POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CLIX

ZBIGNIEW GRANDE

La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$

WARSZAWA 1978

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Soit R l'espace des nombres réels. Désignons par R^2 l'espace produit $R \times R$. Étant donnée une fonction $f\colon R^2 \to R$ et $x_0 \in R$ et $y_0 \in R$ fixés, les fonctions d'une variable $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ et $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$ s'appellent coupes de la fonction f correspondant respectivement à x_0 et y_0.

Il résulte du théorème de Fubini que, quelle que soit la fonction $f\colon R^2 \to R$ mesurable (L) (au sens de Lebesgue), presque toutes les coupes f_x et f^y sont mesurables (L). Cependant le théorème inverse n'est plus vrai (voir Sierpiński [30]). Dans les travaux mathématiques on trouve de nombreuses conditions relatives aux coupes f_x et f^y, qui impliquent la mesurabilité (L) de la fonction f (voir [1], [4]–[16], [20], [22], [24]–[26], et [33]).

En particulier on connaît les suivantes:

la continuité à droite des coupes f_x et la mesurabilité (L) des coupes f^y (voir [25]);

la monotonie des coupes f^y et la mesurabilité (L) des coupes f_x (voir [33]);

la continuité presque partout et la continuité approximative des coupes f_x et la mesurabilité (L) des coupes f^y (voir [25] ou [22]).

Ce qui caractérise les conditions démontrées avant l'année 1972, c'est la continuité presque partout des coupes f_x ou f^y.

En 1972 L. Mišik a posé les deux problèmes suivants:

I. Une fonction $f\colon I^2 \to R$ ($I = [0,1]$ et $I^2 = I \times I$) dont toutes les coupes f_x et f^y ont la propriété de Darboux et sont de première classe de Baire, est-elle mesurable (L)?

II. Une fonction $f\colon I^2 \to R$ dont toutes les coupes f_x et f^y sont approximativement continues est-elle mesurable (L)?

La solution négative du problème I a été donnée par Lipiński dans son article [22] et la solution positive du problème II par Davies dans son article [4]. Dans sa condition Davies, le premier, ne suppose plus que les coupes f_x ou f^y sont presque partout continues.

Or, en usant de la propriété (K) introduite dans mon article [8], j'ai formulé une condition plus faible que celle de Davies, qui est également une condition nécessaire pour la mesurabilité (L) d'une fonction $f\colon R^2 \to R$ dont les coupes f_x ont la propriété (K).

Dans l'article [12] j'ai démontré une autre condition équivalente à la mesurabilité au sens de Lebesgue d'une fonction f: $R^2 \to R$ et dans l'article [26] j'ai donné encore d'autres conditions suffisantes pour la mesurabilité d'une fonction f: $R^n \times R^m \to R$, où R^n et R^m sont les espaces euclidiens à n dimensions et à m dimensions respectivement.

Dans les chapitres I et II de ce travail je généralise les conditions équivalentes des travaux [14] et [12] et les conditions suffisantes des articles [16] et [10] pour la mesurabilité d'une fonction de deux variables, dans le cas où cette fonction est définie sur le produit cartésien de deux espaces métriques dont les mesures satisfont à certaines conditions supplémentaires, et j'affaiblis ces conditions, entre autres en remplaçant la propriété (K) par la propriété (G), qui est plus faible que (K).

D'autre part le Professeur Lipiński a posé le problème suivant:

III. Une fonction f: $R^2 \to R$ dont les coupes f_x et f^y sont des dérivées est-elle mesurable (L)?

La solution de ce problème ne résulte pas immédiatement des conditions antérieures. Dans le cas particulier où la fonction f est bornée, la réponse affirmative est donnée dans l'article [15]. Dans le chapitre III de ce travail je généralise ce résultat dans le cas où la fonction f est définie sur le produit cartésien de deux espaces métriques dont les mesures satisfont à certaines conditions supplémentaires, mais autres que les conditions énoncées dans les chapitres I et II.

Le chapitre IV est consacré à la démonstration d'une condition équivalente à la propriété (G).

Enfin, dans le chapitre V de ce travail je vérifie si les conditions suffisantes pour la mesurabilité (L) de la fonction f: $R^2 \to R$ sont également suffisantes pour la mesurabilité au sens de Lebesgue de la superposition $f(x, g(x))$, quelle que soit la fonction mesurable (L) g: $R \to R$. En particulier, je démontre que les suivantes sont suffisantes:

la mesurabilité (L) de la fonction f et la continuité approximative de toutes les coupes f_x;

la semi-équicontinuité supérieure des coupes f_x et la mesurabilité (L) de toutes les coupes f^y; enfin,

la semi-continuité supérieure de toutes les coupes f_x et la semi-continuité approximative inférieure de toutes les coupes f^y.

En terminant cette introduction, je tiens à exprimer ma vive gratitude au Professeur Lipiński qui m'a interessé à ce sujet et qui a bien voulu m'aider de ses précieux conseils.

CHAPITRE I

Conditions équivalentes à la mesurabilité d'une fonction de deux variables

Soient $(X_1, \varrho_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \varrho_2, \mathscr{M}_2, \mu_2)$ deux espaces polonais aves des mesures σ-finies, G_δ-régulières et complètes μ_1 et μ_2, définies respectivement sur des σ-corps $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ de sous-ensembles X_1 et X_2.

Soient $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{M}_1$ et $\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{M}_2$ deux familles d'ensembles ouverts dans les espaces (X_1, ϱ_1) et (X_2, ϱ_2) respectivement de mesures μ_1 et μ_2 positives.

Une suite $\{J_n\}$ d'ensembles de la famille $\mathscr{F}_1$ $(\mathscr{F}_2)$ est dite convergente au sens $\overset{1}{\Rightarrow}$ $(\overset{2}{\Rightarrow})$ vers un point $x_0 \in X_1$ $(y_0 \in X_2)$ lorsque la suite $\{J_n\}$ est décroissante, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ $(y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n)$ et la suite des diamètres $d(J_n) \to 0$ avec $n \to \infty$.

Nous supposerons dans tout ce travail qu'il existe pour tout point $x \in X_1$ $(y \in X_2)$ une suite $\{J_n\} \subset \mathscr{F}_1$ $(\{J_n\} \subset \mathscr{F}_2)$ convergente au sens $\overset{1}{\Rightarrow}$ $(\overset{2}{\Rightarrow})$ vers le point x (y).[1]

Désignons par μ_1^* et μ_2^* respectivement les mesures extérieures générées par les mesures μ_1 et μ_2.

