SINGULARITIES
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 20
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

QUELQUES REMARQUES SUR LE SPECTRE DE SINGULARITÉ D'UN GERME DE COURBE PLANE

LE VAN THANH

Institute de Mathématiques,
Hanoi, Vietnam

Le Spectre de singularité d'un germe d'hypersurface complexe de C^n est un invariant très important dans la théorie servant des singularités. Les formules servant à calculer le Spectre ont été construites pour les cas non-dégénéré et quasi-homogène dans [V] (avec $n = 2$), [St] (avec n général), et pour le cas irréductible de $n = 2$ dans [S]. Dans [T], l'exposant d'Arnold de dimension 2 est estimé par la topologie de la courbe.

Dans le présent travail on présente quelques remarques sur le Spectre pour le cas $n = 2$: la formule de l'exposant d'Arnold, celle de la partie correspondante $H^{01} \oplus H^{10}$ du Spectre et on énonce une conjecture sur la partie correspondante $H^{00} \oplus H^{11}$.

1. Rappels (cf. [M], [V], [St])

1.1. Soient f: $(C^n, 0) \to (C, 0)$ un germe de fonction holomorphe en un point critique isolé; $T' = T - \{0\}$ un petit voisinage épointé de $0 \in C$;

$$f^*\colon\ H^{n-1} = \bigcup_{t \in T'} H^{n-1}(f^{-1}(t), C) \to T'$$

$$(\text{resp. } f_*\colon\ H_{n-1} = \bigcup_{t \in T'} H_{n-1}(f^{-1}(t), C) \to T')$$

la fibration cohomologique (resp. homologique) de Milnor de f.

Soient $\omega \in \Omega^n$ une n-forme holomorphe dans un voisinage de $0 \in C^n$; ω/df une $(n-1)$-forme relative de Leray qui est définie, holomorphe, et fermée sur les fibres $f^{-1}(t)$, $t \neq 0$, donc l'application $t \mapsto$classe $[\omega/df] \in H^{n-1}(f^{-1}(t), C)$ définit une section $s[\omega]$ de la fibration f^*. D'après le théorème de Malgrange (cf. [M] et [V]) il existe des sections $A^{\omega}_{k,\alpha}$ de f^* telles que

$$s[\omega](t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\substack{\exp(-2\pi i\alpha)=\lambda \\ \alpha > -1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} A^{\omega}_{k\alpha} t^{\alpha} (\log t)^k.$$

C'est-à-dire que pour chaque section localement constante $\delta(t)$ de la fibration homologique de Milnor f_* on a le développement

$$\langle s[\omega](t), \delta(t) \rangle =: \int_{\delta(t)} \frac{\omega}{df} = \sum_{\lambda} \sum_{\alpha} \sum_{k} \frac{1}{k!} a^{\omega}_{k\alpha} t^{\alpha} (\log t)^k.$$

Alors $A^{\omega}_{k\alpha}$ est définie par

$$\langle A^{\omega}_{k\alpha}(t), \delta(t) \rangle = a^{\omega}_{k\alpha} \in C.$$

1.2. Soit $\alpha(\omega)$ le minimum des $\alpha \in Q$, $\exp(-2\pi i\alpha) = \lambda$ tels que au moins l'une des sections $A^{\omega}_{k\alpha}(t)$ n'est pas identiquement nulle. On pose

$$s_{\max}[\omega](t) = t^{\alpha(\omega)} [A^{\omega}_{0\alpha(\omega)}(t) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} (\log t)^{n-1} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}]$$

et on dit que c'est la partie principale de $s[\omega](t)$. Soit $S(\alpha)$ l'espace vectoriel de toutes les sections (de f^*) de la forme $s_{\max}[\omega]$, où $\omega \in \Omega^n$ et $\alpha(\omega) = \alpha$. L'égalité

$$s_{\max}[f\omega](t) = t s_{\max}[\omega](t)$$

définit l'inclusion $S(\alpha - 1) \hookrightarrow S(\alpha)$.

L'ensemble $S_p(X, 0)$ de tous les nombres α tels que $S(\alpha-1) \neq S(\alpha)$ est appelé "Spectre" de singularité de $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$. Si $\alpha \in S_p(X, 0)$ on pose $d(\alpha) = \dim_C S(\alpha)/S(\alpha - 1)$ et on appelle $d(\alpha)$ multiplicité de α.

