\mathrm{id}-F_t, \Omega_t, z]\in L_E$ und $d[\mathrm{id}-F_t, \Omega_t, z] = d[\mathrm{id}-F_0, \Omega_0, z]$ für alle $t\in[0,1]$.

4. *Kommutativität.* Es sei $f_1\colon D(f_1)\subset E_1\to E_2$ lokal kompakt, $f_2\colon D(f_2)\subset E_2\to E_1$ stetig, $U_1\subset E_1$ und $U_2\subset E_2$ offen mit $U_1\subset D(f_2\circ f_1)$,

$U_2 \subset D(f_1 \circ f_2)$ und $f_2 \circ f_1|_{U_1}$ lokal kompakt. Weiter sei $\{x \in U_1 | x - (f_2 \circ f_1)(x) = 0\} = \mathscr{F}[f_2 \circ f_1|_{U_1}]$ kompakt und

$$(1.1) \qquad f_1(\mathscr{F}[f_2 \circ f_1|_{U_1}]) = \mathscr{F}[f_1 \circ f_2|_{U_2}].$$

Dann ist $d[\mathrm{id}_{E_2} - f_1 \circ f_2, U_2, 0] = d[\mathrm{id}_{E_1} - f_2 \circ f_1, U_1, 0]$.

5. *Additivität.* Es sei $[\mathrm{id} - f, M, z] \in L_E$, und $M_1, \ldots, M_n \subset M$ seien offene, disjunkte Mengen mit $x - f(x) \neq z$ für alle $x \in M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Dann ist $d[\mathrm{id} - f, M, z] = \sum_{i=1}^{n} d[\mathrm{id} - f, M_i, z]$.

6. Es sei $[\mathrm{id} - f, M, z] \in L_E$ und $d[\mathrm{id} - f, M, z] \neq 0$. Dann existiert mindestens ein $x \in M$ mit $x - f(x) = z$.

Bemerkungen. (a) (Eindeutigkeit) Es ist recht einfach nachzuweisen, dass der Leray–Schaudersche Abbildungsgrad schon durch die Eigenschaften 1–4 eindeutig festgelegt ist. Andererseits wurde von Amann und Weiss [2] gezeigt, dass auch die Eigenschaften 1, 3 und 5 zusammen mit der modifizierten Normierung

2'. Für $[\mathrm{id}, M, 0] \in L_E$ mit $0 \in M$ ist $d[\mathrm{id}, M, 0] = 1$

den Leray–Schauderschen Abbildungsgrad eindeutig festlegen.

(b) Mit Ausnahme der Kommutativität werden die obigen Eigenschaften allgemein bei den Konstruktionsverfahren in der Lehrbuchliteratur hergeleitet, wobei allerdings auch die Homotopieeigenschaft in etwas schwächerer Form gebracht wird (in Eisenack–Fenske [25] wird die Kommutativitätseigenschaft mit behandelt). Scheinbar war die Kommutativitätseigenschaft für den Leray–Schauderschen Abbildungsgrad bisher wenig bekannt, obwohl sie schon lange trivial aus der entsprechenden Eigenschaft des Fixpunktindex hätte gefolgert werden können.

Da die Kommutativitätseigenschaft des Abbildungsgrades wesentlich in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, erscheint es angebracht, hier eine direkte Herleitung aus allgemein bekannten Eigenschaften des Abbildungsgrades anzugeben: Es werden die Eigenschaften 2, 3 und 5 sowie die Reduktionseigenschaft

7. Es sei $[\mathrm{id} - f, M, z] \in L_E$, E' linearer Teilraum von E mit $z \in E'$ und $R(f) \subset E'$. Dann ist $d[\mathrm{id} - f, M, z] = d[\mathrm{id}_{E'} - f|_{D(f) \cap E'}, M \cap E', z]$.

(wobei letzterer Abbildungsgrad relativ zum Raum E' gewählt ist) verwendet. Die hier angegebene Herleitung ist sicher nicht einfacher als der Beweis in Dold [21] und Granas [28], jedoch wird in ihr die der Kommutativitätseigenschaft zugrundeliegende Aussage aus der linearen Algebra klar herausgestellt (vgl. Hilfssatz 4).

Die Idee der Kommutativitätseigenschaft lässt sich mit Hilfssatz 4 nämlich sehr einfach beschreiben: Nach Voraussetzung (1.1) werden die Fixpunktmengen $\mathscr{F}[f_2 \circ f_1|_{U_1}]$ und $\mathscr{F}[f_1 \circ f_2|_{U_2}]$ vermöge f_1 bzw. f_2 gegenseitig homöomorph aufeinander abgebildet. Durch Hilfssatz 4 wird dann sichergestellt, dass diese homöomorphen Fixpunktmengen durch die entsprechenden Abbildungsgrade in gleicher Weise „algebraisch abgezählt" werden.

(1.1) ist übrigens, wie der nachfolgende Hilfssatz 2 zeigt, schon dann erfüllt, wenn nur $f_1(\mathscr{F}[f_2 \circ f_1|_{U_1}]) \subset U_2$ und $f_2(\mathscr{F}[f_1 \circ f_2|_{U_2}]) \subset U_1$ sind.

HILFSSATZ 1. *Es seien* $g_1\colon D(g_1) \subset E_1 \to E_2$ *und* $g_2\colon D(g_2) \subset E_2 \to E_1$ *sowie* $M_1 \subset D(g_2 \circ g_1)$ *und* $M_2 \subset D(g_1 \circ g_2)$. *Dann folgt aus* $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) \subset M_2$ *sogar* $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) \subset \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]$.

Beweis. Es sei $x \in g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}])$. Dann ist $x \in M_2 \subset D(g_1 \circ g_2)$, und es gibt ein $y \in \mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]$ mit $g_1(y) = x$. Es folgt

$$(g_1 \circ g_2)(x) = (g_1 \circ g_2)\bigl(g_1(y)\bigr) = g_1\bigl((g_2 \circ g_1)(y)\bigr) = g_1(y) = x,$$

d.h. es ist $x \in M_2 \cap \mathscr{F}[g_1 \circ g_2] = \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]$. ∎

HILFSSATZ 2. *Es seien* $g_1\colon D(g_1) \subset E_1 \to E_2$ *und* $g_2\colon D(g_2) \subset E_2 \to E_1$ *sowie* $M_1 \subset D(g_2 \circ g_1)$ *und* $M_2 \subset D(g_1 \circ g_2)$. *Weiter seien* $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) \subset M_2$ *und* $g_2(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]) \subset M_1$. *Dann gilt* $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) = \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]$ *und* $g_2(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]) = \mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) \subset \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]$ und analog $g_2(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]) \subset \mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}] &= (g_1 \circ g_2)(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]) = g_1\bigl(g_2(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}])\bigr)\\ &\subset g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) \subset \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}].\end{aligned}$$

Da rechts und links die gleiche Menge steht, gilt überall das „="-Zeichen, also insbesondere $g_1(\mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]) = \mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]$. Wendet man hierauf g_2 an, so erhält man auch $g_2(\mathscr{F}[g_1 \circ g_2|_{M_2}]) = \mathscr{F}[g_2 \circ g_1|_{M_1}]$. ∎

Der folgende Hilfssatz 3 wird zweckmässigerweise schon hier eingeschoben, obwohl er erst viel später gebraucht werden wird:

HILFSSATZ 3. *Es sei* $f\colon D(f) \subset E \to E$, $k \in N$, $M \subset D(f^k)$ *und* $f(\mathscr{F}[f^k|_M]) \subset M$. *Dann ist* $f(\mathscr{F}[f^k|_M]) = \mathscr{F}[f^k|_M]$.

Beweis. Nach Hilfssatz 1, angewendet auf $E_1 := E_2 := E$, $M_1 := M_2 := M$ sowie $g_1 := f$ und $g_2 := f^{k-1}$ erhält man $f(\mathscr{F}[f^k|_M]) \subset \mathscr{F}[f^k|_M]$. Es folgt

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f^k|_M] &= f^k(\mathscr{F}[f^k|_M]) = f^{k-1}\bigl(f(\mathscr{F}[f^k|_M])\bigr)\\ &\subset f^{k-1}(\mathscr{F}[f^k|_M]) \subset \dots \subset f(\mathscr{F}[f^k|_M]) \subset \mathscr{F}[f^k|_M].\end{aligned}$$

Da rechts und links die gleiche Menge steht, gilt jeweils das „="-Zeichen, also insbesondere $f(\mathscr{F}[f^k|_M]) = \mathscr{F}[f^k|_M]$. ∎

HILFSSATZ 4.(1) *Es seien* L_1 *und* L_2 *endlichdimensionale Vektorräume und*

(1) Vgl. etwa: N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra, Vol. II, Linear algebra*, D. Van Nostrand Co. Inc., Toronto–New York–London 1953.

h_1: $L_1 \to L_2$ sowie h_2: $L_2 \to L_1$ linear. Dann gilt $\det(\mathrm{id}_{L_2} - h_1 \circ h_2) = \det(\mathrm{id}_{L_1} - h_2 \circ h_1)$.

Beweis. Es seien l_1, l_2: $L_1 \oplus L_2 \to L_1 \oplus L_2$ definiert durch

$$\left.\begin{aligned} l_1(x,y) &:= (x, y+h_1(x)) \\ l_2(x,y) &:= (x-h_2(y), y-h_1(x)) \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } (x,y) \in L_1 \oplus L_2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (l_1 \circ l_2)(x,y) &= l_1(x-h_2(y), y-h_1(x)) \\ &= \big(x-h_2(y), y-h_1(x)+h_1(x-h_2(y))\big) \\ &= (x-h_2(y), y-(h_1 \circ h_2)(y)), \\ (l_2 \circ l_1)(x,y) &= l_2(x, y+h_1(x)) = \big(x-h_2(y+h_1(x)), y+h_1(x)-h_1(x)\big) \\ &= (x-h_2(y)-(h_2 \circ h_1)(x), y). \end{aligned}$$

Insbesondere ist somit L_1 (genauer der Unterraum $\{(x,0) \mid x \in L_1\}$ von $L_1 \oplus L_2$, der mit L_1 identifiziert werden kann) invariant unter den Abbildungen $l_1 \circ l_2$ und $l_2 \circ l_1$. Es seien $(l_1 \circ l_2)_1, (l_2 \circ l_1)_1$: $L_1 \to L_1$ und $(l_1 \circ l_2)_2, (l_2 \circ l_1)_2$: $L_1 \oplus L_2 / L_1 \to L_1 \oplus L_2 / L_1$ die von $l_1 \circ l_2$ bzw. $l_2 \circ l_1$ kanonisch induzierten Abbildungen. Wir schreiben die Elemente in $L_1 \oplus L_2 / L_1$ in der Form $[L_1, y]$ mit $y \in L_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} (l_1 \circ l_2)_1 &= \mathrm{id}_{L_1}, \\ (l_1 \circ l_2)_2([L_1, y]) &= [L_1, y-(h_1 \circ h_2)(y)] \quad \text{für alle } y \in L_2, \\ (l_2 \circ l_1)_1 &= \mathrm{id}_{L_1} - h_2 \circ h_1, \\ (l_2 \circ l_1)_2 &= \mathrm{id}_{L_1 \oplus L_2 / L_1}. \end{aligned}$$

Es sei noch j: $L_1 \oplus L_2 / L_1 \to L_2$ die kanonische Einbettung. Dann gilt nach bekannten Aussagen der linearen Algebra (vgl. etwa Greub [29], problems 2 und 3 auf Seite 104):

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{id}_{L_2} - h_1 \circ h_2) &= \det\big(j^{-1} \circ (\mathrm{id}_{L_2} - h_1 \circ h_2) \circ j\big) \\ &= \det\big((l_1 \circ l_2)_2\big) = \det\big((l_1 \circ l_2)_1\big) \det\big((l_1 \circ l_2)_2\big) \\ &= \det(l_1 \circ l_2) = \det(l_1) \det(l_2) = \det(l_2) \det(l_1) \\ &= \det(l_2 \circ l_1) = \det\big((l_2 \circ l_1)_1\big) \det\big((l_2 \circ l_1)_2\big) \\ &= \det\big((l_2 \circ l_1)_1\big) = \det(\mathrm{id}_{L_1} - h_2 \circ h_1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der folgende Hilfssatz sichert das Approximationsverfahren, mit dem die Kommutativitätseigenschaft auf Hilfssatz 4 und die Normierung (Eigenschaft 2) zurückgeführt wird:

HILFSSATZ 5. *Es seien g_1: $D(g_1) \subset E_1 \to E_2$ kompakt und g_2: $D(g_2) \subset E_2 \to E_1$ stetig mit abgeschlossenen $D(g_1)$ und $D(g_2)$, und es seien $V_1 \subset E_1$*

und $V_2 \subset E_2$ *offen und beschränkt mit* $\mathscr{F}[g_2 \circ g_1] \subset V_1 \subset D(g_2 \circ g_1)$ *und* $\mathscr{F}[g_1 \circ g_2] \subset V_2 \subset D(g_1 \circ g_2)$ *sowie* $g_1(V_1) \Subset D(g_2)$. *Dann gibt es ein* $\varepsilon > 0$, *so dass für alle kompakten* $\tilde{g}_1 \colon D(g_1) \to E_2$ *mit* $\|\tilde{g}_1(x) - g_1(x)\| \leqslant \varepsilon$ *für alle* $x \in D(g_1)$ *gilt:* $\mathscr{F}[g_2 \circ \tilde{g}_1] \subset V_1 \subset D(g_2 \circ \tilde{g}_1)$, $\mathscr{F}[\tilde{g}_1 \circ g_2] \subset V_2 \subset D(\tilde{g}_1 \circ g_2)$ *und*

$$d[\mathrm{id} - g_2 \circ \tilde{g}_1, V_1, 0] = d[\mathrm{id} - g_2 \circ g_1, V_1, 0],$$
$$d[\mathrm{id} - \tilde{g}_1 \circ g_2, V_2, 0] = d[\mathrm{id} - g_1 \circ g_2, V_2, 0].$$

Beweis. (a) Es sei $W := D(g_1 \circ g_2) \setminus (V_2 \cap g_2^{-1}(V_1))$ und

$$\varepsilon_0 := \begin{cases} \frac{1}{2} \inf\limits_{x \in W} \|x - (g_1 \circ g_2)(x)\|, & \text{falls} \quad W \neq \emptyset, \\ 1, & \text{falls} \quad W = \emptyset. \end{cases}$$

Es ist $x \neq (g_1 \circ g_2)(x)$ für alle $x \in W$, denn: Angenommen, es gäbe $x \in W$ mit $x = (g_1 \circ g_2)(x)$, dann wäre $x \in \mathscr{F}[g_1 \circ g_2] \subset V_2$ und $g_2(x) = g_2((g_1 \circ g_2)(x)) = (g_2 \circ g_1)(g_2(x)) \in \mathscr{F}[g_2 \circ g_1] \subset V_1$, also $x \in g_2^{-1}(V_1)$. Man hätte also $x \in W \cap (V_2 \cap g_2^{-1}(V_1)) = \emptyset$.

Da W abgeschlossen und $g_1 \circ g_2$ kompakt ist, folgt $\varepsilon_0 > 0$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ und $(g_1(V_1))^{\varepsilon} \subset D(g_2)$ ist.

(b) Es sei $h \colon D(g_1) \to E_2$ mit $\|h(x) - g_1(x)\| \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in D(g_1)$. Dann ist für alle $x \in V_1$ $h(x) \in \overline{(g_1(V_1))^{\varepsilon}} \subset D(g_2)$, also $V_1 \subset D(g_2 \circ h)$. Zudem gilt für alle $x \in W$

$$\|x - (h \circ g_2)(x)\| \geqslant \|x - (g_1 \circ g_2)(x)\| - \|(g_1 \circ g_2)(x) - (h \circ g_2)(x)\| \geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Es ist also $\mathscr{F}[h \circ g_2] \cap W = \emptyset$, d.h. (wegen $D(h \circ g_2) = D(g_1 \circ g_2)$) $\mathscr{F}[h \circ g_2] \subset V_2 \cap g_2^{-1}(V_1)$, also

$$\mathscr{F}[h \circ g_2] \subset V_2 \subset D(h \circ g_2) \tag{1.2}$$

und (wegen $\mathscr{F}[g_2 \circ h] = g_2(\mathscr{F}[h \circ g_2]) \subset g_2(V_2 \cap g_2^{-1}(V_1)) \subset V_1$ (vgl. Hilfssatz 2))

$$\mathscr{F}[g_2 \circ h] \subset V_1 \subset D(g_2 \circ h). \tag{1.3}$$

(c) Es sei nun $\tilde{g}_1 \colon D(g_1) \to E_2$ kompakt mit $\|\tilde{g}_1(x) - g_1(x)\| \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in D(g_1)$. Man kann dann in (1.2) und (1.3) $\tilde{g}_1$ für h einsetzen und erhält $\mathscr{F}[\tilde{g}_1 \circ g_2] \subset V_2 \subset D(\tilde{g}_1 \circ g_2)$ und $\mathscr{F}[g_2 \circ \tilde{g}_1] \subset V_1 \subset D(g_2 \circ \tilde{g}_1)$.

Es sei $G^{(1)} \colon D(g_1) \times [0, 1] \to E_2$ definiert durch $G^{(1)}(x, t) := t g_1(x) + (1-t)\tilde{g}_1(x)$ sowie $G^{(2)} \colon D(g_2) \times [0, 1] \to E_1 \times [0, 1]$ durch $G^{(2)}(x, t) := (g_2(x), t)$. Weiter sei $G_t^{(1)}(x) := G^{(1)}(x, t)$ für alle $t \in [0, 1]$ und $x \in D(g_1)$. Dann gilt

$$\|G_t^{(1)}(x) - g_1(x)\| = (1-t)\|\tilde{g}_1(x) - g_1(x)\| \leqslant (1-t)\varepsilon \leqslant \varepsilon,$$

so dass mittels (1.2) und (1.3) trivial folgt:

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x,t)\in D(g_2\circ G^{(1)})|\ (g_2\circ G^{(1)})(x,t) = x\} \\ &\subset V_1\times[0,1] \subset D(g_2\circ G^{(1)}), \\ F_2 &:= \{(x,t)\in D(G^{(1)}\circ G^{(2)})|\ (G^{(1)}\circ G^{(2)})(x,t) = x\} \\ &\subset V_2\times[0,1] \subset D(G^{(1)}\circ G^{(2)}). \end{aligned}$$

Wegen $D(g_1)$ und $D(g_2)$ abgeschlossen und $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ stetig sind auch $D(G^{(1)}\circ G^{(2)}) = G^{(2)^{-1}}(D(G^{(1)}))$ und $D(g_2\circ G^{(1)}) = G^{(1)^{-1}}(D(g_2))$ abgeschlossen, woraus sofort folgt, dass F_1 und F_2 abgeschlossen sind. Berücksichtigt man noch, dass $G^{(1)}$ kompakt ist $(R(G^{(1)}) \subset \bigcup_{t\in[0,1]} (t\overline{R(g_1)}+ +(1-t)\overline{R(\bar{g}_1)})$, wobei $\overline{R(g_1)}$ und $\overline{R(\bar{g}_1)}$ kompakt sind), so erhält man, dass die Abbildungen $G^{(1)}\circ G^{(2)}$ und $g_2\circ G^{(1)}$ und die Mengen F_1 und F_2 kompakt sind. Es folgt nach Eigenschaft 3 des Abbildungsgrades (Homotopie) mit $(G^{(1)}\circ G^{(2)})_t\colon V_2\to E_2$, $(G^{(1)}\circ G^{(2)})_t(x) := (G^{(1)}\circ G^{(2)})(x,t)$ und $(g_2\circ G^{(1)})_t\colon V_1\to E_1$, $(g_2\circ G^{(1)})_t(x) := (g_2\circ G^{(1)})(x,t)$ $(t\in[0,1])$:

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id}-\bar{g}_1\circ g_2, V_2, 0] &= d[\mathrm{id}-(G^{(1)}\circ G^{(2)})_0, V_2, 0] \\ &= d[\mathrm{id}-(G^{(1)}\circ G^{(2)})_1, V_2, 0] = d[\mathrm{id}-g_1\circ g_2, V_2, 0] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id}-g_2\circ\bar{g}_1, V_1, 0] &= d[\mathrm{id}-(g_2\circ G^{(1)})_0, V_1, 0] \\ &= d[\mathrm{id}-(g_2\circ G^{(1)})_1, V_1, 0] = d[\mathrm{id}-g_2\circ g_1, V_1, 0]. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Beweis der Kommutativitätseigenschaft. (a) Es seien $H_1 \subset E_1$ und $H_2 \subset E_2$ beschränkt und abgeschlossen mit

$$\mathscr{F}[f_2\circ f_1|_{U_1}] \subset \mathring{H}_1 \subset H_1 \subset U_1, \quad \mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{U_2}] \subset \mathring{H}_2 \subset H_2 \subset U_2$$

und $f_1|_{H_1}$ kompakt. Setzt man $u_1 := f_1|_{H_1}$ und $u_2 := f_2|_{H_2}$, so erhält man

$$\begin{aligned} D(u_2\circ u_1) = u_1^{-1}(H_2) &= H_1 \cap f_1^{-1}(H_2) \supset \mathring{H}_1 \cap f_1^{-1}(\mathring{H}_2) \\ &\supset \mathscr{F}[f_2\circ f_1|_{U_1}] \cap f_1^{-1}(\mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{U_2}]) = \mathscr{F}[f_2\circ f_1|_{U_1}] \end{aligned}$$

(vgl. (1.1)), und analog zeigt man (da auch $f_2(\mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{U_2}]) = \mathscr{F}[f_2\circ f_1|_{U_1}]$ ist)

$$D(u_1\circ u_2) \supset \mathring{H}_2 \cap f_2^{-1}(\mathring{H}_1) \supset \mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{U_2}].$$

Damit erhält man aber

$$\mathscr{F}[u_1\circ u_2] = \mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{D(u_1\circ u_2)}] = \mathscr{F}[f_1\circ f_2|_{U_2}] \Subset D(u_1\circ u_2)$$

und entsprechend

$$\mathscr{F}[u_2\circ u_1] = \mathscr{F}[f_2\circ f_1|_{U_1}] \Subset D(u_2\circ u_1).$$

Es gibt also offene Mengen $W_1 \subset E_1$ und $W_2 \subset E_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[u_1 \circ u_2] &\subset W_2 \subset D(u_1 \circ u_2), \\ \mathscr{F}[u_2 \circ u_1] &\subset W_1 \subset D(u_2 \circ u_1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\big(u_1(W_1), \partial D(u_2)\big) &> 0, \\ \operatorname{dist}\big(u_2(W_2), \partial D(u_1)\big) &> 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

und es gilt (beachte $u_1 \circ u_2|_{W_2} = f_1 \circ f_2|_{W_2}$ und $u_2 \circ u_1|_{W_1} = f_2 \circ f_1|_{W_1}$ sowie die Additivitätseigenschaft des Abbildungsgrades):

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id} - u_1 \circ u_2, W_2, 0] &= d[\mathrm{id}_{E_2} - f_1 \circ f_2, U_2, 0], \\ d[\mathrm{id} - u_2 \circ u_1, W_1, 0] &= d[\mathrm{id}_{E_1} - f_2 \circ f_1, U_1, 0]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Im folgenden schreiben wir ganz allgemein (d.h. nicht nur für die oben speziell gewählten u_1, u_2, W_1, W_2) $[u_1, W_1;\ u_2, W_2] \in \mathscr{R}$, falls u_1: $D(u_1) \subset \tilde{E}_1 \to \tilde{E}_2$ kompakt, u_2: $D(u_2) \subset \tilde{E}_2 \to \tilde{E}_1$ stetig ($\tilde{E}_1, \tilde{E}_2$ normierte Räume) mit $D(u_1)$ und $D(u_2)$ abgeschlossen, so dass (1.4)–(1.6) gelten.

(b) Wir wenden Hilfssatz 5 an mit $g_1 := u_1$, $g_2 := u_2$, $V_1 := W_1$ und $V_2 := W_2$. Wir bezeichnen das durch Hilfssatz 5 gegebene $\varepsilon > 0$ mit η_1 und erhalten aufgrund der Totalbeschränktheit von $R(u_1)$ ein endliches $\eta_1/2$-Netz $\{x_1, \dots, x_r\}$ von $R(u_1)$ (d.h. $\{x_1, \dots, x_r\} \subset R(u_1) \subset \bigcup_{i=1}^{r} K(x_i, \eta_1/2)$). Es sei E_2' ein endlichdimensionaler linearer Unterraum von E_2 mit $\{x_1, \dots, x_r\} \subset E_2'$. Dann bildet der Schaudersche Projektionsoperator p_1: $R(u_1) \to E_2'$, definiert durch

$$p_1(z) := \Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j(z)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j(z)\, x_j$$

mit

$$\mu_j(z) := \max\big(0, \eta_1/2 - \|z - x_j\|\big),$$

$R(u_1)$ stetig nach E_2' ab, und es gilt für alle $x \in D(u_1)$:

$$\begin{aligned} \|(p_1 \circ u_1)(x) - u_1(x)\| &= \Big\| \Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)\big(x_j - u_1(x)\big) \Big\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)\, \|x_j - u_1(x)\|. \end{aligned}$$

Wegen $\mu_j\big(u_1(x)\big) = 0$ für $\|x_j - u_1(x)\| \geqslant \eta_1/2$ folgt

$$\|(p_1 \circ u_1)(x) - u_1(x)\| < \Big(\sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j\big(u_1(x)\big)(\eta_1/2) = \eta_1/2.$$

Damit ist nach Hilfssatz 5 $[p_1 \circ u_1, W_1;\ u_2, W_2] \in \mathscr{R}$ (man beachte, dass $\operatorname{dist}\big((p_1 \circ u_1)(W_1), \partial D(u_2)\big) > 0$ aus $\|(p_1 \circ u_1)(x) - u_1(x)\| < \eta_1/2$ für alle

$x \in D(u_1)$ und $(u_1(W_1))^{\eta_1} \subset D(u_2)$ (vgl. Wahl von ε in Hilfssatz 5 folgt). Hieraus ergibt sich wiederum wegen $R(p_1 \circ u_1) \subset E_2'$ und der Eigenschaft 7 des Abbildungsgrades unmittelbar $[p_1 \circ u_1, W_1;\ u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}, W_2 \cap E_2'] \in \mathscr{R}$.

(c) Als stetige Abbildung mit beschränktem, abgeschlossenem, endlichdimensionalem (also kompaktem) Definitionsbereich ist $u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}$ kompakt. Demnach können wir wiederum Hilfssatz 5 anwenden mit $g_1 := u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}$, $g_2 := p_1 \circ u_1$, $V_1 := W_2 \cap E_2'$ und $V_2 := W_1$ (E_2 wird ersetzt durch E_2'). Wir bezeichnen diesmal das ε aus Hilfssatz 5 mit η_2. Ganz analog zu obigem Abschnitt (b) findet man einen endlichdimensionalen Teilraum E_1' von E_1 und einen (stetigen) Schauderschen Projektionsoperator p_2: $R(u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}) \to E_1'$ mit $\|(p_2 \circ u_2)(x) - u_2(x)\| \leqslant \eta_2/2$ für alle $x \in D(u_2) \cap E_2'$. Es folgt dann mit dem gleichen Argument wie oben

$$[p_1 \circ u_1|_{D(u_1) \cap E_1'}, W_1 \cap E_1';\ p_2 \circ u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}, W_2 \cap E_2'] \in \mathscr{R}.$$

(d) Wir wenden wiederum Hilfssatz 5 an mit $g_1 := p_1 \circ u_1|_{D(u_1) \cap E_1'}$, $g_2 := p_2 \circ u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}$, $V_1 := W_1 \cap E_1'$ und $V_2 := W_2 \cap E_2'$ und bezeichnen das zugehörige ε mit η_3. Nach dem Glättungssatz (vgl. Seite 12) gibt es ein $\tilde{u}_1 : D(u_1) \cap E_1' \to E_2'$ aus $C^1(\overset{\circ}{\overbrace{D(u_1) \cap E_1'}})$ mit $\|\tilde{u}_1(x) - (p_1 \circ u_1)(x)\| \leqslant \eta_3/2$ für alle $x \in D(u_1) \cap E_1'$. Wiederum erhalten wir mittels Hilfssatz 5 $[\tilde{u}_1, W_1 \cap E_1';\ p_2 \circ u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}, W_2 \cap E_2'] \in \mathscr{R}$.

(e) Mit Hilfssatz 5, angewendet auf $g_1 := p_2 \circ u_2|_{D(u_2) \cap E_2'}$, $g_2 := \tilde{u}_1$, $V_1 := W_2 \cap E_2'$ und $V_2 := W_1 \cap E_1'$ und mit η_4 für das zugehörige ε konstruieren wir zunächst nach dem Glättungssatz ein $\hat{u}_2 : D(u_2) \cap E_2' \to E_1'$ aus $C^1(\overset{\circ}{\overbrace{D(u_2) \cap E_2'}})$ mit $\|\hat{u}_2(x) - (p_2 \circ u_2)(x)\| \leqslant \eta_4/4$ für alle $x \in D(u_2) \cap E_2'$. Nach dem Sardschen Lemma (vgl. Seite 12) gibt es ein $y \in E_1'$ mit $\|y\| \leqslant \eta_4/4$ und $J[\mathrm{id} - \hat{u}_2 \circ \tilde{u}_1, x] \neq 0$ für alle $x \in W_1 \cap E_1'$ $(\subset \overset{\circ}{\overbrace{D(u_1) \cap E_1'}} \cap \tilde{u}_1^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{D(u_2) \cap E_2'}})$ nach (1.4) und (1.5), also $\hat{u}_2 \circ \tilde{u}_1 \in C^1(W_1 \cap E_1'))$ mit $x - (\hat{u}_2 \circ \tilde{u}_1)(x) = y$. Wir definieren $\tilde{u}_2 := \hat{u}_2 + y$. Dann gilt für alle $x \in D(u_2) \cap E_2'$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_2(x) - (p_2 \circ u_2)(x)\| &\leqslant \|\tilde{u}_2(x) - \hat{u}_2(x)\| + \|\hat{u}_2(x) - (p_2 \circ u_2)(x)\| \\ &\leqslant \|y\| + \eta_4/4 \leqslant \eta_4/2, \end{aligned}$$

woraus mittels Hilfssatz 5 $[\tilde{u}_1, W_1 \cap E_1';\ \tilde{u}_2, W_2 \cap E_2'] \in \mathscr{R}$ folgt.

Insbesondere gilt wegen (1.4) und (1.5)

$$\mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1] \subset W_1 \cap E_1' \subset \overset{\circ}{\overbrace{D(u_1) \cap E_1'}} \cap \tilde{u}_1^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{D(u_2) \cap E_2'}})$$

und entsprechend

$$\mathscr{F}[\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2] \subset W_2 \cap E_2' \subset \overset{\circ}{\overbrace{D(u_2) \cap E_2'}} \cap \tilde{u}_2^{-1}(\overset{\circ}{\overbrace{D(u_1) \cap E_1'}}),$$

wobei jeweils aus den rechten Inklusionen $\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1 \in C^1(W_1 \cap E_1')$ bzw. $\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2 \in C^1(W_2 \cap E_2')$ folgt.

$$\mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1] \subset W_1 \cap E_1'$$

und

$$x-(\hat{u}_2 \circ \tilde{u}_1)(x) = x-\big((\tilde{u}_2+y)\circ \tilde{u}_1\big)(x)+y = x-(\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1)(x)+y = y$$

für alle $x \in \mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1]$ haben zur Folge, dass für alle $x \in \mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1]$

$$J[\mathrm{id}-\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1, x] = J[\mathrm{id}-\hat{u}_2 \circ \tilde{u}_1, x] \neq 0$$

gilt. Somit besteht $\mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1]$ aus isolierten Punkten, kann also als kompakte Menge nur endlich sein. Entsprechendes gilt dann natürlich auch für $\mathscr{F}[\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2] = \tilde{u}_1(\mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1])$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
d[\mathrm{id}_{E_1}-f_2 \circ f_1, U_1, 0] &\overset{1}{=} d[\mathrm{id}_{E_1'}-\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1, W_1 \cap E_1', 0]\\
&\overset{2}{=} \sum_{\substack{x \in W_1 \cap E_1' \\ x-(\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1)(x)=0}} \operatorname{sign} J[\mathrm{id}-\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1, x]\\
&\overset{3}{=} \sum_{\substack{x \in W_2 \cap E_2' \\ x-(\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2)(x)=0}} \operatorname{sign} J[\mathrm{id}-\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2, x]\\
&\overset{2}{=} d[\mathrm{id}_{E_2'}-\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2, W_2 \cap E_2', 0]\\
&\overset{1}{=} d[\mathrm{id}_{E_2}-f_1 \circ f_2, U_2, 0],
\end{aligned}$$

wobei von folgenden Tatsachen Gebrauch gemacht wurde:

(1) $[\tilde{u}_1, W_1 \cap E_1'; \tilde{u}_2, W_2 \cap E_2'] \in \mathscr{M}$, insbesondere (1.6),

(2) Eigenschaft 2 des Abbildungsgrades (Normierung),

(3) $J[\mathrm{id}-\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1, x] = \det\big((\mathrm{id}-\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1)'(x)\big) = \det\big(\mathrm{id}-\tilde{u}_2'(\tilde{u}_1(x)) \circ \tilde{u}_1'(x)\big)$.
Letzteres ist nach Hilfssatz 4 gleich

$$\begin{aligned}
\det\big(\mathrm{id}-\tilde{u}_1'(x)\circ \tilde{u}_2'(\tilde{u}_1(x))\big) &= \det\Big(\mathrm{id}-\tilde{u}_1'\big(\tilde{u}_2(\tilde{u}_1(x))\big)\circ \tilde{u}_2'(\tilde{u}_1(x))\Big)\\
&= \det\big((\mathrm{id}-\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2)'(\tilde{u}_1(x))\big)\\
&= J[\mathrm{id}-\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2, \tilde{u}_1(x)].
\end{aligned}$$

Zudem wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_1(\{x \in W_1 \cap E_1' \mid x-(\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1)(x) = 0\})\\
&\quad = u_1(\mathscr{F}[\tilde{u}_2 \circ \tilde{u}_1]) = \mathscr{F}[\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2] = \{x \in W_2 \cap E_2' \mid x-(\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2)(x) = 0\}
\end{aligned}$$

ist. ∎

4. (mod p)-Sätze in der asymptotischen Fixpunkttheorie

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, beschäftigt sich die asymptotische Fixpunkttheorie – grob gesagt – mit der Herleitung von Aussagen über die Existenz von Fixpunkten einer Abbildung f aus Eigenschaften gewisser Iterierter f^k von f. Man hat also zu erwarten, dass man bei Problemen dieser Art zumeist bessere Informationen über Iterierte der Abbildung als über die Abbildung selbst besitzt, und wird wohl dementsprechend leichter Aussagen über den Abbildungsgrad (bzw. Fixpunktindex oder Lefschetzzahl) von Iterierten der Abbildung als von der Abbildung selbst erzielen können. Damit drängt sich die Frage auf, ob unter Umständen aus der Kenntnis der Abbildungsgrade für Iterierte f^k einer Abbildung f (der Form $d[\mathrm{id}-f^k, N, 0]$) auf die Existenz von Fixpunkten der Abbildung f selbst schliessen kann. Ein erstes Ergebnis dieser Art wurde in [63] (Lemma 1) erzielt: Es wurde gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen aus $d[\mathrm{id}-f^p, N, 0] \not\equiv 0 \pmod p$ für eine Primzahl p auf die Existenz eines Fixpunktes $x \in N$ von f geschlossen werden kann. Dabei sind die Voraussetzungen recht natürlich und wenig einschränkend bis auf eine Ausnahme: Leider musste die Kompaktheit von f in einer Umgebung von $\mathscr{F}[f^p|_N]$ gefordert werden. Damit ist automatisch ausgeschlossen, dass dieses Resultat zum Beweis von Problem 1 ausreicht.

Dieses Lemma 1 aus [63] wurde sehr bald danach verschärft: Man erhält sehr allgemein einen Zusammenhang zwischen den Abbildungsgraden einer Abbildung g und Iterierter g^s ($s = p^t$ mit p prim und $t \in N$), aus dem mittels Eigenschaft 6 des Abbildungsgrades sofort Lemma 1 aus [63] folgt:

SATZ 1. *Es sei E ein Banachraum,* $g\colon D(g) \subset E \to E$, $s = p^t$ *mit* p *prim und* $t \in N$, $M \subset E$ *offen und beschränkt mit*

(a) $\bar{M} \subset D(g^s)$,

(b) $g|_M$ *ist kompakt*,

(c) $g^s|_M$ *ist kompakt*,

(d) $g(\mathscr{F}[g^s|_M]) \subset M$.

Dann ist $d[\mathrm{id}-g^s, M, 0] \equiv d[\mathrm{id}-g, M, 0] \pmod p$.

Dieses Resultat wurde erstmals mit kurzer Beweisskizze und in unwesentlich schwächerer Form von Zabreĭko und Krasnosel'skiĭ in [74] angegeben und unabhängig davon in [64] bewiesen. Einen beträchtlich vereinfachten Beweis findet man in [67]. (²)

Es ist wenig sinnvoll, einen vollständigen Beweis von Satz 1 hier anzugeben, zumal da Satz 1 in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet wird und zudem eine Verallgemeinerung von Satz 1 in Kapitel IV bewiesen wird (vgl. dort Satz 16). Es erscheint vielmehr zweckmässig, sich nur auf den Beweis der folgenden Hilfssätze 6 und 7 zu beschränken, die die grundlegenden Ideen der (mod p)-Sätze in der asymptotischen Fixpunkttheorie beinhalten (der Rest des Beweises von Satz 1 etwa besteht nur aus

(²) Ein besonders kurzer und schöner Beweis erschien neuerdings in: M. A. Krasnosel'skiĭ, P. P. Zabreĭko, *Geometrische Methoden der nichtlinearen Funktionalanalysis*, Nauka, Moskau [Russisch].

recht aufwendigen Approximationsverfahren) und die in dieser Arbeit auch explizit angewendet werden.

Die Hilfssätze 6 und 7 beschreiben für besonders einfache Fälle den Zusammenhang zwischen den Abbildungsgraden einer Abbildung h und einer Primzahl-Iterierten h^p, wobei sich Hilfssatz 6 auf den Fall von Umgebungen von $\mathscr{F}[h]$ beschränkt, Hilfssatz 7 demgegenüber auf den Fall von Umgebungen von $\mathscr{F}[h^p]\backslash\mathscr{F}[h]$.

Hilfssatz 6. *Es sei E ein endlichdimensionaler normierter Raum, $N \subset E$ offen und $h\colon N \to E$ aus $C^1(N)$. Es sei $x \in \mathscr{F}[h]$ und p Primzahl, so dass $J[\mathrm{id}-h^p, x] \neq 0$. Dann ist x isoliert in $\mathscr{F}[h^p]$ $(\supset \mathscr{F}[h])$, und es gilt für $K{:}= K(x, \varrho) \subset D(h^p)$ mit $K \cap \mathscr{F}[h^p] = \{x\}$: $d[\mathrm{id}-h^p, K, 0] \equiv d[\mathrm{id}-h, K, 0] \pmod p$ (bzw. im Falle $p \geqslant 3$ sogar $d[\mathrm{id}-h^p, K, 0] = d[\mathrm{id}-h, K, 0]$).*

Beweis. Wegen $x \in \mathscr{F}[h]$ gilt nach der Kettenregel und dem Determinantenproduktsatz

$$\begin{aligned} J[\mathrm{id}-h^p, x] &= \det\big((\mathrm{id}-h^p)'(x)\big) = \det\big(\mathrm{id}-(h^p)'(x)\big) \\ &= \det\big(\mathrm{id}-(h'(x))^p\big) \\ &= \det\big(\mathrm{id}-h'(x)\big)\det\big(\mathrm{id}+h'(x)+(h'(x))^2+\ldots+(h'(x))^{p-1}\big) \\ &= J[\mathrm{id}-h, x]\det\big(\mathrm{id}+h'(x)+\ldots+(h'(x))^{p-1}\big). \end{aligned}$$

Damit folgt aus $J[\mathrm{id}-h^p, x] \neq 0$ auch $J[\mathrm{id}-h, x] \neq 0$. Nach Eigenschaft 2 des Abbildungsgrades (Normierung) ist also $d[\mathrm{id}-h^p, K, 0] = J[\mathrm{id}-h^p, x] = \pm 1$ und $d[\mathrm{id}-h, K, 0] = J[\mathrm{id}-h, x] = \pm 1$, woraus die Behauptung von Hilfssatz 6 für den Fall $p = 2$ folgt.

Es sei $p \geqslant 3$. Wir zeigen zunächst, dass für $j = 1, p$ gilt: $\operatorname{sign} J[\mathrm{id}-h^j, x] = (-1)^{\beta_j}$, wobei $\beta_j{:}=$ „Summe der Vielfachheiten der Eigenwerte $\nu \in \boldsymbol{R}$ mit $\nu > 1$ von $(h'(x))^j$" (vgl. auch [43]): $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x] = \det\big(\nu\,\mathrm{id}-(h'(x))^j\big)$ ist ein reelles Polynom in ν mit höchstem Term ν^n $(n = \dim E)$. Für $\nu \in \boldsymbol{R}, \nu \to +\infty$ gilt also $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x] \to \infty$. Es gibt also ein $k > 1$ mit $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x] > 0$ für $\nu \geqslant k$. Da $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x]$ genau in den Nullstellen ν ungerader Vielfachheit das Vorzeichen wechselt, ist $\operatorname{sign} J[\mathrm{id}-h^j, x] = (-1)^{\gamma_j}$, wobei $\gamma_j{:}=$ „Anzahl der Nullstellen ungerader Vielfachheit von $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x]$ im Intervall $(1, k)$" = „Anzahl der Nullstellen ungerader Vielfachheit von $J[\nu\,\mathrm{id}-h^j, x]$ im Intervall $(1, \infty)$" = „Anzahl der Eigenwerte $\nu \in \boldsymbol{R}$, $\nu > 1$ ungerader Vielfachheit von $(h'(x))^j$". Da trivialerweise $\beta_j \equiv \gamma_j \pmod 2$ ist, ist $\operatorname{sign} J[\mathrm{id}-h^j, x] = (-1)^{\beta_j}$ bewiesen.

Zum Beweis von Hilfssatz 6 im Falle $p \geqslant 3$ haben wir $(-1)^{\beta_1} = (-1)^{\beta_p}$, d.h. $\beta_1 \equiv \beta_p \pmod 2$ zu zeigen, denn dann ist

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id}-h, K, 0] &= \operatorname{sign} J[\mathrm{id}-h, x] = (-1)^{\beta_1} = (-1)^{\beta_p} \\ &= \operatorname{sign} J[\mathrm{id}-h^p, x] = d[\mathrm{id}-h^p, K, 0]. \end{aligned}$$

Bekanntlich gilt: Sind $\nu_1, \ldots, \nu_n$ die Eigenwerte von $h'(x)$ (aufgeführt gemäss ihrer Vielfachheit), so sind $\nu_1^p, \ldots, \nu_n^p$ die Eigenwerte von $(h'(x))^p$. Da wegen p ungerade $\nu \in \boldsymbol{R}$, $\nu \leqslant 1$ impliziert, dass auch $\nu^p \leqslant 1$ ist, und natürlich $\nu \in \boldsymbol{R}$, $\nu > 1$ auch $\nu^p > 1$ impliziert, ist $\beta_p - \beta_1 = \beta_< + \beta_>$, wobei $\beta_<$ (bzw. $\beta_>$): = „Summe der Vielfachheiten der Eigenwerte ν von $h'(x)$ mit $\operatorname{Im} \nu < 0$ (bzw. $\operatorname{Im} \nu > 0$) und $\nu^p \in \boldsymbol{R}$, $\nu^p > 1$". Da die Eigenwerte die Nullstellen des reellen Polynoms $\det(\nu\,\mathrm{id} - h'(x))$ sind, muss $\beta_< = \beta_>$, also $\beta_1 \equiv \beta_p \pmod 2$ sein. ∎

HILFSSATZ 7. *Es sei $h: D(h) \subset E \to E$ stetig, $m \in N$ und $M \subset E$ offen mit h^{m-1} kompakt, $M \subset D(h^m)$ und $\mathscr{F}[h^m|_M]$ kompakt. Es gebe disjunkte abgeschlossene Mengen $F_0, \ldots, F_{m-1}$ mit $\bigcup_{i=0}^{m-1} F_i = \mathscr{F}[h^m|_M]$ sowie $h^i(F_0) = F_i$ für $i = 1, \ldots, m-1$. Dann ist $d[\mathrm{id} - h^m, M, 0] \equiv 0 \pmod m$.*

Bemerkung. Wegen $F_0 \subset \mathscr{F}[h^m|_M]$ gilt $h(F_{m-1}) = h(h^{m-1}(F_0)) = h^m(F_0) = F_0$. Folglich werden die Mengen F_i vermöge h zyklisch aufeinander abgebildet.

Beweis von Hilfssatz 7. Es seien $M_0, \ldots, M_{m-1} \subset M$ offen und disjunkt mit $F_i \subset M_i$ für $i = 0, \ldots, m-1$. Dann gilt für $i = 1, \ldots, m-1$ aufgrund der Kommutativitätseigenschaft

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id} - h^m, M_i, 0] &= d[\mathrm{id} - h \circ h^{m-1}, M_i, 0] \\ &= d[\mathrm{id} - h^{m-1} \circ h, M_{i-1}, 0] = d[\mathrm{id} - h^m, M_{i-1}, 0]. \end{aligned}$$

Mittels Eigenschaft 5 des Abbildungsgrades (Additivität) folgt dann

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id} - h^m, M, 0] &= \sum_{i=0}^{m-1} d[\mathrm{id} - h^m, M_i, 0] \\ &= m d[\mathrm{id} - h^m, M_0, 0] \equiv 0 \pmod m. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Die Aufspaltung der Fixpunktmenge $\mathscr{F}[h^m|_M]$ in Hilfssatz 7 in der dort beschriebenen Weise wird in der vorliegenden Arbeit noch eine beträchtliche Rolle spielen. Natürlich ist solch eine Aufspaltung nur in Ausnahmefällen möglich ($\mathscr{F}[h^m|_M]$ könnte etwa eine Kreislinie sein, die von h um den Winkel $2\pi/m$ gedreht wird). Dennoch kann man auch in anderen Fällen im Prinzip an dieser Idee festhalten. Wie dies geschieht und welche Resultate man dabei erhält, wird im folgenden Kapitel beschrieben.