Fixons $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$, $x_1 \in X_1$ et $y_1 \in X_2$. La borne supérieure (inférieure) de l'ensemble des nombres de la forme

$$\lim_{n\to\infty} \mu_1^*(A_1 \cap J_n)/\mu_1(J_n)$$

pour toutes les suites d'ensembles J_n de la famille $\mathscr{F}_1$, convergentes au sens $\overset{1}{\Rightarrow}$ vers le point x_1, s'appelle densité extérieure supérieure (inférieure) de l'ensemble A_1 au point x_1 par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et dans ce travail elle sera désignée par $D_s^*(x_1, A_1)$ $\big(D_i^*(x_1, A_1)\big)$.

On définit de même la densité extérieure supérieure $D_s^*(y_1, A_2)$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et la densité exterieure inférieure $D_i^*(y_1, A_2)$ par rapport à la même famille.

---

[1] Les couples $(\mathscr{F}_1, \overset{1}{\Rightarrow})$ et $(\mathscr{F}_2, \overset{2}{\Rightarrow})$ sont des exemples de bases de différentation définies par Bruckner dans son travail [2], p. 29–30

Si les densités extérieures $D_s^*(x_1, A_1)$ et $D_i^*(x_1, A_1)$ ($D_s^*(y_1, A_2)$ et $D_i^*(y_1, A_2)$) sont égales, leur valeur commune est dite densité extérieure (tout court) de l'ensemble A_1 (A_2) au point x_1 (y_1) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ ($\mathscr{F}_2$). Si $A_1 \in \mathscr{M}_1$ ($A_2 \in \mathscr{M}_2$), les densités extérieures respectives sont dites densités par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ ($\mathscr{F}_2$) et désignées respectivement par $D_s(x_1, A_1)$, $D_i(x_1, A_1)$ et $D(x_1, A_1)$ ($D_s(y_1, A_2)$, $D_i(y_1, A_2)$ et $D(y_1, A_2)$).

Définition 1. On dit que la famille $\mathscr{F}_1$ ($\mathscr{F}_2$) *a la propriété de densité* lorsque, quel que soit l'ensemble $A_1 \subset X_1$ ($A_2 \subset X_2$), l'ensemble

$$\{x \in A_1 \colon D_i^*(x, A_1) < 1\} \qquad (\{y \in A_2 \colon D_i^*(y, A_2) < 1\})$$

est de mesure μ_1 (μ_2) zéro.

Soit

$$(X_3, \varrho_3, \mathscr{M}_3, \mu_3) = (X_1 \times X_2, \varrho_1 \times \varrho_2, \overline{\mathscr{M}_1 \times \mathscr{M}_2}, \overline{\mu_1 \times \mu_2}),$$

où $\overline{\mu_1 \times \mu_2}$ désigne le complété de la mesure-produit $\mu_1 \times \mu_2$.

Désignons par $\mathscr{F}_3$ la famille

$$\{Z \subset X_3 \colon Z = I \times J, I \in \mathscr{F}_1, J \in \mathscr{F}_2\}$$

et définissons la convergence $\overset{3}{\Rightarrow}$ par la condition:

$$I_n \times J_n \overset{3}{\Rightarrow} (x, y) \quad \text{lorsque} \quad I_n \overset{1}{\Rightarrow} x \text{ et } J_n \overset{2}{\Rightarrow} y.$$

On vérifie facilement qu'il existe pour tout point $(x, y) \in X_3$ une suite d'ensembles $I_n \times J_n \in \mathscr{F}_3$ convergente au sens $\overset{3}{\Rightarrow}$ vers (x, y). Étant fixé un ensemble $A \subset X_3$ on peut définir sa densité extérieure supérieure et inférieure en chaque point $(x, y) \in X_3$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$ et admettre des notations analogues au cas des familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$. De même que dans la définition 1 on formule la propriété de densité de la famille $\mathscr{F}_3$.

Indiquons maintenant quelques exemples de familles d'ensembles qui ont la propriété de densité.

Exemple 1. Soient $X_1 = R$ et μ_1 la mesure de Lebesgue dans R. La famille de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles a la propriété de densité.

Exemple 2. Désignons par R^n l'espace euclidien à n dimensions avec la distance euclidienne et par m_n la mesure de Lebesgue dans R^n. La famille de toutes les sphères ouvertes dans R^n, dont les coordonnées des centres et les rayons sont rationnels, a la propriété de densité.

Exemple 3. Supposons que la famille $\mathscr{F}_1$ satisfasse au théorème de Vitali, c'est-à-dire:

si l'ensemble $A \subset X_1$ est couvert par des ensembles de la famille $\mathscr{F}_1$ de manière qu'il existe pour tout point $x \in A$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble J appartenant à cette couverture tel que $x \in J$ et le diamètre

$d(J) < \varepsilon$, il existe pour tout nombre $\varepsilon_1 > 0$ une suite d'ensembles J_n appartenant à cette couverture telle que

$\mu_1(A - \bigcup_n J_n) = 0$, $J_n \cap J_m = \emptyset$ pour $m \neq n$;

$\mu_1(\bigcup_n J_n - \tilde{A}) < \varepsilon_1$, où $\tilde{A}$ désigne la couverture μ_1-mesurable de l'ensemble A ($\tilde{A} \in \mathcal{M}_1$, $A \subset \tilde{A}$ et $\mu_1^*(\tilde{A} - A) = 0$.

La famille $\mathcal{F}_1$ possède la propriété de densité (voir [2], p. 5 et 31).

Remarque 1. Si $X_1 = R$ et si μ_1 est une mesure G_δ-régulière, complète et telle que tout intervalle est de mesure μ_1 positive, la famille de tous les intervalles d'extrémités rationnelles satisfait au théorème de Vitali (voir [17]). Elle a donc également la propriété de densité.

Exemple 4. Soient $X_1 = R^2$ et $\mu_1 = m_2$. La famille $\mathcal{F}_1$ de tous les intervalles ouverts à 2 dimensions (c'est-à-dire: de tous rectangles ouverts qui ont leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées) a la propriété de densité, mais elle ne satisfait pas au théorème de Vitali (voir [2], p. 4).