On note

$$\beta_C(f, 0) = 1 + \min_{\omega} \alpha(\omega),$$

ce qu'on appelle exposant d'Arnold (complexe) de f (ou de X, 0) [A].

1.3. Soit H l'espace vectoriel des sections multiformes globales du système local formé par les $H^{n-1}(f^{-1}(t), C)$ sur T'. Si $\lambda \in \Lambda$ est une valeur propre de la monodromie, on note H_λ le sous-espace propre généralisé qui lui correspond. On a donc $H = \oplus H_\lambda$. Soient (W) la filtration par le poids de la monodromie de H et (F) la filtration de Hodge de Steenbrink [St]. On définit les exposants de singularité de f comme les éléments de

$$\mathrm{Exp}(f, 0) = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_\mu \mid \tilde{\alpha}_j \in Q, 0 < \tilde{\alpha}_j < n\}$$

tels que

$$\dim_C \mathrm{Gr}^p_F H_\lambda = \# \{\tilde{\alpha}_j \mid \exp(-2\pi i \tilde{\alpha}_j) = \lambda, [\tilde{\alpha}_j] = 1 + \delta(1-\lambda) - p\}$$

où μ est le nombre de Milnor de f; $\mathrm{Gr}_F^p H_\lambda$ le terme de degré p du gradué induit sur H_λ par la filtration (F); $[\tilde{\alpha}] = \max\{k \in Z \mid k \leqslant \alpha\}$ la partie entiere de α; enfin $\delta(\cdot)$ est la fonction de Dirac (cf. [St], [S]).

Remarquons que $\tilde{\alpha}_j \in \mathrm{Exp}(f, 0)$ si et seulement si $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j - 1 \in S_p(X, 0)$ (cf. [V]). Comme $H = \bigoplus H^{pq}$, où $H^{pq} = \mathrm{Gr}_F^p \mathrm{Gr}_q^W H$, on peut répartir les $\tilde{\alpha}_j \in \mathrm{Exp}(f, 0)$ (donc les $\alpha_j \in S_p(X, 0)$) en deux parties: l'une correspond à $\bigoplus\limits_{p \neq q} H^{p,q}$ l'autre correspond à $\bigoplus\limits_{p=q} H^{p,q}$.

2. Diagramme d'Enriques et semi-groupes $\{m_\beta(\varphi)\}$, $\varphi \in C\{x, y\}$

2.1. Soit $(X, 0) \hookrightarrow (C^2, 0)$ un germe de courbe plane analytique définie par une fonction réduite $f \in C\{x, y\}$. Soit Φ: $(Y, E) \to (C^2, X)$ la résolution de point singulier $0 \in C^2$ de f, c'est-à-dire que Y est une 2-variété lisse; Φ est une application propre analytique qui est isomorphe sur $Y - \Phi^{-1}(0)$; $E = (f \circ \Phi)^{-1}(0) = \bigcup\limits_{\beta \geqslant 0} E_\beta$ est l'union des courbes lisses dans Y qui se sont croisés normaux. ($\Phi^{-1}(0) = \bigcup\limits_{\beta \geqslant 1} E_\beta$ sont les diviseurs exceptionnels de Φ; E_0 la transformée stricte de X, $\Phi | E_0$: $E_0 \to X$ la résolution de X; Φ s'obtient par une composition d'un nombre fini d'éclatements).

On appelle le diagramme d'Enriques $\Gamma(X)$ de X un graphique oriente a poids des sommets E_β (avec le poids m_β = multiplicité de E_β) et on a une fleche $E_\beta \leftarrow E_\gamma$ si et seulement si $\beta > 0$, E_γ s'apparait par un éclatement du point de E_β et $E_\gamma \cap E_\beta \neq \emptyset$.