II. Fixpunktmengen von Iterierten stetiger Abbildungen

In diesem Kapitel werden Fixpunktmengen $\mathscr{F}[f^p]$ von p-ten Iterierten stetiger, fixpunktfreier Abbildungen f untersucht, wobei stets p als Primzahl vorausgesetzt wird. Die Beschränkung auf Primzahlen p hat keinen besonders tiefen Grund: Man schliesst damit nur aus, dass $\mathscr{F}[f^p]$ Fixpunkte einer niedrigeren Iterierten f^m von f enthält. Denn mit dem Euklidischen Algorithmus zeigt man leicht, dass $\mathscr{F}[f^p] \cap \mathscr{F}[f^m] = \mathscr{F}[f^k]$ mit $k =$ „grösster gemeinsamer Teiler von p und m" ist. Für p prim und $m < p$ ist also $k = 1$, wobei wir $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ vorausgesetzt hatten.

Wie schon in der Einleitung angedeutet, sind die folgende Definition sowie viele der Resultate dieses Kapitels ganz oder im wesentlichen in Švarc [68], [69] enthalten. Dies trifft insbesondere zu auf die Sätze 2, 3, 9 und 11 sowie auf mehrere der Hilfssätze. Darüber hinaus enthält [69] noch eine Reihe anderer wichtiger Aussagen, insbesondere über den Zusammenhang mit der Homologietheorie.

Definition 2 (vgl. [69], Definition 15 sowie [66], [67]). Es sei S ein separierter topologischer Raum, $f\colon D(f) \subset S \to S$ stetig, $\mathscr{F}[f] = \emptyset$, p prim, $M \subset D(f^p)$ und $f(\mathscr{F}[f^p|_M]) = \mathscr{F}[f^p|_M]$. Dann sei

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(f,p,M) := \{G \subset \mathscr{F}[f^p|_M] \mid\; &\text{Es existieren disjunkte}\\ &\text{abgeschlossene Teilmengen } G_0, \ldots, G_{p-1} \text{ von } \mathscr{F}[f^p|_M]\\ &\text{mit } \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i = G \text{ und } f^i(G_0) = G_i \text{ für } i = 1, \ldots, p-1\},\end{aligned}$$

$$U(f,p,M) := \{\mathfrak{G} \subset \mathscr{C}(f,p,M) \mid \bigcup_{G \in \mathfrak{G}} G = \mathscr{F}[f^p|_M]\},$$

$$s(f,p,M) := \min\{\operatorname{card} \mathfrak{G} \mid \mathfrak{G} \in U(f,p,M)\}.$$

Im Falle $G \in \mathscr{C}(f,p,M)$ benutzen wir die Abkürzungen $[G_0, \ldots, G_{p-1}] \in Z(G,f)$ (bzw. $[G_i \mid i \in Z] \in Z(G,f)$), falls alle G_i abgeschlossen sind, $G_i \cap G_j = \emptyset$ für $i,j = 0,\ldots,p-1$, $i \neq j$ (bzw. für $i,j \in Z$, $i \not\equiv j \pmod p$), $f^i(G_0) = G_i$ für $i = 1, \ldots, p-1$ (bzw. $f^i(G_k) = G_{i+k}$ für $i \in N$, $k \in Z$) und $\bigcup_{i=0}^{p-1} G_i = G$ (bzw. $\bigcup_{i \in Z} G_i \left(= \bigcup_{i=0}^{p-1} G_i\right) = G$; man beachte $f^{np}(G_i) = G_i$ für $n \in N$).

Im Falle eines normalen Raumes S und $S = M = \mathscr{F}[f^p|_M]$ ist

$s(f, p, M) = g(M, f)$, wobei $g(M, f)$ das „Geschlecht von M bzgl. f" nach Švarc [69], Definition 15 ist.

Zunächst einige Bemerkungen zur obigen Definition 2:

1. In der Definition von $\mathscr{C}(f, p, M)$ ist die Idee der Aufspaltung der Fixpunktmenge wie in Hilfssatz 7 enthalten. Allerdings kann man nicht allgemein damit rechnen, dass ganz $\mathscr{F}[f^p|_M] \in \mathscr{C}(f, p, M)$ ist, darum betrachtet man Teilmengen G von $\mathscr{F}[f^p|_M]$ aus $\mathscr{C}(f, p, M)$ und Überdeckungen von $\mathscr{F}[f^p|_M]$ durch solche Mengen G. Das so gebildete $U(f, p, M)$ ist stets nichtleer, denn $\{\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \mid x \in \mathscr{F}[f^p|_M]\} \in U(f, p, M)$ (man beachte, dass aus $f(\mathscr{F}[f^p|_M]) = \mathscr{F}[f^p|_M]$ folgt, dass $\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \subset \mathscr{F}[f^p|_M]$ ist für alle $x \in \mathscr{F}[f^p|_M]$). Dementsprechend ist $s(f, p, M)$ stets wohldefiniert (denn die Menge der Kardinalzahlen ist wohlgeordnet). Als triviale Folgerung von Hilfssatz 8 (vgl. Seite 28) erhält man, dass $s(f, p, M)$ endlich ist, falls $\mathscr{F}[f^p|_M]$ kompakt ist.

2. Überdeckungen der in Definition 2 beschriebenen Form werden durch Hilfssatz 7 nahegelegt, daneben erweisen sie sich als wesentlich für das in Satz 12 dargestellte Approximationsverfahren. Ausserdem zeigte sich, dass sie einen ausgezeichneten Rahmen für Sätze vom Typ des Borsuk–Ljusternik–Schnirelmannschen Überdeckungssatzes und des Borsuk–Ulamschen Satzes bilden (vgl. Sätze 8–11).

3. Krasnosel'skiĭ [39] betrachtete stetige Abbildungen $f\colon S^n \to S^n$ (S^n = Einheitssphäre im R^{n+1}) mit $x \neq f^j(x)$ für $j = 1, \ldots, p-1$ und alle $x \in S^n$ sowie $f^p = \mathrm{id}$ ($p \in N$, $p \geqslant 2$, nicht notwendig eine Primzahl). Er nannte abgeschlossene Mengen $G \subset S^n$ „Mengen erster Art", falls $f(G) = G$ ist und $\operatorname{card}(G_0 \cap \{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}) \leqslant 1$ ist für alle Zusammenhangskomponenten G_0 von G und alle $x \in S^n$. Weiter sei π_n der durch Identifikation jeweils der Punkte $x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)$ aus S^n entstehende topologische Raum.

Krasnosel'skiĭ bewies hierzu folgendes Resultat (vgl. Theoreme 2 und 3 in [39]):

Satz von Krasnosel'skiĭ. (a) *Es seien $F_1, \ldots, F_r \subset S^n$ Mengen erster Art mit $\bigcup_{i=1}^{r} F_i = S^n$. Dann ist $r \geqslant n+1$.*

(b) $\operatorname{cat} \pi_n = n+1$.

Dabei bedeutet $\operatorname{cat} \pi_n$ die Ljusternik Schnirelmann Kategorie von π_n (vgl. [44]).

Dieses Resultat ist für uns von Bedeutung, da man daraus trivial die Aussage $s(f, p, S^n) = n+1$ (im Falle, dass p Primzahl ist) herleiten kann: $s(f, p, S^n) \geqslant n+1$ folgt trivial aus Teil (a) des Satzes, da offensichtlich Mengen $G \in \mathscr{C}(f, p, S^n)$ auch Mengen erster Art sind. Umgekehrt bedeutet $\operatorname{cat} \pi_n = n+1$, dass π_n überdeckt werden kann mit in π_n zusammenziehbaren, abgeschlossenen Mengen $H^{(1)}, \ldots, H^{(n+1)}$, es gibt also stetige Abbildungen $h_i\colon H^{(i)} \times [0,1] \to \pi_n$ mit $h_i(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{H^{(i)}}$ und $h_i(\cdot, 1) = z_i = \text{const}$. Es sei P die kanonische Einbettung von S^n in π_n. Dann ist $\{P^{-1}(H^{(1)}), \ldots, P^{-1}(H^{(n+1)})\} \in U(f, p, S^n)$ und demnach $s(f, p, S^n) \leqslant n+1$, denn: Natürlich gilt $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} P^{-1}(H^{(i)})$. $P^{-1}(H^{(i)}) \in \mathscr{C}(f, p, S^n)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ folgt aus der Tatsache, dass man die Abbildungen h_i liften kann: Es gibt stetige Abbildungen $g_i\colon P^{-1}(H^{(i)}) \times [0,1] \to S^n$ mit $g_i(\cdot, 0) = \mathrm{id}_{P^{-1}(H^{(i)})}$ und $P \circ g_i = h_i \circ \tilde{P}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, wobei $\tilde{P}\colon S^n \times [0,1] \to \pi_n \times [0,1]$, $\tilde{P}(x, t) := (P(x), t)$. Es seien $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S^n$ mit $P(x_i) = z_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Dann sind trivialerweise die Mengen $G_k^{(i)} := g_i(\cdot, 1)^{-1}(\{f^k(x_i)\})$ $(i = 1, \ldots, n+1;\ k = 0, \ldots, p-1)$ abgeschlossen, und es gilt $G_{k_1}^{(i)} \cap G_{k_2}^{(i)} = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n+1$, $k_1, k_2 = 0, \ldots \ldots, p-1$, $k_1 \neq k_2$ sowie $f^k(G_0^{(i)}) = G_k^{(i)}$ (man beachte, dass wegen $f \circ g_i(\cdot, 0) = f \circ \mathrm{id}_{P^{-1}(H^{(i)})} = \mathrm{id}_{P^{-1}(H^{(i)})} \circ f = g_i(\cdot, 0) \circ f$, der Stetigkeit von g_i und wegen $P \circ g_i = h_i \circ \tilde{P}$ auch $f \circ g_i(\cdot, 1) = g_i(\cdot, 1) \circ f$ gelten muss). Folglich sind die $P^{-1}(H^{(i)}) \in \mathscr{C}(f, p, S^n)$ mit $[G_0^{(i)}, \ldots, G_{p-1}^{(i)}] \in Z(P^{-1}(H^{(i)}), f)$.

Es sei darauf hingewiesen, dass zwar im folgenden mehrfach von dieser Folgerung aus dem Satz von Krasnosel'skiĭ Gebrauch gemacht werden wird, dass sie aber bei der Betrachtung von Problem 1 keine Rolle spielt, da die in diesem Zusammenhang bedeutsamen Sätze 10–15 ohne diese Folgerung bewiesen werden können.

4. Im folgenden wird eine Reihe von Resultaten in Zusammenhang mit Definition 2 bewiesen. Dabei geht es zunächst in den beiden ersten Abschnitten um Aussagen, die einen Einblick in das Wesen der Zahlen $s(f, p, M)$ geben sollen. Unter anderem werden auch einige Beispiele gegeben. Im dritten Abschnitt werden die schon oben erwähnten Verallgemeinerungen der Sätze von Borsuk–Ljusternik–Schnirelmann und Borsuk–Ulam bewiesen, die in Kapitel III auf Problem 1 angewendet werden.

Im folgenden wird zur Vereinfachung Definition 2 möglichst nur für den Fall $S = M = \mathscr{F}[f^p|_M]$ betrachtet. Dies bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn $\mathscr{C}(f, p, M)$, $U(f, p, M)$ und $s(f, p, M)$ hängen nur von $f|_{\mathscr{F}[f^p|_M]}$, p und $\mathscr{F}[f^p|_M]$ ab, also $\mathscr{C}(f, p, M) = \mathscr{C}(f|_{\mathscr{F}[f^p|_M]}, p, \mathscr{F}[f^p|_M])$ etc., so dass man S und M ohne weiteres durch $\mathscr{F}[f^p|_M]$ ersetzen kann.

1. Charakterisierungen

In diesem Abschnitt werden wichtige Charakterisierungen für die Mengen $\mathscr{C}(f, p, M)$ und die Zahlen $s(f, p, M)$ angegeben, allerdings jeweils unter einschränkenden Voraussetzungen (bei der Charakterisierung von $\mathscr{C}(f, p, M)$ (Hilfssatz 9) wäre interessant, inwieweit die Kompaktheitsforderung abgeschwächt werden könnte). Zuvor soll noch eine elementare Aussage bewiesen werden, die im folgenden mehrfach gebraucht wird.

HILFSSATZ 8. *Es sei M ein normaler topologischer Raum, p prim und $f\colon M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$.*

(a) *Es sei $N \subset M$ abgeschlossen mit $N \cap f^i(N) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Dann gibt es eine abgeschlossene Umgebung W von N mit $W \cap f^i(W) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$.*

(b) *Es sei $G \in \mathscr{C}(f, p, M)$. Dann gibt es eine Umgebung U von G mit $U \in \mathscr{C}(f, p, M)$.*

Beweis. (a) Wegen M normal gibt es offene Mengen $U, V \subset M$ mit $N \subset U$, $\bigcup_{j=1}^{p-1} f^j(N) \subset V$ und $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Wähle $W := \bar{U} \cap \bigcap_{j=1}^{p-1} f^{-j}(\bar{V})$. Dann gilt trivialerweise

$$N = N \cap \bigcap_{j=1}^{p-1} f^{-j}(f^j(N)) \subset U \cap \bigcap_{j=1}^{p-1} f^{-j}(V) \subset W,$$

d.h. W ist abgeschlossene Umgebung von N, und es gilt für $i = 1, \ldots, p-1$

$$W \cap f^i(W) \subset \bar{U} \cap f^i\Big(\bigcap_{j=1}^{p-1} f^{-j}(\bar{V})\Big) \subset \bar{U} \cap f^i(f^{-i}(\bar{V})) = \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

(b) Es sei $[G_0, \ldots, G_{p-1}] \in Z(G, f)$. Nach Teil (a) gibt es eine abgeschlossene Umgebung U_0 von G_0 mit $U_0 \cap f^i(U_0) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Dann hat $U := \bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(U_0)$ die gewünschten Eigenschaften, denn: Da f topologisch ist ($f^{-1} = f^{p-1}$), sind auch die $f^i(U_0)$ abgeschlossene Umgebungen der $G_i = f^i(G_0)$ ($i = 1, \ldots, p-1$), also insbesondere U eine Umgebung von G. Zum Nachweis von $U \in \mathscr{C}(f, p, M)$ mit $[U_0, f(U_0), \ldots$ $\ldots, f^{p-1}(U_0)] \in Z(U, f)$ fehlt nur noch der Beweis von $f^i(U_0) \cap f^k(U_0) = \emptyset$ für $i, k = 0, \ldots, p-1$, $i \neq k$: O.B.d.A. sei $i < k$. Wegen der Injektivität von f^i ist dann

$$\begin{aligned} f^i(U_0) \cap f^k(U_0) &= f^i(U_0) \cap f^i(f^{k-i}(U_0)) \\ &= f^i(U_0 \cap f^{k-i}(U_0)) = f^i(\emptyset) = \emptyset. \ \blacksquare \end{aligned}$$

HILFSSATZ 9. *Es sei M ein kompakter topologischer Raum, p prim und $f\colon M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Dann ist $M \in \mathscr{C}(f, p, M)$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ die Punkte x und $f(x)$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von M liegen.*

Beweis. (a) Trivialerweise folgt aus $M \in \mathscr{C}(f, p, M)$, dass für alle $x \in M$ x und $f(x)$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

(b) Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir zunächst, dass zu allen Zusammenhangskomponenten $N \subset M$ ein zugleich offenes und abgeschlossenes $V \subset M$ existiert mit $N \subset V$ und $V \cap f^i(V) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$:

Es sei $N \subset M$ Zusammenhangskomponente und $F := \bigcap_{\substack{N \subset W \subset M \\ W \text{ offen und} \\ \text{abgeschlossen}}} W$. Trivialerweise ist $N \subset F$ und F kompakt. Zunächst zeigen wir: Für alle offenen $G \subset M$ mit $F \subset G$ gibt es ein offenes und abgeschlossenes $W_0 \subset M$ mit $F \subset W_0 \subset G$:

Nach Definition ist

$$\bigcap_{\substack{N \subset W \subset M \\ W \text{ offen und} \\ \text{abgeschlossen}}} (W \backslash G) = \Big(\bigcap_{\substack{N \subset W \subset M \\ W \text{ offen und} \\ \text{abgeschlossen}}} W\Big) \backslash G = F \backslash G = \emptyset.$$

Da alle $W \backslash G$ abgeschlossen sind und M kompakt ist, gibt es endlich viele zugleich offene und abgeschlossene $W_i \subset M$ $(i = 1, \ldots, k)$ mit $N \subset W_i$ und $\bigcap_{i=1}^{k} (W_i \backslash G) = \emptyset$, d.h. $\bigcap_{i=1}^{k} W_i \subset G$. $W_0 := \bigcap_{i=1}^{k} W_i$ hat dann die gewünschten Eigenschaften.

Als nächstes soll $F = N$ bewiesen werden, wobei es wegen $N \subset F$ genügt zu zeigen, dass F zusammenhängend ist: Wäre F nicht zusammenhängend, gäbe es nichtleere disjunkte abgeschlossene Mengen $F_1, F_2 \subset F$ mit $F_1 \cup F_2 = F$. Als kompakter Raum ist M normal, d.h. es gibt disjunkte offene Mengen $G_1, G_2 \subset M$ mit $F_1 \subset G_1$ und $F_2 \subset G_2$. Zu $G := G_1 \cup G_2$ gibt es ein offenes und abgeschlossenes $W \subset M$ mit $F \subset W \subset G$. Dann sind auch $W_1 := W \cap G_1$ und $W_2 := W \cap G_2$ offen und abgeschlossen. Da $N \subset F$ zusammenhängend ist, gilt $N \subset W_1$ oder $N \subset W_2$, d.h. $F = \bigcap_{\substack{N \subset W \subset M \\ W \text{ offen und} \\ \text{abgeschlossen}}} W \subset W_1 \subset G_1$ oder $F \subset W_2 \subset G_2$ im Widerspruch zu $F \cap G_1 = F_1 \neq \emptyset$ und $F \cap G_2 = F_2 \neq \emptyset$. Folglich ist $F = N$.

Da M normaler Raum ist, gibt es nach Hilfssatz 8 ein offenes $G \subset M$ mit $N = F \subset G$ und $G \cap f^i(G) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Oben wurde gezeigt, dass es dann ein zugleich offenes und abgeschlossenes $V \subset M$ gibt mit $N = F \subset V \subset G$. Dann gilt natürlich $V \cap f^i(V) \subset G \cap f^i(G) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$.

(c) Nach obigem Teil (b) des Beweises gibt es zu jeder Zusammenhangskomponenten N von M eine offene und abgeschlossene Umgebung V_N mit $V_N \cap f^i(V_N) = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Da M kompakt ist, genügen schon endlich viele der V_N – im folgenden mit $V_1, \ldots, V_r$ bezeichnet –, um M zu überdecken. Für $i = 0, \ldots, p-1$ definieren wir nun

$$M_i := f^i\Big(\bigcup_{j=1}^{r} \Big(V_j \backslash \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l)\Big)\Big)$$

und zeigen, dass die M_i disjunkt und abgeschlossen mit $\bigcup_{i=0}^{p-1} M_i = M$ und $f^i(M_0) = M_i$ sind, woraus sofort $M \in \mathscr{C}(f, p, M)$ folgt:

(α) Trivialerweise gilt $f^i(M_0) = M_i$ für $i = 1, \dots, p-1$.

(β) Die Abgeschlossenheit der M_i folgt trivial aus der Tatsache, dass die V_j offen und abgeschlossen sind und f eine topologische Abbildung ist ($f^{-1} = f^{p-1}$ ist stetig!).

(γ) Es sei $x \in M$. Wir zeigen, dass es genau ein $i \in \{0, \dots, p-1\}$ gibt mit $x \in M_i$, woraus folgt, dass die M_i disjunkt sind und $\bigcup_{i=0}^{p-1} M_i = M$ ist:

Es sei $j \in \{1, \dots, r\}$, so dass $x \in \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_j)$, aber $x \notin \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l)$ für $l = 1, \dots, j-1$, und es sei $i \in \{0, \dots, p-1\}$ so gewählt, dass $x \in f^i(V_j)$. Dieses i ist wegen $V_j \cap f^l(V_j) = \emptyset$ für $l = 1, \dots, p-1$ eindeutig (vgl. Teil (b) des Beweises von Hilfssatz 8), und es gilt

$$
\begin{aligned}
x \in f^i(V_j) \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l) &= f^i(V_j) \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^{i+k}(V_l) \\
&= f^i(V_j) \setminus f^i\Big(\bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l)\Big) \\
&= f^i\Big(V_j \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l)\Big) \subset M_i .
\end{aligned}
$$

Wäre auch $x \in M_{i'}$ mit $i' \in \{0, \dots, p-1\}$, $i' \neq i$, so müsste

$$x \in f^{i'}(V_{j'}) \setminus \bigcup_{l=1}^{j'-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l) = f^{i'}(V_{j'}) \setminus \bigcup_{l=1}^{j'-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l)$$

mit einem $j' \in \{1, \dots, r\}$ sein. Nach obigem würde wegen $x \in f^{i'}(V_{j'})$ und $i' \neq i$ folgen, dass $j' \geqslant j+1$ ist, woraus aber

$$x \in f^{i'}(V_{j'}) \setminus \bigcup_{l=1}^{j'-1} \bigcup_{k=0}^{p-1} f^k(V_l) \subset f^{i'}(V_{j'}) \setminus f^i(V_j) \subset f^{i'}(V_{j'}) \setminus \{x\}$$

folgen würde. ∎

Herrn Rogler verdanke ich einen anderen Beweis von Hilfssatz 9 mit folgender Grundidee: Aus der Annahme $M \notin \mathscr{C}(f, p, M)$ leitet man (ähnlich wie in Satz 5) die Existenz eines minimalen $M_0 \subset M$ mit $f(M_0) = M_0$ und $M_0 \notin \mathscr{C}(f, p, M)$ her, von dem dann gezeigt wird, dass es zusammenhängend ist.

Im folgenden wird eine Charakterisierung der Zahlen $s(f, p, M)$ mit Hilfe geeigneter Einbettungen von $\mathscr{F}[f^p|_M]$ in Sphären bzw. etwas komplizierteren Mengen gegeben. Dabei wird bei der Abschätzung von $s(f, p, M)$

nach oben der folgende triviale Schluss benutzt werden, der noch des öfteren in dieser Arbeit benötigt werden wird:

HILFSSATZ 10. *Es seien M_1, M_2 separierte topologische Räume, p prim und $f_1\colon M_1 \to M_1$ und $f_2\colon M_2 \to M_2$ stetig mit $\mathscr{F}[f_1] = \mathscr{F}[f_2] = \emptyset$ und $f_1^p = \mathrm{id}_{M_1}$, $f_2^p = \mathrm{id}_{M_2}$. Angenommen, es gebe ein stetiges $P\colon M_1 \to M_2$ mit $P \circ f_1 = f_2 \circ P$. Ist dann $G \in \mathscr{C}(f_2, p, M_2)$ mit $[G_0, \ldots, G_{p-1}] \in Z(G, f_2)$, so gilt $P^{-1}(G) \in \mathscr{C}(f_1, p, M_1)$ mit $[P^{-1}(G_0), \ldots, P^{-1}(G_{p-1})] \in Z(P^{-1}(G), f_1)$. Insbesondere ist somit $\{P^{-1}(G^{(i)}) \mid i \in I\} \in U(f_1, p, M_1)$ falls $\{G^{(i)} \mid i \in I\} \in U(f_2, p, M_2)$, also $s(f_1, p, M_1) \leqslant s(f_2, p, M_2)$.*

Beweis. Wir können uns darauf beschränken, $f_1^i(P^{-1}(G_0)) = P^{-1}(G_i)$ nachzuweisen für $i = 1, \ldots, p-1$ und $G \in \mathscr{C}(f_2, p, M_2)$ mit $[G_0, \ldots, G_{p-1}] \in Z(G, f_2)$: Wegen $P \circ f_1 = f_2 \circ P$ gilt sogar $P \circ f_1^k = f_2^k \circ P$ für alle $k \in N$, so dass man für $i \in N \cup \{0\}$ und $j \in \{0, \ldots, p-1\}$

$$\begin{aligned} f_1^i(P^{-1}(G_j)) &\subset P^{-1}\big((P \circ f_1^i)(P^{-1}(G_j))\big) \\ &= P^{-1}\big((f_2^i \circ P)(P^{-1}(G_j))\big) \subset P^{-1}\big(f_2^i(G_j)\big) \end{aligned}$$

erhält, woraus für $i = 1, \ldots, p-1$

$$\begin{aligned} f_1^i\big(P^{-1}(G_0)\big) &\subset P^{-1}\big(f_2^i(G_0)\big) = P^{-1}(G_i) = f_1^p\big(P^{-1}(G_i)\big) \\ &= f_1^i\big(f_1^{p-i}(P^{-1}(G_i))\big) \subset f_1^i\big(P^{-1}(f_2^{p-i}(G_i))\big) \\ &= f_1^i\big(P^{-1}((f_2^{p-i} \circ f_2^i)(G_0))\big) = f_1^i\big(P^{-1}(G_0)\big) \end{aligned}$$

folgt, also insbesondere $f_1^i(P^{-1}(G_0)) = P^{-1}(G_i)$. ∎

Für $n \in N \cup \{0\}$ und Primzahlen p sei (mit l_2 = Hilbertscher Folgenraum über C, $\|z\| := (\sum_{j \in N} |z_j|^2)^{1/2}$ für $z = (z_1, z_2, \ldots) \in l_2$)

$$F_{n,p} := \begin{cases} \emptyset & \text{für } n = 0, \\ \{z = (z_1, \ldots, z_{n/2}, 0, 0, \ldots) \in l_2 \mid \|z\| = 1\} & \text{für } n = 2, 4, 6, \ldots, \\ \{z = (z_1, \ldots, z_{(n+1)/2}, 0, 0, \ldots) \in l_2 \mid \arg(z_{(n+1)/2}) & \\ \qquad \in \left\{\frac{k}{p} 2\pi \,\middle|\, k = 0, \ldots, p-1\right\}, \|z\| = 1\} & \text{für } n = 1, 3, 5, \ldots, \end{cases}$$

und $\varphi_{n,p}\colon F_{n,p} \to F_{n,p}$ sei definiert durch

$$\varphi_{n,p}(z) = \varphi_{n,p}(z_1, \ldots, z_{[n/2]}, 0, \ldots) := (e^{2\pi i/p} z_1, \ldots, e^{2\pi i/p} z_{[n/2]}, 0, \ldots)$$

für alle $z \in F_{n,p}$, wobei $[n/2] := n/2$ für gerades n und $[n/2] := (n+1)/2$ für ungerades n.

Für gerades n sind also die $F_{n,p}$ Sphären S^{n-1} (unabhängig von p), während für ungerades n die Mengen $F_{n,p}$ angesehen werden können als Sphären $F_{n-1,p}$ mit p darin eingespannten disjunkten Mengen, die jeweils homöomorph zu $(n-1)$-dimensionalen Kugeln sind. Für die $\varphi_{n,p}$ gilt $\mathscr{F}[\varphi_{n,p}] = \emptyset$ und $\varphi_{n,p}^p = \mathrm{id}_{F_{n,p}}$.

SATZ 2. *Es sei M ein normaler Raum, p prim und $f\colon M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Dann gibt es im Falle $s := s(f, p, M) < \infty$ eine stetige Abbildung $P\colon M \to F_{s,p}$ mit $P \circ f = \varphi_{s,p} \circ P$. Jedes derartige P ist surjektiv. Es gibt für $n < s$ kein stetiges $\tilde{P}\colon M \to F_{n,p}$ mit $\tilde{P} \circ f = \varphi_{n,p} \circ \tilde{P}$.*

Beweis. (a) Die folgende einfache Aussage wird mehrfach im Beweis verwendet werden: Für $0 \leqslant m < 1$ und $k \in N$ ist die Menge $S_{k,m} := \{z = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots) \in l_2 \mid \|z\| = 1, 0 \leqslant \arg(z_k) \leqslant 2\pi m\}$ homöomorph zu der kompakten, konvexen Menge

$$T_{k,m} := \{x = (x_1, \ldots, x_{2k-1}) \in R^{2k-1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{2k-2}^2 \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant x_{2k-1} \leqslant 2\pi m (1 - (x_1^2 + \ldots + x_{2k-2}^2))^{1/2}\},$$

wobei man als Homöomorphismus die Abbildung $h_{k,m}\colon S_{k,m} \to T_{k,m}$, definiert durch

$$h_{k,m}(z) := (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_2, \ldots, \operatorname{Im} z_{k-1}, |z_k| \arg(z_k))$$

wählen kann.

Es sei $\{G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}\} \in U(f, p, M)$. Wir zeigen, dass für $j = 0, \ldots, s$ stetige Abbildungen $P_j\colon \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \to F_{j,p}$ existieren mit $P_j \circ f|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}} = \varphi_{j,p} \circ P_j$ ($P := P_s$ hat dann wegen $\bigcup_{i=1}^{s} G^{(i)} = M$ die gewünschten Eigenschaften):

Für $j = 0$ ist die Behauptung trivial: Man hat $P_0\colon \emptyset \to \emptyset$. Angenommen, für $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ existiere ein stetiges

$$P_j\colon \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \to F_{j,p}$$

mit

$$P_j \circ f|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}} = \varphi_{j,p} \circ P_j.$$

Es sei $[G_0^{(j+1)}, \ldots, G_{p-1}^{(j+1)}] \in Z(G^{(j+1)}, f)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass j eine gerade Zahl ist: $S_{j/2+1,0}$ ist homöomorph zu einer endlichdimensionalen, kompakten, konvexen Menge, und folglich existiert nach dem Tietze–Urysohnschen Ergänzungssatz ein stetiges

$$\tilde{P}_{j+1}\colon \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)} \to S_{j/2+1,0},$$

so dass $\tilde{P}_{j+1}(x) = P_j(x)$ ist für alle $x \in \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}$ (beachte $F_{j,p} \subset S_{j/2+1,0}$). Dann können wir

$$P_{j+1}\colon \bigcup_{i=1}^{j+1} G^{(i)} \to F_{j+1,p}$$

definieren durch

$$P_{j+1}(x) := \begin{cases} \tilde{P}_{j+1}(x) & \text{für} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)}, \\ \varphi_{j+1,p}^{l}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-l}(x)\right)\right) & \text{für} \quad x \in G_l^{(j+1)} \ (l = 1, \ldots, p-1). \end{cases}$$

P_{j+1} ist wohldefiniert und hat die gewünschten Eigenschaften, denn: Für $x \in G_l^{(j+1)}$ ist

$$f^{p-l}(x) \in f^{p-l}(G_l^{(j+1)}) = f^{p-l}\left(f^l(G_0^{(j+1)})\right) = f^p(G_0^{(j+1)}) = G_0^{(j+1)},$$

d.h. $\varphi_{j+1,p}^{l}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-l}(x)\right)\right)$ ist wohldefiniert. Zum Nachweis davon, dass P_{j+1} wohldefiniert und stetig ist, genügt es zu zeigen, dass für

$$x \in \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \cap G_l^{(j+1)} \ (l \in \{1, \ldots, p-1\}) \quad \tilde{P}_{j+1}(x) = \varphi_{j+1,p}^{l}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-l}(x)\right)\right)$$

ist: Wegen

$$\varphi_{j+1,p}|_{F_{j,p}} = \varphi_{j,p}, \quad \tilde{P}_{j+1}|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}} = P_j$$

und

$$\varphi_{j,p} \circ P_j = P_j \circ f|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}}$$

gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{j+1,p}^{l}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-l}(x)\right)\right) &= \varphi_{j,p}^{l}\left(P_j\left(f^{p-l}(x)\right)\right) = P_j\left(f^l\left(f^{p-l}(x)\right)\right) \\ &= P_j\left(f^p(x)\right) = P_j(x) = \tilde{P}_{j+1}(x). \end{aligned}$$

Zudem gilt $P_{j+1} \circ f|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}} = \varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1}$, denn: Für $x \in \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}$ gilt

$$(P_{j+1} \circ f)(x) = (P_j \circ f)(x) = (\varphi_{j,p} \circ P_j)(x) = (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x),$$

während man für $x \in G_l^{(j+1)}$ $(l \in \{0, \ldots, p-2\})$ wegen $f(x) \in G_{l+1}^{(j+1)}$

$$\begin{aligned} (P_{j+1} \circ f)(x) &= P_{j+1}\left(f(x)\right) = \varphi_{j+1,p}^{l+1}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-(l+1)}\left(f(x)\right)\right)\right) \\ &= \varphi_{j+1,p}\left(\varphi_{j+1,p}^{l}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-l}(x)\right)\right)\right) = \varphi_{j+1,p}\left(P_{j+1}(x)\right) \\ &= (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x) \end{aligned}$$

und entsprechend für $x \in G_{p-1}^{(j+1)}$ wegen $f(x) \in f(G_{p-1}^{(j+1)}) = G_0^{(j+1)}$

$$\begin{aligned} (P_{j+1} \circ f)(x) &= P_{j+1}\left(f(x)\right) = \tilde{P}_{j+1}\left(f(x)\right) \\ &= \varphi_{j+1,p}\left(\varphi_{j+1,p}^{p-1}\left(\tilde{P}_{j+1}\left(f^{p-(p-1)}(x)\right)\right)\right) \\ &= \varphi_{j+1,p}\left(P_{j+1}(x)\right) = (\varphi_{j+1,p} \circ P_{j+1})(x) \end{aligned}$$

erhält.

Im Falle von j ungerade beachte man, dass $F_{j,p} \subset S_{(j+1)/2,(p-1)/p}$ ist und $S_{(j+1)/2,(p-1)/p}$ homöomorph zu einer endlichdimensionalen, kompakten, konvexen Menge ist. Wiederum folgt nach dem Tietze–Urysohnschen Ergänzungssatz, dass ein stetiges

$$\tilde{P}_{j+1}\colon \bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)} \cup G_0^{(j+1)} \to S_{(j+1)/2,(p-1)/p}$$

existiert mit $\tilde{P}_{j+1}|_{\bigcup_{i=1}^{j} G^{(i)}} = P_j$. Mittels $\tilde{P}_{j+1}$ können wir ganz analog zum Falle j gerade die gewünschte Abbildung P_{j+1} konstruieren.

Damit ist die erste Behauptung von Satz 2 bewiesen.

(b) Zum Nachweis, dass es für $n < s$ kein stetiges $\tilde{P}\colon M \to F_{n,p}$ mit $\tilde{P} \circ f = \varphi_{n,p} \circ \tilde{P}$ gibt, genügt es wegen Hilfssatz 10 zu zeigen, dass $s(\varphi_{n,p}, p, F_{n,p}) \leqslant n$ ist für alle $n \in N$: Dies ist aber klar, da offenkundig die Mengen $F^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, definiert durch

$$F^{(k)} := \left\{ z \in F_{n,p} \,\middle|\, |z_{(k+1)/2}|^2 \geqslant \frac{2}{n+1},\ \frac{j}{p}\, 2\pi \leqslant \arg z_{(k+1)/2} \leqslant \frac{2j+1}{2p}\, 2\pi \right.$$
$$\left. \text{für ein } j \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$
$$\text{im Falle } k \text{ ungerade}$$

bzw.

$$F^{(k)} := \left\{ z \in F_{n,p} \,\middle|\, |z_{k/2}|^2 \geqslant \frac{2}{n+1},\ \frac{2j+1}{2p}\, 2\pi \leqslant \arg z_{k/2} \leqslant \frac{j+1}{p}\, 2\pi \right.$$
$$\left. \text{für ein } j \in \{0, \ldots, p-1\} \right\}$$
$$\text{im Falle } k \text{ gerade}$$

($\arg z_{k/2} = 2\pi$ bedeutet $\arg z_{k/2} = 0$), ein $\{F^{(1)}, \ldots, F^{(n)}\} \in U(\varphi_{n,p}, p, F_{n,p})$ bilden.

(c) Es bleibt zu zeigen, dass alle stetigen $P\colon M \to F_{s,p}$ mit $P \circ f = \varphi_{s,p} \circ P$ surjektiv sind: Angenommen, es existiere ein solches P, das nicht surjektiv ist. Es sei $x \in F_{s,p} \setminus R(P)$. Da dann natürlich auch $\varphi_{s,p}^j(x) \in F_{s,p} \setminus R(P)$ ist für $j = 1, \ldots, p-1$, können wir ohne Einschränkung $x \in S_{k,l} \setminus R(P)$ annehmen mit $(k, l) = (s/2, 1/p)$, falls s gerade, bzw. $(k, l) = ((s+1)/2, 0)$, falls s ungerade. In beiden Fällen ist $S_{k,l}$ homöomorph zur konvexen Menge $T_{k,l} \subset R^{s-1}$ (dies ist im Falle s ungerade nicht ganz korrekt, da dann $T_{k,l} \subset R^s$, allerdings mit $y_s = 0$ für alle $y = (y_1, \ldots, y_s) \in T_{k,l}$, so dass man auch hier $T_{k,l}$ als Teilmenge des R^{s-1} ansehen kann), wobei im Falle s gerade

$$h_{k,l}^{-1}(\partial T_{k,l}) = \{z \in S_{k,l} \mid \arg z_k = 0 \text{ oder } \arg z_k = 2\pi/p\} = S_{k,l} \cap F_{s-1,p}$$

und im Falle s ungerade

$$h_{k,l}^{-1}(\partial T_{k,l}) = \{z \in S_{k,l} |\ z_k = 0\} = F_{s-1,p}.$$

Bekanntlich gibt es eine Retraktion $\tilde{r}_{k,l}$: $T_{k,l} \setminus \{h_{k,l}(x)\} \to \partial T_{k,l} \setminus \{h_{k,l}(x)\}$, und folglich ist $r_{k,l} := h_{k,l}^{-1} \circ \tilde{r}_{k,l} \circ h_{k,l}$ eine Retraktion von $S_{k,l} \setminus \{x\}$ nach $h_{k,l}^{-1}(\partial T_{k,l}) \setminus \{x\} \subset F_{s-1,p}$. Es sei nun $\tilde{P}$: $M \to F_{s-1,p}$ definiert durch

$$\tilde{P}(y) := (\varphi_{s-1,p}^{r} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y)$$
$$\text{für alle } y \in P^{-1}(F_{s,p}^{(r)}),\ r \in \{0, \ldots, p-1\},$$

wobei

$$F_{s,p}^{(r)} := \begin{cases} \{z \in F_{s,p} |\ \arg z_k = (r/p)\,2\pi, \text{ falls } z_k \neq 0\} & \text{im Falle } s \text{ ungerade,} \\ \{z \in F_{s,p} |\ (r/p)\,2\pi \leqslant \arg z_k \leqslant ((r+1)/p)\,2\pi, \text{ falls } z_k \neq 0\} & \\ & \text{im Falle } s \text{ gerade.} \end{cases}$$

Um nachzuweisen, dass $\tilde{P}$ wohldefiniert und damit automatisch auch stetig ist, haben wir zu zeigen, dass $\tilde{P}$ für alle $y \in P^{-1}(F_{s-1,p})$ eindeutig definiert ist (gerade in diesen Punkten ist $\tilde{P}$ mehrfach definiert, da es für diese y mehrere $r \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $y \in P^{-1}(F_{s,p}^{(r)})$ gibt.

Es sei $y \in P^{-1}(F_{s,p}^{(r)} \cap F_{s-1,p})$ $(r \in \{0, \ldots, p-1\})$. Dann gilt $h_{k,l}((\varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y)) \in \partial T_{k,l}$ und folglich wegen

$$\tilde{r}_{k,l}|_{\partial T_{k,l} \setminus \{h_{k,l}(x)\}} = \mathrm{id}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(y) &= (\varphi_{s-1,p}^{r} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y) = (\varphi_{s-1,p}^{r} \circ h_{k,l}^{-1} \circ \tilde{r}_{k,l} \circ h_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y) \\ &= (\varphi_{s-1,p}^{r} \circ h_{k,l}^{-1} \circ h_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y) = (\varphi_{s-1,p}^{r} \circ \varphi_{s-1,p}^{p-r} \circ P)(y) = P(y), \end{aligned}$$

d.h. $\tilde{P}(y)$ ist von r unabhängig.

Es sei $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ und $y \in P^{-1}(F_{s,p}^{(r)})$. Dann ist $f(y) \in P^{-1}(F_{s,p}^{(r+1)})$ und folglich wegen $P \circ f = \varphi_{s,p} \circ P$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(f(y)) &= (\varphi_{s-1,p}^{r+1} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-(r+1)} \circ P)(f(y)) \\ &= (\varphi_{s-1,p}^{r+1} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-(r+1)} \circ P \circ f)(y) \\ &= (\varphi_{s-1,p}^{r+1} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r-1} \circ \varphi_{s,p} \circ P)(y) \\ &= \varphi_{s-1,p}((\varphi_{s-1,p}^{r} \circ r_{k,l} \circ \varphi_{s,p}^{p-r} \circ P)(y)) \\ &= \varphi_{s-1,p}(\tilde{P}(y)) = (\varphi_{s-1,p} \circ \tilde{P})(y). \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man auch $(\tilde{P} \circ f)(y) = (\varphi_{s-1,p} \circ \tilde{P})(y)$ für $y \in P^{-1}(F_{s,p}^{(p-1)})$, also insgesamt ist $\tilde{P} \circ f = \varphi_{s-1,p} \circ \tilde{P}$. Nach Teil (b) des Beweises kann aber solch ein $\tilde{P}$ nicht existieren, d.h. die Annahme „P nicht surjektiv" muss falsch sein. ∎

Aus Hilfssatz 10 und Satz 2 können wir sehr einfach folgendes Resultat folgern, das im Beweis von Satz 13 benötigt werden wird:

Hilfssatz 11. *Es sei M ein normaler Raum, p prim und f: $M \to M$ stetig mit* $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$, *und es sei* $s := s(f, p, M) < \infty$. *Dann gibt es ein* $\{G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}\} \in U(f, p, M)$ *und* $[G_j^{(k)} | \, j \in Z] \in Z(G^{(k)}, f)$ $(k = 1, \ldots, s)$, *so dass für* $k \in N$, $k \leqslant s/2$ *gilt*

$$G_{j_1}^{(2k-1)} \cap G_{j_2}^{(2k)} = \emptyset \quad \textit{für} \quad j_1, j_2 \in Z, j_1 \not\equiv j_2 \pmod p \textit{ und } j_1 \not\equiv (j_2+1) \pmod p.$$

Beweis. Es seien die Mengen $F^{(k)} \subset F_{s,p}$ $(k = 1, \ldots, s)$ wie in Teil (b) des Beweises von Satz 2 definiert (mit s anstelle von n), und für $j \in Z$ seien im Falle k ungerade

$$F_j^{(k)} := \{z \in F^{(k)} | \; (j/p)2\pi \leqslant \arg z_{(k+1)/2} + 2\pi n \leqslant ((2j+1)/2p)2\pi \text{ für ein } n \in Z\}$$

bzw. im Falle k gerade

$$F_j^{(k)} := \{z \in F^{(k)} | \; ((2j+1)/2p)2\pi \leqslant \arg z_{k/2} + 2\pi n \leqslant ((j+1)/p)2\pi \text{ für ein } n \in Z\}.$$

Es ist offensichtlich, dass $[F_j^{(k)} | \, j \in Z] \in Z(F^{(k)}, \varphi_{s,p})$ und dass für $k \in Z$, $k \leqslant s/2$ gilt

$$F_{j_1}^{(2k-1)} \cap F_{j_2}^{(2k)} = \emptyset$$
$$\text{für} \quad j_1, j_2 \in Z, \quad j_1 \not\equiv j_2 \pmod p \text{ und } j_1 \not\equiv (j_2+1) \pmod p.$$

Es sei nun P: $M \to F_{s,p}$ stetig mit $P \circ f = \varphi_{s,p} \circ P$. Für $G^{(k)} := P^{-1}(F^{(k)})$ und $G_j^{(k)} := P^{-1}(F_j^{(k)})$ $(j \in Z, k = 1, \ldots, s)$ gilt dann automatisch die Behauptung. ∎

Es ist naheliegend zu fragen, ob auch eine Umkehrung von Satz 2 der folgenden Form gilt: Gibt es stets ein stetiges J: $F_{s,p} \to M$ mit $J \circ \varphi_{s,p} = f \circ J$ (Bezeichnungen wie in Satz 2)? Die Antwort darauf ist nur für die Fälle $s = 0$ und $s = 1$ positiv (diese Fälle sind trivial), jedoch findet man leicht ein Tripel (f, p, M) mit $s(f, p, M) = 2$, für das es kein solches J geben kann:

Beispiel 1. Es sei p eine Primzahl und

$$\begin{aligned} M := \{z \in C | \; &|z| = 2 + \sin(1/\sin(p \arg z)) \text{ für } 0 \leqslant \arg z < 2\pi, \\ &\arg z \neq (k\pi/p) \; (k = 0, \ldots, 2p-1) \text{ bzw. } 1 \leqslant |z| \leqslant 3 \\ &\qquad \text{für } \arg z \in \{(k\pi/p) | \; k = 0, \ldots, 2p-1\}\}, \end{aligned}$$

und $f := M \to M$ sei definiert durch $f(z) := ze^{2\pi i/p}$ $(z \in M)$.