Définition 2. Soit $f\colon X_1 \to R$ une fonction. On dit que la fonction f est *approximativement semi-continue supérieurement* (*inférieurement*) *au point* $x_0 \in X_1$ par rapport à la famille $\mathcal{F}_1$ lorsque, quel que soit le nombre $a \in R$, la condition suivante est satisfaite:

Si $f(x) < a$, x est un point de densité de l'ensemble $\{x \in X_1 : f(x) < a,\}$ c'est-à-dire qu'il existe un ensemble $A \subset \{x \in X_1\colon f(x) < a\}$ tel que $A \in \mathcal{M}_1$ et $D(x, A) = 1$.

(Si $f(x) > a$, x est un point de densité de l'ensemble $\{x \in X_1 : f(x) > a\}$).

Si la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement et inférieurement au point $x \in X$ par rapport à la famille $\mathcal{F}_1$, elle est dite *approximativement continue au point* x par rapport à la même famille.

Si la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement (inférieurement) (approximativement continue) en chaque point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathcal{F}_1$, elle est dite (tout court) *approximativement semi-continue supérieurement* (*inférieurement*) (*approximativement continue*) par rapport à la même famille $\mathcal{F}_1$.

Définition 3. On dit qu'une fonction $f\colon X_1 \to R$ *a la propriété* (K) lorsque la fonction f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé $A \subset X_1$ qui a la propriété de Denjoy (c'est-à-dire; pour tout ensemble ouvert $U \subset X_1$, si $U \cap A \neq \emptyset$, on a $\mu_1(U \cap A) > 0$).

Remarque 2. Toutes les fonctions $f\colon X_1 \to R$ de première classe de Baire ont la propriété (K).

Définition 4. On dit qu'une fonction $f\colon X_1 \to R$ *possède la propriété* (G) par rapport à la famille $\mathcal{F}_1$ ayant la propriété de densité, lorsque, quels que soient un ensemble $A \in \mathcal{M}_1$ de mesure μ_1 positive et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $J \in \mathcal{F}_1$ tel que $\mu_1(J \cap A) > 0$ et $\operatorname{osc} f \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble $A \cap J$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à l'ensemble $A \cap J$.

Le théorème suivant est évident:

THÉORÈME 1. *Supposons que la famille $\mathscr{F}_1$ ait la propriété de densité. Si une fonction f: $X_1 \to R$ possède la propriété* (K), *elle possède également la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$.*

Cependant le théorème réciproque n'est pas vrai.

EXEMPLE 5. Soient $X_1 = R$ et μ_1 la mesure de Lebesgue dans R. Supposons que la famille $\mathscr{F}_1$ soit la même que dans l'exemple 1. Soit $A \subset \langle 0, 1 \rangle$ un ensemble fermé, non dense, de mesure μ_1 positive, qui a la propriété de Denjoy. Le complémentaire $R - A$ de l'ensemble A est la somme d'une suite d'intervalles ouverts qui sont dites ses composantes. Désignons ces composantes par (α_n, β_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ et leurs fermetures par $\mathrm{Cl}(\alpha_n, \beta_n)$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cl}(\alpha_n, \beta_n), \\ 1 & \text{lorsque} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cl}(\alpha_n, \beta_n). \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f a la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et qu'elle n'a pas la propriété (K).

DÉFINITION 5. On dit qu'une fonction f: $X_1 \to R$ est *dégénérée au point* $x_0 \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert $U \subset R$ tel que $f(x_0) \in U$ et que x_0 est un point d'éclaircie de l'ensemble $f^{-1}(U)$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$; c'est-à-dire $D_s^*\big(x_0, f^{-1}(U)\big) = 0$.

DÉFINITION 6. On dit qu'une fonction f: $X_1 \to R$, μ_1-mesurable est *non dégénérée positivement au point* $x_0 \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ lorsque, quel que soit l'intervalle ouvert $U \subset R$ tel que $f(x_0) \in U$, on a $D_i\big(x_0, f^{-1}(U)\big) > 0$.

PROPOSITION 1. *Supposons que la famille $\mathscr{F}_1$ possède la propriéta de densité. Si une fonction f: $X_1 \to R$ est μ_1-mesurable et non dégénéréé positivement en tout point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et si elle satisfait à la condition*

(P$_1$) *il existe, pour tout ensemble $F \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 positive et pour tout nombre $\varepsilon > 0$, un ensemble $J \in \mathscr{F}_1$ et un ensemble $Z \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 zéro tels que $\mu_1(J \cap F) > 0$ et $\mathrm{osc} f \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble $(J \cap F) - Z$,*

la fonction f possède la propriété (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction f ne possède pas la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$. Il existe donc un ensemble $F \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 positive et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, quel que soit un ensemble $J \in \mathscr{F}_1$ tel que $\mu_1(J \cap F) > 0$, $\operatorname{osc} f > \varepsilon$ sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble $J \cap F$ appartenant à l'ensemble $J \cap F$. D'autre part la fonction f satisfait à la condition (P_1). Il existe donc un ensemble $J \in \mathscr{F}_1$ et un ensemble $Z \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 zéro tels que $\mu_1(J \cap F) > 0$ et $\operatorname{osc} f \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble $(J \cap F) - Z$. Désignons $\inf\limits_{(J \cap F)-Z} f$ par a et $\sup\limits_{(J \cap F)-Z} f$ par b et posons $c = (a+b)/2$. Remarquons qu'il existe un point $x_0 \in J \cap F$ qui est un point de densité de l'ensemble $J \cap F$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ tel que

$$|f(x_0) - c| > \varepsilon/2.$$

La fonction f étant non dégénérée positivement au point x_0 par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la densité inférieure $D_i(x_0, \{x \in X_1 \colon |f(x) - c| > \varepsilon/2\})$ est positive. Par conséquent, comme de plus $D(x_0, (J \cap F) - Z) = 1$, on a

$$[(J \cap F) - Z] \cap \{x \in X_1 \colon |f(x) - c| > \varepsilon/2\} \neq \emptyset,$$

ce qui contredit le fait que

$$\operatorname*{osc}_{(J \cap F)-Z} f \leqslant \varepsilon$$

et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 2. *Supposons que la famille $\mathscr{F}_1$ possède la propriété de densité. Si une fonction $f \colon X_1 \to R$ est μ_1-mesurable et non dégénérée positivement en tout point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la fonction f a la propriété* (G) *par rapport à cette famille.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction f ne possède pas la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$. Selon la proposition 1 elle ne satisfait pas non plus à la condition (P_1). Il existe donc un ensemble $F \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 positive et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, quel que soit l'ensemble $J \in \mathscr{F}_1$, si $\mu_1(J \cap F) > 0$, on a $\operatorname*{osc}\limits_{(J \cap F)-Z} f > \varepsilon$ pour tout ensemble $Z \in \mathscr{M}_1$ de mesure μ_1 zéro.