Par exemple le diagramme d'Enriques de $X = \{(x^5 - y^3)(y^4 - 2y^2 x^3 - 4yx^5 + x^6 - x^7) = 0\}$ est le suivant:

$$\begin{tikzcd}
11 & 33 \arrow[l] \arrow[d] & 1 \arrow[l] \\
7 & 21 \arrow[l] & \\
22 & 44 \arrow[l] \arrow[u] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

2.2. *Remarques.* 1. Le diagramme d'Enriques d'un germe de courbe ne dépend que de sa topologie. Par exemple, dans le cas irréductible on peut le construire à l'aide des exposants caractéristiques de Puiseux $(n, \beta_1, \ldots, \beta_g)$ de la courbe donnée comme il suit (cf. [D], [S], [L], [Y], ...):

$$\begin{tikzcd}
 & R_1' & & R_g' & & \\
R_0 & \cdots \arrow[l] & R_1 \arrow[l] \arrow[ul, dotted] & \cdots \arrow[l] & R_g \arrow[l] \arrow[ul, dotted] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

ou $R_0 = R_0' = n$ (multiplicite de la courbe).

$$R_i = R_i' e^{(i-1)}/e^{(i)} = [R_{i-1} + \beta_i - \beta_{i-1}]\, e^{(i-1)}/e^{(i)},$$
$$e^{(0)} = n, \quad e^{(i)} = \text{p.p.c.d } (n, \beta_1, \ldots, \beta_i).$$

De plus, si l'on pose $\Gamma(X) = \bigcup_{\nu=1}^{g} \Gamma_\nu(X)$, alors $\Gamma_\nu(X)$ contient les diviseurs figurant dans les éclatements de la résolution de la ν-ème paire de Puiseux (l_ν, n_ν) qui est définie par

$$\frac{l_\nu}{n_\nu} = \frac{\beta_1}{n}, \ldots, \frac{l_\nu}{n_\nu} = \frac{n_{\nu-1}(\beta_\nu - \beta_{\nu-1})}{n}, \qquad (l_\nu, n_\nu) = 1.$$

Plus précisément, si

$$\frac{l_\nu}{n_\nu} = a_1^\nu + \cfrac{1}{a_2^\nu + \ddots + \cfrac{1}{a_{k_l}^\nu}}, \qquad a_i^\nu \in N,$$

est l'extension fractionnelle continue de l_ν/n_ν, alors $\Gamma_\nu(X)$ contient $\sum_{i=1}^{k_\nu} a_i^\nu$ les sommets $\{E_{ij}^\nu \mid l \leqslant i \leqslant k,\ l \leqslant j \leqslant a_i^\nu\}$ et $\left(\sum_{i=1}^{k_\nu} a_i^\nu - 1\right)$ les flèches

$$E_{ij}^\nu \leftarrow E_{ij+1}^\nu, \quad 1 \leqslant i \leqslant k_\nu,\ 1 \leqslant j \leqslant a_i^\nu - 1,$$
$$E_{ia_i^\nu}^\nu \leftarrow E_{i+2,1}^\nu, \quad 1 \leqslant i \leqslant k_\nu - 2$$

(sauf $\Gamma_g(X)$ est ajouté par le sommet dernier-transformée stricte).

2. Dans le cas irréductible, on peut définir une fonction d'ordre sur le diagramme d'Enriques n_X: $\Gamma(X) \to N$ par

$$n_X(E_{ij}^\nu) = \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{k=1}^{k_r} a_k^r + \sum_{k=1}^{i-1} a_k^\nu + j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant a_i.$$

On note Φ_{ij}^ν la composition de $n_X(E_{ij}^\nu)$ des éclatements premiers qui fait apparaît E_{ij}^ν.

3. Dans le cas général, pour tout diviseur $E \in \Gamma(X)$ il existe une branche X_{i_0} de X et un diviseur $E_{i_0} \in \Gamma(X_{i_0})$ tel que $\operatorname{supp} E = \operatorname{supp} E_{i_0}$. De plus, les deux diviseurs $E_1 \in \Gamma(X_1)$, $E_2 \in \Gamma(X_2)$ définissent le même support d'un diviseur $E \in \Gamma(X)$ si et seulement si pour tout $E_1' \in \Gamma(X_1)$ tel que $n_{X_1}(E_1') \leqslant n_{X_1}(E_1)$ il existe $E_2' \in \Gamma(X_2)$ tel que $n_{X_2}(E_2') = n_{X_2}(E_2)$ et $n_{X_1}(E_1') = n_{X_2}(E_2')$. Donc, dans le cas général, on a une fonction *d'ordre partiel* sur le diagramme d'Enriques. Cette fonction sera utilisée pour démontrer le théorème suivant:

2.3. Théorème. *Soient $E_{\gamma_0} \in \Gamma(X)$, $\varphi \in C\{x, y\}$, $m_{\gamma_0}(\varphi)$ la multiplicité de φ sur E_{γ_0} (i.e. multiplicité de $\varphi \circ \Phi \mid E_{\gamma_0}$); alors $\{m_{\gamma_0}(\varphi)\}$, $\varphi \in C\{x, y\}$, est un* *semi-groupe qui ne dépend que des exposants de Puiseux des branches de X.*

Démonstration. Soit $\tilde{C}_{\gamma_0} \subset Y$ une courbe lisse qui traverse E_{γ_0} et dans un voisinage assez petit de $\bigcup_\beta E_\beta \subset Y$ ne coupe pas E_β pour tout $\beta \neq \gamma_0$, c'est-à-dire

$$(\tilde{C}_{\gamma_0} \cdot E_{\gamma_0}) = 1, \quad (\tilde{C}_{\gamma_0} \cdot E_\beta) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} m_{\gamma_0}(\varphi) &= (\tilde{C}_{\gamma_0} \cdot E_{\gamma_0})\, m_{\gamma_0}(\varphi) = (\tilde{C}_{\gamma_0} \cdot \sum_\beta m_\beta(\varphi) E_\beta) \\ &= (\Phi(\tilde{C}_{\gamma_0}) \cdot (\varphi = 0)). \end{aligned}$$

Donc $\{m_{\gamma_0}(\varphi)\}$, $\varphi \in C\{x, y\}$, est le semi-groupe des nombres d'intersections de $C_{\gamma_0} = \Phi(\tilde{C}_{\gamma_0})$.

Soit X_1 une branche de X qui a un diviseur $E_{ij}^{\nu 1} \in \Gamma(X_1)$ tel que $\operatorname{supp} E_{ij}^{\nu 1} = \operatorname{supp} E_{\gamma_0}$. Par définition,

$$n_X(E_{\gamma_0}) = n_{X_1}(E_{ij}^{\nu 1}) = \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{k=1}^{k_r} a_k^{r1} + \sum_{k=1}^{i-1} a_k^{\nu 1} + j$$

où

$$\frac{l_r^1}{n_r^1} = a_1^{r1} + \cfrac{1}{a_2^{r1} + \ddots + \cfrac{1}{a_{k_r}^{r1}}}$$

est l'extension fractionnelle continue de la r-ème paire de Puiseux de X_1, $r = 1, 2, \ldots, g_1$.

Soient $l_{\nu ij}^{*1}$, $n_{\nu ij}^{*1} \in N$ tels que $(l_{\nu ij}^{*1}, n_{\nu ij}^{*1}) = 1$ et que

$$\frac{l_{\nu ij}^{*1}}{n_{\nu ij}^{*1}} = a_1^{\nu 1} + \cfrac{1}{a_2^{\nu 1} + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1}^{\nu 1} + \cfrac{1}{j}}}.$$

On pose

$$\beta_0(E_{\gamma_0}) = n_1^1 \cdot n_2^1 \ldots n_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1},$$

$$\beta_1(E_{\gamma_0}) = \beta_0(E_{\gamma_0}) \frac{l_1^1}{n_1^1} = l_1^1 n_2^1 \ldots n_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1},$$

. . . .

$$\begin{aligned} \beta_{\nu-1}(E_{\gamma_0}) &= \beta_0(E_{\gamma_0}) \left(\frac{l_1^1}{n_1^1} + \ldots + \frac{l_{\nu-1}^1}{n_1^1 \ldots n_{\nu-1}^1} \right) \\ &= l_1^1 \cdot n_2^1 \ldots n_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1} + \ldots + l_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1}, \end{aligned}$$

$$\beta_\nu(E_{\gamma_0}) = \beta_0(E_{\gamma_0})\left(\frac{l_1^1}{n_1^1} + \dots + \frac{l_{\nu-1}^1}{n_1^1 \dots n_{\nu-1}^1} + \frac{l_{\nu ij}^{*1}}{n_1^1 \dots n_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1}}\right)$$
$$= l_1^1 n_2^1 \dots n_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1} + \dots + l_{\nu-1}^1 n_{\nu ij}^{*1} + l_{\nu ij}^{*1}$$

(i.e. $\beta_0(E_{\gamma_0}), \dots, \beta_\nu(E_{\gamma_0})$ est la suite des exposants de Puiseux qui correspondent à la suite des paires de Puiseux $(l_1^1 n_1^1), \dots, (l_{\nu-1}^1, n_{\nu-1}^1), (l_{\nu ij}^{*1}; n_{\nu ij}^{*1})$).