Es gilt $s(f, p, M) \leqslant 2$, denn P: $M \to F_{2,p}$, definiert durch $P(z) := ((z/|z|), 0, 0, \ldots)$, ist eine stetige Abbildung mit $P \circ f = \varphi_{2,p} \circ P$, und folglich gilt nach Hilfssatz 10

$$s(f, p, M) \leqslant s(\varphi_{2,p}, p, F_{2,p}) \leqslant 2.$$

Andererseits ist M zusammenhängend (nach Hilfssatz 9 folgt daraus $s(f, p, M) \geqslant 2$, also insgesamt $s(f, p, M) = 2$), aber nicht bogenzusammenhängend (man beachte, dass Beispiel 1 das Standardbeispiel

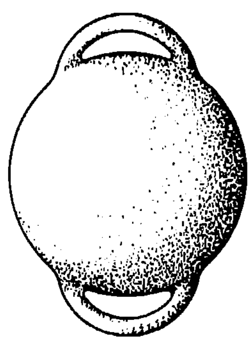
$$N := \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y = \sin(1/x) \text{ für } x \neq 0, -1 \leqslant y \leqslant 1 \text{ für } x = 0\}$$

eines zusammenhängenden, aber nicht bogenzusammenhängenden Raumes modifiziert). Da M nicht bogenzusammenhängend ist, kann es auch kein stetiges $J\colon F_{2,p} \to M$ mit $J \circ \varphi_{2,p} = f \circ J$ geben.

Bei Beispiel 1 ist also das singuläre Verhalten der Menge M schuld daran, dass kein J mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Man könnte aber bei diesem Beispiel noch erhoffen, Abbildungen J_ε in ε-Umgebungen M^ε von M für beliebiges $\varepsilon > 0$ zu finden, so dass in gewissem Sinne approximativ $J_\varepsilon \circ \varphi_{s,p} \approx$ „$f \circ J_\varepsilon$" (was die rechte Seite bedeutet, müsste noch definiert werden) erfüllt werden kann.

Jedoch kann man schon Tripel (f, p, M) mit $s(f, p, M) = 3$ finden, bei denen M glatt ist und nicht für alle $\varepsilon > 0$ solche J_ε existieren können:

Beispiel 2. Es sei M der glatte Rand („glatt" bedeute zumindest C^0, jedoch kann man ohne weiteres auch C^∞ annehmen) einer symmetrischen Nullumgebung im $\boldsymbol{R}^3$, die gebildet ist aus der Kugel $K(0, 1)$ und zwei symmetrisch zum Ursprung angehefteten Henkeln (vgl. Skizze). M ist eine Fläche vom Geschlecht 2. Es sei $f := -\mathrm{id}_M$. Dann ist $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^2 = \mathrm{id}_M$. Weiterhin gilt $s(f, 2, M) = 3$, denn:



(a) Offensichtlich gilt $s(f, 2, M) \leqslant 3$, wie man leicht durch Konstruktion eines $\{G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}\} \in U(f, 2, M)$ nachweist oder wie folgt zeigen kann: Sei $P\colon M \to S^2 = \partial K(0, 1)$ definiert durch $P(x) = x/|x|$. Dann gilt $P \circ f = P \circ (-\mathrm{id}_M) = (-\mathrm{id}_{S^2}) \circ P$, und nach Hilfssatz 10 und der Folgerung aus dem Krasnosel'skiĭschen Satz (vgl. Seite 26) gilt $s(f, 2, M) \leqslant s(-\mathrm{id}_{S^2}, 2, S^2) = 3$.

(b) Wegen M zusammenhängend ist aufgrund von Definition 2 $s(f, 2, M) \geqslant 2$. Wäre $s(f, 2, M) = 2$, so gäbe es ein stetiges $P\colon M \to F_{2,2}$ mit $P \circ f = \varphi_{2,2} \circ P$. Es sei $Q\colon F_{2,2} \to S^1 \subset \boldsymbol{R}^2$ kanonisch definiert. Dann gilt

$Q\circ\varphi_{2,2}=(-\mathrm{id}_{S^1})\circ Q$ und folglich

$$(Q\circ P)\circ f=Q\circ(P\circ f)=Q\circ\varphi_{2,2}\circ P=(-\mathrm{id}_{S^1})\circ(Q\circ P).$$

$Q\circ P$ würde also antipodische Punkte auf M in antipodische Punkte auf S^1 abbilden im Widerspruch zum Satz von Borsuk–Ulam (vgl. Deimling [19], Satz 3 auf Seite 48). Folglich ist $s(f,2,M)>2$, also $s(f,2,M)=3$.

Es ist aber ganz offensichtlich, dass es kein stetiges $J\colon F_{3,2}\to M$ mit $J\circ\varphi_{3,2}=f\circ J$ geben kann, auch nicht approximativ im oben skizzierten Sinne.

Die Frage liegt nahe, ob es doch allgemeine Fälle von Tripeln (f,p,M) und stetigen Einbettungen $J\colon F_{s,p}\to M$ mit $J\circ\varphi_{s,p}=f\circ J$ gibt. Diese Frage ist insofern wichtig, weil dann mittels Hilfssatz 10 $s(f,p,M)\geqslant s(\varphi_{s,p},p,F_{s,p})$ folgt, wobei wir zunächst noch $s(\varphi_{s,p},p,F_{s,p})=s$ zeigen werden. Solche Einbettungen geben also Abschätzungen für $s(f,p,M)$ nach unten.

Hilfssatz 12. *Für alle Primzahlen p und alle $n\in N\cup\{0\}$ ist $s(\varphi_{n,p},p,F_{n,p})=n$.*

Bemerkung. Hilfssatz 12 ist für gerade n eine triviale Konsequenz der Folgerung aus dem Satz von Krasnosel'skiĭ (vgl. Seite 26), woraus dann sehr einfach die Aussage auch für ungerade n folgt. Im folgenden Beweis wird nur von der sofort aus dem Krasnosel'skiĭschen Resultat folgenden Tatsache Gebrauch gemacht, dass es zu jedem $n\in N\cup\{0\}$ und jeder Primzahl p einen normalen Raum M und ein stetiges $f\colon M\to M$ gibt mit $\mathscr{F}[f]=\emptyset$, $f^p=\mathrm{id}$ und $s(f,p,M)=n$.

Beweis von Hilfssatz 12. Es sei $n\in N\cup\{0\}$ und p Primzahl. Es wurde schon gezeigt, dass $s(\varphi_{n,p},p,F_{n,p})\leqslant n$ ist.

Es sei M ein normaler Raum und $f\colon M\to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f]=\emptyset$, $f^p=\mathrm{id}$ und $s(f,p,M)=n$. Nach Satz 2 gibt es ein stetiges $P\colon M\to F_{n,p}$ mit $P\circ f=\varphi_{n,p}\circ P$. Nach Hilfssatz 10 gilt dann $n=s(f,p,M)\leqslant s(\varphi_{n,p},p,F_{n,p})$. ■

Definition 3. Ein topologischer Raum M heisst *n-zusammenhängend* (englisch *n-connected*, vgl. Spanier [62]), falls für alle $j\in\{0,\dots,n\}$ jedes stetige $\varphi\colon S^j\to M$ nullhomotop (d.h. homotop zu einer konstanten Abbildung) ist, m.a.W. φ besitzt eine stetige Fortsetzung $\Phi\colon R^{j+1}\to M$.

Bemerkung. Ein topologischer Raum ist genau dann n-zusammenhängend, wenn die Fundamentalgruppen $\pi_j(M,x)$ $(j=0,\dots,n)$ trivial sind für alle $x\in M$ (vgl. Spanier [62], Switzer [70]). Die Sphären S^n sind $(n-1)$-zusammenhängend, aber nicht n-zusammenhängend. Der Begriff 0-zusammenhängend ist identisch mit bogenzusammenhängend, 1-zusammenhängend mit einfach zusammenhängend.

Satz 3. *Es sei $n\in N\cup\{0\}$, $M\neq\emptyset$ ein separierter, n-zusammenhängender topologischer Raum, p prim und $f\colon M\to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f]=\emptyset$ und $f^p=\mathrm{id}$.*

Dann gibt es ein stetiges $J\colon F_{n+2,p}\to M$ *mit* $J\circ\varphi_{n+2,p}=f\circ J$, *insbesondere ist also* $s(f,p,M)\geqslant n+2$.

Bemerkung. Diese Abschätzung von $s(f,p,M)$ ist häufig nicht besonders gut. Im obigen Beispiel 1 ist M nicht einmal 0-zusammenhängend, in Beispiel 2 0-zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend. Andererseits gibt Satz 3 für die Sphären S^k gerade die optimale Abschätzung, da ja stets $s(f,p,S^k)=k+1$ ist für stetige $f\colon S^k\to S^k$ mit $\mathscr{F}[f]=\emptyset$ und $f^p=\mathrm{id}$.

Beweis von Satz 3. (a) Trivialerweise gibt es eine (stetige) Abbildung $J_1\colon F_{1,p}\to M$ mit $J_1\circ\varphi_{1,p}=f\circ J_1$ (wähle $x\in M$ und definiere $J_1(e^{(k/p)2\pi i},0,0\ldots)\colon=f^k(x)$ für $k=0,\ldots,p-1$).

(b) Angenommen, es sei $1\leqslant m\leqslant n+1$, und $J_m\colon F_{m,p}\to M$ sei stetig mit $J_m\circ\varphi_{m,p}=f\circ J_m$. Wir zeigen, dass es auch ein stetiges $J_{m+1}\colon F_{m+1,p}\to M$ mit $J_{m+1}\circ\varphi_{m+1,p}=f\circ J_{m+1}$ gibt, wobei wir die folgenden Fälle unterscheiden:

(α) Im Falle m gerade beachte man, dass (vgl. Seite 32)

$$S_{(m+2)/2,0}=\{z=(z_1,\ldots,z_{(m+2)/2},0,\ldots)\in F_{m+1,p}|\ \arg z_{(m+2)/2}=0\}$$

homöomorph ist zu $\overline{K(0,1)}\subset R^m$ mit Homöomorphismus $h_m\colon S_{(m+2)/2,0}\to\overline{K(0,1)}$,

$$h_m(z)\colon=(\operatorname{Re}z_1,\operatorname{Im}z_1,\operatorname{Re}z_2,\ldots,\operatorname{Im}z_{m/2}),$$

wobei $h_m(F_{m,p})=S^{m-1}$ ist. Wegen $m-1\leqslant n$ und M n-zusammenhängend gibt es eine stetige Fortsetzung $\Phi_m\colon\overline{K(0,1)}\subset R^m\to M$ von $J_m\circ h_m^{-1}|_{S^{m-1}}$. Definiere $J_{m+1}\colon F_{m+1,p}\to M$ durch

$$J_{m+1}(z)\colon=(f^k\circ\Phi_m\circ h_m\circ\varphi^{p-k}_{m+1,p})(z),$$
$$\text{falls}\quad\arg(z_{(m+2)/2})=\frac{k}{p}2\pi,\qquad k\in\{0,\ldots,p-1\}.$$

Die Stetigkeit von J_{m+1} ist klar für alle $z\in F_{m+1,p}\backslash F_{m,p}$ (d.h. für alle $z\in F_{m+1,p}$ mit $z_{(m+2)/2}\neq0$). Für $z\in F_{m,p}$, d.h. $z_{(m+2)/2}=0$, beachte man, dass für $k=0,\ldots,p-1$ gilt (man beachte $\Phi_m|_{S^{m-1}}=J_m\circ h_m^{-1}$ und $f\circ J_m=J_m\circ\varphi_{m,p}=J_m\circ\varphi_{m+1,p}|_{F_{m,p}}$)

$$\begin{aligned}J_{m+1}(z)&=(\Phi_m\circ h_m\circ\varphi^p_{m+1,p})(z)=(\Phi_m\circ h_m)(z)=(J_m\circ h_m^{-1}\circ h_m)(z)\\&=J_m(z)=(f^k\circ f^{p-k}\circ J_m)(z)=(f^k\circ J_m\circ\varphi^{p-k}_{m,p})(z)\\&=(f^k\circ J_m\circ\varphi^{p-k}_{m+1,p})(z)=(f^k\circ\Phi_m\circ h_m\circ\varphi^{p-k}_{m+1,p})(z),\end{aligned}$$

woraus dann trivial die Stetigkeit von J_{m+1} auch in Punkten $z\in F_{m,p}$ folgt. Der Beweis von $J_{m+1}\circ\varphi_{m+1,p}=f\circ J_{m+1}$ ist ganz analog dem entsprechenden Beweis von $P_{j+1}\circ f|_{\bigcup_{i=1}^{j}G^{(i)}}=\varphi_{j+1,p}\circ P_{j+1}$ auf Seite 33.

(β) Im Falle m ungerade beachte man, dass

$$S_{(m+1)/2,1/p}: = \{z = (z_1, \ldots, z_{(m+1)/2}, 0, \ldots) \in F_{m+1,p} | \; 0 \leqslant \arg z_{(m+1)/2} \leqslant 2\pi/p\}$$

homöomorph ist zu $\overline{K(0,1)} \subset R^m$ mit Homöomorphismus h_m: $S_{(m+1)/2,1/p} \to \overline{K(0,1)}$,

$$h_m(z): = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Re} z_2, \ldots, \operatorname{Im} z_{(m-1)/2}, |z_{(m+1)/2}| \cos(\tfrac{1}{2} p \arg z_{(m+1)/2})),$$

wobei gilt:

$$h_m(S_{(m+1)/2,1/p} \cap F_{m,p}) = h_m(\{z \in S_{(m+1)/2,1/p} | \; \arg z_{(m+1)/2} = 0 \text{ oder } \arg z_{(m+1)/2} = 2\pi/p\}) = S^{m-1}.$$

Wegen $m-1 \leqslant n$ und M n-zusammenhängend gibt es eine stetige Fortsetzung Φ_m: $\overline{K(0,1)} \subset R^m \to M$ von $J_m \circ h_m^{-1}|_{S^{m-1}}$. Definiere J_{m+1}: $F_{m+1,p} \to M$ durch

$$J_{m+1}(z): = (f^k \circ \Phi_m \circ h_m \circ \varphi_{m+1,p}^{p-k})(z),$$
$$\text{falls} \quad \frac{k}{p} 2\pi \leqslant \arg z_{(m+1)/2} < \frac{k+1}{p} 2\pi, \; k \in \{0, \ldots, p-1\}.$$

Ganz analog zum Fall (α) zeigt man die Stetigkeit von J_{m+1} sowie $J_{m+1} \circ \varphi_{m+1,p} = f \circ J_{m+1}$.

(c) Der Induktionsbeweis sichert insbesondere die Existenz eines stetigen J_{n+2}: $F_{n+2,p} \to M$ mit $J_{n+2} \circ \varphi_{n+2,p} = f \circ J_{n+2}$. Nach Hilfssatz 10 und 12 gilt dann $n+2 = s(\varphi_{n+2,p}, p, F_{n+2,p}) \leqslant s(f, p, M)$. ∎

2. Stabilität der Zahlen $s(f, p, M)$

Im folgenden werden einige Stetigkeitseigenschaften der Zahlen $s(f, p, M)$ zusammengestellt, die zwar in dieser Arbeit nicht explizit verwendet werden, jedoch für sich von Interesse sind, da sie das Wesen dieser Zahlen recht gut beleuchten. Dabei werden zunächst nur Abänderungen von M, nicht aber von f betrachtet – man erhält eine Art Oberhalbstetigkeit, aus der man eine Minimierungsmöglichkeit herleiten kann –, danach Änderungen von M und f, wobei wiederum ein Oberhalbstetigkeits-Resultat sowie ein Glättungssatz bewiesen werden.

Satz 4. *Es sei M ein normaler Raum, p eine Primzahl und f: $M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Es sei $M_0 \subset M$ abgeschlossen mit $f(M_0) = M_0$. Dann gibt es eine Umgebung W von M_0 mit $s(f, p, M_1) \leqslant s(f, p, M_0)$ für alle $M_1 \subset W$ mit $f(M_1) = M_1$.*

Beweis. Es sei I eine Menge mit $\operatorname{card} I = s(f, p, M_0)$, und es sei $\{G^{(i)} | \; i \in I\} \in U(f, p, M_0)$. Nach Hilfssatz 8 gibt es für alle $i \in I$ eine Umgebung $H^{(i)}$ von $G^{(i)}$ mit $H^{(i)} \in \mathscr{C}(f, p, M)$. Setze $W: = \bigcup_{i \in I} H^{(i)}$. Dann ist W trivialerweise eine Umgebung von M_0.

Es sei $M_1 \subset W$ mit $f(M_1) = M_1$. Dann ist $\{H^{(i)} \cap M_1 | \, i \in I\} \in U(f, p, M_1)$, also $s(f, p, M_1) \leqslant \operatorname{card} I = s(f, p, M_0)$. ■

SATZ 5. *Es sei M ein kompakter topologischer Raum, p prim und $f: M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge $M_0 \subset M$ mit $f(M_0) = M_0$ und $s(f, p, M_0) = s(f, p, M)$, aber $s(f, p, M_1) < s(f, p, M)$ für alle abgeschlossenen $M_1 \subsetneqq M_0$ mit $f(M_1) = M_1$.*

Beweis. Wir betrachten das partiell geordnete System $(\mathfrak{S}, <)$, wobei

$$\mathfrak{S} := \{N \subset M | \; N \text{ abgeschlossen}, f(N) = N, \; s(f, p, N) = s(f, p, M)\}$$

und $N_1 < N_2$, falls $N_2 \subset N_1$. Mittels des Zornschen Lemmas soll die Existenz eines maximalen Elements M_0 in $(\mathfrak{S}, <)$ nachgewiesen werden, das dann offenkundig die in Satz 5 geforderten Eigenschaften hat.

Wegen $M \in \mathfrak{S}$ ist $\mathfrak{S} \neq \emptyset$.

Es sei $(\mathfrak{T}, <)$ ein total geordnetes Teilsystem von $(\mathfrak{S}, <)$. Dann ist $N_0 := \bigcap_{N \in \mathfrak{T}} N$ eine obere Schranke von $\mathfrak{T}$, denn: Trivialerweise genügt es zu zeigen, dass $N_0 \in \mathfrak{S}$ ist. Natürlich ist N_0 abgeschlossen und es gilt

$$f(N_0) = f\Big(\bigcap_{N \in \mathfrak{T}} N\Big) = \bigcap_{N \in \mathfrak{T}} f(N) = \bigcap_{N \in \mathfrak{T}} N = N_0 .$$

Nach Satz 4 gibt es eine Umgebung W von N_0 mit $s(f, p, N) \leqslant s(f, p, N_0)$ für alle $N \subset W$ mit $f(N) = N$. Aus $\bigcap_{N \in \mathfrak{T}} (N \backslash \mathring{W}) = \big(\bigcap_{N \in \mathfrak{T}} N\big) \backslash \mathring{W} = N_0 \backslash \mathring{W} = \emptyset$, $N \subset M$ abgeschlossen für alle $N \in \mathfrak{T}$ sowie M kompakt folgt, dass es endlich viele $N_i \in \mathfrak{T}$ $(i = 1, \ldots, k)$ geben muss mit $\bigcap_{i=1}^{k} (N_i \backslash \mathring{W}) = \bigcap_{i=1}^{k} N_i \backslash \mathring{W} = \emptyset$, also $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subset W$. Wegen der Totalordnung von $\mathfrak{T}$ ist $\bigcap_{i=1}^{k} N_i = N_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, k\}$, d.h. es gibt ein $N (= N_j) \in \mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$ mit $N \subset W$, also $s(f, p, M) = s(f, p, N) \leqslant s(f, p, N_0)$. Andererseits ist wegen $N_0 \subset M$ auch $s(f, p, N_0) \leqslant s(f, p, M)$, also $s(f, p, N_0) = s(f, p, M)$. ■

Obwohl durch den in Satz 5 beschriebenen Minimierungsprozess die Fixpunktmengen beträchtlich vereinfacht werden können, „überflüssiger Ballast abgeworfen wird", beschreiben die Zahlen $s(f, p, M)$ auch für im Sinne von Satz 5 minimale Fixpunktmengen M die topologische Struktur von (f, p, M) nicht vollständig. Dies sieht man schon an den Beispielen 1 und 2 (Seite 36–38), bei denen jeweils M minimal ist, ohne dass eine topologische Äquivalenz zu den entsprechenden Tripeln $(\varphi_{n,p}, p, F_{n,p})$ besteht.

Dabei ist bei Beispiel 1 der Unterschied zwischen (f, p, M) und $(\varphi_{2,p}, p, F_{2,p})$ weniger tiefliegend als der entsprechende Unterschied bei Beispiel 2. Die folgenden Sätze 6 und 7 zeigen, dass – grob gesagt – eine singuläre Struktur der Fixpunktmenge M vielfach keinen Einfluss auf die Zahlen $s(f, p, M)$ hat; man kann unter Erhaltung dieser Zahlen beliebig genau M durch ein Polyeder und f durch eine simpliziale Abbildung approximieren.

Satz 6. *Es sei E ein unendlichdimensionaler normierter Raum, $M \subset E$ kompakt, p Primzahl und $f\colon M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ und ein Kompaktum $K \subset K(0, \delta)$, so dass gilt:*

Es existiert ein endlicher simplizialer Komplex $\tilde{M}$ mit $|\tilde{M}| \subset \mathrm{co}(M+K) \cap M^\delta$ und eine simpliziale Abbildung $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ mit $\mathscr{F}[\tilde{f}] = \emptyset$, $\tilde{f}^p = \mathrm{id}$, $\|\tilde{f}(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon$ für alle $x \in |\tilde{M}|$, $y \in M$ mit $\|x-y\| \leqslant \delta$ und $s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|) \geqslant s(f, p, M)$.

Beweis. Wegen M kompakt, f stetig und $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ ist $d := \inf\limits_{x \in M} \|x - f(x)\| = \min\limits_{x \in M} \|x - f(x)\| > 0$:

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\delta \in (0, \min(\varepsilon, d/3))$ so, dass $\|f(y) - f(z)\| \leqslant \varepsilon/2$ ist für alle $y, z \in M$ mit $\|y - z\| \leqslant 4\delta$.

Es seien $y_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots)$ linear unabhängig mit $\|y_i\| < \delta/(i+1)$, und es sei $K := \{0\} \cup \{y_i \mid i \in N\}$. Wegen der Kompaktheit von M gibt es endlich viele Punkte $z_j \in M$ $(j = 1, \ldots, k)$ derart, dass für alle $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ und ein $l \in \{0, \ldots, p-1\}$ existieren mit

$$\max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(x) - f^{m+l}(z_j)\| < \delta/2.$$

Man wähle $y_{j,l} \in K$ $(j = 1, \ldots, k;\ l = 0, \ldots, p-1)$ so, dass

$$\{x_{j,l} := f^l(z_j) + y_{j,l} \mid j = 1, \ldots, k;\ l = 0, \ldots, p-1\}$$

linear unabhängig ist, und setze

$$\begin{aligned} \tilde{M} := \Big\{(x_{j_1,l_1} \ldots x_{j_r,l_r}) \mid\ & r \in N,\ (j_i, l_i) \in \{1, \ldots, k\} \times \{0, \ldots, p-1\}, \\ & \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(x) - f^{m+l_i}(z_{j_i})\| < \delta/2 \\ & \text{für } i = 1, \ldots, r\Big\}. \end{aligned}$$

Es ist trivial, dass $\tilde{M}$ ein simplizialer Komplex ist (die Eigenschaft (K 2) (vgl. Schubert [60], Seite 167) folgt aus der linearen Unabhängigkeit der $x_{j,l}$). Weiterhin ist klar, dass mit $(x_{j_1,l_1} \ldots x_{j_r,l_r}) \in \tilde{M}$ auch $(x_{j_1,l'_1} \ldots x_{j_r,l'_r}) \in \tilde{M}$ ist mit $l'_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $l'_i \equiv (l_i + 1) \pmod{p}$, denn dann folgt aus $\max\limits_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(x) - f^{m+l_i}(z_{j_i})\| < \delta/2$ für $i = 1, \ldots, r$ und ein geeignetes $x \in M$, dass auch

$$\begin{aligned} \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(f(x)) - f^{m+l'_i}(z_{j_i})\| &= \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^{m+1}(x) - f^{m+1+l_i}(z_{j_i})\| \\ &= \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(x) - f^{m+l_i}(z_{j_i})\| < \delta/2 \end{aligned}$$

ist für $i = 1, \ldots, r$. Damit ist die Existenz der durch

$$\tilde{f}(x_{j,l}) := x_{j,l'} \quad (l' \in \{0, \ldots, p-1\},\ l' \equiv (l+1) \pmod{p})$$

festgelegten simplizialen Abbildung $\tilde{f}\colon \tilde{M} \to \tilde{M}$ gesichert.

Es bleibt nachzuweisen, dass $\tilde{M}$ und $\tilde{f}$ die geforderten Eigenschaften haben:

$|\tilde{M}| \subset \mathrm{co}\,(M+K)$ ist trivial. Zudem gilt: Es sei $z \in |\tilde{M}|$. Dann gibt es ein $r \in N$ und $(j_i, l_i) \in \{1, \ldots, k\} \times \{0, \ldots, p-1\}$ und $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{j_i, l_i} = z$ und $(x_{j_1, l_1} \ldots x_{j_r, l_r}) \in \tilde{M}$. Aus letzterem folgt, dass es ein $x \in M$ gibt mit $\|x - f^{l_i}(z_{j_i})\| < \delta/2$ für $i = 1, \ldots, r$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}\,(z, M) &\leqslant \|z-x\| = \Big\| \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (x_{j_i, l_i} - x) \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \|x_{j_i, l_i} - x\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \big(\|x_{j_i, l_i} - f^{l_i}(z_{j_i})\| + \|f^{l_i}(z_{j_i}) - x\| \big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \big(\|y_{j_i, l_i}\| + \|f^{l_i}(z_{j_i}) - x\| \big) < \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\delta/2 + \delta/2) = \delta,
\end{aligned}$$

d.h. es ist $|\tilde{M}| \subset M^{\delta}$.

$\tilde{f}^{p} = \mathrm{id}$ ist trivial. Zum Nachweis von $\mathscr{F}[\tilde{f}] = \emptyset$ genügt es zu zeigen, dass $\tilde{f}(s) \neq s$ ist für alle Simplexe $s \in \tilde{M}$. Dies ist aber klar, da für alle $(j, l) \in \{1, \ldots, k\} \times \{0, \ldots, p-1\}$ mit $l' \in \{0, \ldots, p-1\}$, $l' \equiv (l+1) \pmod{p}$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(x_{j,l}) - x_{j,l}\| &= \|x_{j,l'} - x_{j,l}\| = \|f^{l+1}(z_j) - f^{l}(z_j) + y_{j,l'} - y_{j,l}\| \\
&\geqslant \|f^{l+1}(z_j) - f^{l}(z_j)\| - \|y_{j,l'}\| - \|y_{j,l}\| \geqslant d - \delta/2 - \delta/2 \\
&> 3\delta - \delta = 2\delta,
\end{aligned}$$

jedoch für alle $s \doteq (x_{j_1, l_1} \ldots x_{j_r, l_r}) \in \tilde{M}$ mit einem $x \in M$ gemäss der Definition von $\tilde{M}$ gilt (bzgl. der ersten Identität vgl. etwa Mayer [45], Theorem 5 auf Seite 6):

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}\,(s) &= \max_{m,n=1,\ldots,r} \|x_{j_m, l_m} - x_{j_n, l_n}\| \\
&\leqslant \max_{m,n=1,\ldots,r} \big(\|x_{j_m, l_m} - f^{l_m}(z_{j_m})\| + \|f^{l_m}(z_{j_m}) - x\| + \\
&\qquad + \|x - f^{l_n}(z_{j_n})\| + \|f^{l_n}(z_{j_n}) - x_{j_n, l_n}\| \big) \\
&= \max_{m,n=1,\ldots,r} \big(\|y_{j_m, l_m}\| + \|y_{j_n, l_n}\| + \|x - f^{l_m}(z_{j_m})\| + \|x - f^{l_n}(z_{j_n})\| \big) \\
&< 2(\delta/2) + 2(\delta/2) = 2\delta.
\end{aligned}$$

Es seien $x \in |\tilde{M}|$ und $y \in M$ mit $\|x - y\| \leqslant \delta$. Dann gibt es ein $r \in N$ und $(j_i, l_i) \in \{1, \ldots, k\} \times \{0, \ldots, p-1\}$ und $\alpha_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ mit $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$, $x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{j_i, l_i}$ und $(x_{j_1, l_1} \ldots x_{j_r, l_r}) \in \tilde{M}$. Dann gilt mit $l'_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $l'_i \equiv (l_i + 1) \pmod{p}$ $(i = 1, \ldots, r)$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(x)-f(y)\| &= \|\tilde{f}(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{j_i,l_i})-f(y)\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\tilde{f}(x_{j_i,l_i})-f(y))\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \|\tilde{f}(x_{j_i,l_i})-f(y)\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \big(\|\tilde{f}(x_{j_i,l_i})-f(f^{l_i}(z_{j_i}))\| + \|f(f^{l_i}(z_{j_i}))-f(y)\|\big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \big(\|x_{j_i,l_i'}-f^{l_i'}(z_{j_i})\| + \|f(f^{l_i}(z_{j_i}))-f(y)\|\big) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \big(\|y_{j_i,l_i'}\| + \|f(f^{l_i}(z_{j_i}))-f(y)\|\big) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\delta/2+\varepsilon/2) \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei $\|f(f^{l_i}(z_{j_i}))-f(y)\| \leqslant \varepsilon/2$ aus

$$\begin{aligned}
\|f^{l_i}(z_{j_i})-y\| &\leqslant \|f^{l_i}(z_{j_i})-x_{j_i,l_i}\| + \|x_{j_i,l_i}-x\| + \|x-y\| \\
&\leqslant \|y_{j_i,l_i}\| + \operatorname{diam}(x_{j_1,l_1} \dots x_{j_r,l_r}) + \|x-y\| \\
&\leqslant \delta/2+2\delta+\delta < 4\delta
\end{aligned}$$

und der Wahl von δ folgt.

Zum Nachweis von $s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|) \geqslant s(f, p, M)$ definieren wir ähnlich dem Schauderschen Projektionsoperator eine stetige Abbildung $P\colon M \to |\tilde{M}|$ gemäss

$$P(z) := \Big(\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\Big)^{-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\, x_{j,l},$$

wobei

$$\mu_{j,l}(z) := \max\big(0,\, \delta/2 - \max_{m=0,\dots,p-1} \|f^m(z)-f^{m+l}(z_j)\|\big).$$

P ist wohldefiniert, da nach der Wahl der z_j stets

$$\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z) > 0$$

ist und zudem nach der Definition von $\tilde{M}$ $P(z) \in |\tilde{M}|$ für alle $z \in M$ trivial erfüllt ist. Ebenso ist die Stetigkeit von P klar. Weiterhin gilt für alle

$z \in M$, $(j, l) \in \{1, \ldots, k\} \times \{0, \ldots, p-1\}$ und $l' \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $l' \equiv (l+1)$ (mod p):

$$\begin{aligned}\mu_{j,l'}(f(z)) &= \max\big(0, \delta/2 - \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^{m+1}(z) - f^{m+l'}(z_j)\|\big)\\ &= \max\big(0, \delta/2 - \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^{m+1}(z) - f^{m+1+l}(z_j)\|\big)\\ &= \max\big(0, \delta/2 - \max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^{m}(z) - f^{m+l}(z_j)\|\big) = \mu_{j,l}(z).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}P(f(z)) &= \Big(\sum_{l'=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l'}(f(z))\Big)^{-1} \sum_{l'=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l'}(f(z))\, x_{j,l'}\\ &= \Big(\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\Big)^{-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\, \tilde{f}(x_{j,l}).\end{aligned}$$

Da die x_{j_i,l_i} $(i = 1, \ldots, r)$, für die $\mu_{j_i,l_i}(z) \neq 0$ ist, ein Simplex $(x_{j_1,l_1} \ldots x_{j_r,l_r}) \in \tilde{M}$ aufspannen (denn $\max_{m=0,\ldots,p-1} \|f^m(z) - f^{m+l_i}(z_{j_i})\| < \delta/2$ für $i = 1, \ldots, r$) und somit $\tilde{f}$ als simpliziale Abbildung von $\tilde{M}$ in sich auf $(x_{j_1,l_1} \ldots x_{j_r,l_r})$ affin ist, gilt

$$\begin{aligned}P(f(z)) &= \Big(\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\Big)^{-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\, \tilde{f}(x_{j,l})\\ &= \tilde{f}\Big(\Big(\sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\Big)^{-1} \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{k} \mu_{j,l}(z)\, x_{j,l}\Big) = \tilde{f}(P(z)).\end{aligned}$$

Es ist also $P \circ f = \tilde{f} \circ P$, und somit gilt nach Hilfssatz 10 $s(f, p, M) \leqslant s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|)$. ∎

Satz 6 schliesst nicht aus, dass $s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|) > s(f, p, M)$ sein kann, und man kann sich auch ohne Schwierigkeiten Beispiele konstruieren, bei denen für die im Beweis von Satz 6 konstruierten $\tilde{f}$ und $\tilde{M}$ tatsächlich $s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|) > s(f, p, M)$ gilt. Allerdings zeigt der folgende Satz 7, dass man nur ε klein genug wählen muss, um mit Sicherheit $s(\tilde{f}, p, |\tilde{M}|) = s(f, p, M)$ zu erhalten.

Satz 7. *Es sei (M, d) ein metrischer Raum, $M_1 \subset M$ kompakt, p Primzahl und $f_1\colon M_1 \to M_1$ stetig mit $\mathscr{F}[f_1] = \emptyset$ und $f_1^p = \mathrm{id}$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta \in (0, \varepsilon_0)$, alle $M_2 \subset (M_1)^\delta$ und alle stetigen $f_2\colon M_2 \to M_2$ mit $\mathscr{F}[f_2] = \emptyset$, $f_2^p = \mathrm{id}$ und $d(f_2(x), f_1(y)) \leqslant \varepsilon_0$ für alle $x \in M_2$, $y \in M_1$ mit $d(x, y) \leqslant \delta$ gilt $s(f_2, p, M_2) \leqslant s(f_1, p, M_1)$.*

Beweis. Da im Falle $M_1 = \emptyset$ die Aussage des Satzes trivial ist ($M_1 = \emptyset$ impliziert $M_2 \subset (M_1)^\delta = \emptyset$), können wir im folgenden $M_1 \neq \emptyset$ annehmen.

Es sei $s\colon = s(f_1, p, M_1)$ und $\{G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}\} \in U(f_1, p, M_1)$ mit

$[G_k^{(i)} | \ k \in \boldsymbol{Z}] \in Z(G^{(i)}, f_1)$ für $i = 1, \ldots, s$. Wir wählen

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{3} \min_{\substack{l=1,\ldots,s \\ k_1 k_2 \in Z \\ k_1 \not\equiv k_2 \ (\mathrm{mod}\ p)}} \mathrm{dist}\,(G_{k1}^{(l)}, G_{k2}^{(i)}).$$

Wegen der Kompaktheit von M_1 ist trivialerweise $\varepsilon_1 > 0$.

Wegen der gleichmässigen Stetigkeit von f_1 auf M_1 gibt es eine Funktion $\eta: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ mit $\eta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und $d(f_1(x), f_1(y)) \leqslant \varepsilon$ für alle $x, y \in M_1$ mit $d(x, y) \leqslant \eta(\varepsilon)$. Definiere $\eta^{(j)}(\varepsilon_1)$ $(j = 0, \ldots, p-2)$ vermöge

$$\begin{aligned} &\eta^{(0)}(\varepsilon_1) := \varepsilon_1, \\ &\eta^{(j)}(\varepsilon_1) := \eta\left(\tfrac{1}{3}\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)\right) \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, p-2 \end{aligned}$$

und setze $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\eta^{(p-2)}(\varepsilon_1)$. Dann gilt

$$2\varepsilon_0 = \eta^{(p-2)}(\varepsilon_1) \leqslant 3^{-1}\eta^{(p-3)}(\varepsilon_1) \leqslant \ldots \leqslant 3^{2-p}\eta^{(0)}(\varepsilon_1) = 3^{2-p}\varepsilon_1.$$

Es sei nun $\delta \in (0, \varepsilon_0)$ und M_2 sowie $f_2: M_2 \to M_2$ gewählt mit den in Satz 7 geforderten Eigenschaften. Wir zeigen zunächst für $j = 1, \ldots, p-2$, $i = 1, \ldots, s$ und $k \in \boldsymbol{Z}$

$$\text{(2.1)} \quad \begin{aligned} f_2\left(M_2 \cap \left((G_k^{(i)})^{\eta^{(j)}(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta\right) &\subset M_2 \cap (G_{k+1}^{(i)})^{(2/3)\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)} \\ &\subset M_2 \cap \left((G_{k+1}^{(i)})^{\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta: \end{aligned}$$

$x \in M_2 \cap \left((G_k^{(i)})^{\eta^{(j)}(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta$ impliziert die Existenz eines $y \in (G_k^{(i)})^{\eta^{(j)}(\varepsilon_1)} \cap M_1$ mit $d(x, y) < \delta$, und zu y gibt es ein $z \in G_k^{(i)}$ mit $d(y, z) < \eta^{(j)}(\varepsilon_1)$. Dann gilt $f_2(x) \in M_2$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\,(f_2(x), G_{k+1}^{(i)}) &\leqslant d(f_2(x), f_1(z)) \leqslant d(f_2(x), f_1(y)) + d(f_1(y), f_1(z)) \\ &\leqslant \varepsilon_0 + \tfrac{1}{3}\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1) < \tfrac{2}{3}\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1), \end{aligned}$$

d.h. $f_2(x) \in M_2 \cap (G_{k+1}^{(i)})^{(2/3)\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)}$. Für $w \in M_2 \cap (G_{k+1}^{(i)})^{(2/3)\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)} \subset M_2 \subset (M_1)^\delta$ gibt es ein $u \in M_1$ mit $d(w, u) < \delta < \varepsilon_0$. Dann ist

$$\mathrm{dist}\,(u, G_{k+1}^{(i)}) \leqslant d(w, u) + \mathrm{dist}\,(w, G_{k+1}^{(i)}) < \varepsilon_0 + \tfrac{2}{3}\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1) < \eta^{(j-1)}(\varepsilon_1),$$

also $w \in M_2 \cap \left((G_{k+1}^{(i)})^{\eta^{(j-1)}(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta$.

Für $i = 1, \ldots, s$ und $k \in \boldsymbol{Z}$ erhält man nun zunächst mit ähnlichen Schlüssen

$$M_2 \cap \overline{(G_k^{(i)})^\delta} \subset M_2 \cap \overline{(G_k^{(i)})^{\varepsilon_0}} \subset (G_k^{(i)})^{\varepsilon_1}$$

und

$$\begin{aligned} f_2\left(M_2 \cap \overline{(G_k^{(i)})^\delta}\right) &\subset M_2 \cap \overline{(G_{k+1}^{(i)})^{\varepsilon_0}} \\ &\subset (G_{k+1}^{(i)})^{\varepsilon_1} \cap \left(M_2 \cap \left((G_{k+1}^{(i)})^{\eta^{(p-2)}(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta\right). \end{aligned}$$

Mittels Induktion nach j folgt dann für $j = 2, \ldots, p-1$ (vgl. (2.1)):

$$\begin{aligned} f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_k^{(i)})^\delta}\right) &\subset M_2 \cap (G_{k+j}^{(i)})^{(2/3)\eta(p-j-1)(\varepsilon_1)} \\ &\subset (G_{k+j}^{(i)})^{\varepsilon_1} \cap \left(M_2 \cap \left((G_{k+j}^{(i)})^{\eta(p-j-1)(\varepsilon_1)} \cap M_1\right)^\delta\right), \end{aligned}$$

insgesamt also insbesondere

$$f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_k^{(i)})^\delta}\right) \subset (G_{k+j}^{(i)})^{\varepsilon_1} \quad \text{für} \quad j = 0, \ldots, p-1. \tag{2.2}$$

Wir wählen nun für $i = 1, \ldots, s$ und $k \in \boldsymbol{Z}$

$$\tilde{G}_k^{(i)} := \bigcup_{j=0}^{p-1} f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_{k-j}^{(i)})^\delta}\right)$$

und

$$\tilde{G}^{(i)} := \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} \tilde{G}_k^{(i)}.$$

Im folgenden wird gezeigt, dass $\{\tilde{G}^{(1)}, \ldots, \tilde{G}^{(s)}\} \in U(f_2, p, M_2)$ und folglich $s(f_2, p, M_2) \leqslant s = s(f_1, p, M_1)$ ist:

Trivialerweise sind die $\tilde{G}_k^{(i)}$ alle abgeschlossen in M_2. Zudem gilt

$$\begin{aligned} M_2 \supset \bigcup_{i=1}^s \tilde{G}^{(i)} &= \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} \tilde{G}_k^{(i)} \supset \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} M_2 \cap (G_k^{(i)})^\delta \\ &= M_2 \cap \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} (G_k^{(i)})^\delta \\ &= M_2 \cap \Big(\bigcup_{i=1}^s \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} G_k^{(i)}\Big)^\delta = M_2 \cap \Big(\bigcup_{i=1}^s G^{(i)}\Big)^\delta \\ &= M_2 \cap (M_1)^\delta = M_2, \end{aligned}$$

also $M_2 = \bigcup_{i=1}^s \tilde{G}^{(i)}$. Weiter gilt für $i = 1, \ldots, s$ und $k \in \boldsymbol{Z}$ wegen (2.2)

$$\tilde{G}_k^{(i)} = \bigcup_{j=0}^{p-1} f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_{k-j}^{(i)})^\delta}\right) \subset (G_k^{(i)})^{\varepsilon_1},$$

woraus nach der Definition von ε_1 sofort $\tilde{G}_{k_1}^{(i)} \cap \tilde{G}_{k_2}^{(i)} = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, s$ und $k_1, k_2 \in \boldsymbol{Z}$, $k_1 \not\equiv k_2 \pmod p$ folgt. Bleibt noch zu zeigen $f_2^m(\tilde{G}_k^{(i)}) = \tilde{G}_{k+m}^{(i)}$ für $i = 1, \ldots, s$, $k \in \boldsymbol{Z}$ und $m \in \boldsymbol{N}$:

$$\begin{aligned} f_2^m(\tilde{G}_k^{(i)}) &= f_2^m\Big(\bigcup_{j=0}^{p-1} f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_{k-j}^{(i)})^\delta}\right)\Big) = \bigcup_{j=0}^{p-1} f_2^{j+m}\left(M_2 \cap \overline{(G_{k-j}^{(i)})^\delta}\right) \\ &= \bigcup_{j=m}^{m+p-1} f_2^j\left(M_2 \cap \overline{(G_{k+m-j}^{(i)})^\delta}\right) \\ &= \bigcup_{j'=0}^{p-1} f_2^{j'}\left(M_2 \cap \overline{(G_{k+m-j'}^{(i)})^\delta}\right) = \tilde{G}_{k+m}^{(i)}, \end{aligned}$$

wobei der Übergang in der Summation von j auf j' auf $f_2^j = f_2^{j-np}$ (wegen $f_2^p = \mathrm{id}$) und $G_{k+m-j}^{(i)} = G_{k+m-j+np}^{(i)}$ $(n \in N \cup \{0\},\ j' = j-np \in \{0, \ldots, p-1\})$ beruht. ∎

Die Sätze 6 und besonders 7 legen den Gedanken an eine Untersuchung der Zahlen $s(f, p, M)$ im Rahmen der „shape"-Theorie (vgl. Borsuk [7]) nahe. Etwa wäre es denkbar, dass die Zahlen $s(f, p, M)$ shape-invariant sind, wobei eine shape-Definition mit einer gewissen Verträglichkeitsbedingung bzgl. der Abbildung f zu wählen wäre. Ich möchte allerdings betonen, dass diese Idee völlig vage ist und nicht auf gezielten Überlegungen beruht.

3. Verallgemeinerungen der Sätze von Borsuk–Ljusternik–Schnirelmann und Borsuk–Ulam

In diesem Abschnitt sollen Verallgemeinerungen der folgenden Sätze angegeben werden:

SATZ VON BORSUK–LJUSTERNIK–SCHNIRELMANN. *Es seien* $H_1, \ldots, H_k \subset S^n$ *abgeschlossen mit* $H_i \cap (-H_i) = \emptyset$ *für* $i = 1, \ldots, k$ *und* $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = S^n$. *Dann ist* $k \geqslant n+2$.

SATZ VON BORSUK–ULAM. *Es seien* $m, n \in N$, $m \leqslant n$ *und* $g\colon S^n \to \boldsymbol{R}^m$ *stetig. Dann gibt es ein* $x \in S^n$ *mit* $g(x) = g(-x)$.

Bei beiden Resultaten ist ein Zusammenhang mit den in Definition 2 eingeführten Überdeckungen $U(f, p, M)$ und Zahlen $s(f, p, M)$ sehr naheliegend: Wählt man $M := S^n$, $p := 2$ und $f := -\mathrm{id}$, so ist nach dem Satz von Krasnosel'skiĭ $s(f, p, M) = s(-\mathrm{id}, p, S^n) = n+1$ (vgl. Seite 26). Dies motiviert die folgenden Resultate:

SATZ 8. *Es sei* M *ein separierter topologischer Raum,* $f\colon M \to M$ *stetig mit* $f^2 = \mathrm{id}$ *und* $M_1, \ldots, M_k \subset M$ *abgeschlossen mit* $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ *und* $\bigcup_{i=1}^{k} M_i = M$. *Dann ist* $k \geqslant s(f, 2, M) + 1$.

Beweis. Aus $M_k \cap f(M_k) = \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^{k} f(M_i) = f(\bigcup_{i=1}^{k} M_i) = f(M) = M$ folgt $M_k \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} f(M_i)$ und somit

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} M_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} M_i \cup M_k = \bigcup_{i=1}^{k-1} M_i \cup f(M_i).$$

Offenkundig sind die Mengen $M_i \cup f(M_i) \in \mathscr{C}(f, 2, M)$ und folglich $\{M_i \cup f(M_i) \mid i = 1, \ldots, k-1\} \in U(f, 2, M)$, d.h. $s(f, 2, M) \leqslant k-1$. ∎

SATZ 9. *Es sei* M *ein separierter topologischer Raum,* $f\colon M \to M$ *stetig* *mit* $\mathcal{F}[f] = \emptyset$ *und* $f^2 = \mathrm{id}$. *Es sei* $m \leqslant s(f, 2, M)-1$ *und* $g\colon M \to \boldsymbol{R}^m$ *stetig. Dann gibt es ein* $x \in M$ *mit* $g(x) = g(f(x))$.