Soit x_1 un point de densité de l'ensemble F par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ auquel la fonction f est approximativement continue par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$.(2)

Soit $J_1 \in \mathscr{F}_1$ tel que $x_1 \in J_1$ et que la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in F \colon |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon/8\}$ sur J_1 est plus grande que $1 - (1/2)^1$; c'est-à-dire

$$\mu_1(\{x \in F \colon |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon/8\} \cap J_1)/\mu_1(J_1) > 1 - (1/2)^1.$$

(2) Nous profitons ici du fait que toute fonction μ_1-mesurable est approximativement continue presque partout par rapport à la mesure μ_1 et à la famille $\mathscr{F}_1$. Ce fait résulte de la propriété de densité de la famille $\mathscr{F}_1$.

On vérifie facilement qu'il existe un sous-ensemble μ_1-measurable de l'ensemble $J_1 \cap F$, de mesure μ_1 positive, sur lequel l'inégalité suivante est satisfaite:

$$|f(x)-f(x_1)| \geqslant \varepsilon/2.$$

Soit x_2 un point de ce sous-ensemble tel que la densité (par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$) de ce sous-ensemble au point x_2 existe et est égale à 1 et que la fonction f est approximativement continue (par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$) au point x_2. Remarquons que $|f(x_2)-f(x_1)| \geqslant \varepsilon/2$. Soit $J_2 \in \mathscr{F}_1$ tel que $x_2 \in J_2$, $\mathrm{Cl}(J_2) \subset J_1$ et que la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in F\colon |f(x)-f(x_2)| < \varepsilon/8\}$ sur J_2 est plus grande que $1-(1/2)^2$. En général, le $n^{\text{éme}}$ pas donne un point x_n et un ensemble $J_n \in \mathscr{F}_1$ tels que:

x_n est un point et un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ d'un sous-ensemble μ_1-mesurable de l'ensemble $J_{n-1} \cap F$, de mesure μ_1 positive, sur lequel l'inégalité suivante est satisfaite: $|f(x)-f(x_{n-1})| \geqslant \varepsilon/2$;

la fonction f est approximativement continue (par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$) au point x_n;

$x_n \in J_n$ et $\mathrm{Cl}(J_n) \subset J_{n-1}$;

la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in F\colon |f(x)-f(x_n)| < \varepsilon/8\}$ sur J_n est plus grande que $1-(1/2)^n$; et

la suite de diamètres $d(J_n)$ est convergente vers 0.

On vérifie facilement que $|f(x_n)-f(x_{n-1})| \geqslant \varepsilon/2$. L'espace X_1 étant complet, on a $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$. Désignons par x_0 le point commun de tous les ensembles J_n.

La fonction f étant non dégénérée positivement au point x_0 par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la densité inférieure (par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$) de l'ensemble $\{x \in X_1\colon |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/8\}$ au point x_0 est positive. Désignons cette densité inférieure par a. Remarquons, en outre, que la suite d'ensembles J_n est convergente au sens $\overset{1}{\Rightarrow}$ vers le point x_0. Il existe donc un indice naturel N tel que, quel que soit $n > N$, la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in X_1\colon |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/8\}$ sur J_n est plus grande que $a/2$ et la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in F\colon |f(x)-f(x_n)| < \varepsilon/8\}$ sur J_n est plus grande que $1-a/2$. Ainsi, il existe pour tout $n > N$ un point $t_n \in \{x \in X_1\colon |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon/8\} \cap \{x \in F\colon |f(x)-f(x_n)| < \varepsilon/8\} \cap J_n$. Par conséquent $|f(x_0)-f(x_n)| < \varepsilon/4$ pour tout $n > N$, ce qui est contraire au fait que $|f(x_{n+1})-f(x_n)| \geqslant \varepsilon/2$ et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 3. *Toute fonction $f\colon X_1 \to R$ ayant la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ ayant la propriété de densité est μ_1-mesurable.*

La démonstration du théorème 3 résulte directement du lemme suivant:

LEMME 1 ([3]) (voir [4] et [8]). *Soit* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espace dont la mesure* σ*-finie est* μ. *Supposons qu'une fonction* $f\colon X \to R$ *soit telle que, quel que soit le nombre* $\varepsilon > 0$, *la classe d'ensembles*

$$D_\varepsilon = \{D \in \mathcal{M}\colon \operatorname*{osc}_D f \leqslant \varepsilon\}$$

satisfasse à la condition suivante:

(E) *il existe pour tout ensemble* $A \in \mathcal{M}$ *de mesure* μ *positive un ensemble* $D \in D_\varepsilon$ *tel que* $D \subset A$ *et* $\mu(D) > 0$

Alors la fonction f est $\bar{\mu}$*-mesurable, où* $\bar{\mu}$ *désigne le complété de la mesure* μ.

Nous userons dans ce qui suit des résultats suivants:

LEMME 2. *Supposons que les familles* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *possèdent la propriété de densité. Soit* $A \in \mathcal{M}_3$. *Dans ces hypothèses il existe un ensemble B du type* F_σ *et tel que* $\mu_3(A-B) = 0$ *et* $B \subset +B$; *c'est-à-dire: quel que soit le point* $(x, y) \in B$, *x est un point de densité de la coupe* B^y *par rapport à la famille* $\mathcal{F}_1$ *et y est un point de densité de la coupe* B_x *par rapport à la famille* $\mathcal{F}_2$. $\big(B^y = \{t \in X_1\colon (t, y) \in B\}$ *et* $B_x = \{u \in X_2\colon (x, u) \in B\}\big)$.

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme 2 du travail [21], tandis que celle-ci est analogue à la démonstration du lemme 1 de mon article [12].

LEMME 3. *Conservons les hypothèses du lemme 2. Il existe un ensemble B du type* F_σ *et tel que* $\mu_3(A-B) = 0$ *et* $B \subset \cdot + B$; *c'est-à-dire* $B \subset +B$ *et tout point* $(x, y) \in B$ *est un point de densité de l'ensemble B par rapport à la famille* $\mathcal{F}_3$.