Soit $(C, 0) \hookrightarrow (C^2, 0)$ un germe de courbe de type topologique définie par les exposants de Puiseux $\beta_0(E_{\gamma_0}), \dots, \beta_\nu(E_{\gamma_0})$ ($\beta_0(E_{\gamma_0})$ étant sa multiplicité). Par la définition de $\beta_i(E_{\gamma_0})$ on a:

Si Φ_0: $Y \to (C^2, 0)$ la résolution de $(C, 0)$, alors Φ_0 et $\Phi_{ij}^{\nu 1}$ ont les mêmes centres d'éclatements, donc $(C, 0)$ et $C_{\gamma_0} = : \Phi_{ij}^{\nu 1}(\tilde{C}_{\gamma_0})$ le même type de topologie. D'après [Z] le semi-groupe des nombres d'intersections de $(C_{\gamma_0}, 0)$ (avec le même $\{m_{\gamma_0}(\varphi)\}, \varphi \in C\{x, y\}$, que précédamment) est égal à celui de $(C, 0)$ donc il admet comme base les générateurs $\bar{\beta}_0(E_{\gamma_0}), \dots, \bar{\beta}_\nu(E_{\gamma_0})$ définis par

$$\bar{\beta}_0(E_{\gamma_0}) = \beta_0(E_{\gamma_0}), \quad \bar{\beta}_1(E_{\gamma_0}) = \beta_1(E_{\gamma_0}), \dots$$
$$\dots, \bar{\beta}_{r+1}(E_{\gamma_0}) = n_r \bar{\beta}_r(E_{\gamma_0}) - \beta_r(E_{\gamma_0}) + \beta_{r+1}(E_{\gamma_0}), \quad r = 1, 2, \dots, \nu - 1. \quad \square$$

3. Le Spectre de singularité d'un germe de courbe plane

3.1. Lemme. *$\alpha \in \mathrm{Sp}(X, 0)$ si et seulement s'il existe une 2-forme $\omega \in \Omega^2$ telle que*

$$-|\alpha| = \min_\beta \left\{\frac{m_\beta(\omega)+1}{m_\beta} - 1\right\}.$$

En particulier, $\alpha \in \mathrm{Sp}(X, 0) \cap (-1, 0]$ si et seulement s'il existe $\omega \in \Omega^2$ tel que

$$\min_\beta \left\{\alpha_\beta(\omega) = : \frac{m_\beta(\omega)+1}{m_\beta} - 1\right\} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \min_\beta \{\alpha_\beta(\omega)\}.$$

Preuve. D'après [V], $\mathrm{Sp}(X, 0)$ est inclusif dans $(-1, 1)$ et symétrique par rapport au centre zéro, donc il suffit de considérer les nombres $-1 < \alpha \leqslant 0$. Soulignons que si $\alpha(\omega) \leqslant 0$, alors $S(\alpha(\omega) - 1) = \emptyset$, donc $\alpha(\omega) \in \mathrm{Sp}(X, 0)$ par définition. Le lemme (3.1) une implication des deux lemmes (4.6) et (4.8) de [V] qui affirment que

(i) $\alpha(\omega) = \min_\beta \left\{\frac{m_\beta(\omega)+1}{m_\beta} - 1\right\} > -1$;

(ii) Si $\min_\beta \left\{\frac{m_\beta(\omega)+1}{m_\beta} - 1\right\} \leqslant 0$, alors $\alpha(\omega) = \min_\beta \alpha_\beta(\omega)$.

3.2. Corollaire. *Soit M_β la multiplicité de la restriction sur E_β du déterminant de Jacobi de la résolution Φ: $(Y, E) \to (C^2, X)$, alors l'exposant* *d'Arnold est défini par*

$$\beta_C(f, 0) = \min_{\beta} \left\{ \frac{M_\beta + 1}{m_\beta} \right\}.$$

($\{M_\beta\}$ *sont les invariants topologiques de* X (cf. [L])).