Beweis. Es sei $h\colon M \to \boldsymbol{R}^m$ definiert durch $h(x) := g(x)-g(f(x))$. Es ist $h(x) = -h(f(x))$, und im Falle $g(x) \neq g(f(x))$ für alle $x \in M$ ist $h(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann überdecken die Mengen

$$M^{(i)} := \{x \in M \mid |(h(x))_i|/|h(x)| \geqslant 1/\sqrt{m}\}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

die Menge M, und es gilt trivialerweise $M^{(i)} \in \mathscr{C}(f, 2, M)$ $(i = 1, \ldots, m)$, denn $M^{(i)} = M_0^{(i)} \cup f(M_0^{(i)})$, wobei

$$M_0^{(i)} := \{x \in M \mid (h(x))_i/|h(x)| \geqslant 1/\sqrt{m}\}.$$

Wir haben somit $\{M^{(i)} \mid i = 1, \ldots, m\} \in U(f, 2, M)$ im Widerspruch zu $m \leqslant s(f, 2, M)-1$. Es muss also ein $x \in M$ existieren mit $g(x) = g(f(x))$. ∎

Natürlich dürfen einen diese äusserst elementaren Beweise nicht zu dem Trugschluss verleiten, die Sätze von Borsuk–Ljusternik–Schnirelmann und Borsuk–Ulam seien elementar: Zur Herleitung dieser Sätze aus Satz 8 bzw. Satz 9 benötigt man ja jeweils die tiefliegende Aussage $s(f, 2, S^n) = n+1$.

Jedoch zeigen die Sätze 8 und 9, dass die Theorie der Zahlen $s(f, p, M)$ ein sehr angemessener Rahmen für Resultate vom Typ der Sätze von Borsuk–Ljusternik–Schnirelmann und Borsuk–Ulam ist. Dies zeigt sich auch bei den folgenden entsprechenden Resultaten für grössere Primzahlen p, die ebenfalls sehr elementar zu beweisen sind. Das erste dieser Resultate (Satz 10) scheint auch für Sphären S^n bisher nicht bekannt zu sein, das zweite (Satz 11) ist eine geringfügige Verallgemeinerung des Korollars zu Theorem 29 in [69] und daneben eng verwandt mit einem Satz von Munkholm [46].

Die Sätze 10 und 11 wurden durch Problem 1 angeregt. Für die Lösung dieses Problems bräuchte man Sätze dieses Typs, auch gerade in der „elementaren Form" im Rahmen der Theorie der Zahlen $s(f, p, M)$, jedoch sind die Sätze 10 und 11 noch zu schwach. Welche Verbesserungen man bräuchte, wird in den Bemerkungen im Anschluss an die Formulierungen der Sätze angegeben.

SATZ 10. *Es sei* M *ein kompakter topologischer Raum,* $p \geqslant 3$ *Primzahl und* $f\colon M \to M$ *stetig mit* $f^p = \mathrm{id}$. *Es seien* $M_1, \ldots, M_k \subset M$ *abgeschlossen mit* $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ *für* $i = 1, \ldots, k$ *und* $\bigcup_{i=1}^{k} M_i = M$. *Dann ist* $\frac{1}{2}(p-1)(k-2) \geqslant s(f, p, M)$.

Bemerkung. Man beachte, dass im Falle $p = 3$ Satz 10 sogar eine bessere Abschätzung für k liefert als Satz 8 für den Fall $p = 2$. Für grössere p ist allerdings die Abschätzung beträchtlich schlechter und vermutlich auch tatsächlich nicht optimal. Problem 1 könnte man lösen, wenn man statt dessen eine Abschätzung $s(f, p, M) \leqslant \varphi(k, p)$ hätte mit

$\varphi(k,p) = o(p)$ für feste $k \in N$ (dabei würde es auch genügen, M als kompakte Teilmenge eines normierten Raumes anzunehmen). Bzgl. Details beachte man Satz 15 auf Seite 92.

Beweis von Satz 10. Es sei $F_i := \bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(M_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Es wird gezeigt werden, dass

$$\bigcup_{i=1}^{k-2} F_i = M \tag{2.3}$$

und

$$s(f,p,F_i) \leqslant (p-1)/2 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \tag{2.4}$$

ist. Es ist dann natürlich $s(f,p,M) \leqslant \bigcup_{i=1}^{k-2} s(f,p,F_i) \leqslant (k-2)(p-1)/2$.

Zunächst wird

$$\operatorname{card}\{j \in \{0, \ldots, p-1\} \mid f^j(x) \in N\} \leqslant (p-1)/2 \quad \text{für alle } x \in M \text{ und } N \subset M \text{ mit } N \cap f(N) = \emptyset \tag{2.5}$$

bewiesen: Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es ein $x \in M$, ein $N \subset M$ mit $N \cap f(N) = \emptyset$ und Zahlen $j_1, j_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$ mit $j_2 = j_1 + 1$ oder $j_1 = p-1$, $j_2 = 0$ mit $f^{j_1}(x), f^{j_2}(x) \in N$, was wegen $f^{j_2}(x) = f(f^{j_1}(x))$ und $N \cap f(N) = \emptyset$ unmöglich ist.

Wegen (2.5) und $M_l \cap f(M_l) = \emptyset$ $(l = k-1, k)$ muss es für alle $x \in M_{k-1} \cup M_k$ ein $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ und ein $i \in \{1, \ldots, k-2\}$ geben mit $f^j(x) \in M_i$. Dann ist $x = f^p(x) = f^{p-j}(f^j(x)) \in f^{p-j}(M_i) \subset F_i$, also $M_{k-1} \cup M_k \subset \bigcup_{i=1}^{k-2} F_i$, woraus trivial (2.3) folgt.

Zum Nachweis von (2.4) konstruieren wir für $i = 1, \ldots, k$ ein $\{G_i^{(1)}, \ldots, G_i^{((p-1)/2)}\} \in U(f,p,F_i)$: Da M ein normaler Raum ist, gibt es offene Mengen $S_{i,l}$, $T_{i,l}$ $(l = 1, \ldots, (p-3)/2)$ mit

$$M_i \subset S_{i,2} \subset \overline{S_{i,1}} \subset T_{i,1} \subset \overline{T_{i,1}} \subset S_{i,2} \subset \ldots \subset \overline{T_{i,(p-3)/2}} \subset M \backslash f(\overline{T_{i,(p-3)/2}})$$

(Wähle zunächst $T_{i,(p-3)/2} := U \cap f^{-1}(V)$, wobei U, V offen mit $M_i \subset U$, $f(M_i) \subset V$ und $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Die Existenz der $S_{i,l}$ und der übrigen $T_{i,l}$ ist dann klar.). Weiter sei

$$F_{i,0} := F_i, \; F_{i,l} := \bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(\overline{T_{i,l}} \backslash S_{i,l}) \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, (p-3)/2$$

und $F_{i,(p-1)/2} := \emptyset$ sowie

$$G_i^{(l)} := \overline{\bigcap_{n=0}^{l-1} F_{i,n} \backslash F_{i,l}} \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, (p-1)/2.$$

Trivialerweise gilt

$$\bigcup_{l=1}^{(p-1)/2} G_i^{(l)} \subset F_{i,0} = F_i.$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}\bigcup_{l=1}^{(p-1)/2} G_i^{(l)} &\supset \bigcup_{l=1}^{(p-1)/2} \Big(\bigcap_{n=0}^{l-1} F_{i,n}\backslash F_{i,l}\Big)\\ &= \bigcup_{l=1}^{(p-1)/2} \Big(\bigcap_{n=0}^{l-1} F_{i,n}\backslash \bigcap_{n=0}^{l} F_{i,n}\Big),\end{aligned}$$

und letzteres ist gerade $F_{i,0} = F_i$, da allgemein für Mengen

$$A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_r = \emptyset \qquad \text{gilt} \qquad \bigcup_{l=1}^{r} (A_{l-1}\backslash A_l) = A_0.$$

Somit ist $\bigcup_{l=1}^{(p-1)/2} G_i^{(l)} = F_i$. Zum Nachweis von $\{G_i^{(1)}, \ldots, G_i^{((p-1)/2)}\} \in U(f, p, F_i)$ genügt also der Beweis von $G_i^{(l)} \in \mathscr{C}(f, p, F_i)$ $(l = 1, \ldots, (p-1)/2)$, was natürlich wegen $G_i^{(l)}$ abgeschlossen gleichbedeutend ist mit $G_i^{(l)} \in \mathscr{C}(f, p, G_i^{(l)})$. Nach Hilfssatz 9 genügt dafür der Nachweis, dass für alle $x \in G_i^{(l)}$ die Punkte x und $f(x)$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G_i^{(l)}$ liegen:

Es sei zunächst $l \in \{1, \ldots, (p-3)/2\}$, und es sei $x \in G_i^{(l)}$. Nach der Definition von $G_i^{(l)}$ gibt es ein $j \in \{0, \ldots, p-1\}$ und ein $z \in \overline{T_{i,l-1}} \subset \overline{S_{i,l}}$ mit $x = f^j(z)$. Dann ist $f(z) \in f(\overline{T_{i,l-1}}) \subset f(\overline{T_{i,(p-3)/2}}) \subset M\backslash\overline{T_{i,(p-3)/2}} \subset M\backslash T_{i,l}$. Damit können z und $f(z)$ nicht in der gleichen Zusammenhangskomponenten von $G_i^{(l)}$ liegen, denn es ist $\overline{S_{i,l}} \subset T_{i,l}$ und

$$\begin{aligned}G_i^{(l)} \cap (T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}}) &\subset (M\backslash\mathring{F}_{i,l}) \cap (T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}})\\ &= \Big(M\backslash \overbrace{\bigcup_{j=0}^{p-1} f^j(\overline{T_{i,l}}\backslash S_{i,l})}^{\circ}\Big) \cap (T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}})\\ &\subset (M\backslash\overbrace{\overline{T_{i,l}}\backslash S_{i,l}}^{\circ}) \cap (T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}})\\ &\subset \big(M\backslash(T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}})\big) \cap (T_{i,l}\backslash\overline{S_{i,l}}) = \emptyset.\end{aligned}$$

Da f^j eine topologische Abbildung ist $(f^{-j} = f^{p-j})$, liegen auch die Punkte $x = f^j(z)$ und $f(x) = f^j(f(z))$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $G_i^{(l)}$.

Es sei nun $x \in G_i^{((p-1)/2)} = \bigcap_{n=0}^{(p-3)/2} F_{i,n}$. Nach der Definition der Mengen $F_{i,n}$ gibt es Zahlen $j_n \in \{0, \ldots, p-1\}$ $(n = 0, \ldots, (p-3)/2)$ und Punkte $z_0 \in M_i$, $z_n \in \overline{T_{i,n}}\backslash S_{i,n}$ $(n = 1, \ldots, (p-3)/2)$ mit $x = f^{j_n}(z_n)$. Da die Mengen M_i, $\overline{T_{i,1}}\backslash$

$\backslash S_{i,1}, \ldots, \overline{T_{i,(p-3)/2}}\backslash S_{i,(p-3)/2}$ paarweise disjunkt sind, müssen die z_n $(n = 0, \ldots$ $\ldots, (p-3)/2)$ und somit auch die j_n paarweise verschieden sein. Es folgt nach (2.5) (man beachte $\overline{T_{i,(p-3)/2}} \cap f(\overline{T_{i,(p-3)/2}}) = \emptyset$)

$$\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap \overline{T_{i,(p-3)/2}} = \{z_0, \ldots, z_{(p-3)/2}\}$$

und

$$\mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap \overline{T_{i,(p-3)/2}}\right) = (p-1)/2.$$

Es sei $W_i := G_i^{((p-1)/2)} \cap \overline{T_{i,(p-3)/2}}$. Wegen $W_i \cap f(W_i) \subset \overline{T_{i,(p-3)/2}} \cap$ $\cap f(\overline{T_{i,(p-3)/2}}) = \emptyset$ ist dann für alle $x \in G_i^{((p-1)/2)}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}&\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap (W_i \cup f(W_i))\right) \\
&= \mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap W_i\right) + \\
&\quad + \mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap f(W_i)\right) \\
&= \mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap \overline{T_{i,(p-3)/2}}\right) + \\
&\quad + \mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap f(\overline{T_{i,(p-3)/2}})\right) \\
&= p-1,
\end{aligned}$$

also ist $\mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\}\backslash(W_i \cup f(W_i))\right) = 1$ für alle $x \in G_i^{((p-1)/2)}$, woraus

$$G_{i,0}^{((p-1)/2)} := G_i^{((p-1)/2)}\backslash(W_i \cup f(W_i)) = f^{-1}(W_i) \cap f^2(W_i)$$

(man beachte, dass wegen $W_i \cap f(W_i) = \emptyset$ auch $f^{-1}(W_i) \cap W_i = f(W_i) \cap f^2(W_i)$ $= \emptyset$ ist) und

(2.6) $\mathrm{card}\left(\{x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x)\} \cap G_{i,0}^{((p-1)/2)}\right) = 1$ für alle $x \in G_i^{((p-1)/2)}$

folgt. Wegen W_i kompakt und $G_{i,0}^{((p-1)/2)} = f^1(W_i) \cap f^2(W_i)$ ist $G_{i,0}^{((p-1/2)}$ abgeschlossen. Zudem gilt wegen (2.6) $G_{i,0}^{((p-1)/2)} \cap f^j G_{i,0}^{((p-1)/2)}) = \emptyset$ für $j = 1, \ldots, p-1$ und $\bigcup\limits_{j=0}^{p-1} f^j(G_{i,0}^{((p-1)/2)}) = G_{i,0}^{((p-1)/2)}$, woraus trivial $G_i^{((p-1)/2)}$ $\in \mathscr{C}(f, p, F_i)$ mit $[G_{i,0}^{((p-1)/2)}, f(G_{i,0}^{((p-1)/2)}), \ldots, f^{p-1}(G_{i,0}^{((p-1)/2)})] \in Z(G_i^{((p-1)/2)}, f)$ folgt. ■

Satz 11. *Es sei M ein separierter topologischer Raum, p Primzahl und f: $M \to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ und $f^p = \mathrm{id}$. Es sei $m \in N$ mit $m(p-1)$ $\leqslant s(f, p, M) - 1$ und g: $M \to R^m$ stetig. Dann ist $M_0 := \{x \in M \mid g(x)$ $= g(f(x)) = \ldots = g(f^{p-1}(x))\} \neq \emptyset$. Im Falle, dass M normal ist, gilt sogar $s(f, p, M_0) \geqslant s(f, p, M) - m(p-1)$.*

Bemerkung. Satz 11 ist eine geringfügige Verallgemeinerung des Korollars zu Theorem 29 in [69] und eine Variante eines Resultats von Munkholm [46]. In beiden Arbeiten wurde gezeigt, dass $M_0 = \emptyset$ sein kann im Falle $m(p-1) \geqslant s(f, p, M)$. Ein entsprechendes einfaches Beispiel wird auch im Anschluss an den Beweis von Satz 11 gegeben werden.

Zur Lösung von Problem 1 ist Satz 11 leider nicht ausreichend: Hierfür bräuchte man, dass man aus einer Abschätzung $\psi(m,p) \leqslant s(f,p,M)-1$ mit $\psi(m,p) = o(p)$ für festes $m \in N$ die schwächere Aussage der Existenz eines $x \in M$ mit $g(x) = g(f(x))$ herleiten kann (vgl. Sätze 14 und 15 sowie Beweis von Satz 15 (Seite 91–93)). Einen ersten allerdings unzureichenden Ansatz in dieser Richtung findet man bei Cohen–Connett [15]. Ein anderer möglicher Ansatz wird im Anschluss an den Beweis von Satz 11 skizziert.

Der Autor dankt R. Nussbaum für einen einfachen Beweis der ersten Behauptung von Satz 11 für den Fall, dass M eine Sphäre ist. Der erste Teil des Beweises von Satz 11 ist dem von Nussbaum sehr ähnlich, allerdings wird eine dem Problem angemessenere Abbildung P (siehe unten) verwendet.

Beweis von Satz 11. Es sei $P\colon M \to R^{mp}$ definiert durch

$$\begin{aligned} P(x) := {} & \big(g(x)-g(f(x)),\, g(f(x))-g(f^2(x)), \ldots, g(f^{p-1}(x))-g(f^p(x))\big) \\ = {} & \big(g(x)-g(f(x)),\, g(f(x))-g(f^2(x)), \ldots, g(f^{p-1}(x))-g(x)\big). \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{j=0}^{p-1} \big(g(f^j(x))-g(f^{j+1}(x))\big) = g(x)-g(f^p(x)) = g(x)-g(x) = 0$$

liegt $P(x)$ für alle $x \in M$ im $m(p-1)$-dimensionalen linearen Unterraum

$$L := \Big\{(x_1, \ldots, x_{mp}) \in R^{mp} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{p-1} x_{l+jm} = 0 \text{ für } l = 1, \ldots, m\Big\}$$

von R^{mp}.

Es sei $\varphi\colon L \to L$ definiert durch

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{mp}) := (x_{m+1}, \ldots, x_{mp}, x_1, \ldots, x_m).$$

Dann ist trivialerweise φ stetig, $\varphi(S^{mp-1} \cap L) = S^{mp-1} \cap L$, $\varphi(L\backslash\{0\}) = L\backslash\{0\}$, $\mathscr{F}[\varphi|_{L\backslash\{0\}}] = \emptyset$ und $\varphi^p = \mathrm{id}$. Zudem gilt $s(\varphi, p, L\backslash\{0\}) = m(p-1)$, denn:

Da $S := S^{mp-1} \cap L$ eine $(m(p-1)-1)$-dimensionale Sphäre ist, gilt nach dem Krasnosel'skiĭschen Resultat $s(\varphi, p, S) = m(p-1)$ (vgl. auch die direkte Herleitung von $s(\varphi, p, S) \leqslant m(p-1)$ im Anschluss an diesen Beweis). Es sei $r\colon L\backslash\{0\} \to S$ definiert durch $r(x) := x/|x|$. Dann ist $r \circ \varphi|_{L\backslash\{0\}} = \varphi \circ r$, also nach Hilfssatz 10 $s(\varphi, p, L\backslash\{0\}) \leqslant s(\varphi, p, S) = m(p-1)$. Umgekehrt ist wegen $S \subset L\backslash\{0\}$ trivialerweise auch $s(\varphi, p, L\backslash\{0\}) \geqslant s(\varphi, p, S) = m(p-1)$ (allerdings ist dies im folgenden ohne Bedeutung).

Weiterhin gilt für alle $x \in M$

$$\begin{aligned}(P \circ f)(x) &= P(f(x)) \\ &= \big(g(f(x)) - g(f^2(x)), \ldots, g(f^{p-1}(x)) - \\ &\quad - g(f^p(x)), g(f^p(x)) - g(f^{p+1}(x))\big) \\ &= \big(g(f(x)) - g(f^2(x)), \ldots, g(f^{p-1}(x)) - g(f^p(x)), g(x) - g(f(x))\big) \\ &= \varphi(P(x)) = (\varphi \circ P)(x).\end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 10 ist dann $s(f, p, P^{-1}(L\backslash\{0\})) \leqslant s(\varphi, p, L\backslash\{0\}) = m(p-1) \leqslant s(f, p, M) - 1$, also $M\backslash P^{-1}(L\backslash\{0\}) \neq \emptyset$. Da trivialerweise gerade $M\backslash P^{-1}(L\backslash\{0\}) = P^{-1}(0) = M_0$ ist, haben wir die erste Behauptung von Satz 11 bewiesen.

Es sei M ein normaler topologischer Raum, $s := s(f, p, M_0)$ und $\{G^{(1)}, \ldots, G^{(s)}\} \in U(f, p, M_0)$. Da M_0 abgeschlossene Teilmenge von M ist, sind die $G^{(j)} \in \mathscr{C}(f, p, M)$. Nach Hilfssatz 8 gibt es abgeschlossene Umgebungen $\tilde{G}^{(j)}$ von $G^{(j)}$ in M mit $\tilde{G}^{(j)} \in \mathscr{C}(f, p, M)$ $(j = 1, \ldots, s)$. $\bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}$ ist eine Umgebung von M_0, und folglich ist

$$\overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}} \cap M_0 = \emptyset, \text{ d.h. } \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}} \subset M\backslash M_0 = P^{-1}(L\backslash\{0\}).$$

Dann existiert $s(f, p, \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}})$ (man beachte, dass wegen $\tilde{G}^{(j)} \in \mathscr{C}(f, p, M)$ $f(\overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}}) = \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}}$ ist), und es gilt

$$s(f, p, \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}}) \leqslant s(f, p, P^{-1}(L\backslash\{0\})) \leqslant m(p-1).$$

Wegen

$$s(f, p, M) \leqslant s(f, p, \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}}) + s(f, p, \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)})$$

ist

$$\begin{aligned}s = s(f, p, M_0) &= s(f, p, \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}) \\ &\geqslant s(f, p, M) - s(f, p, \overline{M\backslash \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{G}^{(j)}}) \geqslant s(f, p, M) - m(p-1). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Die im Beweis von Satz 11 benötigte Abschätzung $s(\varphi, p, S) \leqslant m(p-1)$ kann man auch ohne Zuhilfenahme des Resultates von Krasnosel'skiĭ direkt durch Bestimmen eines $\{G^{(1)}, \ldots, G^{(m(p-1))}\} \in U(\varphi, p, S)$ herleiten:

Für $l = 1, \ldots, m$ und $n = 1, \ldots, p-1$ sei

$$H^{(l)} := \{x \in S \mid \sum_{j=0}^{p-1} x_{l+mj}^2 \geqslant 1/m\},$$

$$J_x^{(l)} := \{j \in \{0, \ldots, p-1\} \mid |x_{l+mj}| = \max_{i \in \{0, \ldots, p-1\}} |x_{l+mi}|\} \quad \text{für} \quad x \in S$$

und

$$H^{(l,n)} := \{x \in H^{(l)} \mid \operatorname{card} J_x^{(l)} = n\}.$$

Im Falle $p = 2$ ist trivialerweise $\{H^{(1)}, \ldots, H^{(m)}\} \in U(\varphi, 2, S)$ (mit $[H_0^{(l)}, \varphi(H_0^{(l)})] \in Z(H^{(l)}, \varphi)$ für $l = 1, \ldots, m$, wobei $H_0^{(l)} := \{x \in S \mid x_l \geqslant 1/\sqrt{2m}\}$) und folglich $s(\varphi, 2, S) \leqslant m = m(p-1)$. Im Falle $p \geqslant 3$ schliesst man wie folgt weiter:

Offensichtlich gilt $\varphi(H^{(l,n)}) = H^{(l,n)}$ für alle $(l, n) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, p-1\}$ und

$$\bigcup_{l=1}^{m} \left(\bigcup_{n=1}^{p-1} H^{(l,n)}\right) = \bigcup_{l=1}^{m} H^{(l)} = S$$

(man beachte, dass wegen $\sum_{j=0}^{p-1} x_{l+mj} = 0$ nicht $|x_l| = |x_{l+m}| = \ldots = |x_{l+m(p-1)}|$ sein kann).

Für $l \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $H^{(l,p-1)} \in \mathscr{C}(\varphi, p, S)$, denn $H^{(l,p-1)}$ ist kompakt, $\varphi(H^{(l,p-1)}) = H^{(l,p-1)}$ und für alle $x \in H^{(l,p-1)}$ liegen x und $\varphi(x)$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $H^{(l,p-1)}$, und zwar letzteres, da offensichtlich $J_x^{(l)} \neq J_{\varphi(x)}^{(l)}$, jedoch $J_y^{(l)}$ konstant auf Zusammenhangskomponenten von $H^{(l,p-1)}$ ist (man beachte auch Hilfssatz 9). Nach Hilfssatz 8 gibt es ein offenes $W^{(l,p-1)} \subset S$ mit $H^{(l,p-1)} \subset W^{(l,p-1)} = \varphi(W^{(l,p-1)})$ und $\overline{W^{(l,p-1)}} \in \mathscr{C}(\varphi, p, S)$.

Genauso zeigt man nun $H^{(l,p-2)} \setminus W^{(l,p-1)} \in \mathscr{C}(\varphi, p, S)$, findet nach Hilfssatz 8 ein offenes $W^{(l,p-2)} \subset S$ mit $H^{(l,p-2)} \setminus W^{(l,p-1)} \subset W^{(l,p-2)} = \varphi(W^{(l,p-2)})$ und $\overline{W^{(l,p-2)}} \in \mathscr{C}(\varphi, p, S)$ etc. Man konstruiert also offene Mengen $W^{(l,p-j)} \subset S$ $(j = 1, \ldots, p-1)$ mit

$$H^{(l,p-j)} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} W^{(l,p-i)} \subset W^{(l,p-j)} = \varphi(W^{(l,p-j)})$$

und $\overline{W^{(l,p-j)}} \in \mathscr{C}(\varphi, p, S)$. Offensichtlich ist dann

$$H^{(l)} = \bigcup_{n=1}^{p-1} H^{(l,n)} \subset \bigcup_{j=1}^{p-1} \overline{W^{(l,p-j)}},$$

und folglich gilt mit $G^{(l+m(j-1))}:=\overline{W^{(l\cdot p-j)}}$:

$$\{G^{(1)},\ldots,G^{(m(p-1))}\}\in U(\varphi,p,S),$$

also $s(\varphi,p,S)\leqslant m(p-1)$.

Das folgende Beispiel zeigt, dass Satz 11 in der Hinsicht optimal ist, dass $M_0=\emptyset$ sein kann im Falle $s(f, p,M)=m(p-1)$.

Beispiel 3. Es sei $m\in\boldsymbol{N}$, und S sei gewählt wie im Beweis von Satz 11. Mit $f:=\varphi|_S$ gilt $s(f,p,S)=m(p-1)$. Es sei $g\colon S\to\boldsymbol{R}^m$ definiert durch $g(x)=g(x_1,\ldots,x_{mp}):=(x_1,\ldots,x_m)$. g ist stetig, und es gilt $g(f^j(x))=g(x_{jm+1},\ldots,x_{mp},x_1,\ldots,x_{jm})=(x_{jm+1},\ldots,x_{(j+1)m})$ für $j=1,\ldots,p-1$. Demnach gilt für $x\in S$ $(\subset L)$

$$\sum_{j=0}^{p-1} g(f^j(x))=\Big(\sum_{j=0}^{p-1} x_{jm+1},\ldots,\sum_{j=0}^{p-1} x_{(j+1)m}\Big)=0,$$

woraus wegen $x\neq 0$ folgt, dass nicht $g(x)=g(f(x))=\ldots=g(f^{p-1}(x))$ sein kann, d.h.

$$M_0:=\{x\in S|\ g(x)=g(f(x))=\ldots=g(f^{p-1}(x))\}=\emptyset.$$

Wie schon oben angedeutet, könnte man Problem 1 lösen, wenn es eine Funktion $\psi\colon \boldsymbol{N}\times\{p\in\boldsymbol{N}|\ p \text{ prim}\}\to\boldsymbol{N}$ gäbe mit $\psi_m(p):=\psi(m,p)=o(p)$ für alle $m\in\boldsymbol{N}$, so dass folgende Aussage gilt: „Es sei M ein separierter topologischer Raum (M kompakt würde genügen), p Primzahl und $f\colon M\to M$ stetig mit $\mathscr{F}[f]=\emptyset$ und $f^p=\mathrm{id}$. Es sei $m\in\boldsymbol{N}$ mit $\psi(m,p)\leqslant s(f,p,M)$ und $g\colon M\to\boldsymbol{R}^m$ stetig. Dann gibt es ein $x\in M$ mit $g(x)=g(f(x))$, d.h. $M_1:=\{x\in M|\ g(f^j(x))=g(f^{j+1}(x))$ für ein $j\in\{0,\ldots,p-1\}\}\neq\emptyset$."

Wenn überhaupt die Antwort auf diese Frage „ja" ist, dann sollte man den Beweis etwa so versuchen: Man betrachte die durch $\tilde{P}(x):=\big(g(x),g(f(x)),\ldots,g(f^{p-1}(x))\big)$ definierte stetige Abbildung $\tilde{P}\colon M\to\boldsymbol{R}^{mp}$ sowie die Menge

$$\begin{aligned}R_{m,p}:=\{x=(x_1,\ldots,x_{mp})\in\boldsymbol{R}^{mp}|\ &(x_{jm+1},\ldots,x_{(j+1)m})\\ &\neq(x_{km+1},\ldots,x_{(k+1)m}) \text{ für } j\equiv(k+1)\ (\mathrm{mod}\ p)\}.\end{aligned}$$

Da gerade $M\backslash M_1=\tilde{P}^{-1}(R_{m,p})$ ist, käme es entsprechend dem Beweis von Satz 11 darauf an, $s(\varphi,p,R_{m,p})$ zu berechnen (φ wie im Beweis von Satz 11).

Allerdings ergeben erste Berechnungsversuche von $s(\varphi,p,R_{m,p})$, dass vermutlich $s(\varphi,p,R_{m,p})\geqslant(m-1)(p-1)+1$ (eventuell sogar $s(\varphi,p,R_{m,p})=(m-1)(p-1)+1$) ist, was zeigen würde, dass dieser Lösungsansatz von Problem 1 nicht zum Ziel führt.

Es sei nur kurz angedeutet, dass man im Falle, dass tatsächlich $s(\varphi,p,R_{m,p})=(m-1)(p-1)+1$ ist, eine Verschärfung von Theorem 1 in Cohen–Connett [15] erhielte (man beachte in diesem Zusammenhang auch Cohen–Lusk [16]).

III. Approximationssätze

Hauptziel dieses Kapitels ist es, eine Verbindung herzustellen zwischen Problem 1 und Hilfssatz 7 (vgl. Seite 24), der sich als grundlegendes Hilfsmittel bei der Behandlung von Problem 1 anbietet. Zunächst einige Vorbemerkungen:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei Problem 1 zusätzlich voraussetzen, dass $f(H) \subset \mathring{H}$ ist, denn: Nach dem Tietze–Dugundjischen Ergänzungssatz (vgl. Seite 12) gibt es eine stetige Abbildung r: $E \to H$ mit $r|_H = \mathrm{id}_H$ („Retraktion"). Dann ist $f_1 := f \circ r$ stetig und $f_1{}^{m_0} = f^{m_0} \circ r$ kompakt, und zudem gilt trivialerweise $\mathscr{F}[f_1] = \mathscr{F}[f]$. Ersetzen wir H durch $H_1 := E$ und f durch f_1, so erhalten wir demnach ein zu Problem 1 äquivalentes Problem, bei dem $f_1(H_1) \subset \mathring{H}_1 = E$ erfüllt ist.

Unter den Voraussetzungen von Problem 1 und dieser Zusatzvoraussetzung erhält man folgendes einfache Resultat über die Abbildungsgrade von Iterierten von f:

Hilfssatz 13. *Es sei $H \subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, $m_0 \in N$ und $f\colon H \to \mathring{H}$ stetig mit f^{m_0} kompakt. Dann existieren für $m \geqslant m_0$ die Abbildungsgrade $d[\mathrm{id} - f^m, \mathring{H}, 0]$, und es gilt $d[\mathrm{id} - f^m, \mathring{H}, 0] = 1$.*

Bemerkung. Der folgende Beweis entspricht völlig dem üblichen Abbildungsgrad-Beweis des Schauderschen Fixpunktsatzes.

Beweis von Hilfssatz 13. Es sei $m \geqslant m_0$, $x_0 \in \mathring{H} \setminus \{0\}$, und $F\colon H \times \times [0,1] \to \mathring{H}$ sei definiert durch $F(x,t) := tx_0 + (1-t) f^m(x)$. Trivialerweise ist F stetig. F ist sogar kompakt, denn

$$R(F) \subset \bigcup_{t \in [0,1]} \big(t\{x_0\} + (1-t) f^m(H)\big),$$

wobei $f^m(H)$ $(\subset f^{m_0}(H))$ relativ kompakt ist. Es sei $J\colon H \times [0,1] \to H$ definiert durch $J(x,t) := x$. Dann ist

$$\begin{aligned}\{(x,t) \in \mathring{H} \times [0,1] \mid x - F(x,t) = 0\} &= \{(x,t) \in H \times [0,1] \mid x - F(x,t) = 0\} \\ &= (J-F)^{-1}(\{0\})\end{aligned}$$

(man beachte $R(F) \subset \mathring{H}$), und folglich ist $\{(x,t) \in \mathring{H} \times [0,1] \mid x - F(x,t) = 0\}$ abgeschlossen und demnach als Teilmenge der relativ kompakten Menge $R(F)$ sogar kompakt. Für $F_t\colon H \to \mathring{H}$, $F_t(x) := F(x,t)$ $(t \in [0,1])$ folgt dann nach der Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades $[\mathrm{id} - F_t, \mathring{H}, 0] \in L_E$ für

$t \in [0,1]$ und

$$d[\mathrm{id}-f^m, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}-F_0, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}-F_1, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}-x_0, \mathring{H}, 0],$$

und weiter erhält man mittels der Reduktionseigenschaft (Eigenschaft 7 auf Seite 14, man könnte statt dessen auch die Kommutativitätseigenschaft anwenden) mit $E' := \mathrm{span}(\{x_0\})$: $d[\mathrm{id}-x_0, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}_{E'}-x_0, \mathring{H} \cap E', 0]$. Letzteres ist nach Eigenschaft 2 (Normierung) gleich $\operatorname{sign} J[\mathrm{id}_{E'}-x_0, x_0] = 1$. ∎

Somit ist $\mathscr{F}[f^m] \neq \emptyset$ für $m \geqslant m_0$ (vgl. auch Schauderscher Fixpunktsatz), und es folgt für $m \geqslant m_0+1$ wegen $d[\mathrm{id}-f^m, \mathring{H}, 0] = 1 \not\equiv 0 \pmod m$ mittels Hilfssatz 7, dass $\mathscr{F}[f^m]$ nicht in abgeschlossene disjunkte Mengen $F_0, \ldots, F_{m-1}$ mit $f^i(F_0) = F_i$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ unterteilt werden kann. Diese erste noch sehr schwache Strukturaussage besagt im Falle einer Primzahl $p = m$, dass $\mathscr{F}[f] \neq \emptyset$ oder anderenfalls $s(f, p, H) \geqslant 2$ ist. (Dies Ergebnis erhielte man auch im Falle $f(H) \not\subset \mathring{H}$, doch ist dies im Augenblick ohne Bedeutung.)

Mit dieser Aussage kann man noch wenig anfangen, sie motiviert aber, wie man Problem 1 angehen sollte:

Gelänge es im Falle $\mathscr{F}[f] = \emptyset$, durch Abänderung von f ein stetiges $\tilde{f}\colon H \to \mathring{H}$ zu konstruieren, derart dass auch $\mathscr{F}[\tilde{f}] = \emptyset$ ist und dass für eine Primzahl $p > m_0$ $\tilde{f}^{p-1}$ kompakt, $s(\tilde{f}, p, H) \leqslant 1$ und $d[\mathrm{id}-\tilde{f}^p, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}-f^p, \mathring{H}, 0] = 1$ ist, so ergäbe dies einen Widerspruch zu Hilfssatz 7, d.h. es müsste $\mathscr{F}[f] \neq \emptyset$ sein.

Ein in [63] dargestelltes derartiges Vorgehen führte zum Ziel unter der Voraussetzung, dass f kompakt ist in einer Umgebung von $\mathscr{F}[f^p]$. Ein iteratives Verfahren, das auch unter den Bedingungen von Problem 1 durchführbar ist, allerdings u.U. nicht vollständig zum Ziel führt, wurde in [66] eingeführt. Bei diesem Verfahren werden sukzessive Abbildungen $f_1, f_2, \ldots$ konstruiert mit $\mathscr{F}[f_i] = \emptyset$, $d[\mathrm{id}-f_i^p, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id}-f^p, \mathring{H}, 0] = 1$ und $s(f_i, p, H) \leqslant s(f, p, H) - i$, wobei man aber umgekehrt eine Verschlechterung der Kompaktheitsgüte in Kauf nehmen muss: In jedem Einzelschritt kann man aus f_i^k kompakt nur f_{i+1}^{2k-1} kompakt folgern. Man kann demnach nicht $f_i^{m_0}$ kompakt erwarten, sondern erhält nur die Kompaktheit von $f_1^{2m_0-1}$, $f_2^{2(2m_0-1)-1} = f_2^{4m_0-3}$, etc., d.h. von $f_i^{2^i(m_0-1)+1}$. Die Durchführbarkeit des Verfahrens ist also nur für die ersten i Schritte mit $2^i(m_0-1)+1 \leqslant p$ gesichert. Da sich zudem im Falle $2^{s(f,p,H)-1}(m_0-1)+1 \leqslant p-1$ ein Widerspruch zu Hilfssatz 7 (angewendet auf $f_{s(f,p,H)-1}$) ergäbe, erhält man die Abschätzung $2^{s(f,p,H)-1}(m_0-1) \geqslant p-1$ (vgl. Theorem 2 in [66]). Dies bedeutet ein mindestens logarithmisches Anwachsen der Zahlen $s(f, p, H)$ in Abhängigkeit von den Primzahlen p $(> m_0)$. Problem 1 wäre dann bewiesen, wenn man zeigen könnte, dass die $s(f, p, H)$ nicht so stark anwachsen können.

Im folgenden wird gezeigt, dass damit die Möglichkeiten des Verfahrens noch nicht voll ausgeschöpft sind: Berücksichtigt man, dass der Kompaktheitsverlust nicht global auf ganz H eintritt, sondern nur auf wohldefinierten Teilmengen, dann kann man zeigen, dass sich die Kompaktheitsgüte nur linear verschlechtert: Man kann erreichen, dass $f_1^{2m_0-1}, f_2^{2m_0}, f_3^{3m_0-1}, f_4^{3m_0}$ etc. kompakt sind, und erhält nun mit gleichem Schluss wie oben, dass $s(f, p, H)$ mindestens linear mit p anwachsen muss (vgl. Satz 14).

Umgekehrt wird mittels Satz 10 bzw. 11 gezeigt werden, dass $s(f, p, H)$ auch maximal linear anwächst (vgl. Satz 15), was aber leider zum Beweis von Problem 1 noch nicht ausreicht.

Der im folgenden bewiesene Satz 12 stellt die Basis für das oben skizzierte iterative Konstruktionsverfahren der Abbildungen $f_1, f_2, \ldots$ dar. Um seine Formulierung etwas zu vereinfachen, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

(a) Wir schreiben $f \in A(M, p)$, falls gilt:
(α) $\bar{M} \subset D(f^p)$,
(β) $f^j|_{\bar{M}}$ ist stetig für $j = 1, \ldots, p$,
(γ) $f(\mathscr{F}[f^p|_{\bar{M}}]) \subset M$,
(δ) $\mathscr{F}[f|_{\bar{M}}] = \emptyset$.

(b) Für $f\colon D(f) \subset E \to E$, $N \subset M \subset D(f)$ und $m_0, p \in N$ mit $m_0 \leqslant p$ bedeutet $f \in K(M, N, m_0, p)$, dass $\bar{M} \subset D(f^p)$ ist und $f|_N$ und $f^j|_{\bar{M}}$ ($j = m_0, \ldots, p$) kompakt sind.

(c) Für $M, N \subset E$, $m_0, n_0, p \in N$ mit $m_0 \leqslant n_0 \leqslant p$ und $f\colon D(f) \subset E \to E$ bedeutet $f \in H(M, N, m_0, n_0, p)$:
(α) $\bar{M} \subset D(f^p)$,
(β) $f^k|_{\bar{M} \setminus \bigcup_{j=0}^{m_0-2} f^{-j}(N)}$ ist kompakt für $k = m_0, \ldots, p$.
(γ) Es gibt ein offenes $N_0 \subset E$ mit $N \subset N_0$ und $\operatorname{dist}(N, \partial N_0) > 0$, so dass für alle $x \in \bar{M}$ ein $k \in \{0, \ldots, n_0 - m_0\}$ existiert mit $f^k(x) \in \bar{M} \setminus \bigcup_{j=0}^{m_0-2} f^{-j}(N_0)$.

Es gilt dann folgende einfache Aussage:

Hilfssatz 14. *Es seien $M, N \subset E$, $m_0, n_0, p \in N$ mit $m_0 \leqslant n_0 \leqslant p$, und $f\colon D(f) \subset E \to E$ sei aus $H(M, N, m_0, n_0, p)$, und es sei $f^j|_{\bar{M}}$ stetig für $j = 1, \ldots, p$. Dann ist $f^j|_{\bar{M}}$ kompakt für $j = n_0, \ldots, p$.*

Beweis. Es sei $j \in \{n_0, \ldots, p\}$. Dann gilt (vgl. Punkt (γ) der Definition von $H(M, N, m_0, n_0, p)$):

$$f^j(\bar{M}) \subset \bigcup_{k=0}^{n_0-m_0} f^{j-k}\Big(\bar{M} \setminus \bigcup_{j=0}^{m_0-2} f^{-j}(N)\Big).$$

Wegen $m_0 = n_0 - (n_0 - m_0) \leqslant j - k \leqslant j \leqslant p$, d.h. $j - k \in \{m_0, \ldots, p\}$ ist

$$\overline{f^{j-k}\Big(\bar{M} \setminus \bigcup_{j=0}^{m_0-2} f^{-j}(N)\Big)}$$

kompakt für $k = 0, \ldots, n_0 - m_0$, und folglich ist $\overline{f^j(\bar{M})}$ kompakt. ■

Satz 12. *Es sei* $f\colon D(f) \subset E \to E$, $m_0, n_0 \in N$, *p Primzahl mit* $m_0 \leqslant n_0 \leqslant p$, $M, N \subset E$ *offen,* $N \subset M$, $f \in A(M, p)$, $\varepsilon, \delta > 0$ *und* $\mathfrak{G} = \{G_0^{(1)}, \dots, G_0^{(s)}\} \in U(f, p, M)$ *mit* $[G_{0,k}^{(j)} | \ k \in Z] \in Z(G_0^{(j)}, f)$ *für* $j = 1, \dots, s$, *und es sei* $G_{0,-1}^{(j_0)} \subset N$ *für ein* $j_0 \in \{1, \dots, s\}$. *Weiter sei*

(a) $f \in H(M, N, m_0, n_0, p)$

oder

(b) $f \in K(M, N, m_0, p)$.

Dann gibt es ein $\tilde{f}\colon D(f) \to E$ *aus* $A(M, p)$, $\tilde{f} \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ *(im Falle* (a)) *bzw.* $\tilde{f} \in K(M, N, m_0, p)$ *(im Falle* (b)) *und ein*

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \{\tilde{G}^{(1)}, \dots, \tilde{G}^{(s)}\} \in U(\tilde{f}, p, M) \ \text{mit} \ [\tilde{G}_k^{(j)} | \ k \in Z] \in Z(\tilde{G}^{(j)}, \tilde{f})$$

für $j = 1, \dots, s$, *so dass gilt:*

(3.1) $\tilde{G}^{(j_0)}$ *ist endlich,*

(3.2) $d[\mathrm{id} - \tilde{f}^p, M, 0] = d[\mathrm{id} - f^p, M, 0]$,

(3.3) $\|\tilde{f}(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$ *für alle* $x \in D(f)$,

(3.4) $R(\tilde{f}) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$,

(3.5) $\tilde{G}_k^{(j)} \subset (G_{0,k}^{(j)})^\delta$ *für* $j = 1, \dots, s$ *und* $k \in Z$,

(3.6) $\tilde{f}|_{D(f) \setminus (G_0^{(j_0)})^\delta} = f|_{D(f) \setminus (G_0^{(j_0)})^\delta}$.

(3.7) *Für jedes Mass der Nicht-Präkompaktheit* γ *und jede Menge* $K \subset D(f)$ *gilt* $\gamma(\tilde{f}(K)) \leqslant \gamma(f(K))$.

Bemerkungen. (a) Das Hauptziel der Konstruktion von $\tilde{f}$ ist (3.1), alle übrigen Behauptungen sichern nur, dass wesentliche Eigenschaften von f auch für $\tilde{f}$ erhalten bleiben. Wegen (3.1) ist im Falle $s \geqslant 2$ $s(\tilde{f}, p, M) \leqslant s-1$, da trivialerweise für $j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{j_0\}$ $\tilde{G}^{(j)} \cup \tilde{G}^{(j_0)} \in \mathscr{C}(\tilde{f}, p, M)$ ist (mit $[\tilde{G}_k^{(j)} \cup (\tilde{G}_k^{(j_0)} \setminus \tilde{G}^{(j)}) | \ k \in Z] \in Z(\tilde{G}^{(j)} \cup \tilde{G}^{(j_0)}, \tilde{f})$) und folglich $\{\tilde{G}^{(j)} \cup \tilde{G}^{(j_0)} | \ j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{j_0\}\} \in U(\tilde{f}, p, M)$ ist.

(b) Die oben erwähnte Verschlechterung der Kompaktheitsgüte (mit der man nur im Falle (a) rechnen muss) zeigt sich in der Formulierung von Satz 12 nicht direkt. Sie wird aber sofort klar, wenn man bedenkt, dass man etwa aus $f^j|_{\bar{M}}$ kompakt für $j = m_0, \dots, p$ nur $\tilde{f} \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ folgern kann, wobei man gerade in uns interessierenden Fällen $n_0 \geqslant 2m_0 - 1$ wählen muss, um Bedingung (γ) in der Definition von $H(M, N, m_0, n_0, p)$ erfüllen zu können. Man kann dann mit Hilfe von Hilfssatz 14 nur auf $\tilde{f}^j|_M$ kompakt für $j = 2m_0 - 1, \dots, p$ schliessen.

(c) Der Beweis von Satz 12 ist technisch kompliziert und sehr lang. Es erscheint deshalb angebracht, kurz die Beweisidee zu erläutern: $\tilde{f}$ wird in $2p+1$ Schritten konstruiert, wobei die ersten p Schritte der Reduktion auf ein endlichdimensionales Problem und die nächsten p Schritte der Approximation durch differenzierbare Abbildungen dienen. Im letzten Schritt schliesslich wird das Lemma von Sard angewendet. Dabei wird – grob gesagt – f im ersten Schritt in einer Umgebung von $G_{0,-1}^{(j_0)}$ abgeändert, im zweiten

Schritt bei $G_{0,-2}^{(j_0)}$ etc. Der Beweis wird besonders dadurch kompliziert, dass bei jedem Schritt die $G_0^{(j)}$ neu bestimmt werden müssen.