Démonstration. La mesure μ_3 étant G_δ-régulière et la famille $\mathcal{F}_3$ ayant la propriét é de densité, (comme la familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ l'ont ([2], pp. 5 et 34)) il existe un ensemble $A_1 \subset A$ du type F_σ et tel que $\mu_3(A-A_1) = 0$ et tout point $(x, y) \in A_1$ est un point de densité de l'ensemble A_1. D'après le lemme 2 il existe pour l'ensemble A_1 un ensemble B du type F_σ et tel que $\mu_3(A_1-B) = 0$ et $B \subset +B$. On vérifie facilement que tout point de l'ensemble B en est point rapport à la famille $\mathcal{F}_3$, ce qui termine la démonstration. de densité part

PROPOSITION 2. *Si les familles* $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *ont la propriété de densité et si une fonction* $f\colon X_3 \to R$ *est* μ_3*-mesurable, l'ensemble*

$\{(x, y) \in X_3$: f_x *n'est pas approximativement continue au point y ou* f^y *n'est pas approximativement continue au point x par rapport à la famille* $\mathcal{F}_2$ *et* $\mathcal{F}_1$ *respectivement*$\}$

est μ_3*-mesurable de mesure* μ_3 *zéro.*

([3]) Ce lemme a été plus tôt remarqué (comme condition suffisante et nécessaire de mesurabilité de la fonction f) par le Professeur Cz. Ryll-Nardzewski (voir [31], p. 252, Exercice 8).

La démonstration est la même que celle d'une proposition analogue (mais avec d'autres familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$) du travail [21].

Théorème 4. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité et que la famille $\mathscr{F}_2$ soit dénombrable. Soit une fonction $f\colon X_3 \to R$ telle que toutes ses coupes $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ $(x_0 \in X_1, y \in X_2)$ possèdent la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et toutes ses coupes $f^{y_0}(x) = f(x, y_0)$ $(x \in X_1, y_0 \in X_2)$ soient μ_1-mesurables. Pour que la fonction f soit μ_3-mesurable, il faut et il suffit que l'ensemble*

$$A(f) = \{(x, y) \in X_3 \colon f^y \text{ est dégénérée au point } x \text{ par rapport à la famille } \mathscr{F}_1\}$$

soit μ_3-mesurable, de mesure μ_3 zéro.

La démonstration de ce théorème est la même que celle du théorème 1 du travail [21] (celui-ci étant plus faible et concernant d'autres familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$), tandis que cette dernière démonstration est analogue à celle du théorème de mon article [14].

En particulier, si $X_1 = X_2 = R$ et $\mu_1 = \mu_2$ est la mesure de Lebesgue dans R, il résulte des théorèmes 4 et 1 les corollaires suivants:

Corollaire 1 (voir [14], Theorem). *Soit une fonction $f\colon R^2 \to R$ telle que toutes ses coupes f_x ont la propriété* (K) *et toutes ses coupes f^y sont mesurables* (L). *Pour que la fonction f soit mesurable* (L), *il faut et il suffit que l'ensemble $A(f)$ (où $\mathscr{F}_1$ est la famille de l'exemple* 1) *soit mesurable* (L), *de mesure zéro.*

Corollaire 2. *Si toutes les coupes d'une fonction $f\colon R^2 \to R$ ont la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ de l'exemple* 1 *et si toutes ses coupes f^y sont approximativement continues à droite ou à gauche, la fonction f est mesurable* (L).

En appliquant le théorème 4 aux fonctions caractéristiques des ensembles de R^2 on a:

Corollaire 3 (voir [9], théorème). *Soit $A \subset R^2$ un ensemble tel que toutes ses coupes A_x ont la propriété* (G_1) *et toutes ses coupes A^y ont la propriété* (G_2). *Dans ces hypothèses l'ensemble A est mesurable* (L).

Les propriétés (G_1) et (G_2) sont définies comme il suit:

Un ensemble $E \subset R$ *a la propriété* (G_1) lorsque lui ou son complémentaire $R - E$ est la somme d'une famille d'intervalles disjoints deux à deux, où tout ensemble connexe qui contient plus d'un point est dit *intervalle.*

Un ensemble $E \subset R$ *a la propriété* (G_2) lorsqu'il satisfait aux conditions:

(1) E est mesurable (L);

(2) Si $x \in E$, la densité supérieure de l'ensemble E au point x est positive; et

(3) Si $x \in R - E$, la densité supérieure de l'ensemble $R - E$ au point x est positive.

Remarque 3. Remarquons que le corollaire 3 ne résulte pas directement du corollaire 1.

Remarque 4. Dans le théorème 4 on ne saurait remplacer l'hypothèse que les coupes f_x ont la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ par leur μ_2-mesurabilité. En effet, il existe une fonction $f\colon R^2 \to R$ non mesurable (L), dont toutes les coupes f_x sont mesurables (L) (et même approximativement semi-continues supérieurement) et toutes les coupes f^y sont approximativement continues (voir [4] et [5] ou [10], Th. 3).

Formulons maintenant une deuxième condition nécessaire et suffisante pour la mesurabilité d'une fonction de deux variables.

THÉORÈME 5. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité et que la famille $\mathscr{F}_2$ soit dénombrable. Soit une fonction $f\colon X_3 \to R$ telle que toutes ses coupes f_x sont μ_2-mesurables et toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables. Dans ces hypothèses les conditions suivantes sont équivalentes:*

(A) *la fonction f est μ_3-mesurable;*

(B) $\mu_3\big(A(f) \cup B(f)\big) = 0$, *où*

$$A(f) = \{(x, y) \in X_3\colon f^y \text{ est dégénérée au point } x \text{ par rapport à la famille } \mathscr{F}_1\},$$

$$B(f) = \{(x, y) \in X_3\colon f_x \text{ n'est pas approximativement continue au point } y \text{ par rapport à la famille } \mathscr{F}_2\};$$

et

(C) $\mu_3\big(A(f) \cup C(f)\big) = 0$, *où*

$$C(f) = \{(x, y) \in X_3\colon f_x \text{ n'est pas non dégénérée positivement au point } y \text{ par rapport à la famille } \mathscr{F}_2\}.$$

Démonstration. L'implication (A) $\to$ (B) résulte de la proposition 2. L'implication (B) $\to$ (C) est évidente.