Preuve. Le lemme (3.1) affirme que $\alpha(\omega) \leqslant 0$ si et seulement si $\alpha(\omega) = \min_{\beta} \{\alpha_\beta(\omega) \leqslant 0\}$. Par définition $\beta_C(f, 0) = 1 + \min \mathrm{Sp}(X, 0)$, donc

$$\beta_C(f, 0) = 1 + \min_{\beta, \omega} \{\alpha_\beta(\omega)\}.$$

Remarquons que $m_\beta(\omega) = 1 + M_\beta + m_\beta(\varphi)$ avec $\omega = \varphi\, dx \wedge dy$ et $\min_{\beta} m_\beta(\varphi) = 0$ pour tout β, alors on a (3.2). □

3.3. THÉORÈME. *Soient* $\{E_\nu^0\}$, $\nu \in N_0$, *les "bifurcations" du diagramme d'Enriques de* $(X, 0) \subset (C^2, 0)$ *(c'est-à-dire que* E_ν^0 *se croise avec au moins trois autres* E_ν^1, E_ν^2, $E_\nu^3, \ldots$*) et* $m_\nu^i =$ *multiplicité de* E_ν^i $(i = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. *Alors on a comme partie correspondante* $H^{01} \oplus H^{10}$ *du* $\mathrm{Sp}(X, 0)$, l'ensemble

$$\mathrm{SSp}(X, 0) = \bigcup_{\nu \in N_0} \left\{ \alpha = \pm \left(\frac{c}{m_\nu^0} - 1 \right) \middle| \sum_{i \neq 0} \left(\frac{c m_\nu^i}{m_\nu^0} - \left[\frac{c m_\nu^i}{m_i^0} \right] \right) = 2 \right\}.$$

Démonstration. D'après [St], [S] on a

$$H_\lambda^{01} = \bigoplus_{\substack{c \in N, \beta \geqslant 1, 0 \leqslant c \leqslant m_\beta - 1, \\ \exp(-2\pi i c / m_\beta) = \lambda}} H^0 \left(\boldsymbol{P}^1, \mathcal{O} \left(\sum_{\gamma}^{\beta} \left(\frac{c m_\gamma}{m_\beta} - \left[\frac{c m_\gamma}{m_\beta} \right] \right) - 2 \right) \right).$$

où $\sum_{\gamma}^{\beta} = \sum_{E_\gamma \cap E_\beta \neq \emptyset}$. Mais

$$H^0(\boldsymbol{P}^1, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} C & \text{si } k = 0, \\ \emptyset & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

(cf. [Se]), alors H_λ^{01} ne dépend que des "bifurcations" de $\Gamma(X)$ et on a (3.3) en tenant compte de la symétrie du Spectre et de la dualité de la filtration de Hodge de Steenbrink. □

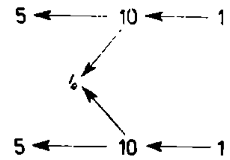
Remarque. En fait on a utilisé dans [S] la même formule de H_λ^{01} pour le cas irréductible de dimension 2 et obtenu tout le spectre, puisque dans ce cas $H^{00} = H^{11} = 0$.

3.4. CONJECTURE. Soit $\mathrm{NSSp}(X, 0)$ la partie correspondante $H^{00} \oplus H^{11}$. Alors $\alpha \in \mathrm{NSSp}(X, 0)$ si et seulement s'il existe $\{\beta^j\}_1^n$, $E_{\beta^j} \cap E_{\beta^{j+1}} \neq \emptyset$; $\beta^1, \beta^n \in N_0$ et des entiers $k_0^j, \ldots, k_{\nu(\beta^j)}^j$ tels que

$$-|\alpha|+1 = \frac{1+M_{\beta j}+\sum_i k_i^j \bar{\beta}_i^j}{m_\beta} \leqslant 1 \quad \text{pour tout } t,$$

où $\bar{\beta}_i^j$, $i = 1, 2, \ldots, \nu(\beta^j)$ sont les générateurs du semi-groupe $\{m_{\beta j}(\varphi)\}$, $\varphi \in C\{x, y\}$ (cf. 2.3).