Beweis von Satz 12. I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass $G_0^{(j_0)} \neq \emptyset$ und $0 \in \operatorname{co}(R(f)) \backslash G_0^{(j_0)}$ ist: Wäre $G_0^{(j_0)} = \emptyset$, so könnte man schon $\tilde{f} := f$, $\tilde{G}^{(j)} := G_0^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, s)$ etc. setzen; $0 \in \operatorname{co}(R(f)) \backslash G_0^{(j_0)}$ lässt sich stets durch eine Koordinatentransformation erreichen, da $\operatorname{co}(R(f)) \backslash G_0^{(j_0)} \neq \emptyset$ ist ($\operatorname{co}(R(f)) \backslash G_0^{(j_0)} \supset \operatorname{co}(G_0^{(j_0)}) \backslash G_0^{(j_0)}$ und $\operatorname{co}(G_0^{(j_0)}) \backslash G_0^{(j_0)} \neq \emptyset$, da $G_0^{(j_0)} \in \mathscr{C}(f, p, M)$, also nicht zusammenhängend ist).

Wie schon erwähnt, soll $\tilde{f}$ in $2p+1$ Schritten konstruiert werden. Dabei besteht der i-te Schritt ($i \in \{1, \ldots, 2p+1\}$) im wesentlichen aus der Konstruktion einer Abbildung f_i, offener Mengen U_i und V_i und eines $\{G_i^{(1)}, \ldots, G_i^{(s)}\} \in U(f_i, p, M)$ mit Zerlegungen $[G_{i,k}^{(j)} | \; k \in Z] \in Z(G_i^{(j)}, f_i)$ (auf die Konstruktion von U_{2p+1} und V_{2p+1} werden wir verzichten können).

Als eine Art Startvorgabe benötigen wir offene Mengen V_{-k} $(k = 0, \ldots, p)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$G_{0,k}^{(j_0)} \subset V_{-k} \subset (G_{0,k}^{(j_0)})^{\delta} \cap M \backslash \{0\} \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, p, \tag{3.8}$$

$$V_{-k_1} \cap V_{-k_2} = \emptyset \quad \text{für} \quad k_1, k_2 = 0, \ldots, p-1, \; k_1 \neq k_2 \tag{3.9}$$

und

$$f(V_{-k}) \subset V_{-k-1} \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, p-1. \tag{3.10}$$

Solche V_{-k} existieren, da die $G_{0,k}^{(j_0)} \subset M \backslash \{0\}$ abgeschlossen und für $k = 0, \ldots$ $\ldots, p-1$ paarweise disjunkt sind und da M offen ist.

Wir wählen zudem $f_0 := f$ und eine offene Menge $U_0 \subset M$, so dass $G_{0,-1}^{(j_0)} \subset U_0 \subset V_{1-p} \cap N$ und $f(U_0) \subset V_0$ mit $\varepsilon_0' := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(f(U_0), \partial V_0) > 0$, wobei die für die Existenz eines solchen U_0 benötigte Beziehung $(\operatorname{dist}(f(G_{0,-1}^{(j_0)}), \partial V_0) =) \operatorname{dist}(G_{0,0}^{(j_0)}, \partial V_0) > 0$ aus der Kompaktheit von $G_{0,0}^{(j_0)}$ folgt: $G_{0,0}^{(j_0)}$ ist abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{F}[f^p|_M]$ (vgl. Definition 2) und $\mathscr{F}[f^p|_M]$ ist kompakt, denn $\mathscr{F}[f^p|_M] = \mathscr{F}[f^p|_{\bar{M}}]$ (vgl. $f \in A(M, p)$ und Hilfssatz 3) und $f^p|_{\bar{M}}$ ist kompakt.

Im Falle (a) (d.h. $f \in H(M, N, m_0, n_0, p)$) benötigen wir noch einige Definitionen: Es sei N_0 gewählt gemäss Bedingung (γ) der Definition von $H(M, N, m_0, n_0, p)$. Dann gibt es offene Mengen $N_1, \ldots, N_{2p+1}$ mit $N \subset N_{2p+1} \subset N_{2p} \subset \ldots \subset N_1 \subset N_0$ und $\operatorname{dist}(N, \partial N_{2p+1}) > 0$ sowie $\varkappa_i := \operatorname{dist}(N_{i+1}, \partial N_i) > 0$ für $i = 0, \ldots, 2p$ (O.B.d.A. $\varkappa_i < \infty$). Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen setzen wir $\varkappa_i := 1$ für $i = 0, \ldots, 2p$ im Falle (b) (d.h. für $f \in K(M, N, m_0, p)$).

II. In Abschnitt II und III sollen die Gemeinsamkeiten aller $2p+1$ Approximationsschritte beschrieben werden. In Abschnitt IV werden dann – unter Verwendung der zuvor gewonnenen Ergebnisse – die Approximationsschritte im Detail gebracht.

Für $i \in \{1, \ldots, 2p+1\}$ sollen die f_i, U_i, V_i und die $G_i^{(j)}$ und $G_{i,k}^{(j)}$ $(k \in \boldsymbol{Z}$,

$j = 1, \dots, s$) so bestimmt werden, dass insbesondere die folgenden Bedingungen erfüllt sind (U_{2p+1}, V_{2p+1} und die Bedingungen (3.16; $2p+1$)–(3.19; $2p+1$) sind überflüssig):

(3.11; i) $\quad f_i^j(\overline{U_k}) \subset V_{k+1-j} \quad$ für $\quad k = 0, \dots, i-1$ und $j = 1, \dots, k+p$,

(3.12; i) $$\|f_i(x) - f(x)\| \leqslant \frac{i}{2p+1}\varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in D(f),$$

(3.13; i) $$f_i \in A(M, p),$$

(3.14; i) $\quad f_i^p|_{\bar{M}}$ ist kompakt, $[\mathrm{id} - f_i^p, M, 0] \in L_E$ und
$$d[\mathrm{id} - f_i^p, M, 0] = d[\mathrm{id} - f^p, M, 0],$$

(3.15; i) $$f_i|_{D(f)\setminus U_{i-1}} = f_{i-1}|_{D(f)\setminus U_{i-1}},$$

(3.16; i) $$V_i \subset U_{i-1},$$

(3.17; i) $$f_i|_{V_i} \text{ ist endlichdimensional},$$

(3.18; i) $\quad G_{i,-i-1}^{(j_0)} \subset U_i$
$$\subset \begin{cases} V_{i+1-p}, & \text{falls} \quad i \in \{1, \dots, p-1\}, \\ V_{i+1-p} \subset U_{i-p} \subset V_{i+1-2p}, & \text{falls} \quad i \in \{p, \dots, 2p-1\}, \\ V_{p+1} \subset U_p \subset V_1 \subset U_0 \subset V_{1-p}, & \text{falls} \quad i = 2p, \end{cases}$$

(3.19; i) $$f_i(U_i) \subset V_i \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i' := \tfrac{1}{2}\operatorname{dist}\big(f_i(U_i), \partial V_i\big) > 0,$$

(3.20; i) $\quad \{G_i^{(1)}, \dots, G_i^{(s)}\} \in U(f_i, p, M)$
$$\text{mit} \quad [G_{i,k}^{(j)} |\ k \in \mathbf{Z}] \in Z(G_i^{(j)}, f_i) \text{ für } j = 1, \dots, s,$$

(3.21; i) $\quad G_{i,k}^{(j)} \subset (G_{0,k}^{(j)})^{(i/(2p+1))\delta} \quad$ für alle $k \in \mathbf{Z}$ und $j \in \{1, \dots, s\}$.

Man beachte, dass $f_0, U_0, V_0, G_0^{(j)}$ und $G_{0,k}^{(j)}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $j = 1, \dots, s$) die entsprechenden Bedingungen (3.11; 0)–(3.14; 0) und (3.18; 0)–(3.20; 0) erfüllen ((3.11; 0) ist eine leere Aussage).

III. Im folgenden wird gezeigt, dass schon einige einfache Bedingungen an die Wahl der f_i genügen um sicherzustellen, dass (3.11; i)–(3.21; i) erfüllt sind, ausgenommen die in (3.14; i) enthaltene Forderung der Kompaktheit von $f_i^p|_{\bar{M}}$ sowie (3.17; i), bei denen die spezielle Wahl der f_i eine Rolle spielt und die deswegen erst später nachgewiesen werden.

Wir wählen $i \in \{0, \dots, 2p\}$ und nehmen an, dass wir im Einklang mit obigen Bedingungen die ersten i Approximationsschritte durchgeführt haben. Im Falle, dass $G_i^{(j_0)} = \emptyset$ ist, können wir $\tilde{f} := f_i$ wählen (in Abschnitt V des Beweises wird gezeigt werden, dass $\tilde{f} := f_i$ die geforderten Eigenschaften besitzt) und somit dass Approximationsverfahren abbrechen.

Deshalb können wir $G_i^{(j_0)} \neq \emptyset$ voraussetzen, was gleichbedeutend mit

$G_{i,k}^{(j_0)} \neq \emptyset$ für alle $k \in \boldsymbol{Z}$ ist. Wir definieren

$$\varrho_i' := \tfrac{1}{3} \min_{\substack{j=1,\dots,s \\ k_1,k_2 \in \boldsymbol{Z} \\ k_1 \not\equiv k_2 \pmod p}} \operatorname{dist}\left(G_{i,k_1}^{(j)}, G_{i,k_2}^{(j)}\right)$$

und

$$\varrho_i'' := \tfrac{1}{3} \min_{k \in \boldsymbol{Z}} \operatorname{dist}\left(G_{i,k}^{(j_0)}, \partial U_i\right).$$

Weiter sei

$$Z_i := \begin{cases} \overline{f_i^p(V_i)} & \text{im Falle } i \in \{0, \dots, p-1\}, \\ \overline{V_i} \cap \operatorname{span}\left(f_{i+1-p}(V_{i+1-p})\right) & \text{im Falle } i \in \{p, \dots, 2p-1\}, \\ \overline{V_i} \cap \operatorname{span}\left(f_1(V_1)\right) & \text{im Falle } i = 2p. \end{cases}$$

Aufgrund von $V_i \subset M$, V_i beschränkt und (3.14; i) bzw. (3.17) (³) ist Z_i kompakt.

Wegen (3.13; i) und der Kompaktheit von $\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}]$ existiert dann eine Funktion ξ_i: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$, derart dass für jedes $\eta > 0$, $x \in \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \cup Z_i$ und $y \in \bar{M}$ mit $\|x-y\| \leqslant \xi_i(\eta)$

$$\|f_i^j(x) - f_i^j(y)\| < \eta \qquad \text{für alle } j \in \{0, \dots, \max(1, p-2)\}$$

ist. Wir definieren

$$\varrho_i := \min\left(\varrho_i', \varrho_i'', \xi_i\left(\tfrac{1}{2}\xi_i(\delta/(2p+1))\right)\right),$$

$$H_i := V_i \setminus f_i^{-(p-1)}\left((\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}])^{\varrho_i}\right),$$

$$\tau_i := \begin{cases} \tfrac{1}{2} \inf\limits_{x \in H_i} \|x - f_i^p(x)\| & \text{für } H_i \neq \emptyset, \\ 1 & \text{für } H_i = \emptyset \end{cases}$$

und

$$\varepsilon_i := \min\left(\varepsilon/(2p+1), \varepsilon_i', \tau_i, \tfrac{1}{2}\xi_i(\delta/(2p+1)), \tfrac{1}{2}\xi_i(\tfrac{1}{2}\varkappa_i)\right).$$

Wegen $G_{i,k_1}^{(j)} \cap G_{i,k_2}^{(j)} = \emptyset$ für $k_1 \not\equiv k_2 \pmod p$ und der Kompaktheit der $G_{i,k}^{(j)}$ (vgl. (3.20; i) und (3.14; i)) kann man sich beim Beweis von $\varrho_i > 0$ auf den Nachweis von $G_{i,k}^{(j_0)} \cap \partial U_i = \emptyset$ für $k \in \boldsymbol{Z}$ beschränken: Im Falle $k \equiv (-i-1) \pmod p$ ist $G_{i,k}^{(j_0)} = G_{i,-i-1}^{(j_0)} \subset U_i$ (vgl. (3.18; i)). Im Falle $k \not\equiv (-i-1) \pmod p$ wählen wir $i_0, k_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $i_0 \equiv (-i-1) \pmod p$ und $k_0 \equiv k \pmod p$. Dann ist nach (3.18; i) $\partial U_i \subset \overline{U_i} \subset \overline{V_{-i_0}}$, und andererseits gilt nach (3.18; i) und (3.19; i)

$$G_{i,k}^{(j_0)} = G_{i,k_0}^{(j_0)} = f_i^{k_0+i+1}\left(G_{i,-i-1}^{(j_0)}\right) \subset f_i^{k_0+i+1}(U_i) \subset f_i^{k_0+i}(V_i)$$

(³) (3.17) bedeutet eine Zusammenfassung der Formeln (3.17; l).

und weiter für $i = 0$ nach (3.10)

$$f_i^{k_0+i}(V_i) = f^{k_0}(V_0) \subset V_{-k_0}$$

bzw. für $i \geqslant 1$ nach (3.16; i) und (3.11; i)

$$f_i^{k_0+i}(V_i) \subset f_i^{k_0+i}(U_{i-1}) \subset V_{-k_0}.$$

Aufgrund von $k_0 \not\equiv i_0 \pmod p$ und V_{-k_0} offen ist somit wegen (3.9)

$$G_{i,k}^{(j_0)} \cap \partial U_i \subset V_{-k_0} \cap \overline{V_{-i_0}} = \emptyset.$$

Zudem kann man auch $\tau_i > 0$ zeigen: Wegen $f_i^p|_{\bar{M}}$ kompakt (vgl. (3.14; i)) und $H_i \subset M$ (nach (3.16), (3.18) und (3.8) gilt $H_i \subset V_i \subset \bigcup_{k=0}^{p-1} V_{-k} \subset M$) würde $\tau_i = 0$ zur Folge haben, dass $\overline{H_i} \cap \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \neq \emptyset$ ist. Es ist aber

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \cap \overline{H_i} &\subset \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \cap \left(\overline{V_i} \setminus f_i^{-(p-1)}\left((\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}])^{\varrho_i}\right)\right) \\ &\subset \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \setminus f_i^{-(p-1)}\left((\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}])^{\varrho_i}\right) \\ &\subset \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \setminus \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] = \emptyset\end{aligned}$$

(hierbei wurde benutzt, dass wegen (3.13; i) und Hilfssatz 3 $f_i^{p-1}(\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}]) = \mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}] \subset (\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}])^{\varrho_i}$ ist). Es ist also $\tau_i > 0$ und demnach auch $\varepsilon_i > 0$.

Es soll nun gezeigt werden, dass, sofern $f_{i+1}\colon D(f) \to E$ so gewählt wird, dass $f_{i+1}|_{\bar{M}}$ stetig ist und f_{i+1} den Bedingungen

$$(3.22;\ i+1) \qquad \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| \leqslant \varepsilon_i \quad \text{für alle } x \in D(f)$$

sowie (3.15; $i+1$) und (3.24; i) (siehe weiter unten) genügt, dann schon (3.11; $i+1$)–(3.14; $i+1$) erfüllt sind und zudem Mengen V_{i+1}, U_{i+1} und $G_{i+1}^{(j)} \in \mathscr{C}(f_{i+1}, p, M)$ ($j = 1, \ldots, s$) mit $[G_{i+1,k}^{(j)} | \ k \in Z] \in Z(G_{i+1}^{(j)}, f_{i+1})$ mit den Eigenschaften (3.16; $i+1$) und (3.18; $i+1$)–(3.21; $i+1$) bestimmt werden können:

(a) Wir definieren $F_i\colon D(f) \times [0, 1] \to E \times [0, 1]$ vermöge

$$F_i(x, t) := (f_{i+t}(x), t) := \big((1-t) f_i(x) + t f_{i+1}(x), t\big).$$

Wegen (3.22; $i+1$) ist $\|f_{i+t}(x) - f_i(x)\| = t\,\|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| \leqslant t\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_i$ für alle $(x, t) \in D(f) \times [0, 1]$, so dass mittels (3.19; i) und $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon_i'$ $f_{i+t}(\overline{U_i}) \subset V_i$ für alle $t \in [0, 1]$ folgt. Zudem gilt $f_{i+t}(\overline{U_l}) \subset V_l$ für $l = 0, \ldots, i-1$ und $t \in [0, 1]$, denn:

(α) Im Falle $l \not\equiv i \pmod p$ ist $U_l \cap U_i = \emptyset$ (beachte (3.18) und (3.9)), und folglich gilt wegen (3.15; $i+1$) und (3.11; i) $f_{i+t}(\overline{U_l}) = f_i(\overline{U_l}) \subset V_l$.

(β) Im Falle $l \equiv i \pmod p$ gilt wegen (3.15; $i+1$), (3.16; i), (3.11; i) und (3.18; $i-1$)

$$\begin{aligned}f_{i+t}(\overline{U_l}) &\subset f_{i+t}(\overline{U_l} \setminus U_i) \cup f_{i+t}(U_i) \subset f_i(\overline{U_l} \setminus U_i) \cup V_i \\ &\subset f_i(\overline{U_l}) \cup U_{i-1} \subset V_l.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $f_{i+t}(V_l) \subset V_{l-1}$ für $l = 2-p, \dots, 0$ und $t \in [0, 1]$, da wegen $U_j \cap V_l = \emptyset$ für $j = 0, \dots, i$, $j+1 \not\equiv l \pmod p$ (vgl. (3.18) und (3.9)) gilt (beachte (3.15), (3.16), (3.18) und (3.10)):

$$f_{l+t}(V_l) \subset f_{i+t}\Big(V_l \setminus \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i \\ j+1 \equiv l \pmod p}} U_j\Big) \cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i \\ j+1 \equiv l \pmod p}} f_{i+t}(U_j)$$

$$\subset f_{i+t}\Big(V_l \setminus \bigcup_{j=0}^{i} U_j\Big) \cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i \\ j+1 \equiv l \pmod p}} V_j$$

$$\subset f\Big(V_l \setminus \bigcup_{j=0}^{i} U_j\Big) \cup \bigcup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant i \\ j+1 \equiv l \pmod p}} U_{j-1} \subset f(V_l) \cup V_{l-1} = V_{l-1}.$$

Berücksichtigt man noch $V_l \subset U_{l-1}$ für $l = 1, \dots, i$ (vgl. (3.16)), so erhält man zusammengefasst

(3.23; i) $\quad f_{i+t}^{j}(\overline{U_k}) \subset V_{k+1-j}$

$$\text{für} \quad k = 0, \dots, i,\ j = 1, \dots, k+p \text{ und } t \in [0, 1],$$

also insbesondere auch (3.11; $i+1$).

(b) Wir wollen nun $\bar{M} \times [0, 1] \subset D(F_i^p)$, $F_i(\mathscr{F}[F_i^p|_{\bar{M} \times [0,1]}]) \subset M \times [0, 1]$ und die Stetigkeit von $F_i^j|_{\bar{M} \times [0,1]}$ für $j = 1, \dots, p$ beweisen: Es sei $K_i := \bigcup_{j=0}^{p-1} f_i^{-j}(U_i)$. Wir betrachten die folgenden Fälle:

(α) Im Falle $x \in \bar{M} \setminus K_i$ ist $F_i^j(x, t) = (f_i^j(x), t)$ für $j = 1, \dots, p$ und $t \in [0, 1]$, also $(x, t) \in D(F_i^p)$, und mittels (3.13; i) folgt die Stetigkeit von $F_i^j|_{(\bar{M} \setminus K_i) \times [0,1]}$ für $j = 1, \dots, p$. $F_i(\mathscr{F}[F_i^p|_{(\bar{M} \setminus K_i) \times [0,1]}]) \subset M \times [0, 1]$ folgt unmittelbar aus $f_i(\mathscr{F}[f_i^p|_{\bar{M}}]) \subset M$ (vgl. (3.13; i)).

(β) Im Falle $x \in \bar{M} \cap \overline{K_i}$ existiert ein $j_x \in \{0, \dots, p-1\}$ mit $f_i^{j_x}(x) \in \overline{U_i}$. Man beachte, dass wegen $\overline{U_i} \cap f_i^j(\overline{U_i}) \subset \overline{U_i} \cap V_{i+1-j} = \emptyset$ für $j = 1, \dots, p-1$ (vgl. (3.23; i), (3.16), (3.18) und (3.9)) j_x eindeutig bestimmt und auf $\bar{M} \cap \overline{K_i}$ lokal konstant ist. Aus (3.15; $i+1$) folgt $F_i^j(x, t) = (f_i^j(x), t)$ für $j = 1, \dots, j_x$ und $t \in [0, 1]$. Insbesondere ist $F_i^{j_x}(x, t) = (f_i^{j_x}(x), t) \in \overline{U_i} \times [0, 1]$ und somit nach (3.23; i)

$$F_i^j(x, t) \in V_{i+1+j_x-j} \times [0, 1] \subset M \times [0, 1]$$

$$\text{für} \quad j = j_x+1, \dots, j_x+i+p \text{ und } t \in [0, 1],$$

insbesondere $(x, t) \in D(F_i^p)$. $F_i^j|_{(\bar{M} \cap \overline{K_i}) \times [0,1]}$ ist in jedem $(x, t) \in (\bar{M} \cap \overline{K_i}) \times [0, 1]$ stetig für $j = 1, \dots, p$, und zwar folgt dies für $j = 1, \dots, j_x$ aus (3.13; i) und dann für $j = j_x+1, \dots, p$ aus der Stetigkeit von $f_i|_{\bar{M}}$ und $f_{i+1}|_{\bar{M}}$ (man beachte hierbei auch die lokale Konstanz von j_x). Die gerade bewiesene

Beziehung

$$F_i^j(x,t) \in M \times [0,1]$$
$$\text{für alle } (x,t) \in (\bar{M} \cap \overline{K_i}) \times [0,1] \text{ und } j = j_x+1, \ldots, j_x+p$$

sichert insbesondere für $(x,t) \in \mathscr{F}[F_i^p|_{(\bar{M} \cap \overline{K_i}) \times [0,1]}]$

$$F_i(x,t) \; (= F_i^{p+1}(x,t)) \in \{F_i^j(x,t) | \; j = j_x+1, \ldots, j_x+p\} \subset M \times [0,1].$$

(c) Nach (b) sind schon die Punkte (α), (β) und (γ) von $f_{i+1} \in A(M,p)$ bewiesen. Punkt (δ), d.h. $\mathscr{F}[f_{i+1}|_M] = \emptyset$, folgt sofort aus $\mathscr{F}[f_{i+1}|_{M \setminus U_i}] = \mathscr{F}[f_i|_{\bar{M} \setminus U_i}] \subset \mathscr{F}[f_i|_{\bar{M}}] = \emptyset$ (vgl. (3.15; $i+1$) und (3.13; i)) und $f_{i+1}(U_i) \subset V_i$ (vgl. (3.11; $i+1$)), wobei wegen (3.16), (3.18) und (3.9) $U_i \cap V_i = \emptyset$ ist. Damit ist (3.13; $i+1$) bewiesen.

Zum Nachweis von (3.14; $i+1$) benötigen wir, dass

$$\text{(3.24; } i\text{)} \qquad \overline{F_i^p(\bar{M} \times [0,1])} \text{ kompakt}$$

ist, was von der speziellen Wahl von f_i und f_{i+1} abhängt und deshalb erst am Schluss dieses Beweises gezeigt werden wird. Wegen $F_i(\mathscr{F}[F_i^p|_{\bar{M} \times [0,1]}]) \subset M \times [0,1]$ gilt

$$\mathscr{F}[F_i^p|_{\bar{M} \times [0,1]}] = F_i(\mathscr{F}[F_i^p|_{\bar{M} \times [0,1]}]) \subset M \times [0,1]$$

(vgl. Hilfssatz 3), d.h. es ist $\mathscr{F}[F_i^p|_{M \times [0,1]}] = \mathscr{F}[F_i^p|_{\bar{M} \times [0,1]}]$, woraus folgt, dass $\mathscr{F}[F_i^p|_{M \times [0,1]}]$ abgeschlossen und wegen (3.24; i) sogar kompakt ist. Mittels der Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades (vgl. Seite 13), angewendet auf $\Omega := M \times [0,1]$ und $F := P \circ F_i^p$ ($P(x,t) := x$ für alle $(x,t) \in E \times [0,1]$) folgt dann (3.14; $i+1$) (beachte (3.14; i) und (3.24; i)).

(d) (3.12; $i+1$) folgt trivial aus (3.12; i), (3.22; $i+1$) und $\varepsilon_i \leqslant \varepsilon/(2p+1)$.

(e) Unser nächstes Ziel ist der Nachweis von

$$\text{(3.25; } i+1\text{)} \qquad \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M] \subset \mathscr{F}[f_i^p|_M] \cup \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\big((\mathscr{F}[f_i^p|_M])^{\varrho_i} \cap U_i\big):$$

Es sei $x \in \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]$. Falls $\{x, f_{i+1}(x), \ldots, f_{i+1}^{p-1}(x)\} \cap U_i = \emptyset$, dann ist wegen (3.15; $i+1$) $f_{i+1}^p(x) = f_i^p(x)$ und somit $x \in \mathscr{F}[f_i^p|_M]$. Anderenfalls wähle $y \in \{x, f_{i+1}(x), \ldots, f_{i+1}^{p-1}(x)\} \cap U_i$. Dann ist $f_{i+1}(y) \in V_i$ und $f_{i+1}^j(y) = f_i^{j-1}(f_{i+1}(y))$ für $j = 1, \ldots, p$ wegen (3.15; $i+1$) und $f_{i+1}^k(y) \notin U_i$ für $k = 1, \ldots, p-1$ (beachte (3.11; $i+1$), (3.16), (3.18) und (3.9)). Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \|f_{i+1}(y) - f_i^p(f_{i+1}(y))\| &= \|f_{i+1}^p(f_{i+1}(y)) - f_i^p(f_{i+1}(y))\| \\ &= \Big\|f_{i+1}\big(f_i^{p-1}(f_{i+1}(y))\big) - f_i\big(f_i^{p-1}(f_{i+1}(y))\big)\Big\| \\ &\leqslant \varepsilon_i \leqslant \tau_i. \end{aligned}$$

Nach der Definition von τ_i ist $f_{i+1}(y) \notin H_i$, d.h. es ist $f_{i+1}(y) \in$

$V_i \cap f_i^{-(p-1)}((\mathscr{F}[f_i^p|_M])^{\varrho_i})$ und folglich

$$y = f_{i+1}^p(y) = f_i^{p-1}(f_{i+1}(y)) \in (\mathscr{F}[f_i^p|_M])^{\varrho_i} \cap U_i.$$

Da $y = f_{i+1}^{l'}(x)$ für ein $l' \in \{1, \ldots, p\}$, gilt

$$x = f_{i+1}^{p-l'}(y) \in f_{i+1}^{p-l'}((\mathscr{F}[f_i^p|_M])^{\varrho_i} \cap U_i).$$

(f) Wir können nun die Mengen $G_{i+1,k}^{(j)}$ ($k \in \boldsymbol{Z}$, $j = 1, \ldots, s$) wie folgt wählen:

$$G_{i+1,k}^{(j)} := \Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\Big(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\Big).$$

Für $G_{i+1}^{(j)} := \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} G_{i+1,k}^{(j)}$ ($j = 1, \ldots, s$) soll nun (3.20; $i+1$) und (3.21; $i+1$) nachgewiesen werden:

(α) Wegen der Kompaktheit von $\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]$ und der Stetigkeit von $f_{i+1}^l|_{\bar{M}}$ ($l = 0, \ldots, p-1$) ist klar, dass für $j = 1, \ldots, s$ und $k \in \boldsymbol{Z}$

$$R_k^{(j)} := \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\Big(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\Big)$$

abgeschlossen ist. Umgekehrt ist klar, dass ein Punkt

$$x \in \overline{\Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big)} \setminus \Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big)$$

in $G_{i,k}^{(j)} \cap f_i^{-l_0}(\partial U_i)$ für ein $l_0 \in \{0, \ldots, p-1\}$ liegen muss, und demnach ist (man beachte (3.20; i) und (3.15; $i+1$)) im Falle $l_0 = 0$

$$\begin{aligned} x &\in G_{i,k}^{(j)} \cap \Big(\partial U_i \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(U_i)\Big) \\ &= G_{i,k}^{(j)} \cap \Big(\overline{U_i} \cap \mathscr{F}[f_i^p|_M] \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(U_i)\Big) \\ &\subset \overline{(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap (\overline{U_i} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]) = \overline{(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}] \subset R_k^{(j)} \end{aligned}$$

und im Falle $l_0 \in \{1, \ldots, p-1\}$

$$\begin{aligned} x &= f_i^p(x) = f_{i+1}^{p-l_0}(f_i^{l_0}(x)) \in f_{i+1}^{p-l_0}\Big(G_{i,k+l_0}^{(j)} \cap \Big(\partial U_i \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(U_i)\Big)\Big) \\ &\subset f_{i+1}^{p-l_0}\Big(\overline{(G_{i,k+l_0}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\Big) \\ &= f_{i+1}^{p-l_0}\Big(\overline{(G_{i,k-(p-l_0)}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\Big) \subset R_k^{(j)}. \end{aligned}$$

Damit ist $G_{i+1,k}^{(j)}$ abgeschlossen für $k \in \boldsymbol{Z}$ und $j = 1, \ldots, s$.

(β) Nachweis von $\bigcup_{j=1}^{s} G_{i+1}^{(j)} = \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]$: Da offenkundig

$$\bigcup_{j=1}^{s} G_{i+1}^{(j)} \subset \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]$$

ist, genügt es nachzuweisen, dass

$$\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M] \subset \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{k\in Z} G_{i+1,k}^{(j)} \; (= \bigcup_{j=1}^{s} G_{i+1}^{(j)})$$

ist: Es sei $x\in\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]$. Wir unterscheiden die Fälle

$$x\in\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]\setminus\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l}) \quad \text{und} \quad x\in\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_M]\cap\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l}).$$

Im ersten Falle ist $f_i^j(x)\notin U_i$ für $j = 0,\dots,p-1$, und wegen (3.15; $i+1$) ist demnach $f_i^p(x) = f_{i+1}^p(x) = x$. Nach (3.20; i) gibt es also ein $k\in Z$ und ein $j\in\{1,\dots,s\}$ mit $x\in G_{i,k}^{(j)}$, und nach obigem gilt sogar

$$x\in G_{i,k}^{(j)}\setminus\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l}) \subset G_{i+1,k}^{(j)}.$$

Im zweiten Falle existiert ein $l_0\in\{0,\dots,p-1\}$ mit $y := f_{i+1}^{l_0}(x) = f_i^{l_0}(x)\in\overline{U_i}$ (beachte (3.15; $i+1$)). Dann ist $y\in\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]$ und $x = f_{i+1}^{l'}(y)$ mit einem $l'\in\{0,\dots,p-1\}$ ($l' = p-l_0$, falls $l_0\neq 0$). Wegen (3.25; $i+1$) ist

$$\begin{aligned} y &\in\mathscr{F}[f_i^p|_M]\cup\bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\left((\mathscr{F}[f_i^p|_M])^{\varrho_i}\cap U_i\right)\\ &= \bigcup_{j=1}^{s}\bigcup_{k\in Z} G_{i,k}^{(j)}\cup\bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\Big(\bigcup_{j=1}^{s}\bigcup_{k\in Z}(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}\cap U_i\Big).\end{aligned}$$

Da $y\in\overline{U_i}$ und $\overline{U_i}\cap\bigcup_{l=1}^{p-1} f_{i+1}^l(U_i) = \emptyset$ ist, gilt sogar

$$y\in\bigcup_{j=1}^{s}\bigcup_{k\in Z} G_{i,k}^{(j)}\cup\bigcup_{j=1}^{s}\bigcup_{k\in Z}\left((G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}\cap U_i\right)\subset\bigcup_{j=1}^{s}\bigcup_{k\in Z}\overline{(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}}.$$

Es existiert also ein $j\in\{1,\dots,s\}$ und $k\in Z$ mit $y\in\overline{(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}}\cap\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]$, und folglich ist

$$x\in f_{i+1}^{l'}\left(\overline{(G_{i,k}^{(j)})^{\varrho_i}}\cap\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\right)\subset G_{i+1,k+l'}^{(j)}.$$

(γ) Beweis von $G_{i+1,k_1}^{(j)}\cap G_{i+1,k_2}^{(j)} = \emptyset$ für $j = 1,\dots,s$ und $k_1,k_2\in Z$, $k_1\not\equiv k_2 \pmod p$: Angenommen, es gebe ein $j\in\{1,\dots,s\}$ und $k_1,k_2\in Z$, $k_1\not\equiv k_2$ (mod p) mit $G_{i+1,k_1}^{(j)}\cap G_{i+1,k_2}^{(j)}\neq\emptyset$. Wegen (3.20; i) ist $G_{i,k_1}^{(j)}\cap G_{i,k_2}^{(j)} = \emptyset$ und folglich

$$\Big(G_{i,k_1}^{(j)}\setminus\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l})\Big)\cap\Big(G_{i,k_2}^{(j)}\setminus\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l})\Big) = \emptyset.$$

Trivialerweise ist

$$\Big(G_{i,k_1}^{(j)}\setminus\bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_l})\Big)\cap\bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\left(\overline{(G_{i,k_2-l}^{(j)})^{\varrho_i}}\cap\mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]\right) = \emptyset,$$

und dasselbe gilt für k_1 und k_2 vertauscht. Somit muss

$$\bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^{l}\left(\overline{(G_{i,k_1-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \cap \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^{l}\left(\overline{(G_{i,k_2-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \neq \emptyset$$

sein. Wegen $f_{i+1}^{l_1}(\overline{U_i}) \cap f_{i+1}^{l_2}(\overline{U_i}) = \emptyset$ für $l_1, l_2 \in \{0, \dots, p-1\}$, $l_1 \neq l_2$ gibt es dann ein $l_0 \in \{0, \dots, p-1\}$ mit

$$f_{i+1}^{l_0}\left(\overline{(G_{i,k_1-l_0}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \cap f_{i+1}^{l_0}\left(\overline{(G_{i,k_2-l_0}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \neq \emptyset,$$

so dass wir

$$\overline{(G_{i,k_1-l_0}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \overline{(G_{i,k_2-l_0}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}] \neq \emptyset$$

erhalten im Widerspruch zur Definition von ϱ_i.

(δ) Es sei $m \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{Z}$ und $j \in \{1, \dots, s\}$, und es sei $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, so dass $m-p \leqslant p\alpha \leqslant m$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
G_{i+1,k+m}^{(j)} &= \Big(G_{i,k+m}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^{l}\left(\overline{(G_{i,k+m-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \\
&= \Big(f_i^{m}(G_{i,k}^{(j)}) \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{l=-m}^{p-1-m} f_{i+1}^{l+m}\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \\
&= f_i^{m}\Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \Big(\bigcup_{l=-p\alpha}^{p-1-m} f_{i+1}^{l+m}\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{l=-m}^{-p\alpha-1} f_{i+1}^{l+m}\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right)\Big) \\
&= f_{i+1}^{m}\Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \\
&\quad \cup \Big(\bigcup_{l=-p\alpha}^{p-1-m} f_{i+1}^{l+p\alpha+m}\left(\overline{(G_{i,k-l-p\alpha}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{l=-m}^{-p\alpha-1} f_{i+1}^{l+p\alpha+p+m}\left(\overline{(G_{i,k-l-p\alpha-p}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right)\Big) \\
&= f_{i+1}^{m}\Big(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\Big) \cup \\
&\quad \cup \Big(\bigcup_{l=0}^{p-1-m+p\alpha} f_{i+1}^{l+m}\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i}} \cap \mathcal{F}[f_{i+1}^{p}|_{\overline{U_i}}]\right) \cup
\end{aligned}$$

$$\cup \bigcup_{l=p-m+p^\alpha}^{p-1} f_{i+1}^{l+m}\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]}\right)$$

$$= f_{i+1}^m\left(\left(G_{i,k}^{(j)} \setminus \bigcup_{l=0}^{p-1} f_i^{-l}(\overline{U_i})\right) \cup \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{i+1}^l\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]}\right)\right)$$

$$= f_{i+1}^m(G_{i+1,k}^{(j)}).$$

(α)–(δ) ergeben gerade (3.20; $i+1$).

(ε) Nachweis von (3.21; $i+1$): Es sei $k \in Z$ und $j \in \{1, \ldots, s\}$. Wegen (3.21; i) im Falle $i \geqslant 1$ genügt es, $G_{i+1,k}^{(j)} \subset (G_{i,k}^{(j)})^{\delta/(2p+1)}$ zu zeigen, und dies wiederum folgt schon aus

$$f_{i+1}^l\left(\overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]}\right) \subset (G_{i,k}^{(j)})^{\delta/(2p+1)} \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, p-1.$$

Es sei $l \in \{0, \ldots, p-1\}$ und $x \in \overline{(G_{i,k-l}^{(j)})^{\varrho_i} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}]}$. Dann gibt es ein $y \in G_{i,k-l}^{(j)}$ mit $\|x-y\| \leqslant \varrho_l$ (man beachte, dass $G_{i,k-l}^{(j)}$ kompakt ist). Wir wollen

$$\|f_{i+1}^m(x) - f_i^m(y)\| < \delta/(2p+1) \quad \text{für alle } m \in \{0, \ldots, p-1\}$$

zeigen (es würde der Beweis für $m = l$ genügen). Gemäss der Definition von ϱ_i und der Funktion ξ_i ist

$$\|f_i^m(x) - f_i^m(y)\| < \tfrac{1}{2}\xi_i(\delta/(2p+1)) \quad \text{für} \quad m = 0 \text{ und } m = 1.$$

Dies ergibt $\|x-y\| < \xi_i(\delta/(2p+1))$ und somit

$$\|f_{i+1}^0(x) - f_i^0(y)\| = \|f_i^0(x) - f_i^0(y)\| < \delta/(2p+1)$$

und zudem (vgl. (3.22; $i+1$) und die Definition von ε_i)

$$\begin{aligned} \|f_{i+1}(x) - f_i(y)\| &\leqslant \|f_{i+1}(x) - f_i(x)\| + \|f_i(x) - f_i(y)\| \\ &< \varepsilon_i + \tfrac{1}{2}\xi_i(\delta/(2p+1)) \leqslant \xi_i(\delta/(2p+1)). \end{aligned}$$

Wegen $x \in \overline{U_i}$ ist $f_{i+1}^m(x) \notin U_i$ für $m = 1, \ldots, p-2$, so dass wir mittels (3.15; $i+1$) $f_{i+1}^m(x) = f_i^{m-1}(f_{i+1}(x))$ für $m = 1, \ldots, p-1$ erhalten. Nach der Definition von ξ_i ist dann

$$\|f_{i+1}^m(x) - f_i^m(y)\| = \|f_i^{m-1}(f_{i+1}(x)) - f_i^{m-1}(f_i(y))\| < \delta/(2p+1)$$

für $m = 1, \ldots, p-1$. Nach (3.20; i) ist $f_i^l(y) \in f_i^l(G_{i,k-l}^{(j)}) = G_{i,k}^{(j)}$, so dass wir wegen $\|f_{i+1}^l(x) - f_i^l(y)\| < \delta/(2p+1)$ $f_{i+1}^l(x) \in (G_{i,k}^{(j)})^{\delta/(2p+1)}$ erhalten.

(g) Es soll nun gezeigt werden, dass im Falle $i+1 \leqslant 2p$ die Mengen U_{i+1} und V_{i+1} so gewählt werden können, dass (3.16; $i+1$), (3.18; $i+1$) und (3.19; $i+1$) erfüllt sind. Man prüft leicht nach, dass es dazu ausreicht, $(f_{i+1}(G_{i+1,-i-2}^{(j_0)}) =)\, G_{i+1,-i-1}^{(j_0)} \subset U_i$ und

$$(3.26;\ i+1) \quad G_{i+1,-i-2}^{(j_0)} \subset \begin{cases} V_{i+2-p}, & \text{falls} \quad i+1 \in \{1, \ldots, p-1\}, \\ V_{i+2-p} \subset U_{i+1-p} \subset V_{i+2-2p}, & \text{falls} \quad i+1 \in \{p, \ldots, 2p\} \end{cases}$$

zu beweisen. Anstelle von $G_{i+1,-i-1}^{(j_0)} \subset U_i$ können wir sogar für $i \in \{0, \ldots, 2p\}$

$$(3.27;\ i+1) \qquad G_{i+1,-i-1}^{(j_0)} \subset (G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i} \subset \overline{(G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i}} \subset U_i$$

beweisen.

Nach (3.18; i) ist $G_{i,-i-1}^{(j_0)} \subset U_i$, und wegen $\varrho_i \leqslant \varrho_i''$ und der Definition von ϱ_i'' gilt sogar $\overline{(G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i}} \subset U_i$ und $\overline{(G_{i,-i-1-l}^{(j_0)})^{\varrho_i}} \cap U_i = \emptyset$ für $l = 1, \ldots, p-1$. Folglich ist

$$G_{i+1,-i-1}^{(j_0)} = \overline{(G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{\varrho_i}} \cap \mathscr{F}[f_{i+1}^p|_{\overline{U_i}}],$$

woraus sofort (3.27; $i+1$) folgt.

Nach (3.20; $i+1$) ist $G_{i+1,-i-2}^{(j_0)} = G_{i+1,p-i-2}^{(j_0)} = f_{i+1}^{p-1}(G_{i+1,-i-1}^{(j_0)})$, so dass wir wegen (3.27; $i+1$) und (3.11; $i+1$)

$$G_{i+1,-i-2}^{(j_0)} = f_{i+1}^{p-1}(G_{i+1,-i-1}^{(j_0)}) \subset f_{i+1}^{p-1}(U_i) \subset V_{i+2-p}$$

erhalten ($i+1 \in \{1, \ldots, 2p\}$). $V_{i+2-p} \subset U_{i+1-p} \subset V_{i+2-2p}$ im Falle $i+1 \in \{p, \ldots, 2p\}$ folgt trivial aus (3.16; $i+2-p$) und (3.18; $i+1-p$).

IV. Nach diesen Vorbereitungen können nun die Approximationsschritte im Detail beschrieben werden:

(a) Es sei $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Wir nehmen an, die ersten i Approximationsschritte seien schon ausgeführt.

Nach (3.14; i) ist $\overline{f_i^p(V_i)}$ kompakt. Demnach gibt es ein $\varepsilon_i/2$-Netz $\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}$ von $f_i^p(V_i)$. Wir definieren

$$W_i := \bigcup_{j=1}^{r_i} K(x_{i,j}, \tfrac{3}{4}\varepsilon_i)$$

und betrachten eine dem Schauderschen Projektionsoperator verwandte Abbildung $p_i\colon W_i \to E$, definiert durch

$$p_i(z) := (1-l_i)\Big(\sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\, x_{i,j} + \frac{l_i}{r_i+1} \sum_{j=1}^{r_i} x_{i,j},$$

wobei $\mu_{i,j}(z) := \max(0, \tfrac{3}{4}\varepsilon_i - \|z - x_{i,j}\|)$ ist und $l_i \in (0, 1)$ so gewählt ist, dass für alle $z \in W_i$

$$l_i \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\, x_{i,j} - \frac{1}{r_i+1} \sum_{j=1}^{r_i} x_{i,j}\Big\| \leqslant \varepsilon_i/4$$

ist. Trivialerweise bildet p_i die Menge W_i in $\operatorname{co}\{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}$ ab, und es gilt

$$\|p_i(z) - z\| \leqslant \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\Big)^{-1} \sum_{j=1}^{r_i} \mu_{i,j}(z)\, x_{i,j} - z\Big\| +$$

$$+l_i\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\Big)^{-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)x_{i,j}-\frac{1}{r_i+1}\sum_{j=1}^{r_i}x_{i,j}\Big\|$$

$$\leqslant \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\Big)^{-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)(x_{i,j}-z)\Big\|+\varepsilon_i/4$$

$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\Big)^{-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\,\|x_{i,j}-z\|+\varepsilon_i/4.$$

Wegen $\mu_{i,j}(z) = 0$ für $\|x_{i,j}-z\| \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon_i$ ist

$$\|p_i(z)-z\| < \Big(\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\Big)^{-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu_{i,j}(z)\tfrac{3}{4}\varepsilon_i+\varepsilon_i/4 = \varepsilon_i.$$

Da $f_i|_{\bar{M}}$ stetig ist, ist $f_i^{-1}(W_i)\cap\bar{M}$ eine offene Teilmenge von $\bar{M}$. Da $\overline{f_i^{p-1}(V_i)}\subset f_i^{-1}(W_i)\cap\bar{M}$ ist, gibt es eine in $\bar{M}$ offene Menge U_i' mit $\overline{f_i^{p-1}(V_i)}\subset U_i'\subset\overline{U_i'}\subset f_i^{-1}(W_i)$. Wir definieren

$$V_{i+1}:=U_i'\cap(G^{(j_0)}_{i,-i-1})^{2\varrho_i}.$$

Dann gilt $\overline{V_{i+1}}\subset U_i\cap f_i^{-1}(W_i)$ (beachte (3.27; $i+1$)), und folglich existiert eine stetige Funktion $t_i\colon E\to[0,1]$ mit $t_i|_{V_{i+1}}\equiv 1$ und $t_i|_{E\setminus(U_i\cap f_i^{-1}(W_i))}\equiv 0$. Wir definieren $f_{i+1}\colon D(f)\to E$ durch

$$f_{i+1}(x):=\begin{cases}(1-t_i(x))\,f_i(x)+t_i(x)\,p_i(f_i(x)) & \text{für}\quad x\in f_i^{-1}(W_i),\\ f_i(x) & \text{für}\quad x\in D(f)\setminus f_i^{-1}(W_i).\end{cases}$$

Aus dieser Definition folgen trivial die Beziehungen (3.15; $i+1$), (3.17; $i+1$), (3.22; $i+1$) und (wegen (3.13; i)) die Stetigkeit von $f_{i+1}|_{\bar{M}}$. (3.16; $i+1$) wurde schon bewiesen. Wir müssen noch U_{i+1} konstruieren, so dass (3.18; $i+1$) und (3.19; $i+1$) erfüllt sind. Zum Nachweis der Existenz eines solchen U_{i+1} genügt es zu zeigen, dass $f_{i+1}(G^{(j_0)}_{i+1,-i-2}) = G^{(j_0)}_{i+1,-i-1}\subset V_{i+1}$ ist (beachte (3.26; $i+1$)). Wegen $G^{(j_0)}_{i+1,-i-1}\subset(G^{(j_0)}_{i,-i-1})^{2\varrho_i}$ (nach (3.27: $i+1$)) brauchen wir nur $G^{(j_0)}_{i+1,-i-1}\subset U_i'$ beweisen: Nach (3.20; $i+1$) ist $G^{(j_0)}_{i+1,-i-1} = f_{i+1}^p(G^{(j_0)}_{i+1,-i-1})$, und mit Hilfe von (3.27; $i+1$), (3.11; $i+1$) und $f_{i+1}^{p-1}|_{V_i} = f_i^{p-1}|_{V_i}$ (vgl. (3.16), (3.11; $i+1$), (3.18), (3.9) und (3.15; $i+1$)) erhält man dann

$$G^{(j_0)}_{i+1,-i-1} = f_{i+1}^p(G^{(j_0)}_{i+1,-i-1})\subset f_{i+1}^p(U_i)\subset f_{i+1}^{p-1}(V_i) = f_i^{p-1}(V_i)\subset U_i'.$$

Man kann nun für U_{i+1} jede offene Menge nehmen, die (3.18; $i+1$) und (3.19; $i+1$) erfüllt.