Démontrons encore que (C) $\to$ (A). Dans ce but désignons par A l'ensemble $X_3 - \big(A(f) \cup C(f)\big)$. La mesure μ_3 étant G_δ-régulière et σ-finie, il existe une suite d'ensembles fermés A_n de mesure μ_3 positive et finie telle que $A_i \subset A_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ et $\mu_3(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$. Posons, pour tout $n = 1, 2, \ldots$,

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{pour} \quad (x, y) \in A_n, \\ 0 & \text{pour} \quad (x, y) \notin A_n. \end{cases}$$

Afin de démontrer notre théorème il suffit de montrer que toute fonction f_n

est μ_3-mesurable. Dans ce but démontrons qu'elle satisfait à la condition (E) du lemme 1. Fixons un nombre naturel n et un nombre réel $\varepsilon > 0$. Soit un ensemble $E \in \mathscr{M}_3$ tel que $\mu_3(E) > 0$. Désignons par Q l'ensemble des points $x \in X_1$ pour lesquels la coupe $E_x \in \mathscr{M}_2$ et $\mu_2(E_x) > 0$. Il résulte du théorème de Fubini que l'ensemble $Q \in \mathscr{M}_1$ et qu'il est de mesure μ_1 positive. Soient $\{J_i\}$ la suite de tous les ensembles de la famille $\mathscr{F}_2$ et $\{K_i\}$ la suite de tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles dont la longueur est plus petite que ε. Désignons par $Q_{r,s}$ l'ensemble de tous les points $x \in Q$ pour lesquels $\mu_2(J_r \cap E_x) > 0$ et $f_n(x, y) \in K_s$ pour tout point y qui est un point de densité de l'ensemble $E_x \cap J_r$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ appartenant à cet ensemble. Évidemment $\bigcup_{r,s} Q_{r,s} \subset Q$. Démontrons qu'on peut remplacer la dernière inclusion par l'égalité $\bigcup_{r,s} Q_{r,s} = Q$. Dans ce but remarquons que toute coupe $(f_n)_x$ de la fonction f_n a la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$. En effet, étant donné un ensemble $Z \in \mathscr{M}_3$ de mesure μ_2 positive et un nombre $\eta > 0$ étant fixé, deux cas sont à considerer.

Cas I. L'ensemble $Z-(A_n)_x$ est de mesure μ_2 positive. Il existe donc un ensemble $J_r \in \mathscr{F}_2$ tel que $J_r \cap (A_n)_x = \emptyset$, $\mu_2(J_r \cap Z) > 0$ et la fonction partielle $(f_n)_x / J_r \cap Z$ est constante. Il s'ensuit que $\operatorname{osc}(f_n)_x = 0 < \eta$ sur l'ensemble $J_r \cap Z$.

Cas II. $\mu_2(Z-(A_n)_x) = 0$. Dans ce cas tous les points de densité de l'ensemble Z par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ appartiennent à l'ensemble $(A_n)_x$. En appliquant la méthode de la démonstration du théorème 2 à l'ensemble $Z \cap (A_n)_x$, on démontre l'existence d'un ensemble $J \in \mathscr{F}_2$ tel que $\mu_2(J \cap Z) > 0$ et $\operatorname{osc}(f_n)_x \leqslant \eta$ sur l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble $Z \cap J$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ qui appartient à cet ensemble.

Ainsi, toute coupe $(f_n)_x$ possède la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et par conséquent on a $Q = \bigcup_{r,s} Q_{r,s}$. Il existe donc un couple d'indices naturels (r_0, s_0) tel que $\mu_1^*(Q_{r_0,s_0}) > 0$. Désignons par P l'ensemble de tous les points $x \in X_1$ dans lesquels la densité extérieure (par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$) de l'ensemble Q_{r_0,s_0} est égale à 1. La mesure μ_1 étant G_δ-régulière et la famille $\mathscr{F}_1$ ayant la propriété de densité, l'ensemble P est μ_1-mesurable et $\mu_1(P) > 0$. Désignons par B l'ensemble $E \cap (P \times J_{r_0})$. L'ensemble B est μ_3-mesurable et $\mu_3(B) > 0$, car $\mu_2(B_x) > 0$ pour tout point $x \in Q_{r_0,s_0}$. Il existe, d'après le lemme 2, trois ensembles μ_3-mesurables G, H et L tels que $G \subset A_n$, $G \subset + G$, $H \subset X_3 - A_n$, $H \subset + H$, $L \subset B$, $L \subset + L$, $\mu_3(A_n - G) = 0$, $\mu_3(B-L) = 0$ et $\mu_3(X_3 - A_n - H) = 0$. Désignons par M l'ensemble $L \cap (G \cup H)$. Remarquons que $M \subset E$, $M \in \mathscr{M}_3$ et $\mu_3(M) > 0$. Afin d'établir notre théorème, il suffit donc de démontrer que $f_n(x, y) \in K_{s_0}$ pour tout point $(x, y) \in M$. Fixons pour cela un point $(\xi, \eta) \in M$ et un nombre $\delta > 0$. Désignons par a la densité supérieure de l'ensemble $\{x \in X_1\colon |f_n(x, \eta) - f_n(\xi, \eta)| < \delta\}$ au point ξ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$. La coupe $(f_n)^\eta$ étant non dégénérée au point ξ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, on a $\alpha > 0$. Soit un ensemble $I \in \mathscr{F}_1$ tel que $\xi \in I$, la densité moyenne de l'ensemble $\{x \in X_1\colon |f_n(x, \eta) - f_n(\xi, \eta)| < \delta\}$ sur I est plus grande que $3\alpha/4$, la densité moyenne de la coupe M^η sur I plus grande que $1-\alpha/4$ et la densité extérieure moyenne de l'ensemble Q_{r_0, s_0} sur I plus grande que $1-\alpha/4$. Par conséquent ces trois ensembles ont un point commun, que nous désignons par x_0. Remarquons que le point $(x_0, \eta) \in M$. Ainsi, la coupe $M_{x_0} \in \mathscr{M}_2$, $\mu_2(B_{x_0}) > 0$ et η est un point de densité de l'ensemble B_{x_0} par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$. Far conséquent η est un point de densité de l'ensemble E_{x_0} par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$. De plus, $\eta \in J_{r_0}$ et $x_0 \in Q_{r_0, s_0}$, on a donc $f_n(x_0, \eta) \in K_{s_0}$. Il en résulte que la distance du nombre $f_n(\xi, \eta)$ à l'intervalle fermé K_{s_0} est plus petite que δ. Mais le nombre δ étant arbitraire, on a $f_n(\xi, \eta) \in K_{s_0}$, ce qui termine la démonstration.