3.5. Exemples. 1. $X = \{(x^2-y^3)(x^3-y^2) = 0\}$, $\mu = 11$ (Exemple de A'Campo [A']).

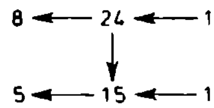


$$\mathrm{SSp}(X, 0) = \pm\{\tfrac{1}{10}, \tfrac{3}{10}\} \quad \text{(d'après 3.3)},$$

$$\mathrm{NSSp}(X, 0) = \{0, \pm\tfrac{1}{2}\} \quad \text{(d'après 3.4)}.$$

Donc on a le résultat de [A'].

2. $X = \{(x^3-y^2)(x^5-y^3) = 0\}$, $\mu = 27$.



Puisque X est non-dégénérée, en utilisant la méthode de Varchenko–Steenbrink sur le polygone de Newton on a

$$\mathrm{Sp}(X, 0) = \pm\left\{0, \frac{k}{24}, \frac{1}{15}\right\} \quad \text{où}$$

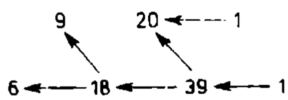
$$k = 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16; \; l = 1, 2, 4, 7.$$

On obtient le même résultat en utilisant (3.3) et (3.4):

$$\mathrm{SSp}(X, 0) = \pm\left\{\frac{k}{24}, \frac{1}{15}\right\} \quad \text{où} \quad k = 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13; \; l = 1, 2, 4, 7.$$

$$\mathrm{NSSp}(X, 0) = \pm\left\{0, \frac{k}{24}\right\} \quad \text{où} \quad k = 8, 16.$$

3. $X = \{(x^3-y^2)(y^4-2y^2x^3-4yx^5+x^6-x^7) = 0\}$, $\mu = 43$. D'après (3.3) on a



$$\mathrm{SSp}(X, 0) = \pm\left\{\frac{k}{39}, \frac{1}{18}\right\} \quad \text{où}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24; \; l = 1, 7, 13.$$

Comme $\mu = 43$ et $\# \mathrm{SSp}(X, 0) = 42$, on a $\# \{\mathrm{Sp}(X, 0) - \mathrm{SSp}(X, 0)\} = 1$. Or $\mathrm{Sp}(X, 0)$ est symétrique par rapport au centre zéro, d'où

$$\mathrm{NSSp}(X, 0) = \{0\}.$$

On a le même resultat en utilisant (3.4).

3.6. L'auteur remercie beaucoup M. Merle et T. Yano pour leurs précieuses discussions, ses remerciements vont aussi à Le. D. T. pour ses encouragements.

Références

[A] V. Arnold, *Remarques sur la méthode de la phase stationaire et nombres de Coxeter*, Uspekhi Mat. Nauk. 28 (1973) (en Russe).

[A'] N. A'Campo, *Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces*, Invent. Math. 20 (1973).

[D] P. Deligne, Manuscript on Puiseux pairs and Enriques diagram, École Polytechnique 1978.

[L] B. Lichtin, *Some algebra-geometric formulas for poles of* $|f(x, y)|^s$, Amer. J. Math. 107 (1985), 135–162

[M] B. Malgrange, *Integrales asymptotiques et monodromie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974).

[S] M. Saito, *Exponents of an irreducible plane curve singularity*, preprint, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 1982.

[Se] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérent*, Ann. of Math. (2) 61 (1955).

[St] J. H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, in *Proc. Ninth Nordic Summer School, Oslo, 1976*.

[T 1] L. V. Thanh, *Le lemme fondamental de Nilsson dans le cas analytique local*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982).

[T 2] —, *Sur les exposants de bifurcation des courbes planes et quelques applications*, preprint, Series No 9, Hanoi 1982.

[V 1] A. N. Varchenko, *Polygones de Newton et estimations des intégrales oscillatoires*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 3 (1976) (en Russe).

[V 2] —, *Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology*, Math. USSR-Izv. 18 (1982).

[Y] T. Yano, *Exponents of singularities of plane irreducible curves*, Sci. Rep. Saitama Univ. Ser. A 2 (1982).

[Z] O. Zariski. *Le problème des modules les branches planes*, Publ. Centre Math. École Polytechnique 1973.

Presented to the semester
Singularities
15 February–15 June, 1985