Es sei $L_i := \operatorname{span}(f_{i+1}(V_{i+1}))$. Man beachte, dass wegen $f_{i+1}(V_{i+1})\subset p_i(W_i)\subset\operatorname{co}\{0,x_{i,1},\dots,x_{i,r_i}\}$ L_i endlichdimensional ist, aber zudem auch $L_i\neq\{0\}$ sein muss, da $\{0,x_{i,1},\dots,x_{i,r_i}\}\neq\{0\}$ ist (man beachte, dass $\emptyset\neq\{x_{i,1},\dots,x_{i,r_i}\}\subset f_i^p(V_i)$ ist, wobei im Falle $i=0$ nach (3.10) und (3.8)

$f_i^p(V_i) = f^p(V_0) \subset V_{-p} \subset M\backslash\{0\}$ und im Falle $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ nach (3.16; i), (3.11; i) und (3.8) $f_i^p(V_i) \subset f_i^p(U_{i-1}) \subset V_{i-p} \subset M\backslash\{0\}$ ist).

Für alle $x \in V_{i+1}$ ist

$$f_{i+1}(x) = p_i(f_i(x)) = \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j(x) x_{i,j}$$

mit $\alpha_j(x) \geqslant l_i/(r_i+1) > 0$ $(j = 1, \ldots, r_i)$ und

$$\sum_{j=1}^{r_i} \alpha_j(x) = 1 - l_i + \frac{r_i}{r_i+1} l_i = 1 - \frac{l_i}{r_i+1} < 1,$$

so dass ein $\varepsilon_i'' > 0$ existiert mit

(3.28; $i+1$) $$(f_{i+1}(V_{i+1}))^{2\varepsilon_i''} \cap L_i \subset \operatorname{co}\{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}.$$

(b) Zusätzlich zu den in den ersten p Approximationsschritten konstruierten Abbildungen f_i und Mengen U_i, V_i, L_i etc. definieren wir noch $L_p := L_0$. Für ein $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$ nehmen wir nun an, dass wir schon die ersten i Approximationsschritte durchgeführt haben.

Wegen $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $j = i-p+1, \ldots, i-1$ und (3.15) ist

$$f_{i-p+1}|_{U_i} = f_{i-p+2}|_{U_i} = \ldots = f_i|_{U_i},$$

so dass man mit Hilfe von (3.18; i)

$$f_i(U_i) = f_{i-p+1}(U_i) \subset f_{i-p+1}(V_{i-p+1}) \subset L_{i-p}$$

erhält. Nach dem Glättungssatz (vgl. Seite 12) gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $g_i \colon U_i \cap L_{i-p+1} \to L_{i-p}$ mit $\|f_i(x) - g_i(x)\| < \min(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-p}'')$ für alle $x \in U_i \cap L_{i-p+1}$. Weiterhin gibt es nach dem Tietzeschen Ergänzungssatz (vgl. Seite 12) eine stetige Fortsetzung $s_i \colon D(f) \to E$ der Abbildung

$$t_i \colon \left(\overline{(G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i}} \cap L_{i-p+1}\right) \cup \left(D(f)\backslash U_i\right) \to E,$$

definiert durch

$$t_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in D(f)\backslash U_i, \\ g_i(x) - f_i(x) & \text{für} \quad x \in \overline{(G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i}} \cap L_{i-p+1}, \end{cases}$$

so dass $R(s_i) \subset \operatorname{co}(R(t_i))$ ist. Wegen $R(t_i) \subset L_{i-p} \cap K(0, \min(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-p}''))$ erhalten wir

(3.29; i) $$R(s_i) \subset L_{i-p} \cap K(0, \min(\varepsilon_i, \varepsilon_{i-p}'')).$$

Wir definieren $f_{i+1} := f_i + s_i$ und $V_{i+1} := (G_{i,-i-1}^{(j_0)})^{2\varrho_i}$ und erhalten trivial die Stetigkeit von $f_{i+1}|_{\bar{M}}$ sowie die Beziehungen (3.22; $i+1$), (3.15; $i+1$), (3.16; $i+1$) (beachte (3.27; $i+1$)),

(3.30; $i+1$) $$f_{i+1}(U_i) \subset L_{i-p}$$

und

(3.31; $i+1$) $\quad f_{i+1}|_{V_{i+1}\cap L_{i-p+1}}$ stetig differenzierbar in L_{i-p+1}.

(3.16; $i+1$) und (3.30; $i+1$) ergeben (3.17; $i+1$). Die Existenz einer offenen Menge U_{i+1}, die den Bedingungen (3.18; $i+1$) und (3.19; $i+1$) genügt, folgert man einfach aus (3.26; $i+1$) und (3.27; $i+1$).

(c) Nun können wir annehmen, dass die ersten $2p$ Approximationsschritte durchgeführt sind. Wegen $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i, j = p, \ldots, 2p-1$ mit $i \neq j$ und (3.15) ist

$$f_{2p}|_{U_i} = f_{2p-1}|_{U_i} = \ldots = f_{i+1}|_{U_i} \quad \text{für} \quad i = p, \ldots, 2p-1.$$

Berücksichtigt man (3.30), (3.31) und (3.16), so folgt, dass $f_{2p}(U_i) \subset L_{i-p}$ ist und $f_{2p}|_{V_{i+1}\cap L_{i-p+1}}$ in L_{i-p+1} stetig differenzierbar ist für $i = p, \ldots, 2p-1$. $f_{2p}(U_i) \subset L_{i-p}$, (3.11) und (3.16) ergeben $f_{2p}^j(V_{2p}) \subset V_{2p-j} \cap L_{p-j}$ für $j = 1, \ldots, p$. Demnach ist $f_{2p}^p|_{V_{2p}\cap L_p}$ in L_p stetig differenzierbar und es gilt $f_{2p}^p(V_{2p} \cap L_p) \subset L_0 = L_p$. Wir können somit das Sardsche Lemma (vgl. Seite 12) auf $(\mathrm{id} - f_{2p}^p)|_{V_{2p}\cap L_p}$ anwenden und erhalten die Existenz eines $y \in L_p$ mit $\|y\| < \min(\varepsilon_{2p}, \varepsilon_0'')$ und $J[\mathrm{id} - f_{2p}^p, x] \neq 0$ für alle $x \in V_{2p} \cap L_p$ mit $x - f_{2p}^p(x) = y$ (hierbei bedeutet $J[\ldots]$ die Funktionaldeterminante relativ zum Unterraum L_p). Es sei u: $D(f) \to [0, 1]$ stetig, so dass (beachte (3.27; $2p+1$))

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in (G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}} \\ 0 & \text{für} \quad x \in D(f) \setminus U_{2p}. \end{cases}$$

Wir wählen $f_{2p+1} := f_{2p} + uy$. Es ist klar, dass $f_{2p+1}|_M$ stetig ist und den Bedingungen (3.15; $2p+1$) und (3.22; $2p+1$) genügt.

Wir können nun $\tilde{f} := f_{2p+1}$ setzen. Es muss aber daran erinnert werden, dass für jedes $i \in \{0, \ldots, 2p\}$ der $(i+1)$-te Approximationsschritt nur ausgeführt wurde, falls $G_i^{(j_0)} \neq \emptyset$ war. Anderenfalls wurde das Approximationsverfahren abgebrochen und $\tilde{f} := f_i$ gesetzt.

Entsprechend wählen wir auch die Mengen $\tilde{G}^{(j)} := G_{2p+1}^{(j)}$ mit $\tilde{G}_k^{(j)} := G_{2p+1,k}^{(j)}$, falls das Approximationsverfahren nicht vorzeitig abgebrochen wurde, bzw. $\tilde{G}^{(j)} := G_i^{(j)}$ mit $\tilde{G}_k^{(j)} := G_{i,k}^{(j)}$, falls das Approximationsverfahren nach dem i-ten Schritt wegen $G_i^{(j_0)} = \emptyset$ abgebrochen wurde ($i \in \{0, \ldots, 2p\}$, $j = 1, \ldots, s$, $k \in Z$).

V. Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{f}$ die behaupteten Eigenschaften hat und dass (3.24) gilt:

$\tilde{f} \in A(M, p)$ ist eine triviale Folge von (3.13).

$\mathfrak{G} := \{\tilde{G}^{(1)}, \ldots, \tilde{G}^{(s)}\} \in U(\tilde{f}, p, M)$ mit $[\tilde{G}_k^{(j)} |\ k \in Z] \in Z(\tilde{G}^{(j)}, \tilde{f})$ für $j = 1, \ldots, s$ ist klar wegen (3.20).

Im Falle, dass für ein $i \in \{0, \ldots, 2p\}$ dass Approximationsverfahren nach dem i-ten Schritt wegen $G_i^{(j_0)} = \emptyset$ abgebrochen wurde, ist $\tilde{G}^{(j_0)} = G_i^{(j_0)} = \emptyset$ und folglich (3.1) trivial erfüllt.

Anderenfalls ist $\tilde{f} := f_{2p+1}$. Zum Nachweis von (3.1) genügt es dann zu zeigen, dass $G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ endlich ist, da wegen (3.20; $2p+1$)

$$\tilde{G}^{(j_0)} = G_{2p+1}^{(j_0)} = \bigcup_{k \in Z} G_{2p+1,k}^{(j_0)} = \bigcup_{k=-2p}^{-p-1} G_{2p+1,k}^{(j_0)}$$

$$= \bigcup_{l=0}^{p-1} f_{2p+1}^{l}(G_{2p+1,-2p}^{(j_0)})$$

ist. Zunächst zeigen wir

$$(3.32) \qquad G_{2p+1,-2p}^{(j_0)} \subset V_{2p} \cap L_p \cap f_{2p+1}^{-(p-1)}\big((G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}\big):$$

Gemäss (3.20; $2p+1$), (3.27; $2p+1$) und (3.11; $2p+1$) gilt

$$G_{2p+1,-2p}^{(j_0)} = f_{2p+1}(G_{2p+1,-2p-1}^{(j_0)}) \subset f_{2p+1}(U_{2p}) \subset V_{2p}.$$

Andererseits folgt aus $U_{2p} \subset U_p$ (vgl. (3.18; $2p$)), (3.30; $p+1$) und $y \in L_p$

$$G_{2p+1,-2p}^{(j_0)} \subset f_{2p+1}(U_{2p}) \subset f_{2p+1}(U_p) = (f_{2p}+uy)(U_p)$$
$$= (f_{p+1}+uy)(U_p) \subset L_0 = L_p.$$

$G_{2p+1,-2p}^{(j_0)} \subset f_{2p+1}^{-(p-1)}\big((G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}\big)$ folgt aus

$$f_{2p+1}^{p-1}(G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}) = G_{2p+1,-p-1}^{(j_0)} = G_{2p+1,-2p-1}^{(j_0)} \subset (G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}$$

(vgl. (3.20; $2p+1$) und (3.27; $2p+1$)). Es sei

$$z \in V_{2p} \cap f_{2p+1}^{-(p-1)}\big((G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}\big).$$

Dann ist $\{z, f_{2p+1}(z), \dots, f_{2p+1}^{p-2}(z)\} \cap U_{2p} = \emptyset$, und folglich ist $f_{2p}^{p-1}(z) = f_{2p+1}^{p-1}(z)$. Mit Hilfe der Definition von f_{2p+1} erhalten wir dann wegen $f_{2p+1}^{p-1}(z) \in (G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}$

$$f_{2p+1}^{p}(z) - f_{2p}^{p}(z) = f_{2p+1}\big(f_{2p+1}^{p-1}(z)\big) - f_{2p}\big(f_{2p+1}^{p-1}(z)\big) = y.$$

Nach (3.32) ist also für alle $x \in G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ $(\subset \mathscr{F}[f_{2p+1}^{p}])$

$$x - f_{2p}^{p}(x) = f_{2p+1}^{p}(x) - f_{2p}^{p}(x) = y.$$

Aufgrund der Wahl von y ist $J[\mathrm{id} - f_{2p}^{p}, x] \neq 0$. Wie wir gezeigt haben, ist $f_{2p+1}^{p}(z) - f_{2p}^{p}(z) = y$, d.h. konstant, in der Umgebung $V_{2p} \cap f_{2p+1}^{-(p-1)}\big((G_{2p,-2p-1}^{(j_0)})^{2\varrho_{2p}}\big)$ von x, und folglich ist $J[\mathrm{id} - f_{2p+1}^{p}, x] = J[\mathrm{id} - f_{2p}^{p}, x] \neq 0$. x ist also isoliert in $G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$. Somit besteht $G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ aus isolierten Punkten, und da $G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ auch kompakt ist ($G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ ist abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\mathscr{F}[f_{2p+1}^{p}|_M]$), ist $G_{2p+1,-2p}^{(j_0)}$ endlich.

Die Behauptungen (3.2), (3.3) und (3.5) folgen trivial aus (3.14), (3.12) bzw. (3.21), ebenso erhält man (3.6) sofort aus (3.15), (3.18) und (3.8).

Zum Nachweis von (3.4) zeigen wir, dass für $i \in \{0, \dots, 2p\}$ $R(f_{i+1}) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ ist: Zunächst betrachten wir den Fall $i \in \{0, \dots, p-1\}$ und nehmen $R(f_i) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ an. Wie in Beweisteil IV (a) gezeigt wurde, ist $p_i(W_i) \subset \mathrm{co}\,\{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}$, wobei $0 \in \mathrm{co}\,(R(f))$ und $\{x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\} \subset R(f_i)$. Nach der Definition von f_{i+1} ist dann

$$\begin{aligned} R(f_{i+1}) &= R(f_{i+1}|_{f_i^{-1}(W_i)}) \cup R(f_i|_{D(f)\setminus f_i^{-1}(W_i)}) \\ &\subset \mathrm{co}\,(R(f_i) \cup p_i(W_i)) \cup R(f_i) \\ &\subset \mathrm{co}\,\big(R(f_i) \cup \mathrm{co}\,(\mathrm{co}\,(R(f)) \cup R(f_i))\big) \cup R(f_i) = \mathrm{co}\,(R(f)). \end{aligned}$$

Es sei nun $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$, und wir nehmen an, es sei $R(f_i) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ schon bewiesen. Berücksichtigt man (3.15; $i+1$), so folgt

$$\begin{aligned} R(f_{i+1}) &= f_{i+1}(D(f)\setminus U_i) \cup f_{i+1}(U_i) = f_i(D(f)\setminus U_i) \cup f_{i+1}(U_i) \\ &\subset R(f_i) \cup f_{i+1}(U_i) \subset \mathrm{co}\,(R(f)) \cup f_{i+1}(U_i). \end{aligned}$$

Zum Nachweis von $R(f_{i+1}) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ brauchen wir demnach nur noch $f_{i+1}(U_i) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ zeigen: Aus $f_{i+1} = f_i + s_i$ folgt

$$f_{i+1}(U_i) = (f_i + s_i)(U_i) \subset f_i(U_i) + R(s_i).$$

Wegen $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $j = i-p+1, \ldots, i-1$ und (3.15) ist

$$f_i|_{U_i} = f_{i-1}|_{U_i} = \ldots = f_{i-p+1}|_{U_i}.$$

Berücksichtigt man noch $U_i \subset V_{i-p+1}$ (vgl. (3.18; i)), (3.29; i) und (3.28; $i-p+1$), so erhält man

$$\begin{aligned} f_i(U_i) + R(s_i) &= f_{i-p+1}(U_i) + R(s_i) \subset f_{i-p+1}(V_{i-p+1}) + R(s_i) \\ &\subset (f_{i-p+1}(V_{i-p+1}))^{\varepsilon_{i-p}} \cap L_{i-p} \\ &\subset \mathrm{co}\,\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}, \end{aligned}$$

also

$$\text{(3.33; } i+1) \qquad \begin{aligned} f_{i+1}(U_i) &\subset (f_{i-p+1}(V_{i-p+1}))^{\varepsilon_{i-p}} \cap L_{i-p} \\ &\subset \mathrm{co}\,\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}, \end{aligned}$$

woraus wegen $0 \in \mathrm{co}\,(R(f))$ und $x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}} \in R(f_{i-p}) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ sofort $f_{i+1}(U_i) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$ folgt.

Ähnlich ist das Vorgehen im Falle $i = 2p$: Mittels (3.15; $2p+1$) erhalten wir

$$\begin{aligned} R(f_{2p+1}) &= f_{2p+1}(D(f)\setminus U_{2p}) \cup f_{2p+1}(U_{2p}) \\ &\subset f_{2p}(D(f)\setminus U_{2p}) \cup f_{2p+1}(U_{2p}) \subset R(f_{2p}) \cup f_{2p+1}(U_{2p}) \\ &\subset \mathrm{co}\,(R(f)) \cup f_{2p+1}(U_{2p}). \end{aligned}$$

Wegen $f_{2p+1} = f_{2p} + uy$ gilt

$$f_{2p+1}(U_{2p}) = (f_{2p} + uy)(U_{2p}) \subset f_{2p}(U_{2p}) + \{ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

Nun ist wegen $f_{2p}|_{U_{2p}} = f_{2p-1}|_{U_{2p}} = \ldots = f_{p+1}|_{U_{2p}}$, $U_{2p} \subset V_{p+1} \subset U_p$ und (3.33; $p+1$)

$$f_{2p}(U_{2p}) = f_{p+1}(U_{2p}) \subset f_{p+1}(U_p) \subset (f_1(V_1))^{\varepsilon_0''} \cap L_0,$$

so dass aufgrund von $y \in K(0, \min(\varepsilon_{2p}, \varepsilon_0'')) \cap L_p \subset K(0, \varepsilon_0'') \cap L_0$ und (3.28; 1) folgt

(3.33; $2p+1$) $f_{2p+1}(U_{2p}) \subset (f_1(V_1))^{2\varepsilon_0''} \cap L_0 \subset \mathrm{co}\,\{0, x_{0,1}, \ldots, x_{0,r_0}\}$.

Damit ist wegen $0 \in \mathrm{co}\,(R(f))$ und $x_{0,1}, \ldots, x_{0,r_0} \in R(f)$ auch $f_{2p+1}(U_{2p}) \subset \mathrm{co}\,(R(f))$.

Zum Nachweis von (3.7) zeigen wir, dass für $i \in \{0, \ldots, 2p\}$, $K \subset D(f)$ und für jedes Mass der Nicht-Präkompaktheit γ (vgl. Definition 1 auf Seite 11) gilt $\gamma(f_{i+1}(K)) \leqslant \gamma(f_i(K))$:

Im Falle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ ist $f_{i+1}(K) \subset \mathrm{co}\,(f_i(K) \cup p_i(W_i))$, so dass nach Definition 1 folgt:

$$\begin{aligned}
\gamma(f_{i+1}(K)) &\leqslant \gamma(\mathrm{co}\,(f_i(K) \cup p_i(W_i))) = \gamma(f_i(K) \cup p_i(W_i)) \\
&\leqslant \gamma(f_i(K) \cup \mathrm{co}\,\{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}) \\
&\leqslant \gamma(\mathrm{co}\,(f_i(K) \cup \{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\})) \\
&= \gamma(f_i(K) \cup \{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}) \\
&= \gamma(f_i(K) \cup \{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i-1}\}) \\
&= \ldots = \gamma(f_i(K) \cup \{0\}) = \gamma(f_i(K)).
\end{aligned}$$

Im Falle $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$ ist $f_{i+1}(U_i) \subset \mathrm{co}\,\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}$ und für $i = 2p$ gilt $f_{i+1}(U_i) = f_{2p+1}(U_{2p}) \subset \mathrm{co}\,\{0, x_{0,1}, \ldots, x_{0,r_0}\}$ (vgl. (3.33)). Es folgt für $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$ nach (3.15)

$$\begin{aligned}
\gamma(f_{i+1}(K)) &\leqslant \gamma(f_{i+1}(K \backslash U_i) \cup f_{i+1}(U_i)) \\
&\leqslant \gamma(f_i(K \backslash U_i) \cup \mathrm{co}\,\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}) \\
&\leqslant \gamma(f_i(K) \cup \mathrm{co}\,\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}) \\
&\leqslant \gamma(\mathrm{co}\,(f_i(K) \cup \{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\})) \\
&= \gamma(f_i(K) \cup \{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}) \\
&= \gamma(f_i(K) \cup \{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}-1}\}) \\
&= \ldots = \gamma(f_i(K) \cup \{0\}) = \gamma(f_i(K)).
\end{aligned}$$

Entsprechend beweist man auch $\gamma(f_{2p+1}(K)) \leqslant \gamma(f_{2p}(K))$.

Es fehlt noch der Nachweis von (3.24) sowie von $\tilde{f} \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ im Falle (a) bzw. von $\tilde{f} \in K(M, N, m_0, p)$ im Falle (b). Hierzu definieren wir für $i \in \{0, \ldots, 2p\}$ mit $\tilde{N} := N$ im Falle (a) bzw. $\tilde{N} := U_0$ im Falle (b)

$$Q_i := \Big(\bar{M} \backslash \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big) \backslash \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-1} f^{-l}(U_j),$$

$$R_i := \bar{M} \cap \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-2} \left(f^{-l}(U_j) \setminus \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_0)\right)$$

und

$$S_i := \left(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\right) \cap \left(\bigcup_{j=0}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\right).$$

Zunächst wird gezeigt, dass $\overline{F_i^k((Q_i \cup R_i \cup S_i) \times [0,1])}$ kompakt ist für $k = m_0, \ldots, p$:

(a) Beweis von $\overline{F_i^k(Q_i \times [0,1])}$ kompakt für $k = m_0, \ldots, p$: Da $f_{i+t}^{m_0}|_{Q_i} = f^{m_0}|_{Q_i}$ für alle $t \in [0,1]$ (vgl. (3.15)) und $f^{m_0}|_{\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})}$ kompakt ist, erhalten wir die Kompaktheit von

$$\overline{F_i^{m_0}(Q_i \times [0,1])} = \overline{f^{m_0}(Q_i) \times [0,1]} \subset \overline{f^{m_0}\left(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\right) \times [0,1]}.$$

Angenommen, es sei $\overline{F_i^k(Q_i \times [0,1])}$ kompakt für ein $k \in \{m_0, \ldots, p-1\}$. Wir können dann auf die Menge

$$Q_{i,k} := \left(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{k} f^{-l}(U_j)$$

das gleiche Argument wie oben anwenden: $\overline{F_i^{k+1}(Q_{i,k} \times [0,1])}$ ist kompakt wegen $f_{i+t}^{k+1}|_{Q_{i,k}} = f^{k+1}|_{Q_{i,k}}$ für alle $t \in [0,1]$ und wegen $f^{k+1}|_{\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})}$ kompakt. Nach unserer Annahme ist $\overline{F_i^k((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])}$ kompakt, und zudem gilt (vgl. (3.23; i), (3.16), (3.18) und (3.8))

$$F_i^k((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])$$

$$= F_i^k\left(\left(\left(\left(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\right) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-1} f^{-l}(U_j)\right) \cap \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=m_0}^{k} f^{-l}(U_j)\right) \times [0,1]\right)$$

$$\subset \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{k-m_0} F_i^l(U_j \times [0,1]) \subset M \times [0,1].$$

Da $F_i|_{\bar{M} \times [0,1]}$ stetig und $\overline{F_i^k((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])}$ kompakt ist, ist auch

$$\overline{F_i^{k+1}((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])} = F_i\left(\overline{F_i^k((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])}\right)$$

kompakt. Daraus folgt die Kompaktheit von

$$\overline{F_i^{k+1}(Q_i \times [0,1])} = \overline{F_i^{k+1}(Q_{i,k} \times [0,1])} \cup \overline{F_i^{k+1}((Q_i \setminus Q_{i,k}) \times [0,1])}.$$

(b) Zum Nachweis der Kompaktheit von $\overline{F_t^k(R_t \times [0,1])}$ für $k = m_0, \ldots, p$ unterteilen wir R_t in die Mengen

$$R_{i,l} := \bar{M} \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{l} f^{-l}(U_j) \setminus \bigcup_{j=0}^{l} \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\Big).$$

Natürlich ist $\bigcup_{l=0}^{m_0-2} R_{i,l} = R_i$. Es sei $l \in \{0, \ldots, m_0-2\}$. Aufgrund der Definition gilt $f_{i+t}^{l}|_{R_{i,l}} = f^{l}|_{R_{i,l}}$ für alle $t \in [0,1]$ (vgl. (3.15)), so dass mittels (3.23; i)

$$F_i^{l+2}(R_{i,l} \times [0,1]) \subset F_i^2\Big(\bigcup_{j=1}^{l} U_j \times [0,1]\Big) \subset F_i\Big(\bigcup_{j=1}^{l} V_j \times [0,1]\Big)$$

folgt. Da $F_i(V_j \times [0,1])$ endlichdimensional und beschränkt ist für $j = 1, \ldots$ $\ldots, i$ (es gilt

$$F_i(V_j \times [0,1]) \subset \Big(M \cap \bigcup_{m=0}^{p-1} L_m\Big) \times [0,1]),$$

ist $\overline{F_i^{l+2}(R_{i,l} \times [0,1])}$ kompakt. Es sei nun $k \in \{m_0, \ldots, p\}$. Wegen $F_i^{k-l-2}|_{\bar{M} \times [0,1]}$ stetig erhalten wir, dass

$$\overline{F_i^k(R_{i,l} \times [0,1])} = F_i^{k-l-2}\big(\overline{F_i^{l+2}(R_{i,l} \times [0,1])}\big)$$

kompakt ist. Dann ist auch

$$\overline{F_i^k(R_i \times [0,1])} = \bigcup_{l=0}^{m_0-2} \overline{F_i^k(R_{i,l} \times [0,1])}$$

kompakt.

(c) Beweis der Kompaktheit von $\overline{F_i^k(S_i \times [0,1])}$ für $k = m_0, \ldots, p$: Nach der Definition von S_i und (3.15) ist $f_{i+t}^{m_0}|_{S_i} = f_{i+t} \circ f^{m_0-1}|_{S_i}$ für $t \in [0,1]$. Da $F_i(U_j \times [0,1])$ für $j = p, \ldots, i$ endlichdimensional und beschränkt ist (es gilt $F_i(U_j \times [0,1]) \subset (M \cap L_{j-p}) \times [0,1]$), erhalten wir, dass

$$\overline{F_i^{m_0}\Big(\Big(\bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\Big) \times [0,1]\Big)}$$

$$\subset \overline{F_i\Big(\bigcup_{j=p}^{i} U_j \times [0,1]\Big)} = \bigcup_{j=p}^{i} \overline{F_i(U_j \times [0,1])}$$

kompakt ist (oder leer im Falle $i < p$). Andererseits gilt

$$F_i^{m_0}\Big(\Big(S_i \setminus \bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\Big) \times [0,1]\Big)$$

$$= F_i\Big(f^{m_0-1}\big(S_i\setminus \bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\big)\times[0,1]\Big)$$

$$\subset F_i\Big(f^{m_0-1}\Big(\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)\setminus \bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\Big)\times[0,1]\Big) =: I,$$

wobei im Falle $i \geqslant p$

$$I = (f_p\circ f^{m_0-1})\Big(\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)\setminus \bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\Big)\times[0,1]$$

$$\subset (f_p\circ f^{m_0-1})\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)\times[0,1]$$

$$\subset \bigcup_{t\in[0,1]}\Big(tf^{m_0}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)+(1-t)\Big(\bigcup_{j=0}^{p-1} p_j(W_j)\Big)\Big)\times[0,1]$$

und im Falle $i < p$

$$I \subset F_i\Big(f_0^{m_0-1}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)\times[0,1]\Big)$$

$$\subset \bigcup_{t\in[0,1]}\Big(tf^{m_0}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)+(1-t)\Big(\bigcup_{j=0}^{i} p_j(W_j)\Big)\Big)\times[0,1]$$

$$\subset \bigcup_{t\in[0,1]}\Big(tf^{m_0}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)+(1-t)\Big(\bigcup_{j=0}^{p-1} p_j(W_j)\Big)\Big)\times[0,1]$$

(vgl. die Definition der Abbildungen f_i $(i = 1, \ldots, p)$). Aus der Tatsache, dass

$$\overline{f^{m_0}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)}$$

und $\overline{p_j(W_j)}$ $(j = 0, \ldots, p-1)$ kompakt sind, folgt die Kompaktheit von

$$\overline{\bigcup_{t\in[0,1]}\Big(tf^{m_0}\Big(\bar{M}\setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})\Big)+(1-t)\Big(\bigcup_{j=0}^{p-1} p_j(W_j)\Big)\Big)}.$$

Damit ist auch

$$\overline{F_i^{m_0}(S_i\times[0,1])} \subset \overline{F_i^{m_0}\Big(\Big(\bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\setminus \bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\Big)\times[0,1]\Big)} \cup$$

$$\cup\, \overline{F_i^{m_0}\Big(\Big(S_i\setminus \bigcup_{j=p}^{i} f^{-(m_0-1)}(U_j)\Big)\times[0,1]\Big)}$$

kompakt. Es sei $k\in\{m_0+1, \ldots, p\}$. Wegen $\overline{F_i^{m_0}(S_i\times[0,1])} \subset \bar{M}\times[0,1]$ und der Stetigkeit von $F_i^{k-m_0}|_{\bar{M}\times[0,1]}$ erhalten wir, dass auch

$$\overline{F_i^k(S_i\times[0,1])} = F_i^{k-m_0}\left(\overline{F_i^{m_0}(S_i\times[0,1])}\right)$$

kompakt ist.

Damit ist die Kompaktheit von $\overline{F_i^k((Q_i\cup R_i\cup S_i)\times[0,1])}$ für $k = m_0,\ldots,p$ bewiesen ($i\in\{0,\ldots,2p\}$). Die Bedeutung dieser Aussage liegt darin, dass für $i\in\{0,\ldots,2p\}$

$$\text{(3.34; } i\text{)} \qquad \bar{M}\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N}) \subset Q_i\cup R_i\cup S_i \quad \text{für} \quad t\in[0,1]$$

ist, so dass man

$$\text{(3.35; } i\text{)} \qquad \overline{F_i^k\left((\bar{M}\times[0,1])\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} F_i^{-l}(\tilde{N}\times[0,1])\right)} \text{ kompakt}$$

$$\text{für} \quad k = m_0,\ldots,p$$

erhält. (3.34; i) folgt recht einfach aus (3.15) und $U_0\subset\tilde{N}$: Es sei $i\in\{0,\ldots,2p\}$ und $t\in[0,1]$. Wegen (3.15) kann man in der Definition von Q_i und S_i jeweils anstelle von

$$\bar{M}\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(\tilde{N})$$

auch

$$\bar{M}\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})$$

schreiben. Andererseits ist (man beachte im 3. Schritt wieder (3.15))

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{M}\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})\right)\cap\bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\\
&\quad = \left(\bar{M}\setminus\bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})\right)\cap\bigcup_{l=0}^{m_0-2}\left(\bigcup_{j=0}^{i} f^{-l}(U_j)\setminus\bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\right)\\
&\quad = \bar{M}\cap\bigcup_{l=0}^{m_0-2}\left(\left(\bigcup_{j=0}^{i} f^{-l}(U_j)\setminus\bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\right)\setminus\bigcup_{l'=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l'}(\tilde{N})\right)\\
&\quad \subset \bar{M}\cap\bigcup_{l=0}^{m_0-2}\left(\left(\bigcup_{j=0}^{i} f^{-l}(U_j)\setminus\bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\right)\setminus\bigcup_{l'=0}^{l} f^{-l'}(\tilde{N})\right)\\
&\quad \subset \bar{M}\cap\bigcup_{l=0}^{m_0-2}\left(\left(\bigcup_{j=0}^{i} f^{-l}(U_j)\setminus\bigcup_{j=0}^{i}\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\right)\setminus\bigcup_{l'=0}^{l} f^{-l'}(U_0)\right)\\
&\quad \subset \bar{M}\cap\bigcup_{l=0}^{m_0-2}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{i} f^{-l}(U_j)\setminus\bigcup_{j=1}^{i}\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\right)\setminus\bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_0)\right)
\end{aligned}$$

$$= \bar{M} \cap \bigcup_{l=0}^{m_0-2} \Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{i} f^{-l}(U_j) \setminus \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_0)\Big) \setminus \bigcup_{j=1}^{i} \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_j)\Big)$$

$$= \bar{M} \cap \bigcup_{l=0}^{m_0-2} \Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{i} f^{-l}(U_j) \setminus \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_0)\Big) \setminus \bigcup_{l'=0}^{l-1} \Big(\bigcup_{j=1}^{i} f^{-l'}(U_j) \setminus \bigcup_{l''=0}^{l'-1} f^{-l''}(U_0)\Big)\Big)$$

$$= \bar{M} \cap \bigcup_{l=0}^{m_0-2} \bigcup_{j=1}^{i} \Big(f^{-l}(U_j) \setminus \bigcup_{l'=0}^{l-1} f^{-l'}(U_0)\Big) = R_i.$$

Damit ist

$$\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N}) = \Big(\Big(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})\Big) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-1} f^{-l}(U_j)\Big) \cup$$

$$\cup \Big(\Big(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})\Big) \cap \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\Big) \cup$$

$$\cup \Big(\Big(\bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(\tilde{N})\Big) \cap \bigcup_{j=0}^{i} \Big(f^{-(m_0-1)}(U_j) \setminus \bigcup_{j=0}^{i} \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f^{-l}(U_j)\Big)\Big) \subset Q_i \cup R_i \cup S_i.$$

Mit (3.35) ist im Falle (a) insbesondere schon Bedingung (β) von $\tilde{f} \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ nachgewiesen. Zum Beweis der Bedingung (γ) können wir $m_0 \geqslant 2$ annehmen, und wir zeigen sogar für $i \in \{0, \dots, 2p\}$:

(3.36; i) Für alle $x \in \bar{M}$ und $t \in [0, 1]$ existiert ein $k \in \{0, \dots, n_0 - m_0\}$

$$\text{mit } f_{i+t}^{k}(x) \in \bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+t}^{-l}(N_{i+1})$$

(zur Definition von N_{i+1} vgl. Seite 61): Es sei $i \in \{0, \dots, 2p\}$. Wir nehmen an, dass für alle $x \in \bar{M}$ ein $k \in \{0, \dots, n_0 - m_0\}$ mit

$$f_i^{k}(x) \in \bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_i^{-l}(N_i)$$

existiert (für $i = 0$ folgt dies aus Punkt (γ) der Voraussetzung $f \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ und der Wahl von N_0, für $i \in \{1, \dots, 2p\}$ ist dies die Aussage von (3.36; $i-1$) mit $t = 1$). Es sei $x \in \bar{M}$ und $l_x \in \{0, \dots, n_0 - 2\}$ mit $\{x, f_i(x), \dots, f_i^{l_x - 1}(x)\} \cap U_i = \emptyset$ und (im Falle $l_x \leqslant n_0 - 3$) $f_i^{l_x}(x) \in U_i$. Dann gilt wegen (3.15; $i+1$) $f_{i+t}^{l}(x) = f_i^{l}(x)$ für $l = 0, \dots, l_x$ und $t \in [0, 1]$. Zudem folgt aus

$$f_{i+t}^{l}(x) = f_{i+t}^{l-l_x}\big(f_i^{l_x}(x)\big) \in f_{i+t}^{l-l_x}(U_i) \subset V_{i+l_x+1-l}$$

für $l = l_x + 1, \dots, n_0 - 2$ (vgl. (3.23; i)) und $U_i \cap V_{i+l_x+1-l} = \emptyset$ (vgl. (3.16), (3.18) und (3.9)), dass $f_{i+t}^{l}(x) = (f_i^{l-l_x-1} \circ f_{i+t} \circ f_i^{l_x})(x)$ ist für $l = l_x + 1, \dots$ $\dots, n_0 - 2$ und $t \in [0, 1]$.

(α) Wir betrachten nun zunächst den Fall $i \in \{0, \dots, p-1\}$: Falls

$f_i^{l_x}(x) \in U_i \setminus f_i^{-1}(W_i)$ ist, so gilt für $t \in [0, 1]$ und $l = l_x+1, \ldots, n_0-2$

$$f_{i+t}^l(x) = f_i^{l-l_x-1}\left(f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right) = f_i^{l-l_x-1}\left(f_i\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right) = f_i^l(x).$$

Ist dagegen $f_i^{l_x}(x) \in U_i \cap f_i^{-1}(W_i)$, dann gibt es nach der Definition von W_i ein $y \in f_i^p(V_i) \subset Z_i$ mit $\|f_i^{l_x+1}(x) - y\| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon_i < \varepsilon_i$, und somit ist für $t \in [0, 1]$ (vgl. (3.22: $i+1$))

$$\begin{aligned}\left\|f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right) - y\right\| &\leqslant \left\|f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right) - f_i\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right\| + \|f_i^{l_x+1}(x) - y\| \\ &= t\left\|f_{i+1}\left(f_i^{l_x}(x)\right) - f_i\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right\| + \|f_i^{l_x+1}(x) - y\| \\ &< t\varepsilon_i + \varepsilon_i \leqslant 2\varepsilon_i.\end{aligned}$$

Wegen $2\varepsilon_i \leqslant \xi_i(\frac{1}{2}\varkappa_i)$ ist demnach für $l = l_x+1, \ldots, n_0-2$ und $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}&\|f_{i+t}^l(x) - f_i^l(x)\| \\ &\leqslant \left\|f_i^{l-l_x-1}\left(f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right) - f_i^{l-l_x-1}(y)\right\| + \left\|f_i^{l-l_x-1}\left(f_i^{l_x+1}(x)\right) - f_i^{l-l_x-1}(y)\right\| \\ &< \tfrac{1}{2}\varkappa_i + \tfrac{1}{2}\varkappa_i = \varkappa_i.\end{aligned}$$

(β) Im Falle $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$ ist nach (3.19; i) und $f_i(U_i) \subset L_{i-p} := \operatorname{span}\left(f_{i+1-p}(V_{i+1-p})\right)$ (vgl. Seite 72 und 73)

$$f_i(U_i) \subset \overline{V_i} \cap \operatorname{span}\left(f_{i+1-p}(V_{i+1-p})\right) =: Z_i.$$

Entsprechend gilt für $i = 2p$

$$f_i(U_i) = f_{2p}(U_{2p}) \subset \overline{V_{2p}} \cap \operatorname{span}\left(f_1(V_1)\right) =: Z_{2p} = Z_i$$

(vgl. (3.19; $2p$) und $f_{2p}(U_{2p}) \subset f_{2p}(U_p) = f_{p+1}(U_p) \subset L_0 := \operatorname{span}\left(f_1(V_1)\right)$, letzteres nach (3.18; $2p$), Seite 74 und (3.30; $p+1$)). Da zudem nach (3.22; $i+1$) für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\left\|f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right) - f_i^{l_x+1}(x)\right\| &= t\left\|f_{i+1}\left(f_i^{l_x}(x)\right) - f_i\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right\| \\ &\leqslant t\varepsilon_i \leqslant \tfrac{1}{2}t\xi_i(\tfrac{1}{2}\varkappa_i) < \xi_i(\tfrac{1}{2}\varkappa_i)\end{aligned}$$

ist, folgt aufgrund der Definition von ξ_i für $l = l_x+1, \ldots, n_0-2$ und $t \in [0, 1]$

$$\|f_{i+t}^l(x) - f_i^l(x)\| = \left\|f_i^{l-l_x-1}\left(f_{i+t}\left(f_i^{l_x}(x)\right)\right) - f_i^{l-l_x-1}\left(f_i^{l_x+1}(x)\right)\right\| < \tfrac{1}{2}\varkappa_i < \varkappa_i.$$

Insgesamt gilt also $\|f_{i+t}^l(x) - f_i^l(x)\| < \varkappa_i$ für alle $x \in \bar{M}$, $t \in [0, 1]$ und $l = 0, \ldots, n_0-2$. Es sei $x \in \bar{M}$ und $t \in [0, 1]$. Nach unserer Induktionsannahme gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n_0-m_0\}$ mit

$$f_i^k(x) \in \bar{M} \setminus \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_i^{-l}(N_i).$$

Dann gilt auch $f_{i+t}^k(x) \in \bar{M}$, was im Falle $k \leqslant l_x$ aus $f_{i+t}^k(x) = f_i^k(x)$ und im Falle $k > l_x$ aus

$$f_{i+t}^k(x) = f_{i+t}^{k-l_x}\left(f_i^{l_x}(x)\right) \in f_{i+t}^{k-l_x}(U_i) \subset V_{i+l_x+1-k} \subset M$$

(vgl. insbesondere (3.23; i)) folgt, und zudem erhält man für $l = 0, \ldots, m_0-2$ (vgl. die Definition von $\varkappa_l$)

$$f_{i+l}^{k+l}(x) = f_i^{k+l}(x)+(f_{i+l}^{k+l}(x)-f_i^{k+l}(x)) \in (E\backslash N_l)^{\varkappa_l} \subset E\backslash N_{l+1}.$$

Somit ist

$$f_{i+l}^k(x) \in \bar{M}\backslash \bigcup_{l=0}^{m_0-2} f_{i+l}^{-l}(N_{l+1}),$$

d.h. (3.36; i) ist bewiesen.

Damit ist für den Fall (a) $\bar{f} \in H(M, N, m_0, n_0, p)$ nachgewiesen. Zudem folgt für $i \in \{0, \ldots, 2p\}$ aus (3.36; i)

$$F_i^p(\bar{M}\times[0,1]) \subset \bigcup_{k=0}^{n_0-m_0} F_i^{p-k}\big((\bar{M}\times[0,1])\backslash \bigcup_{l=0}^{m_0-2} F_i^{-l}(N\times[0,1])\big),$$

so dass wir mittels (3.35; i) auch (3.24; i) erhalten.

Im Falle (b) zeigen wir zunächst die Kompaktheit von $\overline{F_i(N\times[0,1])}$ für $i \in \{0, \ldots, 2p\}$: Wegen

$$F_i(N\times[0,1]) \subset \bigcup_{t\in[0,1]} \big((1-t)f_i(N)+tf_{i+1}(N)\big)\times[0,1]$$

genügt es, die Kompaktheit von $\overline{f_i(N)}$ für $i \in \{0, \ldots, 2p+1\}$ nachzuweisen. Im Falle, dass E Banachraum ist, wurde dies schon mit $\gamma(f_i(N)) \leqslant \gamma(f(N)) = 0$ (vgl. Seite 77) bewiesen. Im Falle eines nicht vollständigen normierten Raumes besagt aber $\gamma(f_i(N)) = 0$ noch nicht, dass $\overline{f_i(N)}$ kompakt ist. Berücksichtigt man aber, dass für $i \in \{0, \ldots, p-1\}$

$$\begin{aligned} f_{i+1}(N) &\subset \bigcup_{t\in[0,1]} \big(tf_i(N)+(1-t)p_i(W_i)\big) \\ &\subset \bigcup_{t\in[0,1]} \big(tf_i(N)+(1-t)\operatorname{co}\{0, x_{i,1}, \ldots, x_{i,r_i}\}\big) \end{aligned}$$

und für $i \in \{p, \ldots, 2p-1\}$

$$f_{i+1}(N) \subset f_i(N\backslash U_i) \cup \operatorname{co}\{0, x_{i-p,1}, \ldots, x_{i-p,r_{i-p}}\}$$

bzw. für $i = 2p$

$$f_{i+1}(N) = f_{2p+1}(N) \subset f_{2p}(N\backslash U_{2p}) \cup \operatorname{co}\{0, x_{0,1}, \ldots, x_{0,r_0}\}$$

ist, dann folgt induktiv (angefangen mit $\overline{f_0(N)} = \overline{f(N)}$ kompakt) die Kompaktheit von $\overline{f_i(N)}$ ($i \in \{0, \ldots, 2p+1\}$).

Wegen $U_0 \subset N$, $F_i(U_0\times[0,1]) \subset V_0\times[0,1] \subset M\times[0,1]$ und der Stetigkeit von $F_i^j|_{M\times[0,1]}$ für $j = 1, \ldots, p$ ist dann

$$\overline{F_i^j(U_0\times[0,1])} = F_i^{j-1}\big(\overline{F_i(U_0\times[0,1])}\big)$$

kompakt für $j = 1, \ldots, p$ ($i \in \{0, \ldots, 2p\}$), woraus wegen (3.35; i) (beachte

$\tilde{N} = U_0$) die Kompaktheit von

$$\overline{F_i^k(\bar{M}\times[0,1])} \subset \overline{F_i^k\Big((\bar{M}\times[0,1])\setminus \bigcup_{j=0}^{m_0-2} F_i^{-j}(U_0\times[0,1])\Big)} \cup$$
$$\cup \bigcup_{j=k-m_0+2}^{k} \overline{F_i^j(U_0\times[0,1])}$$

für $k = m_0, \ldots, p$ folgt. Damit ist auch im Falle (b) (3.24; i) sowie $\tilde{f} \in K(M, N, m_0, p)$ bewiesen. ■

Der folgende Satz 13 beinhaltet, was man – besonders im Hinblick auf Problem 1 – durch iteratives Anwenden von Satz 12 erreichen kann. Im Interesse einer möglichst einfachen Formulierung von Satz 13 wurde auf eine Reihe von erreichbaren Aussagen (vgl. (3.3)–(3.7)) verzichtet, da sie im folgenden nicht benötigt werden.