Dans le note [19] Kamke a démontré que chaque fonction $f\colon R \to R$ approximativement continue presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue) est mesurable (L).

Dans le cas particulier où $X_1 = X_2 = R$, $\mu_1 = \mu_2$ est la mesure de Lebesgue dans R et les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 1, du théorème 5 résulte immédiatement l'analogue suivant du théorème de Kamke:

Corollaire 4. *Soit* $f\colon R^2 \to R$ *une fonction dont toutes les coupes* f_x *et* f^y *sont mesurables* (L). *Si l'ensemble*

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2\colon f_x \text{ n'est pas approximativement continue au point } y \text{ ou } f^y \text{ n'est pas approximativement continue au point } x\}$$

est mesurable (L), *de mesure zéro, la fonction* f *est mesurable* (L).

CHAPITRE II

Conditions suffisantes pour la mesurabilité des fonctions de deux variables

Dans ce chapitre nous démontrons certaines conditions suffisantes pour la mesurabilité des fonctions de deux variables, qui ne résultent pas directement des théorèmes 4 et 5.

THÉORÈME 6. *Supposons que X_2 soit l'espace euclidien à n dimensions. Si toutes les coupes f^y d'une fonction $f\colon X_3 \to R$ sont approximativement semi-continues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et si toutes ses coupes f_x sont semi-continues supérieurement, la fonction f est la limite d'une suite décroissante de fonctions approximativement semi-continues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$.*

Démonstration. Étant fixé un point $(x_0, y_0) \in X_3$, désignons par $M_k(x_0, y_0)$ la borne supérieure de la fonction f_{x_0} sur la sphère ouverte $S(y_0, 1/k)$ de centre y_0 et de rayon $1/k$. Toutes les coupes f_x étant semi-continues supérieurement, on a

$$f(x, y) = \lim_{k\to\infty} M_k(x, y)$$

pour tout point $(x, y) \in X_3$. Comme, de plus, la suite M_k est décroissante, il suffit de démontrer que toutes les fonctions M_k sont approximativement semi-continues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$.

Fixons l'indice k, le point $(x_0, y_0) \in X_3$ et le nombre a tels que $M_k(x_0, y_0) > a$. Démontrons que (x_0, y_0) est un point de densité de l'ensemble $\{(x, y) \in X_3\colon M_k(x, y) > a\}$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$. Posons $\varepsilon = M_k(x_0, y_0) - a$. Il résulte de la définition $M_k(x_0, y_0)$ qu'il existe un point $y_1 \in S(y_0, 1/k)$ tel que

$$(+) \qquad f(x_0, y_1) > M_k(x_0, y_0) - \varepsilon/2.$$

La fonction f^{y_1} étant approximativement semi-continue inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, il existe un ensemble $E \subset X_1$, de mesure μ_1 positive tel que x_0 en est un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et tel que pour tout point $x \in E$ on a

$$(++) \qquad f(x, y_1) > f(x_0, y_1) - \varepsilon/2.$$

Désignons par β la distance du point y_1 à la frontière de la sphère $S(y_0, 1/k)$. Comme $y_1 \in S(y, 1/k)$ pour tout point $y \in S(y_0, \beta)$, on a

$$(+++) \qquad M_k(x, y) > f(x, y_1) \quad \text{pour tout point } y \in S(y_0, \beta)$$

De $(+)$, $(++)$, et $(+++)$ il vient

$$M_k(x, y) > M_k(x_0, y_0) - \varepsilon = a$$

pour tout point $(x, y) \in E \times S(y_0, \beta) = A$. Mais l'ensemble A a la densité 1 au point (x_0, y_0) par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$, la démonstration est donc achevée.

THÉORÈME 7. *Dans les hypothèses du théorème* 6, *si, en outre, la famille* $\mathscr{F}_3$ *possède la propriété de densité, la fonction* f *est* μ_3*-mesurable.*

Démonstration. En effet, la propriété de densité de la famille $\mathscr{F}_3$ implique la μ_3-mesurabilité de toute fonction approximativement semi-continue inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$. Ainsi la fonction f, étant la limite d'une suite de fonctions μ_3-mesurables, est aussi μ_3-mesurable.

Remarque 5. Dans le théorème 7 on ne saurait remplacer la semi-continuité supérieurement de toutes les coupes f_x par leur semi-continuité approximative supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ (voir [10], Théorème 2). On ne peut pas non plus remplacer dans ce théorème l'hypothèse que toutes les coupes f_x sont semi-continues supérieurement et toutes les coupes f^y approximativement semi-continues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ par l'hypothèse que toutes les coupes f_x sont approximativement semi-continues supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et toutes les coupes f^y approximativement continues par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ (voir [10], Théorème 3).

Dans le cas particulier où $X_1 = X_2 = R$ et $\mu_1 = \mu_2$ est la mesure de Lebesgue dans R et les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 1, le théorème 6 devient le théorème 1 de l'article [10].

Pour formuler les conditions suivantes, introduisons deux nouvelles définitions:

Définition 7. Soit $\{h_i\}_{i \in T}$ (T étant un ensemble d'indices) une famille de fonctions réelles définies sur l'ensemble X_1. On dit que les fonctions h_i $(i \in T)$ de cette famille sont *semi-équicontinues supérieurement* (*inférieurement*) *au point* x_0 lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que, quels que soient l'indice $i \in T$ et le point $x \in X_1$, on a:

$$\text{Si } \varrho_1(x, x_0) < \delta \text{ on a } h_i(x) - h_i(x_0) < \varepsilon$$
$$(\text{si } \varrho_1(x, x_0) < \delta, \text{ on a } h_i(x_0) - h_i(x) < \varepsilon),$$

où ϱ_1 désigne la distance dans X_1.