SATZ 13. *Es sei g_0: $D(g_0) \subset E \to E$, $M \subset E$ offen und p Primzahl mit $g_0 \in A(M, p)$ und $g_0^j|_{\bar{M}}$ kompakt für $j = m_0, \ldots, p$ mit einem $m_0 \in \{2, \ldots, p\}$. Es sei $t \in \{1, \ldots, s(g_0, p, M)-1\}$ mit*

$$t \leqslant \begin{cases} (2/m_0)(p+1)-3, & \textit{falls} \quad t \textit{ ungerade}, \\ (2/m_0)p-2, & \textit{falls} \quad t \textit{ gerade}. \end{cases}$$

Dann gibt es ein g_t: $D(g_0) \to E$ mit $g_t \in A(M, p)$, $g_t^j|_M$ kompakt für $j = m_t, \ldots, p$ mit

$$m_t := \begin{cases} ((t+3)/2)\,m_0 - 1 & \textit{für} \quad t \textit{ ungerade}, \\ ((t+2)/2)\,m_0 & \textit{für} \quad t \textit{ gerade}, \end{cases}$$

$s(g_t, p, M) \leqslant s(g_0, p, M) - t$ und $d[\mathrm{id}-g_t^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-g_0^p, M, 0]$.

Beweis. Es sei $s := s(g_0, p, M)$, und es sei $\{H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}\} \in U(g_0, p, M)$ mit $[H_{0,j}^{(k)} | j \in Z] \in Z(H_0^{(k)}, g_0)$ $(k = 1, \ldots, s)$ gemäss Hilfssatz 11 (siehe Seite 36) gewählt, d.h. es sei

(3.37) $$H_{0,j_1}^{(2k-1)} \cap H_{0,j_2}^{(2k)} = \emptyset \quad \text{für} \quad j_1, j_2 \in Z$$
mit $j_1 \not\equiv j_2 \pmod p$ und $j_1 \not\equiv (j_2+1) \pmod p$, $k \in N$ mit $2k \leqslant s$.

Für $i = 1, \ldots, t$ seien offene Mengen $N^{(i)} \subset M$ gewählt mit

(3.38) $$H_{0,-1}^{(i)} \subset N^{(i)},$$

(3.39) $$g_0^j(N^{(i)}) \subset M \quad \text{für} \quad j = 0, \ldots, p-1,$$

(3.40) $$N^{(i)} \cap \bigcup_{j=1}^{p-1} g_0^j(N^{(i)}) = \emptyset$$

und

$$(3.41)\qquad N^{(i)} \cap \begin{cases} \bigcup_{j=1}^{p-2} g_0^j(N^{(i+1)}) = \emptyset & \text{für} \quad i \text{ ungerade, } 1 \leqslant i \leqslant t-1, \\ \bigcup_{j=2}^{p-1} g_0^j(N^{(i-1)}) = \emptyset & \text{für} \quad i \text{ gerade, } 2 \leqslant i \leqslant t. \end{cases}$$

Solche $N^{(i)}$ kann man wie folgt konstruieren: Wegen $[H_{0,j}^{(i)} | \; j \in Z] \in Z(G_0^{(i)}, g_0)$ und (3.37) ist

$$H_{0,-1}^{(i)} \cap \Big(\bigcup_{j=0}^{p-2} H_{0,j}^{(i)} \cup \bigcup_{j=0}^{p-3} H_{0,j}^{(i+1)}\Big) = \emptyset, \quad \text{falls} \quad i \text{ ungerade, } 1 \leqslant i \leqslant s-1$$

bzw.

$$H_{0,-1}^{(i)} \cap \Big(\bigcup_{j=0}^{p-2} H_{0,j}^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^{p-2} H_{0,j}^{(i-1)}\Big) = \emptyset, \quad \text{falls} \quad i \text{ gerade, } 2 \leqslant i \leqslant s.$$

Es gibt deshalb offene Mengen $S_i, T_i \subset M$ ($i = 1, \dots, s$ für s gerade bzw. $i = 1, \dots, s-1$ für s ungerade) mit $S_i \cap T_i = \emptyset$, $H_{0,-1}^{(i)} \subset S_i$ und

$$\bigcup_{j=0}^{p-2} H_{0,j}^{(i)} \cup \bigcup_{j=0}^{p-3} H_{0,j}^{(i+1)} \subset T_i \quad (i \text{ ungerade})$$

bzw.

$$\bigcup_{j=0}^{p-2} H_{0,j}^{(i)} \cup \bigcup_{j=1}^{p-2} H_{0,j}^{(i-1)} \subset T_i \quad (i \text{ gerade}).$$

Wir können nun für $i = 1, \dots, t$ definieren:

$$N^{(i)} := \begin{cases} S_i \cap \bigcap_{j=1}^{p-1} g_0^{-j}(T_i) \cap \bigcap_{j=2}^{p-1} g_0^{-j}(T_{i+1}) & \text{für} \quad i \text{ ungerade,} \\ S_i \cap \bigcap_{j=1}^{p-1} g_0^{-j}(T_i) \cap \bigcup_{j=1}^{p-2} g_0^{-j}(T_{i-1}) & \text{für} \quad i \text{ gerade.} \end{cases}$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass die Mengen $N^{(i)}$ die gewünschten Eigenschaften (3.38)–(3.41) haben.

Wegen (3.38) ist

$$\bigcup_{i=1}^{t} H_{0,-1}^{(i)} \subset \bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}.$$

Da zudem die $H_{0,-1}^{(i)}$ kompakt und die $N^{(i)}$ offen sind, ist

$$\operatorname{dist}\Big(\bigcup_{i=1}^{t} H_{0,-1}^{(i)}, \partial\Big(\bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}\Big)\Big) > 0.$$

Es gibt somit ein offenes $N \subset E$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{t} H_{0,-1}^{(i)} \subset N \subset \bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)} \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}\Big(N, \partial\big(\bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}\big)\Big) > 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass $g_0 \in H(M, N, m_0, m_t, p)$ ist:

Die Forderungen (α) und (β) sind nach den Voraussetzungen von Satz 13 erfüllt, zum Nachweis der Forderung (γ) (es wird gezeigt werden, dass

$$N_0 := \bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}$$

gewählt werden kann) beachten wir zunächst: Für $x \in \bar{M}$ gilt nach (3.40) und (3.41):

(3.42) Für $i = 1, \ldots, t$ ist $g_0^j(x) \in N^{(i)}$ für höchstens ein $j \in \{0, \ldots, p-1\}$.

(3.43) Für $j \in \{0, \ldots, p-2\}$ und ungerades $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ mit $g_0^j(x) \in N^{(i)}$ ist $g_0^k(x) \notin N^{(i+1)}$ für $k = 0, \ldots, j-1, j+2, \ldots, p-1$.

Für $x \in \bar{M}$ definieren wir nun (mit $N_0 := \bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}$)

$$j_x := \max\Big\{j \in \{0, \ldots, p-1\} \,\Big|\, g_0^l(x) \notin \bar{M} \setminus \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0) \text{ für } l = 0, \ldots, j-1\Big\}.$$

Zum Nachweis von $j_x \leqslant m_t - m_0$ für alle $x \in \bar{M}$ führen wir für ein vorgegebenes $x \in \bar{M}$ die Mengen

$$R_k := \{j \in \{k, \ldots, j_x - 1\} \mid g_0^j(x) \in N_0\}$$

ein und zeigen

(3.44) $\operatorname{card} R_{nm_0} \leqslant t - 2n$ für $n = 0, 1, \ldots, t/2$, falls t gerade

$\operatorname{card} R_{nm_0 - 1} \leqslant t - 2n + 1$

für $n = 1, 2, \ldots, (t+1)/2$, falls t ungerade:

(a) Es sei t gerade. Wegen (3.42) gilt trivial $\operatorname{card} R_{0m_0} = \operatorname{card} R_0 \leqslant t$. Natürlich braucht $\operatorname{card} R_{nm_0} \leqslant t - 2n$ nur für $nm_0 < j_x$ gezeigt werden, da für $n \in \{0, \ldots, t/2\}$ mit $nm_0 \geqslant j_x$ trivialerweise $\operatorname{card} R_{nm_0} = 0 \leqslant t - 2n$ ist. Angenommen, für ein $n_0 \in \{0, \ldots, t/2 - 1\}$ mit $(n_0 + 1) m_0 < j_x$ sei $g_0^{n_0 m_0}(x) \in \bar{M}$ und

(3.45; n_0) Es gibt $s_1, \ldots, s_{n_0} \in N \cap [1, t/2]$ mit $s_{k_1} \neq s_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, so dass $g_0^j(x) \notin N^{(i)}$ für (α) $j = n_0 m_0, \ldots, p-2$ und $i \in \bigcup_{k=1}^{n_0} \{2s_k - 1, 2s_k\}$ sowie für (β) $j = n_0 m_0 - 1, \ldots, p-2$ und $i \in \bigcup_{k=1}^{n_0 - 1} \{2s_k - 1, 2s_k\} \cup \{2s_{n_0} - 1\}$.

bewiesen ((3.45; 0) ist eine leere Aussage und damit trivial erfüllt). Nach der Definition von j_x ist dann wegen $n_0 m_0 < j_x$

$$g_0^{n_0 m_0}(x) \notin \bar{M} \setminus \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0),$$

so dass wegen $g_0^{n_0 m_0}(x) \in \bar{M}$

$$g_0^{n_0 m_0}(x) \in \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0)$$

sein muss. Es gibt also ein $j_0 \in \{n_0 m_0, \ldots, (n_0+1)m_0-2\}$ mit $g_0^{j_0}(x) \in N_0$. Aufgrund von

$$N_0 = \bigcup_{i=1}^{t} N^{(i)}$$

und (3.39) folgt daraus $g_0^{(n_0+1)m_0}(x) \in \bar{M}$ (man beachte, dass $m_0 < p$ ist), und wegen (3.45; n_0) gibt es ein

$$i_0 \in \{1, \ldots, t\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n_0} \{2s_k - 1, 2s_k\}$$

mit $g_0^{j_0}(x) \in N^{(i_0)}$. Es sei $s_{n_0+1} := i_0/2$, falls i_0 gerade, bzw. $s_{n_0+1} := (i_0+1)/2$, falls i_0 ungerade. Wegen $g_0^{j_0}(x) \in N^{(i_0)}$, (3.42) und (3.43) ist dann $g_0^{j}(x) \notin N^{(i)}$ für $i = 2s_{n_0+1}-1,\ 2s_{n_0+1}$ und $j = j_0+2, \ldots, p-2$, wegen $j_0 \leqslant (n_0+1)m_0-2$ also insbesondere für $j = (n_0+1)m_0, \ldots, p-2$. Damit ist Fall ($\alpha$) von (3.45; n_0+1) bewiesen; Fall (β) (den wir hier nur im Vorgriff auf Punkt (b) behandeln) ist klar, falls i_0 ungerade ist (beachte $j_0 \leqslant (n_0+1)m_0-2$ und (3.42)), für i_0 gerade folgt er aus $j_0 \leqslant (n_0+1)m_0-2$ und (3.43). Aus Fall (α) von (3.45; n_0+1) und (3.42) folgt trivial card $R_{(n_0+1)m_0} \leqslant t-2(n_0+1)$.

(b) Im Falle t ungerade verwendet man das gleiche Beweisprinzip, jedoch ist der Beweis etwas komplizierter: Entsprechend Fall (a) brauchen wir card $R_{nm_0-1} \leqslant t-2n+1$ nur für $nm_0-1 < j_x$ zeigen, da für $n \in \{1, \ldots, (t+1)/2\}$ mit $nm_0-1 \geqslant j_x$ trivialerweise card $R_{nm_0-1} = 0 \leqslant t-2n+1$ ist. Es sei

$$n_1 := \max\,\{n \in N \cup \{0\} \mid nm_0 - 1 < j_x\}$$

und

$$n_2 := \max\,\{k \in \{0, \ldots, (t-1)/2\} \mid \text{für } n = 0, \ldots, k \text{ gilt } (3.45;\ n)\}.$$

Nach Fall (β) von (3.45; n) und (3.42) gilt dann card $R_{nm_0-1} \leqslant t-2n+1$ für $n = 1, \ldots, n_2$. Falls $n_1 \leqslant n_2$ ist, gilt auch card $R_{nm_0-1} = 0 \leqslant t-2n+1$ für $n = n_2+1, \ldots, (t+1)/2$. Im Falle $n_1 > n_2$ schliesst man wie folgt weiter: Es ist

$$(n_2-1)m_0+2 \leqslant n_3 := \begin{cases} \max\,\{j \in \{0, \ldots, n_2 m_0\} \mid g_0^{j}(x) \in N_0\} & \text{für} \quad n_2 \geqslant 1, \\ 0 & \text{für} \quad n_2 = 0, \end{cases}$$

denn anderenfalls wäre im Falle $n_2 \geqslant 1$ (der Fall $n_2 = 0$ ist trivial) wegen $g_0^{n_3+1}(x) \in g_0(N_0) \subset \bar{M}$ (vgl. (3.39)) und $g_0^j(x) \notin N_0$ für $j = n_3+1, \ldots, n_2 m_0$

$$j_x \leqslant n_3+1 \leqslant (n_2-1)m_0+2 \leqslant n_2 m_0 \leqslant n_1 m_0-2$$

im Gegensatz zu $n_1 m_0 - 1 < j_x$. Aus $n_3 \geqslant (n_2-1)m_0+2$, $m_0 \leqslant p$ und (3.39) folgt im Falle $n_2 > 0$

$$g_0^{n_2 m_0}(x) \in g_0^{n_2 m_0 - n_3}(N_0) \subset \bar{M},$$

während für $n_2 = 0$ $g_0^{n_2 m_0}(x) = x \in \bar{M}$ vorausgesetzt war. Wegen $n_2 m_0 \leqslant n_1 m_0 - 2 < j_x$ ist demnach

$$g_0^{n_2 m_0}(x) \in \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0),$$

es gibt also ein $j_0 \in \{n_2 m_0, \ldots, (n_2+1)m_0-2\}$ mit $g_0^{j_0}(x) \in N_0$. Es muss dann sogar $g_0^{j_0}(x) \in N^{(t)}$ sein, denn im Falle $n_2 \leqslant (t-3)/2$ könnte man anderenfalls wie in Teil (a) (3.45; n_2+1) beweisen im Widerspruch zur Definition von n_2, während im Falle $n_2 = (t-1)/2$ aus Fall (α) von (3.45; $(t-1)/2$) folgt, dass

$$g_0^j(x) \notin \bigcup_{i=1}^{t-1} N^{(i)}$$

für $j = n_2 m_0, \ldots, p-2$ ist, also wegen $(n_2+1)m_0-2 = \frac{1}{2}(t+1)m_0-2 \leqslant p-3$ insbesondere für $j = j_0$. Nach (3.39) folgt

$$g_0^{(n_2+1)m_0-1}(x) \in g_0^{(n_2+1)m_0-1-j_0}(N^{(t)}) \subset \bar{M},$$

und unter Berücksichtigung von (3.45; n_2) und (3.42) erhalten wir:

> Es gibt Zahlen $s_1, \ldots, s_{n_2} \in \{1, \ldots, (t-1)/2\}$ mit $s_{k_1} \neq s_{k_2}$ für $k_1 \neq k_2$, so dass $g_0^j(x) \notin N^{(i)}$ ist für $j = (n_2+1)m_0-1, \ldots, p-2$ und
> $$i \in \bigcup_{k=1}^{n_2} \{2s_k-1, 2s_k\} \cup \{t\}.$$

Damit ist wegen (3.42) automatisch card $R_{(n_2+1)m_0-1} \leqslant t-2(n_2+1)+1$. Völlig analog zu Teil (a) kann man nun induktiv für $n \in \{n_2+2, \ldots, (t+1)/2\}$ mit $nm_0 - 1 < j_x$ zeigen, dass Zahlen $s_{n-1} \in \{1, \ldots, (t-1)/2\} \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-2}\}$ existieren, so dass $g_0^j(x) \notin N^{(i)}$ ist für $j = nm_0-1, \ldots, p-2$ und

$$i \in \bigcup_{k=1}^{n-1} \{2s_k-1, 2s_k\} \cup \{t\},$$

woraus wieder card $R_{nm_0-1} \leqslant t-2n+1$ folgt.

Damit ist (3.44) bewiesen, woraus man sehr einfach $j_x \leqslant m_t - m_0$ und folglich $g_0 \in H(M, N, m_0, m_t, p)$ erhält: Wegen (3.44) gibt es ein $k_0 \in \{0, \ldots, \frac{1}{2}tm_0\} = \{0, \ldots, m_t - m_0\}$ im Falle t gerade bzw. $k_0 \in \{0, \ldots$

$\ldots, \frac{1}{2}(t+1)m_0-1\} = \{0,\ldots,m_t-m_0\}$ im Falle t ungerade mit card $R_{k_0}=0$ und – falls $k_0 \geqslant 1$ – card $R_{k_0-1} > 0$. Im Falle $k_0 = 0$ ist dann wegen $R_0 = \emptyset$ und aufgrund der Definition von j_x $g_0^j(x) \notin N_0$ für $j = 0,\ldots$ $\ldots, \min(p-2, j_x+m_0-2)$, also insbesondere für $j = 0,\ldots,m_0-2$, und somit wegen $x \in \bar{M}$ sogar

$$x \in \bar{M} \setminus \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0).$$

Folglich ist $j_x = 0 \leqslant m_t - m_0$. Im Falle $k_0 \geqslant 1$ ist wegen card $R_{k_0} <$ card R_{k_0-1} $g_0^{k_0-1}(x) \in N_0$ und somit $g_0^{k_0}(x) \in g_0(N_0) \subset \bar{M}$ (vgl. (3.39)). Wegen card R_{k_0-1} > 0 ist $j_x \geqslant k_0$. Aus card $R_{k_0} = 0$ und der Definition von j_x folgt $g_0^j(x) \notin N_0$ für $j = k_0,\ldots,\min(p-2, j_x+m_0-2)$, wegen $k_0 \leqslant j_x$ und $k_0 \leqslant m_t - m_0$ $\leqslant p - m_0 \leqslant p-2$ also insbesondere für $j = k_0,\ldots,k_0+m_0-2$. Damit ist

$$g_0^{k_0}(x) \in \bar{M} \setminus \bigcup_{k=0}^{m_0-2} g_0^{-k}(N_0),$$

also $j_x \leqslant k_0 \leqslant m_t - m_0$.

Ausgehend von g_0 werden schrittweise Abbildungen $g_i\colon D(g_0) \to E$ $(i = 1,\ldots,t)$ mit $g_i \in A(M,p)$ und $g_i \in H(M,N,m_0,m_t,p)$ sowie Mengen $\{H_i^{(i+1)},\ldots,H_i^{(s)}\} \in U(g_i,p,M)$ mit $[H_{i,k}^{(j)} \mid k \in \boldsymbol{Z}] \in Z(H_i^{(j)}, g_i)$ $(j = i+1,\ldots,s)$ konstruiert, derart dass mit

$$\delta := \frac{1}{t}\operatorname{dist}\Big(\bigcup_{j=1}^{t} H_{0,-1}^{(j)}, \partial N\Big)$$

$$H_{i,-1}^{(j)} \subset (H_{0,-1}^{(j)})^{\delta i} \subset \dot{N} \quad \text{für} \quad j = i+1,\ldots,t \tag{3.46; i}$$

und

$$d[\mathrm{id}-g_i^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-g_0^p, M, 0] \tag{3.47; i}$$

ist. Dabei wird bei jedem Schritt Satz 12 wie folgt angewendet: Im Falle, dass schon $i-1$ Schritte durchgeführt sind $(i \in \{1,\ldots,t\})$, wählt man $f := g_{i-1}$, $n_0 := m_t$, δ wie oben, $\varepsilon > 0$ beliebig und ersetzt s durch $s_i := s-i+1$. Definiert man noch $G_0^{(j)} := H_{i-1}^{(j+i-1)}$ und $G_{0,k}^{(j)} := H_{i-1,k}^{(j+i-1)}$ $(k \in \boldsymbol{Z},\ j = 1,\ldots,s_i)$, so sind mit $j_0 = 1$ alle Voraussetzungen von Satz 12 (Fall (a)) erfüllt. Nach Satz 12 gibt es ein $\tilde{f}\colon D(f) \to E$ aus $A(M,p)$ mit $\tilde{f} \in H(M,N,m_0,n_0,p)$ und $\{\tilde{G}^{(1)},\ldots,\tilde{G}^{(s_i)}\} \in U(\tilde{f},p,M)$ mit $[\tilde{G}_k^{(j)} \mid k \in \boldsymbol{Z}]$ $\in Z(\tilde{G}^{(j)}, \tilde{f})$ für $j = 1,\ldots,s_i$, so dass insbesondere $\tilde{G}^{(1)} = \tilde{G}^{(j_0)}$ endlich ist, $d[\mathrm{id}-\tilde{f}^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-f^p, M, 0]$ gilt und $\tilde{G}_l^{(j)} \subset (G_{0,l}^{(j)})^{\delta}$ ist für $j = 1,\ldots,s_i$ und $l \in \boldsymbol{Z}$. Setzt man $g_i := \tilde{f}$, so folgen trivial $g_i \in A(M,p)$, $g_i \in$ $H(M,N,m_0,m_t,p)$ und wegen (3.47; $i-1$) auch (3.47; i). Zudem sieht man trivial, dass man $H_i^{(j)} := \tilde{G}^{(j-i+1)}$ mit $H_{i,k}^{(j)} := \tilde{G}_k^{(j-i+1)}$ für $k \in \boldsymbol{Z}$, $j = i+$ $+1,\ldots,s-1$ und $H_i^{(s)} := \tilde{G}^{(1)} \cup \tilde{G}^{(s_i)} = \tilde{G}^{(1)} \cup \tilde{G}^{(s-i+1)}$ mit $H_{i,k}^{(s)} := \tilde{G}_k^{(s-i+1)} \cup$

$\cup(\tilde{G}_k^{(1)} \setminus \tilde{G}^{(s-i+1)})$ für $k \in \boldsymbol{Z}$ wählen kann ((3.46; i) folgt aus $H_{i,-1}^{(j)} = \tilde{G}_{-1}^{(j-i+1)} \subset (G_{0,-1}^{(j-i+1)})^\delta = (H_{i-1,-1}^{(j)})^\delta$ für $j = i+1, \ldots, t$ (beachte $t \leqslant s-1$) und (im Falle $i \geqslant 2$) aus (3.46; $i-1$)).

Das nach diesem Verfahren konstruierte $g_t\colon D(g_0) \to E$ hat dann trivialerweise die im Satz 13 behaupteten Eigenschaften – insbesondere folgt die Kompaktheit von $g_t^j|_{\bar{M}}$ für $j = m_t, \ldots, p$ aus $g_t \in H(M, N, m_0, m_t, p)$, $g_t \in A(M, p)$ und Hilfssatz 14. ■

Nun können wir uns wieder explizit der Untersuchung von Problem 1 zuwenden. Zunächst können wir aus Satz 13 eine Abschätzung nach unten für die Zahlen $s(f, p, H)$ ableiten (man beachte, dass Satz 14 eine wesentliche Verschärfung von Theorem 2 in [66] ist):

SATZ 14. *Es sei $H \subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, und es sei $f\colon H \to H$ stetig mit f^{m_0} kompakt für ein $m_0 \in N$, $m_0 \geqslant 2$. Dann folgt aus $\mathscr{F}[f] = \emptyset$, dass für alle Primzahlen $p > m_0$ gilt*

$$p \leqslant n_p := \begin{cases} \big((s(f, p, H)+2)/2\big) m_0 - 1, & \text{falls } s(f, p, H) \text{ gerade}, \\ \big((s(f, p, H)+1)/2\big) m_0, & \text{falls } s(f, p, H) \text{ ungerade}, \end{cases}$$

$s(f, p, H)$ wächst also mindestens linear mit p.

Beweis. Schon weiter oben wurde bemerkt, dass es keine Einschränkung der Allgemeinheit ist, wenn man bei Problem 1 zusätzlich $f(H) \subset \mathring{H}$ voraussetzt, da man anderenfalls H durch E und f durch $f_1 := f \circ r$, wobei $r\colon E \to H$ eine Retraktion ist, ersetzen könnte. Die entsprechende Aussage gilt auch im Falle von Satz 14, wobei wir hier noch beachten müssen, dass wegen $f_1|_H = f$ und $\mathscr{F}[f_1^p] = \mathscr{F}[f^p] \subset H$ auch $s(f_1, p, E) = s(f, p, H)$ für alle Primzahlen p ist.

Es sei also $f(H) \subset \mathring{H}$, und wir nehmen an, dass für eine Primzahl $p > m_0$ $n_p < p$ ist. Nach Satz 13, angewendet auf $M := \mathring{H}$, $g_0 := f$ und $t := s(f, p, H) - 1$ (dann ist $m_t = n_p$) gibt es ein $\tilde{f}\colon H \to E$ ($\tilde{f}$ entspricht dem g_t) mit $\tilde{f} \in A(\mathring{H}, p)$, $\tilde{f}^j$ kompakt für $j = n_p, \ldots, p$, also insbesondere für $j = p-1$ und $j = p, s(\tilde{f}, p, \mathring{H}) \leqslant 1$ und $d[\mathrm{id} - \tilde{f}^p, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id} - f^p, \mathring{H}, 0] = 1$ (vgl. Hilfssatz 13). Nach Hilfssatz 7, angewendet auf $h := \tilde{f}|_{\mathring{H}}$, $m := p$ und

$$M := \bigcap_{j=0}^{p-1} \tilde{f}^{-j}(\mathring{H}),$$

und der Additivität des Abbildungsgrades (man beachte $\mathscr{F}[\tilde{f}^p|_{\mathring{H}}] \subset M$) müsste aber

$$d[\mathrm{id} - \tilde{f}^p, \mathring{H}, 0] = d[\mathrm{id} - \tilde{f}^p, M, 0] = d[\mathrm{id} - h^p, M, 0] \equiv 0 \pmod{p}$$

sein, d.h. unsere Annahme $n_p < p$ kann nicht zutreffen. ■

Umgekehrt kann man aus Satz 10 und auch aus Satz 11 herleiten, dass die $s(f, p, H)$ höchstens linear mit p anwachsen:

Satz 15. *Es sei $H \subset E$ abgeschlossen und $f\colon H \to H$ stetig mit f^{m_0} kompakt für ein $m_0 \in N$. Dann folgt aus $\mathscr{F}[f] = \emptyset$, dass ein $C \in R$ existiert mit $s(f, p, H) \leqslant Cp$ für alle Primzahlen p, $s(f, p, H)$ wächst also höchstens linear mit p.*

Bemerkung. Im folgenden wird sogar eine noch allgemeinere Aussage bewiesen werden. Es wird nämlich nicht von der Kompaktheit von f^{m_0} Gebrauch gemacht werden, sondern nur von der Tatsache, dass es eine kompakte Menge $K \subset H$ mit $\mathscr{F}[f^p] \subset K$ für alle Primzahlen p gibt. Es würde also genügen, anstelle von f^{m_0} kompakt etwa nur die Kompaktheit von $\overline{\bigcap_{j \in N} f^j(H)}$ zu fordern.

Beweis von Satz 15. O.B.d.A. können wir $H \neq \emptyset$ annehmen. $K := \overline{f^{m_0}(H)}$ ist kompakt, da f^{m_0} kompakt ist. Zudem folgt aus $f(H) \subset H$ und H abgeschlossen, dass $\emptyset \neq K \subset H$ ist. Da f stetig und $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ ist, ist demnach

$$\varepsilon := \tfrac{1}{3} \min_{x \in K} \|x - f(x)\| > 0.$$

Es gibt dann ein endliches ε-Netz $\{x_1, \dots, x_r\}$ von K, d.h. $\{x_1, \dots, x_r\} \subset K \subset \bigcup_{i=1}^{r} K(x_i, \varepsilon)$.

Für alle $m \in N$ gilt $\mathscr{F}[f^m] \subset K$, denn es ist (vgl. Hilfssatz 3)

$$\mathscr{F}[f^m] = f(\mathscr{F}[f^m]) = \dots = f^{m_0}(\mathscr{F}[f^m]) \subset f^{m_0}(H) \subset K.$$

Der Beweis kann nun auf zwei verschiedene Weisen zu Ende geführt werden:

(a) Für Primzahlen p sei $M_{i,p} := \mathscr{F}[f^p] \cap \overline{K(x_i, \varepsilon)}$ $(i = 1, \dots, r)$. Dann ist

$$\|y - f(y)\| \geqslant \min_{x \in K} \|x - f(x)\| = 3\varepsilon$$

für alle $y \in M_{i,p}$ $(\subset \mathscr{F}[f^p] \subset K)$, so dass wegen diam $M_{i,p} \leqslant 2\varepsilon$ $M_{i,p} \cap f(M_{i,p}) = \emptyset$ folgt. Da zudem

$$\bigcup_{i=1}^{r} M_{i,p} = \mathscr{F}[f^p] \cap \bigcap_{i=1}^{r} \overline{K(x_i, \varepsilon)} \supset \mathscr{F}[f^p] \cap K = \mathscr{F}[f^p]$$

ist, folgt nach Satz 8 für $p = 2$

$$s(f, 2, H) = s(f, 2, \mathscr{F}[f^2]) \leqslant r - 1$$

bzw. nach Satz 10 für Primzahlen $p \geqslant 3$

$$s(f, p, H) = s(f, p, \mathscr{F}[f^p]) \leqslant (r-2)(p-1)/2.$$

Damit ist $s(f, p, H) \leqslant \frac{1}{2}(r-1)p$ für alle Primzahlen p.

(b) Es sei $P\colon K \to \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_r\}$ definiert durch

$$P(y) := \Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)\, x_i,$$

wobei

$$\mu_i(y) := \max(0, \varepsilon - \|y - x_i\|) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, r,\ y \in K.$$

P ist stetig, und es ist für alle $y \in K$

$$\begin{aligned}\|P(y) - y\| &= \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)(x_i - y)\Big\| \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)\Big)^{-1} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(y)\, \|x_i - y\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

und zwar letzteres deshalb, weil $\mu_i(y) = 0$ ist, falls $\|x_i - y\| \geqslant \varepsilon$ ist. Demnach folgt für $y \in K$ (man beachte, dass $f(K) \subset K$ ist)

$$\begin{aligned}\|P(y) - P(f(y))\| &\geqslant \|y - f(y)\| - \|P(y) - y\| - \|P(f(y)) - f(y)\| \\ &> \min_{x \in K} \|x - f(x)\| - 2\varepsilon = \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

d.h. es ist $P(y) \neq P(f(y))$ für alle $y \in K$.

Für jede Primzahl p bildet P die Menge $\mathscr{F}[f^p]$ $(\subset K)$ stetig nach $\operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_r\}$ ab, also in einen maximal r-dimensionalen linearen Unterraum von E, und es ist $P(y) \neq P(f(y))$ für alle $y \in \mathscr{F}[f^p]$. Nach Satz 11 muss demnach

$$s(f, p, H) = s(f, p, \mathscr{F}[f^p]) \leqslant r(p-1) < rp$$

sein. ∎

Die Sätze 14 und 15 ergeben also insgesamt, dass unter den Voraussetzungen von Problem 1 aus $\mathscr{F}[f] = \emptyset$ die Abschätzung $c_1 p \leqslant s(f, p, H) \leqslant c_2 p$ für alle Primzahlen $p \geqslant m_0$ mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$ folgt, wobei man über c_1 gut Bescheid weiss (man kann $c_1 \approx 2/m_0$ wählen), jedoch c_2 nur nichtkonstruktiv über einen Kompaktheitsschluss erhält. Insgesamt erscheint es ziemlich aussichtslos, eine wesentliche Verbesserung der unteren Abschätzung zu erhoffen, wie aber schon im Zusammenhang mit den Sätzen 10 und 11 erwähnt wurde, könnte eine Chance auf Verbesserung der oberen Abschätzung bestehen. Insbesondere wäre Problem 1 gelöst, wenn man eine positive Antwort auf folgende Frage hätte:

PROBLEM 2. *Gilt unter den Voraussetzungen von Satz 15 für Primzahlen p sogar $s(f, p, H) = o(p)$?*

IV. Eine Anwendung der Approximationssätze in der asymptotischen Fixpunkttheorie

Es sollen im folgenden eine Verallgemeinerung von Satz 1 (vgl. Seite 22) und als Anwendung davon eine neue partielle Lösung von Problem 1 bewiesen werden.

Satz 1 wird in zweierlei Hinsicht verallgemeinert: Zum einen werden normierte Räume anstelle von nur Banachräumen zugelassen (diese Verallgemeinerung ist nicht tiefliegend, aber recht wichtig im Hinblick auf die Fixpunkttheorie in metrischen, nicht notwendig kompakten absoluten Umgebungsretrakten, vgl. auch Peitgen [53]), zum anderen wird die Kompaktheitsvoraussetzung für die Abbildung reduziert:

SATZ 16. *Es sei* $g\colon D(g) \subset E \to E$ *eine Abbildung, derart dass für ein* $k_0 \in N$, *eine Primzahl* $p > k_0$ *und offene Mengen* M, N *mit* $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \subset N \subset M \subset \bar{M} \subset D(g^p)$ *die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:*

(4.1) $g|_{\bar{M}}$ *ist stetig,*

(4.2) $g(\mathscr{F}[g^p|_{\bar{M}}]) \subset M$,

(4.3) $g^j|_{\bar{M}}$ *ist kompakt für* $j = k_0, \ldots, p$,

(4.4) $g|_{\bar{N}}$ *ist kompakt,*

(4.5) $$s := s\Big(g, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(\bar{M}\backslash N)\Big) \leqslant \begin{cases} 2p/k_0 - 2, & \textit{falls } s \textit{ gerade}, \\ (2p-2)/k_0 - 1, & \textit{falls } s \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann ist $d[\mathrm{id} - g^p, M, 0] \equiv d[\mathrm{id} - g, N, 0] \pmod{p}$.

Es ist vielleicht auf den ersten Blick nicht offensichtlich, wie man Satz 1 aus Satz 16 folgern kann. Allerdings ist trivialerweise Theorem 2 in [67] ein Spezialfall von Satz 16 (setze $g := f$ und $M := N := M_0$, $k_0 < p$ kann beliebig gewählt werden), und in [67] wurde geziegt, dass Satz 1 (identisch mit Theorem 1 in [67]) sehr einfach aus diesem Theorem 2 folgt.

Satz 16 könnte entsprechend Satz 1 auch für Primzahlpotenzen p^l anstelle von p bewiesen werden, allerdings wäre die Formulierung eines solchen Satzes recht kompliziert und der Wert dieser Verallgemeinerung zu gering, als dass dieser Aufwand gerechtfertigt wäre.

Die einzige wirklich lästige Voraussetzung in Satz 16 ist (4.5) (in gewissem Wechselspiel mit (4.3) und (4.4)). Es ist im Augenblick nicht bekannt, ob (4.5) wesentlich oder nur durch die Beweismethode (Rückführung auf Satz 13) bedingt ist.

Beweis von Satz 16. Im Falle $k_0 = 1$ sind trivialerweise die Voraussetzungen von Satz 16 auch erfüllt, wenn N durch M ersetzt wird. Wir können uns demnach darauf beschränken, im Falle $k_0 = 1$ Satz 16 nur für $N = M$ und somit $s = 0$ (vgl. (4.2)) zu beweisen. Zudem können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass anstelle von (4.1) sogar

$$(4.1)' \qquad g^j|_{\bar{M}} \text{ stetig} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, p$$

ist. Denn anderenfalls könnte man M durch

$$M_0 := \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(M)$$

und N durch $N_0 := N \cap M_0$ ersetzen. Wir könnten dann zunächst Satz 16 mit M_0 anstelle vom M und N_0 anstelle von N beweisen und erhielten anschliessend aufgrund der Additivität des Abbildungsgrades und wegen

$$s\left(g, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(\bar{M}_0 \backslash N_0)\right) = s\left(g, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(\bar{M} \backslash N)\right) = s$$

(man beachte, dass wegen (4.2) und Hilfssatz 3 $\mathscr{F}[g^p|_{\bar{M}}] \subset M_0$ ist) Satz 16 in der allgemeinen Form.

I. Die Untersuchungen dieses ersten Beweisabschnitts sind nur für den Fall $\mathscr{F}[g|_M] \neq \emptyset$ von Bedeutung. Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen empfiehlt es sich auch, für diesen Abschnitt $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \neq \emptyset$ vorauszusetzen.

Aufgrund von (4.1), $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \subset N \subset M$ und der Kompaktheit von $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}]$ gibt es eine offene Menge U mit

$$(4.6) \qquad \mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \subset U \subset \bar{U} \subset N \cap \bigcap_{j=0}^{p-2} g^{-j}(M)$$

und

$$(4.7) \qquad \varepsilon_1 := \tfrac{1}{2} \operatorname{dist}\left(U, \partial\left(N \cap \bigcap_{j=0}^{p-2} g^{-j}(M)\right)\right) > 0.$$

Es sei $V := U \cap g^{-1}(U)$ und W eine beschränkte, offene Menge mit $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \subset W \subset \bar{W} \subset V$. Wir definieren

$$(4.8) \qquad \varepsilon_2 := \tfrac{1}{2} \inf_{x \in V \backslash W} \|x - g(x)\|$$

und

$$(4.9) \qquad \varepsilon_3 := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Wegen $x \neq g(x)$ für alle $x \in \bar{V} \backslash W$ und der Kompaktheit von $g|_{\bar{V}}$ (beachte (4.4) und $V \subset U \subset N$) ist $\varepsilon_2 > 0$ und damit $\varepsilon_3 > 0$.

Da $\overline{g(V)}$ kompakt ist, gibt es ein endliches $\varepsilon_3/4$-Netz $\{x_1, \ldots, x_r\}$ von $g(V)$. Es sei E' ein endlichdimensionaler linearer Teilraum von E mit

$\{x_1, \ldots, x_r\} \subset E'$. Der Schaudersche Projektionsoperator $P: g(V) \to E'$, definiert durch

$$P(z) := \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j(z)\right)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \mu_j(z) x_j$$

mit

$$\mu_j(z) := \max(0, \varepsilon_3/4 - \|z - x_j\|) \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, r,$$

ist stetig, und es gilt $\|P(g(x)) - g(x)\| \leqslant \varepsilon_3/4$ für alle $x \in V$ (vgl. Beweis von Satz 15).

Es sei $\tau: E \to [0, 1]$ stetig mit

$$\tau(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \bar{W}, \\ 0 & \text{für} \quad x \in E \setminus V. \end{cases}$$

Dann definieren wir $g_1: D(g) \to E$ vermöge

$$g_1(x) := \begin{cases} \tau(x) P(g(x)) + (1 - \tau(x)) g(x) & \text{für} \quad x \in V, \\ g(x) & \text{für} \quad x \in D(g) \setminus V. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt

(4.10) $$\|g_1(x) - g(x)\| \leqslant \varepsilon_3/4 \quad \text{für alle } x \in D(g).$$

Nach dem Glättungssatz (vgl. Seite 12) gibt es eine stetig differenzierbare Abbildung $h: E' \to E'$ mit

(4.11) $$\|h(x) - g_1(x)\| \leqslant \varepsilon_3/4 \quad \text{für alle } x \in \bar{W} \cap E'.$$

Mit dem Sardschen Lemma folgt dann die Existenz eines $y_0 \in E'$ mit

(4.12) $$\|y_0\| \leqslant \varepsilon_3/4$$

und $J[\mathrm{id}_{E'} - h, x] \neq 0$ für alle $x \in E'$ mit $x - h(x) = y_0$ (hierbei sei $J[\ldots]$ die Funktionaldeterminante relativ zum Unterraum E'). Es sei $h_1 := h + y_0$. Dann ist $J[\mathrm{id}_{E'} - h_1, x] = J[\mathrm{id}_{E'} - h, x] \neq 0$ für alle $x \in E'$ mit $x = h(x) + y_0 = h_1(x)$, und folglich besteht $\mathscr{F}[h_1]$ aus isolierten Punkten. Da $\bar{W} \cap E'$ kompakt ist, liegen in W nur endlich viele Fixpunkte $y_1, \ldots, y_n$ von h_1.

Wir wollen eine Abbildung $h_2: E' \to E'$ aus $C^1(E')$ konstruieren, derart dass gilt:

(4.13) $$\mathscr{F}[h_2] = \mathscr{F}[h_1],$$

(4.14) Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und alle Eigenwerte μ von $h_2'(y_j)$ ist $|\mu| \neq 1$,

(4.15) $$\|h_2(x) - h_1(x)\| \leqslant \varepsilon_3/4 \text{ für alle } x \in \bar{W} \cap E'.$$

Im Falle $\mathscr{F}[h_1|_W] = \emptyset$ können wir natürlich $h_2 := h_1$ wählen. Anderenfalls wird h_2 wie folgt definiert:

Wir setzen (vgl. auch Hilfssatz 4 in [64] sowie [67], Seite 32)

$$h_2(x) := h_1(x) + \sum_{j=1}^{n} \varrho\lambda(x-y_j)(h_1(y_j)-h_1(x)),$$

wobei die Zahl $\varrho > 0$ und die Funktion $\lambda\colon E' \to [0,1]$ wie folgt gewählt werden: Es sei $\lambda \in C^1(E')$, und es gebe eine Umgebung T von 0 mit $\lambda(x) = 1$ für $x \in T$ und eine Zahl $\varkappa > 0$ mit $\lambda(x) = 0$ für $\|x\| > \varkappa$ sowie $\varkappa \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z_1, z_2)$ für alle $z_1 \in \mathscr{F}[h_1|_W]$ und $z_2 \in \mathscr{F}[h_1] \setminus \{z_1\}$. Weiter sei

$$\sigma := \tfrac{1}{2} \min_{j=1,\dots,n} \inf_{\substack{x \in E' \\ 0 < \|x-y_j\| < \varkappa}} \frac{\|x-h_1(x)\|}{\|x-y_j\|}.$$

$\sigma = 0$ würde bedeuten, dass es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und eine Folge $\{x_k\}_1^\infty \subset E'$ gibt mit $x_k \to y_j$ $(k \to \infty)$ und

$$\frac{\|(x_k - h_1(x_k)) - (y_j - h_1(y_j))\|}{\|x_k - y_j\|} = \frac{\|x_k - h_1(x_k)\|}{\|x_k - y_j\|} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Da dies ein Widerspruch zu $J[\mathrm{id}_{E'} - h_1, y_j] \neq 0$ wäre, gilt $\sigma > 0$. Wegen $h_1 \in C^1(E')$ und der Kompaktheit von $\overline{W^\varkappa} \cap E'$ ist h_1 auf $\overline{W^\varkappa} \cap E'$ gleichmässig Lipschitz-stetig, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit

$$\|h_1(z_1) - h_1(z_2)\| \leqslant C\|z_1 - z_2\| \qquad \text{für alle } z_1, z_2 \in \overline{W^\varkappa} \cap E'.$$

Es seien $\mu_{i,j}$ die Eigenwerte von $h_1'(y_j)$ $(i = 1, \dots, m$ $(m =$ Dimension von $E')$, $j = 1, \dots, n)$. Wir wählen ϱ so, dass

$$0 < \varrho \leqslant \min(1, \varepsilon_3/4C\varkappa, \sigma/C)$$

und

$$(1-\varrho)|\mu_{i,j}| \neq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n.$$

Mit dieser Wahl von ϱ und λ hat h_2 die gewünschten Eigenschaften:

(a) $h_1 \in C^1(E')$ und $\lambda \in C^1(E')$ ergeben zusammen $h_2 \in C^1(E')$.

(b) Offensichtlich gilt

$$h_2(x) = \begin{cases} h_1(x) + \varrho\lambda(x-y_j)(h_1(y_j) - h_1(x)) & \\ \qquad\qquad \text{im Falle} \quad \|x-y_j\| \leqslant \varkappa, & \\ h_1(x) \quad \text{im Falle} \quad \|x-y_j\| \geqslant \varkappa \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}. & \end{cases} \tag{4.16}$$

Wegen $|\varrho\lambda(x-y_j)| \leqslant \varepsilon_3/4C\varkappa$ für alle $x \in E'$, $j = 1, \dots, n$, erhält man für $x \in \overline{W} \cap E'$ im Falle, dass ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|x-y_j\| \leqslant \varkappa$ existiert:

$$\|h_2(x) - h_1(x)\| = |\varrho\lambda(x-y_j)|\,\|h_1(y_j) - h_1(x)\| \leqslant (\varepsilon_3/4C\varkappa)\, C\,\|y_j - x\| \leqslant \varepsilon_3/4.$$

Da im Falle $\|x-y_j\| > \varkappa$ für $j = 1, \ldots, n$ sogar $h_2(x) = h_1(x)$ gilt, ist (4.15) bewiesen.

(c) Aufgrund von (4.16) und der Wahl von $\varkappa$ ist $h_2(x) = h_1(x)$ für alle $x \in \mathscr{F}[h_1]$, und folglich gilt $\mathscr{F}[h_1] \subset \mathscr{F}[h_2]$. Zum Nachweis von (4.13) bleibt $\mathscr{F}[h_2] \subset \mathscr{F}[h_1]$ zu zeigen: Falls $\|x-y_j\| \geqslant \varkappa$ ist für $j = 1, \ldots, n$, gilt $h_2(x) = h_1(x)$, und somit folgt aus $x \in \mathscr{F}[h_2]$ auch $x \in \mathscr{F}[h_1]$. Es bleibt zu zeigen, dass aus $0 < \|x-y_j\| < \varkappa$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ $x \notin \mathscr{F}[h_2]$ folgt: Es sei $x \in E'$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $0 < \|x-y_j\| < \varkappa$. Wegen $y_j \in \mathscr{F}[h_1|_{W \cap E'}] \subset W$ ist $x \in \overline{W^\varkappa} \cap E'$, und folglich gilt (vgl. (4.16))

$$\|h_2(x)-h_1(x)\| = |\varrho\lambda(x-y_j)| \, \|h_1(y_j)-h_1(x)\| \leqslant (\sigma/C)\, C \, \|y_j-x\| = \sigma \|y_j-x\|,$$

also

$$\|x-h_2(x)\| \geqslant \|x-h_1(x)\| - \|h_2(x)-h_1(x)\| \geqslant (2\sigma-\sigma)\|y_j-x\| > 0.$$

(d) Es sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $\lambda(x-y_j) = 1$ für $x \in T+y_j$ (wobei T Nullumgebung) ist $h_2(x) = \varrho h_1(y_j)+(1-\varrho)h_1(x)$ in der Umgebung $T+y_j$ von y_j, und folglich gilt $h_2'(y_j) = (1-\varrho)h_1'(y_j)$. Damit sind die Zahlen $\nu_{i,j} := (1-\varrho)\mu_{i,j}$ $(i = 1, \ldots, n)$ die Eigenwerte von $h_2'(y_j)$, woraus nach der Wahl von ϱ sofort $|\nu_{i,j}| = (1-\varrho)|\mu_{i,j}| \neq 1$ folgt, d.h. h_2 erfüllt (4.14).

Wegen (4.11), (4.12) und (4.15) ist für alle $x \in \bar{W} \cap E'$

$$\begin{aligned}\|h_2(x)-g_1(x)\| &\leqslant \|h_2(x)-h_1(x)\| + \|h_1(x)-h(x)\| + \|h(x)-g_1(x)\| \\ &= \|h_2(x)-h_1(x)\| + \|y_0\| + \|h(x)-g_1(x)\| \leqslant \tfrac{3}{4}\varepsilon_3.\end{aligned}$$

Nach dem Tietzeschen Ergänzungssatz existiert eine stetige Fortsetzung $u\colon E \to E'$ der Abbildung $v\colon (\bar{W} \cap E') \cup (E \setminus V) \to E'$, definiert durch

$$v(x) := \begin{cases} h_2(x)-g_1(x) & \text{für} \quad x \in \bar{W} \cap E', \\ 0 & \text{für} \quad x \in E \setminus V, \end{cases}$$

derart dass $R(u) \subset \operatorname{co}(R(v))$, insbesondere $u(x) \in E'$ und $\|u(x)\| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon_3$ für alle $x \in E$ ist. Wir definieren $g_2 := g_1 + u$ und $G\colon D(g) \times [0,1] \to E \times [0,1]$,

$$G(x,t) := (g_{2,t}(x), t) := (tg_2(x)+(1-t)g(x), t).$$

Wegen (4.1) und der Stetigkeit von P und τ ist $g_1|_{\bar{M}}$ stetig. Aufgrund der Stetigkeit von u ist dann auch $g_2|_{\bar{M}}$ stetig und folglich

$$\text{(4.17)} \qquad G|_{\bar{M} \times [0,1]} \text{ stetig}.$$

Zudem folgt aus (4.10) und $\|u(x)\| \leqslant \frac{3}{4}\varepsilon_3$ für alle $x \in E$, dass für $x \in D(g)$

$$\begin{aligned}\|g_2(x)-g(x)\| &\leqslant \|g_2(x)-g_1(x)\| + \|g_1(x)-g(x)\| \\ &= \|u(x)\| + \|g_1(x)-g(x)\| \leqslant \tfrac{3}{4}\varepsilon_3 + \tfrac{1}{4}\varepsilon_3 = \varepsilon_3\end{aligned}$$

ist und folglich für $(x,t) \in D(g) \times [0,1]$

$$\|g_{2,t}(x)-g(x)\| = t\,\|g_2(x)-g(x)\| \leqslant t\varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_3$$

gilt. Wegen (4.6), (4.7), (4.9) und $V \subset g^{-1}(U)$ ergibt dies

$$G(\bar{V} \times [0,1]) \subset \Big(N \cap \bigcap_{j=0}^{p-2} g^{-j}(M)\Big) \times [0,1], \tag{4.18}$$

und mittels (4.8) und (4.9) erhalten wir für alle $x \in V \backslash W$

$$\|x-g_2(x)\| \geqslant \|x-g(x)\| - \|g(x)-g_2(x)\| \geqslant 2\varepsilon_2-\varepsilon_3 \geqslant 2\varepsilon_2-\varepsilon_2 = \varepsilon_2 > 0,$$

so dass wir wegen $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] \subset W$ und $g_2|_{\bar{M}\backslash V} = g|_{\bar{M}\backslash V}$

$$\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}] \subset W \tag{4.19}$$

erhalten.

Als nächstes werden die Beziehungen

$$\bar{M} \times [0,1] \subset D(G^p), \tag{4.20}$$

$$G^j|_{\bar{M}\times[0,1]} \text{ stetig} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, p \tag{4.21}$$

und

$$\mathscr{F}[G^p] \cap (\partial M \times [0,1]) = \emptyset \tag{4.22}$$

bewiesen. Es sei

$$K := \bigcup_{j=0}^{p-1} g^{-j}(V).$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(a) Im Falle $(x,t) \in (\bar{M}\backslash K) \times [0,1]$ ist $G^j(x,t) = \big(g^j(x), t\big)$ für $j = 1, \dots, p$ (und insbesondere $(\bar{M}\backslash K) \times [0,1] \subset D(G^p)$), so dass wir wegen (4.1)′ und $\mathscr{F}[g^p|_{\bar{M}}] \subset M$ (vgl. (4.2) und Hilfssatz 3) folgern können, dass $G^j|_{(\bar{M}\backslash K)\times[0,1]}$ stetig ist für $j = 1, \dots, p$ und dass $\mathscr{F}[G^p] \cap \big((\partial M\backslash K) \times [0,1]\big) = \emptyset$ ist.

(b) Es sei $(x,t) \in (\bar{M} \cap \bar{K}) \times [0,1]$ und

$$S_{x,t} := \{j \in \{0, \dots, p-1\} \mid (x,t) \in D(G^j),\ G^j(x,t) \in \bar{V} \times [0,1]\}.$$

Trivialerweise ist $S_{x,t} \neq \emptyset$. Mit $k := k_{x,t} := \min S_{x,t}$ erhält man $G^j(x,t) \in \big(D(g)\backslash\bar{V}\big) \times [0,1]$ für $j = 0, \dots, k-1$. Es existiert also eine Umgebung T von x in $\bar{M}$ mit $T \times [0,1] \subset D(G^k)$ und $G^j(x',t') = \big(g^j(x'), t'\big)$ für alle $(x',t') \in T \times [0,1]$ und $j = 1, \dots, k$. Folglich ist $(x,t) \in D(G^k)$, und wegen (4.1)′ gilt

$$G^j|_{(\bar{M}\cap\bar{K})\times[0,1]} \text{ ist stetig im Punkte } (x,t) \text{ für } j = 1, \dots, k. \tag{4.23}$$

Weiterhin gilt

$$G^j(x,t) \in M \times [0,1] \quad \text{für} \quad j = k, \dots, \min(p, p+k-1) \tag{4.24}$$

(und insbesondere $(x,t) \in D(G^p)$), denn:

Es ist $G^k(x,t) \in \bar{V} \times [0,1] \subset M \times [0,1]$. Es sei $l \in \{k, \dots, \min(p, p+k-1)-1\}$ so gewählt, dass $(x,t) \in D(G^l)$ und $G^j(x,t) \in M \times [0,1]$ für $j = k, \dots, l$.

Daraus folgt unmittelbar $(x,t)\in D(G^{l+1})$. Es sei $l_0:=\max\{j\in S_{x,t}\mid j\leqslant l\}$. Dann ist (vgl. (4.18))

$$(z,t):=G^{l_0+1}(x,t)\in\bigcap_{j=0}^{p-2}g^{-j}(M)\times[0,1],$$

und demnach gilt wegen $l-l_0\leqslant l-k\leqslant p-2$

$$G^{l+1}(x,t)=G^{l-l_0}(z,t)=\big(g^{l-l_0}(z),t\big)\in M\times[0,1].$$

Mit diesem Induktionsschluss ist (4.24) bewiesen. Insbesondere kann man daraus $(\bar M\cap\bar K)\times[0,1]\subset D(G^p)$ folgern, und aus (4.17), (4.23) und (4.24) erhält man die Stetigkeit von $G^j|_{(\bar M\cap\bar K)\times[0,1]}$ für $j=1,\dots,p$. Da im Falle $(x,t)\in(\partial M\cap\bar K)\times[0,1]$ $k=k_{x,t}\geqslant 1$ ist (dies folgt aus $\bar V\subset M$), erhält man aus (4.24) auch $\mathscr{F}[G^p]\cap\big((\partial M\cap\bar K)\times[0,1]\big)=\emptyset$.

Aus (a) und (b) folgen trivial (4.20)–(4.22). Das nächste Ziel ist der Nachweis der folgenden Aussagen:

(4.25) $\qquad\overline{G(\bar N\times[0,1])}$ ist kompakt

und

(4.26) $\qquad\overline{G^j(\bar M\times[0,1])}$ ist kompakt für $j=k_0,\dots,p$:

Wegen (4.4) und

$$\begin{aligned}g_2(\bar N)&\subset g_1(\bar N)+(g_2-g_1)(\bar N)\\&\subset\bigcup_{t\in[0,1]}\big(tg(\bar N)+(1-t)P(g(V))\big)+R(u)\\&\subset\bigcup_{t\in[0,1]}\big(tg(\bar N)+(1-t)\operatorname{co}\{x_1,\dots,x_r\}\big)+\big(E'\cap K(0,\tfrac{3}{4}\varepsilon_3)\big)\end{aligned}$$

ist $\overline{g_2(\bar N)}$ kompakt. Daraus folgt (4.25), denn es ist

$$G(\bar N\times[0,1])\subset\Big(\bigcup_{t\in[0,1]}tg_2(\bar N)+(1-t)g(\bar N)\Big)\times[0,1].$$

Es sei $j\in\{k_0,\dots,p\}$ und

$$K_j:=\bigcup_{l=0}^{j-1}g^{-l}(V).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}G^j(\bar M\times[0,1])&=G^j\big((\bar M\backslash K_j)\times[0,1]\big)\cup G^j\big((\bar M\cap K_j)\times[0,1]\big)\\&\subset\big(g^j(\bar M\backslash K_j)\times[0,1]\big)\cup\bigcup_{l=1}^{j}G^l(V\times[0,1]).\end{aligned}$$

Nach (4.3) ist $\overline{g^j(\bar M\backslash K_j)\times[0,1]}$ kompakt. Zudem ist wegen $V\subset N$ und (4.25) $\overline{G(V\times[0,1])}$ kompakt, woraus aufgrund von $\overline{G(V\times[0,1])}\subset\bar M\times[0,1]$ (vgl.

(4.18)) und (4.21) die Kompaktheit von

$$\overline{\bigcup_{l=1}^{j} G^l(V\times[0,1])} = \bigcup_{l=0}^{j-1} G^l\left(\overline{G(V\times[0,1])}\right)$$

folgt.

Nach (4.21) und (4.22) ist $\mathscr{F}[G^p|_{M\times[0,1]}] = \mathscr{F}[G^p|_{\bar{M}\times[0,1]}]$ abgeschlossen und wegen (4.26) ist $\mathscr{F}[G^p|_{M\times[0,1]}]$ sogar kompakt. Damit ist auch $\mathscr{F}[G|_{N\times[0,1]}]$ ($\subset \mathscr{F}[G^p|_{M\times[0,1]}]$) kompakt (man beachte, dass $\partial N \subset \bar{M}\backslash V$ und damit $g_2|_{\partial N} = g|_{\partial N}$ ist, also $\mathscr{F}[G|_{\partial N\times[0,1]}] = \mathscr{F}[g|_{\partial N}]\times[0,1] = \emptyset$ und folglich $\mathscr{F}[G|_{N\times[0,1]}] = \mathscr{F}[G|_{\bar{N}\times[0,1]}]$ abgeschlossen ist). Wegen (4.20), (4.21), (4.25) und (4.26) kann man also die Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades (vgl. Seite 13) auf $\Omega := M\times[0,1]$ und $F := Q\circ G|_{N\times[0,1]}$ (wobei $Q\colon E\times[0,1]\to E$, $Q(x,t) := x$) sowie auf $\Omega := M\times[0,1]$ und $F := Q\circ G^p|_{M\times[0,1]}$ anwenden. Man erhält im ersten Falle $[\mathrm{id}-g_2, N, 0]\in L_E$ und

$$d[\mathrm{id}-g_2, N, 0] = d[\mathrm{id}-g, N, 0] \tag{4.27}$$

und im zweiten Falle $[\mathrm{id}-g_2^p, M, 0]\in L_E$ und

$$d[\mathrm{id}-g_2^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-g^p, M, 0]. \tag{4.28}$$

Die Beziehung

$$s\Big(g_2, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g_2^{-j}(\bar{M}\backslash N)\Big) = s\Big(g, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(\bar{M}\backslash N)\Big) = s \tag{4.29}$$

ist eine unmittelbare Folge von $g_2|_{D(g)\backslash V} = g|_{D(g)\backslash V}$ und $V\subset N$, denn dies ergibt $g_2^p(x) = g^p(x)$ für alle

$$x\in \bigcap_{j=0}^{p-1} g^{-j}(\bar{M}\backslash N) = \bigcap_{j=0}^{p-1} g_2^{-j}(\bar{M}\backslash N).$$

Weiterhin haben wir zu zeigen, dass

$$g_2(\mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}]) \subset M \tag{4.30}$$

ist: Es sei $x\in\mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}]$. Im Falle $\{x, g_2(x), \ldots, g_2^{p-1}(x)\}\cap V = \emptyset$ ist $g_2^j(x) = g^j(x)$ für $j = 1, \ldots, p$, also $x = g^p(x)$ und folglich nach (4.2) $g_2(x) = g(x)\in M$. Falls $\{x, g_2(x), \ldots, g_2^{p-1}(x)\}\cap V \neq \emptyset$ ist, sei $l := \max\{j\in\{2, \ldots, p+1\} \mid g_2^j(x)\in V\}$ und $y := g_2^l(x)$. Dann ist $g_2(x) = g_2^{p+1}(x) = g_2^{p+1-l}(y)$, und im Falle $l = p+1$ gilt

$$g_2(x) = g_2^{p+1-l}(y) = y\in V = U\cap g^{-1}(U)\subset M$$

(vgl. (4.6)), während man für $l\in\{2, \ldots, p\}$ wegen (4.18)

$$g_2(x) = g_2^{p+1-l}(y) = g^{p-l}(g_2(y))\in g^{p-l}(g_2(V)) \subset g^{p-l}\Big(\bigcap_{j=0}^{p-2} g^{-j}(M)\Big)\subset M$$

erhält.

Nach der Definition von g_2 ist

$$g_2(W) = (g_1+u)(W) = (P\circ g+u)(W) \subset E',$$

woraus wir mittels (4.19) $\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}] \subset W\cap E'$ und folglich wegen $g_2|_{W\cap E'} = h_2|_{W\cap E'}$ $\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}] = \mathscr{F}[h_2|_{W\cap E'}] = \{y_1, \dots, y_n\}$ erhalten. Es sei

$$W_1 := \bigcap_{j=0}^{p-1} g_2^{-j}(W).$$

W_1 ist eine offene Umgebung von $\{y_1, \dots, y_n\}$, und wegen $g_2|_{W\cap E'} = h_2|_{W\cap E'}$ und $g_2(W) \subset E'$ gilt $g_2^p|_{W_1\cap E'} = h_2^p|_{W_1\cap E'}$. Um nachzuweisen, dass die Punkte $y_1, \dots, y_n$ in $\mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}]$ isoliert liegen, nehmen wir an, es gäbe ein $l\in\{1, \dots, n\}$ und eine Folge $\{z_k\}_1^\infty \subset \mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}] \cap W_1$ mit $z_k\to y_l$ $(k\to\infty)$, und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt: Wegen $z_k = g_2^p(z_k) = g_2(g_2^{p-1}(z_k))\in g_2(W) \subset E'$ für alle $k\in N$ ist $\{z_k\}_1^\infty \subset \mathscr{F}[g_2^p|_{W_1\cap E'}] = \mathscr{F}[h_2^p|_{W_1\cap E'}]$. Demnach würde $z_k \to y_l$ $J[\mathrm{id}_{E'}-h_2^p, y_l] = 0$ zur Folge haben, was aufgrund von (4.14) unmöglich ist (denn aus (4.14) folgt insbesondere, dass die Eigenwerte μ von $(h_2^p)'(y_l) = (h_2'(y_l))^p$ nicht den Wert 1 haben können).

II. Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, definieren wir $g_2 := g$ im Falle $\mathscr{F}[g|_{\bar{M}}] = \emptyset$ (dieser Fall war in Abschnitt I ausgeschlossen worden).

Da $\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}]$ in $\mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}]$ isoliert ist, gibt es eine offene Menge $H \subset M$ mit $\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}]\cap \bar{H} = \emptyset$ und $\mathscr{F}[g_2^p|_{\bar{M}}]\backslash\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}] \subset H$. Nach (4.28) und der Additivität des Abbildungsgrades ist

$$d[\mathrm{id}-g^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-g_2^p, M, 0] = d[\mathrm{id}-g_2^p, M\backslash\bar{H}, 0]+d[\mathrm{id}-g_2^p, H, 0].$$

Aufgrund von $\mathscr{F}[g_2|_{\bar{M}}] \subset W_1 \subset W\subset N$, $g_2^p(W_1) \subset g_2(W) \subset E'$, Eigenschaft 7 des Abbildungsgrades (vgl. Seite 14), Hilfssatz 6 (vgl. Seite 23) und der Additivität des Abbildungsgrades erhalten wir

$$\begin{aligned} d[\mathrm{id}-g_2^p, M\backslash\bar{H}, 0] &= d[\mathrm{id}-g_2^p, W_1, 0] = d[\mathrm{id}_{E'}-g_2^p|_{W_1\cap E'}, W_1\cap E', 0] \\ &= d[\mathrm{id}_{E'}-(g_2|_{W\cap E'})^p, W_1\cap E', 0] \\ &\equiv d[\mathrm{id}_{E'}-g_2|_{W\cap E'}, W_1\cap E', 0] \pmod p. \end{aligned}$$

Da mit ähnlichen Schlüssen

$$d[\mathrm{id}-g_2|_{W\cap E'}, W_1\cap E', 0] = d[\mathrm{id}-g_2, W_1, 0] = d[\mathrm{id}-g_2, N, 0]$$

folgt und $d[\mathrm{id}-g_2, N, 0] = d[\mathrm{id}-g, N, 0]$ ist (vgl. (4.27)), erhalten wir insgesamt

$$d[\mathrm{id}-g_2^p, M\backslash\bar{H}, 0] \equiv d[\mathrm{id}-g, N, 0] \pmod p$$

und damit

$$d[\mathrm{id}-g^p, M, 0] \equiv (d[\mathrm{id}-g, N, 0]+d[\mathrm{id}-g_2^p, H, 0]) \pmod p.$$

Zum Beweis von Satz 16 fehlt damit nur noch der Nachweis von

$$d[\mathrm{id}-g_2^p, H, 0] \equiv 0 \pmod p: \tag{4.31}$$

Wegen (4.29) existieren Mengen $\hat{H}^{(1)}, \ldots, \hat{H}^{(s)}$ mit

$$\{\hat{H}^{(1)}, \ldots, \hat{H}^{(s)}\} \in U\Big(g_2, p, \bigcap_{l=0}^{p-1} g_2^{-l}(\bar{M} \backslash N)\Big).$$

Nach Hilfssatz 8 gibt es abgeschlossene Umgebungen $H_0^{(j)} \in \mathscr{C}(g_2, p, H)$ von $\hat{H}^{(j)}$ in $\mathscr{F}[g_2^{\varrho}|_{\bar{H}}]$ mit $[H_{0,k}^{(j)} |\ k \in \boldsymbol{Z}] \in Z(H_0^{(j)}, g_2)$ $(j = 1, \ldots, s)$. Dann ist

$$R := \overline{\mathscr{F}[g_2^{\varrho}|_{\bar{H}}] \backslash \bigcup_{j=1}^{s} H_0^{(j)}} \subset \bigcup_{l=0}^{p-1} g_2^{-l}(N).$$

Da R kompakt ist, existieren endlich viele $H_0^{(j)} \in \mathscr{C}(g_2, p, H)$ mit $[H_{0,k}^{(j)} |\ k \in \boldsymbol{Z}] \in Z(H_0^{(j)}, g_2)$ $(j = s+1, \ldots, t)$, so dass

$$R \subset \bigcup_{j=s+1}^{s} H_0^{(j)}$$

(daraus folgt $\{H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(t)}\} \in U(g_2, p, H)$) und $\bigcup_{j=s+1}^{t} H_{0,-1}^{(j)} \subset N$ ist.

Durch $(t-s)$-maliges Anwenden von Satz 12 sollen nun Abbildungen $g_{2,i}\colon D(g) \to E$ $(i = 0, \ldots, t-s;\ g_{2,0} := g_2)$ konstruiert werden mit folgenden Eigenschaften:

(4.32; i) $\qquad g_{2,i} \in A(H, p),$

(4.33; i) $\qquad g_{2,i} \in K(H, N \cap H, k_0, p),$

(4.34; i) $\qquad d[\mathrm{id} - g_{2,i}^{\varrho}, H, 0] = d[\mathrm{id} - g_2^{\varrho}, H, 0],$

(4.35; i) Es existieren $\{H_i^{(1)}, \ldots, H_i^{(\max(1,t-i))}\} \in U(g_{2,i}, p, H)$ und $[H_{i,k}^{(j)} |\ k \in \boldsymbol{Z}] \in Z(H_i^{(j)}, g_{2,i})$ $(j = 1, \ldots, \max(1, t-i))$ mit $\bigcup_{j=s+1}^{t-i} H_{i,-1}^{(j)} \subset N \cap H.$

Man prüft sehr leicht nach, dass $g_{2,0} = g_2$ den Bedingungen (4.32; 0)–(4.35; 0) genügt (man beachte insbesondere die Wahl von H sowie (4.20), (4.21), (4.30), (4.25) und (4.26); die Mengen $H_0^{(j)}$ und $H_{0,k}^{(j)}$ wurden schon definiert).

Angenommen, für ein $i \in \{0, \ldots, t-s-1\}$ existiere ein $g_{2,i}\colon D(g) \to E$ mit den Eigenschaften (4.32; i)–(4.35; i), und es seien Mengen $H_i^{(j)}$ und $H_{i,k}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, t-i;\ k \in \boldsymbol{Z})$ gemäss (4.35; i) gewählt. Im Falle $t-i = 1$, oder falls für ein $j \in \{s+1, \ldots, t-i\}$ $H_i^{(j)} = \emptyset$ ist, können wir $g_{2,i+1} := g_{2,i}$ wählen. Es ist offensichtlich, dass dann $g_{2,i+1}$ die Bedingungen (4.32; $i+1$)–(4.35; $i+1$) erfüllt. Anderenfalls (d.h. wenn $t-i \geqslant 2$ und $H_i^{(j)} \neq \emptyset$ für $j = s+1, \ldots, t-i$) beachte man, dass die Voraussetzungen von Satz 12 (Fall (b)) mit $g_{2,i}, k_0, H, N \cap H, t-i, H_i^{(j)}, H_{i,k}^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, t-i;\ k \in \boldsymbol{Z})$ und $t-i$ anstelle von $f, m_0, M, N, s, G_0^{(j)}, G_{0,k}^{(j)}$ und j_0 erfüllt sind. Ein n_0 wird im Fall (b) von

Satz 12 nicht benötigt (man könnte $n_0 := p$ setzen), ebenso spielt die Wahl von $\varepsilon > 0$ keine Rolle. Für δ können wir die Zahl

$$(4.36;\ i) \qquad \delta_i := \min_{j=s+1,\ldots,t-i} \operatorname{dist}\left(H_{i,-1}^{(j)}, \partial(N \cap H)\right)$$

verwenden. Mit $g_{2,i+1}$ entsprechend dem $\tilde{f}$ von Satz 12, Fall (b) sind dann trivialerweise (4.32; $i+1$) und (4.33; $i+1$) erfüllt. (4.34; $i+1$) folgt aus (4.34; i) und (3.2). Ebenso ist (4.35; $i+1$) klar, wenn wir mit den nach Satz 12 gewählten $\tilde{G}^{(j)}$ und $\tilde{G}_k^{(j)}$

$$H_{i+1}^{(j)} := \tilde{G}^{(j)} \cup \tilde{G}^{(j_0)} = \tilde{G}^{(j)} \cup \tilde{G}^{(t-i)},$$

$$H_{i+1,k}^{(j)} := \tilde{G}_k^{(j)} \cup (\tilde{G}_k^{(j_0)} \backslash \tilde{G}^{(j)}) = \tilde{G}_k^{(j)} \cup (\tilde{G}_k^{(t-i)} \backslash \tilde{G}^{(j)})$$

für $j = 1, \ldots, t-(i+1)$ und $k \in Z$ setzen (man beachte (3.1) und (3.5)).

Insbesondere wurde mit diesem Induktionsbeweis die Existenz einer Abbildung $g_{2,t-s}\colon D(g) \to E$ mit den Eigenschaften (4.32; $t-s$)–(4.35; $t-s$) nachgewiesen. Im Falle $s \geqslant 2$ erfüllt dann $g_{2,t-s}$ die Voraussetzungen von Satz 13, wenn man g_0, M, m_0 und t durch $g_{2,t-s}, H, k_0$ und $s-1$ ersetzt (das t in Satz 13 hat nichts mit dem t in diesem Beweis zu tun; man beachte, dass aufgrund der Beschränkung zu Beginn dieses Beweises aus $s \geqslant 2$ folgt, dass $k_0 \geqslant 2$ ist). Da das nach Satz 13 bestimmte $m_t = m_{s-1} \leqslant p-1$ ist (es gilt nach (4.5)

$$m_{s-1} = \begin{cases} ((s+2)/2)\,k_0 - 1 \leqslant (p/k_0)\,k_0 - 1 = p-1 & \text{im Falle } s' \text{ gerade} \\ ((s+1)/2)\,k_0 \leqslant (p-1/k_0)\,k_0 = p-1 & \text{im Falle } s' \text{ ungerade}), \end{cases}$$

gibt es nach Satz 13 eine Abbildung $g_3\colon D(g) \to E$ (dem g_t in Satz 13 entsprechend) mit $g_3 \in A(H,p)$, $g_3^j|_{\bar{H}}$ kompakt für $j = p-1$ und $j = p$, $s(g_3, p, H) \leqslant s(g_{2,t-s}, p, H) - s + 1 \leqslant s - s + 1 = 1$ (vgl. (4.35; $t-s$)) und

$$d[\mathrm{id} - g_3^p, H, 0] = d[\mathrm{id} - g_{2,t-s}^p, H, 0] = d[\mathrm{id} - g_2^p, H, 0]$$

(vgl. (4.34; $t-s$)). Im Falle $s \leqslant 1$ hat nach (4.32; $t-s$)–(4.35; $t-s$) schon $g_3 := g_{2,t-s}$ diese Eigenschaften.

Nach Hilfssatz 7, angewendet auf $h := g_3|_H$,

$$M := \bigcap_{j=0}^{p-1} g_3^{-j}(H)$$

und $m := p$ ist

$$d\left[\mathrm{id} - g_3^p, \bigcap_{j=0}^{p-1} g_3^{-j}(H), 0\right] \equiv 0 \pmod{p}.$$

Daraus folgt sofort (4.31), denn aufgrund der Additivität des Abbildungsgrades und von

$$\mathscr{F}[g_3^p|_H] \subset \bigcap_{j=0}^{p-1} g_3^{-j}(H)$$

(vgl. $g_3 \in A(H,p)$ und Hilfssatz 3) ist

$$d\left[\mathrm{id}-g_3^\xi, \bigcap_{j=0}^{p-1} g_3^{-j}(H), 0\right] = d\left[\mathrm{id}-g_3^\xi, H, 0\right] = d\left[\mathrm{id}-g_2^\xi, H, 0\right]. \blacksquare$$

Satz 16 kann auf Problem 1 angewendet werden. Man erhält eine partielle Lösung, die insbesondere Satz 1 in [63] verallgemeinert, und zwar in der Weise, dass die dortige Kompaktheitsforderung an die Abbildung f beträchtlich reduziert wird:

SATZ 17. *Es sei $K \subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, $f\colon K \to K$ erfülle für ein $k_0 \in N$ und eine Primzahl $p > k_0$ die folgenden Voraussetzungen:*

(a) *$f^p|_S$ ist kompakt für alle beschränkten $S \subset K$.*

(b) *$f^p(K)$ ist beschränkt.*

(c) *Es existiert eine Umgebung U von $\mathscr{F}[f^p]$, so dass $f|_{U\cap K}$ stetig und $f^{k_0}|_{U\cap K}$ kompakt ist.*

(d) *Es existiert eine offene Teilmenge V von K, so dass $f|_{\bar{V}}$ kompakt und $\mathscr{F}[f|_{K\setminus V}] = \emptyset$ ist und dass gilt*

$$s := s\left(f, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} f^{-j}(K\setminus V)\right) \leqslant \begin{cases} 2p/k_0 - 2, & \textit{falls} \quad s \textit{ gerade}, \\ (2p-2)/k_0 - 1, & \textit{falls} \quad s \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Eine offensichtliche Folgerung aus Satz 17 ist nachstehendes Resultat, welches Satz 14 verallgemeinert (grob gesagt entspricht Satz 14 dem Fall $V = \emptyset$):

KOROLLAR. *Es sei $H \subset E$ nichtleer, abgeschlossen und konvex, und es sei $f\colon H \to H$ stetig mit f^{m_0} kompakt für ein $m_0 \in N$. Es existiere eine Primzahl $p > m_0$ und eine offene Teilmenge V von H mit $f|_V$ kompakt und, sofern $\mathscr{F}[f|_{H\setminus V}] = \emptyset$,*

$$s := s\left(f, p, \bigcap_{j=0}^{p-1} f^{-j}(H\setminus V)\right) \leqslant \begin{cases} 2p/m_0 - 2, & \textit{falls} \quad s \textit{ gerade}, \\ (2p-2)/m_0 - 1, & \textit{falls} \quad s \textit{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis von Satz 17. Da K abgeschlossen und konvex ist, gibt es nach dem Tietze–Dugundjischen Ergänzungssatz (vgl. Seite 12) ein Retraktion $r\colon E \to K$. Es sei $\tilde{K}_1 \subset K$ offen, beschränkt und konvex, so dass $f^p(K) \subset \tilde{K}_1$, und $K_1 := r^{-1}(\tilde{K}_1)$, und es sei $M \subset E$ offen mit

$$\mathscr{F}[(f\circ r)^p] = \mathscr{F}[f^p] \subset M \subset \bar{M} \subset r^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{p-k_0} f^{-j}(U \cap K \cap K_1)\right).$$

Man kontrolliert leicht nach, dass mit $g := f\circ r$ und k_0, p und M wie oben sowie mit $N := M \cap r^{-1}(V)$ die Voraussetzungen von Satz 16 erfüllt sind. Da nach der Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades $d[\mathrm{id}-(f\circ r)^p, K_1, 0] = 1$ ist (wähle $x_0 \in \tilde{K}_1$ und $F\colon K_1 \times [0,1] \to E$, $F(x,t) := tx_0 + (1-t)(f\circ r)^p(x)$; vgl. auch Beweis von Hilfssatz 13), erhalten wir unter Verwendung der Additivität des Abbildungsgrades und von Satz 16

$$\begin{aligned} 1 = d[\mathrm{id}-(f\circ r)^p, K_1, 0] &= d[\mathrm{id}-(f\circ r)^p, M, 0] \\ &\equiv d[\mathrm{id}-f\circ r, M\cap r^{-1}(V), 0] \pmod{p}. \end{aligned}$$

Demnach existiert ein $x \in M \cap r^{-1}(V)$ mit $x = (f\circ r)(x)$. Da $x = (f\circ r)(x) \in f(K) \subset K$ ist, gilt $x = f(r(x)) = f(x)$, d.h. $\mathscr{F}[f] \neq \emptyset$. ∎

Bezeichnungen

1. Mathematische Begriffe

Topologische Begriffe werden im Sinne von Schubert [60] verwendet. Andere mathematische Begriffe werden – soweit nötig – in Kapitel I.1 (z.B. „kompakte Abbildung", „Mass der Nicht-Präkompaktheit") und I.3 („Leray–Schauderscher Abbildungsgrad" und damit zusammenhängende Begriffe) oder sonst im Text an Ort und Stelle erklärt.

2. Mathematische Symbole

In der folgenden Liste stehen die Buchstaben M, N für Mengen, x, y für Punkte des zugrundeliegenden Raumes, m, n, p für reelle Zahlen (oder auch $\pm\infty$), z für komplexe Zahlen, f, g für Abbildungen und L für lineare Räume, jeweils manchmal auch indiziert M_1, M_2, f_1 etc.

Mengen

$\subset, \supset$	übliche Mengeninklusion – die Gleichheit der Mengen wird nicht ausgeschlossen;
2^M	Potenzmenge von M;
card M	Mächtigkeit (Kardinalzahl) von M;
$\{x_i\}_1^\infty$	Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots$

Zahlen

$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$	Menge der natürlichen bzw. ganzen bzw. reellen bzw. komplexen Zahlen;
$\bar{\boldsymbol{R}}$	$\boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;
$[m_1, m_2]$	$\{n \in \bar{\boldsymbol{R}} \mid m_1 \leqslant n \leqslant m_2\}$;
$[m_1, m_2)$	$\{n \in \bar{\boldsymbol{R}} \mid m_1 \leqslant n < m_2\}$;
$(m_1, m_2]$	$\{n \in \bar{\boldsymbol{R}} \mid m_1 < n \leqslant m_2\}$;
(m_1, m_2)	$\{n \in \bar{\boldsymbol{R}} \mid m_1 < n < m_2\}$, statt dessen gelegentlich auch das geordnete Paar der Zahlen m_1, m_2;
$\boldsymbol{R}^+$	$(0, \infty)$;
$\overline{\boldsymbol{R}^+}$	$[0, \infty]$;
inf	Infimum, dabei $\inf(\emptyset) = \infty$;

$\arg(z)$	$\arg(0)=0$, im Falle $z\neq 0$ dasjenige $n\in[0,2\pi)$ mit $z=\lvert z\rvert e^{i\arg(z)}$. Für $\arg(z)=2\pi$ lese man $\arg(z)=0$;
$\operatorname{sign} m$	$\operatorname{sign} 0=0$, $\operatorname{sign} m=m/\lvert m\rvert$ für $m\neq 0$;
$m\equiv n \pmod p$	$(m-n)/p\in\boldsymbol{Z}$;
$o(p)$	Landausches Symbol, d.h. $f(p)=o(p)$ genau dann, wenn $f(p)/p\to 0$ für $p\to\infty$.

Lineare Räume

$L_1\oplus L_2$	direkte Summe von L_1 und L_2, d.h. der lineare Raum der Paare (x,y), $x\in L_1$, $y\in L_2$ mit der üblichen Addition und Skalar-Multiplikation;
L_1/L_2	Faktorraum;
$\dim(L)$	Dimension von L;
$\operatorname{co} M$	konvexe Hülle von M;
$\operatorname{span}(M)$	lineare Hülle von M;
$M+N$	$\{x+y\mid x\in M, y\in N\}$;
$M+x$	$M+\{x\}$;
$(x_0\ldots x_k)$	vgl. Seite 11–12;
$\lvert M\rvert$	das einem simplizialen Komplex (= Menge von Simplexen mit gewissen Eigenschaften, vgl. Schubert [60]) zugeordnete Polyeder (= Vereinigung dieser Simplexe).

Topologische Räume

$\mathring{M}$	offener Kern von M, bei komplizierten Ausdrücken geschrieben wie etwa $\overset{\circ}{\widehat{M\cup N}}$;
$\bar{M}$	Abschliessung von M;
∂M	Rand von M;
$M\Subset N$	$\bar{M}$ kompakt, $\bar{M}\subset\mathring{N}$.

Metrische Räume

$d(x,y)$	Abstand von x und y;
$\operatorname{dist}(M,N)$	$\inf\{d(x,y)\mid x\in M, y\in N\}$ (Abstand);
$\operatorname{dist}(M,x)$	$\operatorname{dist}(M,\{x\})$;
$\operatorname{diam}(M)$	$\sup\{d(x,y)\mid x,y\in M\}$ (Durchmesser);
N^{ε}, $K(x,\varepsilon)$	$\Big\}$ vgl. Seite 10.

Abbildungen

$D(f)$	Definitionsbereich von f;
$R(f)$	Wertebereich von f;
$\mathscr{F}[f]$	Menge der Fixpunkte von f, d.h. $\{x\in D(f)\mid x=f(x)\}$;
id_M	identische Abbildung auf M, d.h. $\mathrm{id}_M(x)=x$ für alle $x\in M$; falls M festliegt, oft nur id statt id_M;

$f\|_M$	Einschränkung von f auf M;
$f+g$	vgl. Seite 10;
$f \circ g$	vgl. Seite 10–11;
f^k	
det	Determinante;
$C^0(M)$	Menge der auf M stetigen Abbildungen;
$C^1(M)$	Menge der auf M stetig differenzierbaren Abbildungen;
$f'(x)$	Ableitung von f im Punkte x;
$J[f, x]$	$\det(f'(x))$ (Funktionaldeterminante).

Spezielle Symbole

L_E	vgl. Seite 13;
$d[\ldots]$	Leray–Schauderscher Abbildungsgrad;
$\mathscr{C}(f, p, M)$	vgl. Definition 2 (Seite 25);
$U(f, p, M)$	
$s(f, p, M)$	
$Z(M, f)$	
$A(M, p)$	vgl. Seite 59.
$K(M, N, m_0, p)$	
$H(M, N, m_0, n_0, p)$	

Literatur

[1] M. Altman, *A fixed point theorem in Banach space*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), S. 89–92.

[2] H. Amann, S. A. Weiss, *On the uniqueness of the topological degree*, Math. Z. 130 (1973), S. 39–54.

[3] R. F. Arens, J. Eells, Jr., *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math. 6 (1956), S. 397–403.

[4] G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, *Invariant points in function space*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 96–115.

[5] P. Bohl, *Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage*, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), S. 179–276.

[6] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. 20 (1933), S. 177–190.

[7] – *Theory of shape*, Monografie Matematyczne, Band 59, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

[8] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1912), S. 97–115.

[9] F. E. Browder, *On a generalization of the Schauder fixed point theorem*, Duke Math. J. 26 (1959), S. 291–303.

[10] – Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 54 (1965), S. 1041–1044.

[11] – *Another generalization of the Schauder fixed point theorem*, Duke Math. J. 32 (1965), S. 399–406.

[12] – *A further generalization of the Schauder fixed point theorem*, ibid. 32 (1965), S. 575–578.

[13] – *Asymptotic fixed point theorems*, Math. Ann. 185 (1970), S. 38–60.

[14] S.-N. Chow, *Existence of periodic solutions of autonomous functional differential equations*, J. Differential Equations 15 (1974), S. 350–378.

[15] F. Cohen, J. E. Connett, *A coincidence theorem related to the Borsuk–Ulam theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), S. 218–220.

[16] F. Cohen, E. L. Lusk, *Coincidence point results for spaces with free Z_p-actions*, ibid. 49 (1975), S. 245–252.

[17] J. Cronin, *Fixed points and topological degree in nonlinear analysis*, Mathematical Surveys 11, American Mathematical Society, Providence, R. I. 1964.

[18] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 24 (1955), S. 84–92.

[19] K. Deimling, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1974.

[20] P. Dierolf, *Korrespondenzen und ihre topologischen Eigenschaften*, Überblicke Math. 6 (1973), S. 51–112.

[21] A. Dold, *Fixed point index and fixed point theorem for Euclidean neighborhood retracts*, Topology 4 (1965), S. 1–8.

[22] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), S. 353–367.

[23] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators*, I, Interscience Publishers, Inc., New York 1958.

[24] S. Eilenberg, D. Montgomery, *Fixed point theorems for multi-valued transformations*, Amer. J. Math. 68 (1946), S. 214–222.

[25] G. Eisenack, C. Fenske, *Fixpunkttheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim–Wien–Zürich 1978.

[26] K. Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38 (1952), S. 121–126.

[27] M. Furi, A. Vignoli, *On α-nonexpansive mappings and fixed points*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 48 (1970), S. 195–198.

[28] A. Granas, *The Leray–Schauder index and the fixed point theory for arbitrary* ANR*s*, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), S. 209–228.

[29] W. H. Greub, *Linear algebra*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

[30] A. Halanay, *Asymptotische Stabilität und kleine Störungen periodischer Systeme von Differentialgleichungen mit retardiertem Argument*, Uspehi Mat. Nauk 17, 1 (103) (1962), S. 231–233 [Russisch].

[31] E. Heinz, *An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space*, J. Math. Mech. 8 (1959), S. 231–247.

[32] M. Hukuhara, *Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel*, Japan. J. Math. 20 (1950), S. 1–4.

[33] G. S. Jones, *The existence of periodic solutions of* $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$, J. Math. Anal. Appl. 5 (1962), S. 435–450.

[34] — *Periodic motions in Banach space and applications to functional-differential equations*, Contributions to Differential Equations 3 (1964), S. 75–106.

[35] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. 8 (1941), S. 457–459.

[36] — *Topological properties of the unit sphere of a Hilbert space*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943), S. 269–271.

[37] V. L. Klee, *Leray-Schauder theory without local convexity*, Math. Ann. 141 (1960), S. 286–296.

[38] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. 14 (1929), S. 132–137.

[39] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Über spezielle Überdeckungen der endlichdimensionalen Sphäre*, Doklady Akad. Nauk SSSR 103 (1955), S. 961–964 [Russisch].

[40] — *Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven Approximationen*, Uspehi Mat. Nauk 10, 1 (63) (1955), S. 123–127 [Russisch].

[41] — *The operator of translation along the trajectories of differential equations*, Translations of Mathematical Monographs, Band 19, American Mathematical Society, Providence, R. I. 1968.

[42] C. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), S. 301–309.

[43] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 51 (1934), S. 45–78.

[44] L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Actualités scientifiques et industrielles 188, Hermann et Cie., Paris 1934.

[45] J. Mayer, *Algebraic topology*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs 1972.

[46] H. J. Munkholm, *Borsuk–Ulam type theorems for proper* Z_p*-actions on* (mod p *homology*) *n-spheres*, Math. Scand. 24 (1969), S. 167–185.

[47] M. Nagumo, *Degree of mapping in convex linear topological spaces*, Amer. J. Math. 73 (1951), S. 497–511.

[48] R. D. Nussbaum, *Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps*, Math. Ann. 191 (1971), S. 181–195.

[49] – *Some asymptotic fixed point theorems*, Trans. Amer. Math. Soc. 171 (1972), S. 349–375.

[50] – *Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 101 (1974), S. 263–306.

[51] – *Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations, II*, J. Differential Equations 14 (1973), S. 360–394.

[52] H. O. Peitgen, *On the Lefschetz number for iterates of continuous mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976), S. 441–444.

[53] – *Some applications of the fixed point index in asymptotic fixed point theory*, Proc. Seminar on Fixed Point Theory (Dalhousie University, Halifax 1975), Academic Press, Inc., New York 1976, S. 137–148.

[54] W. V. Petryshyn, *Fixed point theorems for various classes of 1-set-contractive and 1-ball-contractive mappings in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 182 (1973), S. 323–352.

[55] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. Math. Pures Appl. (4) 2 (1886), S. 151–217, Nachdruck in: *Oeuvres de Henri Poincaré*, Band 1, Gauthiers-Villars, Paris 1951, S. 167–222.

[56] E. Rothe, *Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen*, Compositio Math. 5 (1938), S. 177–197.

[57] B. N. Sadovskiĭ, *A fixed-point principle*, Functional. Anal. i Priložen. 1 (1967), S. 74–76 [Russisch], englische Übersetzung in: Functional. Anal. Appl. 1 (1967), S. 151–153.

[58] A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), S. 883–890.

[59] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), S. 171–180.

[60] H. Schubert, *Topologie*, 2. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart 1969.

[61] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics 66, Cambridge University Press, 1974.

[62] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London 1966.

[63] H. Steinlein, *Zur Existenz von Fixpunkten bei Abbildungen mit vollstetigen Iterierten*, Dissertation, Universität München, 1970.

[64] – *Ein Satz über den Leray-Schauderschen Abbildungsgrad*, Math. Z. 126 (1972), S. 176–208.

[65] – *Über die verallgemeinerten Fixpunktindizes von Iterierten verdichtender Abbildungen*, Manuscripta Math. 8 (1973), S. 251–266.

[66] – *An approximation method in asymptotic fixed point theory*, Math. Ann. 211 (1974), S. 199–218.

[67] – *A new proof of the* (mod *p*)*-theorem in asymptotic fixed point theory*, Proc. Conf. on Problems in Nonlinear Functional Analysis, Bonn 1974, Berichte Ges. Math. Datenverarbeitung, Bonn, 103 (1975), S. 29–42.

[68] A. S. Švarc, *Einige Abschätzungen des Geschlechtes eines topologischen Raumes im Sinne von Krasnosel'skiĭ*, Uspehi Mat. Nauk 12, 4 (76) (1957), S. 209–214 [Russisch].

[69] – *The genus of a fiber space, I, II*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 10 (1961), S. 217–272, 11 (1962), S. 99–126 [Russisch], englische Übersetzung in: Amer. Math. Soc. Transl., Ser. II. 55 (1966), S. 49–140.

[70] R. M. Switzer, *Algebraic topology–homotopy and homology*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1975.

[71] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. Reine Angew. Math. 145 (1915), S. 9–14.

[72] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. 111 (1935), S. 767–776.

[73] H-O. Walther, *Existence of a non-constant periodic solution of a non-linear autonomous*

functional differential equation representing the growth of a single species population, J. Math. Biol. 1 (1975), S. 227–240.

[74] P. P. Zabreĭko, M. A. Krasnosel'skiĭ, *Iterations of operators and fixed points*, Doklady Akad. Nauk SSSR 196 (1971), S. 1006–1009 [Russisch], englische Übersetzung in: Soviet Math. Dokl. 12 (1971), S. 294–298.