DÉFINITION 8. Soit $\{h_i\}_{i \in T}$ (T étant un ensemble d'indices) une famille de fonctions réelles définies sur l'ensemble X_1. On dit que les fonctions

h_i $(i \in T)$ sont *approximativement équicontinues* (*approximativement semi-équicontinues supérieurement*) (*approximativement semi-équicontinues inférieurement*) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ lorsque, quel que soit le point $x \in X_1$, il existe un ensemble $A(x) \subset X_1$ du type F_σ et tel que $x \in A(x)$, x est un point de densité de l'ensemble $A(x)$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et les fonctions partielles $h_i/A(x)$ sont équicontinues (semi-équicontinues supérieurement) (semi-équicontinues inférieurement) au point x.

THÉORÈME 8. *Soit f: $X_3 \to R$ une fonction. Si toutes les coupes f_x sont approximativement semi-équicontinues supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et si toutes les coupes f^y sont approximativement semi-continues supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$.*

Démonstration. Afin d'établir ce théorème il suffit de démontrer qu'il existe, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout point $(x, y) \in X_3$, un ensemble $C \subset X_3$ du type F_σ et tel que (x, y) en est un point et un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$ et que $f(u, v) - f(x, y) < \varepsilon$ pour tout point $(u, v) \in C$. Fixons un point $(x, y) \in X_3$ et un nombre $\varepsilon > 0$. La coupe f^y étant approximativement semi-continue supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, il existe un ensemble $E \subset X_1$ du type F_σ et tel que $x \in E$, x est un point de densité de l'ensemble E par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et $f(u, y) - f(x, y) < \varepsilon/2$, pour tout point $u \in E$.

D'autre part, les coupes f_x étant approximativement semi-équicontinues supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$, il existe un ensemble $A(y) \subset X_2$ du type F_σ et tel que y en est un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et pour lequel la condition suivante est satisfaite:

$$f(u, v) - f(u, y) < \varepsilon/2$$

pour tout point $u \in E$ et pour tout point $v \in A(y)$.

On vérifie facilement que (x, y) est un point de densité de l'ensemble $C = E \times A(y)$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$ et que tous les points $(u, v) \in C$ satisfont à la condition:

$$f(u, v) - f(x, y) = f(u, v) - f(u, y) + f(u, y) - f(x, y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

d'où notre théorème.

Pour raison de symétrie, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 9. *Soit f: $X_3 \to R$ une fonction. Si toutes les coupes f_x sont approximativement semi-équicontinues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et toutes les coupes f^y approximativement semi-continues inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la fonction f est approximativement semi-continue inférieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_3$.*

Des théorèmes 8 et 9 ensuite on obtient le:

THÉORÈME 10. *Soit f: $X_3 \to R$ une fonction. Si toutes les coupes f_x*

sont approximativement équicontinues par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ *et toutes les coupes* f^y *approximativement continues par rapport à la famille* $\mathscr{F}_1$, *la fonction* f *est approximativement continue par rapport à la famille* $\mathscr{F}_3$.

Il résulte du théorème 7:

COROLLAIRE 5. *Dans les hypothèses des théorèmes* 8, 9 *et* 10, *si, en outre, la famille* $\mathscr{F}_3$ *possède la propriété de densité, la fonction* f *est* μ_3*-mesurable.*

Remarque 6. Dans le cas particulier où $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$ (R^n et R^m étant les espaces euclidiens à n et m dimensions respectivement), μ_1 et μ_2 sont les mesures de Lebesgue dans ces espaces et les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 2, des théorèmes 8 et 10 résultent respectivement les théorèmes 1 et 2 de l'article [16].

Remarque 7. Dans le théorème 10 on ne saurait remplacer l'hypothèse que toutes les coupes f_x sont approximativement équicontinues par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ par leur continuité approximative par rapport à la même famille.

Or, comme on le sait, il existe une fonction $f\colon R^2 \to R$ qui n'est pas de première classe de Baire (donc n'est pas approximativement continue), dont toutes les coupes f_x et f^y sont approximativement continues (Davies [4], Theorem 3).

THÉORÈME 11. *Soit* $f\colon X_3 \to R$ *une fonction. Supposons que les familles* $\mathscr{F}_1$ *et* $\mathscr{F}_2$ *possèdent la propriété de densité. Si toutes les coupes* f_x *sont approximativement équicontinues par rapport à la famille* $\mathscr{F}_2$ *et toutes les coupes* f^y *sont* μ_1*-mesurables, la fonction* f *est* μ_3*-mesurable.*

Démonstration. Afin d'établir ce théorème nous démontrerons que la fonction f satisfait à la condition (E) du lemme 1. Soit $A \in \mathscr{M}_3$ un ensemble tel que $\mu_3(A) > 0$. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. En appliquant le lemme 2 à l'ensemble A, on peut écrire qu'il existe un ensemble $B \subset A$ du type F_σ et tel que $B \subset + B$ et $\mu_3(A-B) = 0$.

Soit $y_0 \in X_2$ un point tel que $\mu_1(B^{y_0}) > 0$. La coupe f^{y_0} étant μ_1-mesurable et la famille $\mathscr{F}_1$ ayant la propriété de densité, il existe un point $x_0 \in B^{y_0}$ auquel la fonction f^{y_0} est approximativement continue par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$. Ainsi, il existe un ensemble $C \subset X_1$ du type F_σ et tel que x_0 en est un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et tel que

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon/4$$

pour tout $x \in C$. Chacun des ensembles C et B^{y_0} a la densité 1 au point x_0 par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, donc leur produit, que nous désignons par D, a la même densité.

D'autre part, toutes les coupes f_x étant approximativement équicontinues par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$, il existe un ensemble $E(y_0) \subset X_2$ du type F_σ et tel que y_0 en est un point et un point de densité par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et l'inégalité

$$|f(x, y)-f(x, y_0)| < \varepsilon/4$$

est satisfaite pour tout $x \in X_1$ et pour tout $y \in E(y_0)$.

Désignons par G l'ensemble $D \times E(y_0)$. On a

$$\begin{aligned}|f(x, y)-f(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x, y)-f(x, y_0)|+|f(x, y_0)-f(x_0, y_0)| \\ &< \varepsilon/4+\varepsilon/4 = \varepsilon/2\end{aligned}$$

pour tout point $(x, y) \in G$. Il en résulte que $\operatorname{osc}_G f \leqslant \varepsilon$.

Désignons ensuite par H l'ensemble $G \cap B$. L'ensemble $H \in \mathscr{M}_3$, car il est le produit de deux ensembles μ_3-mesurables et $\mu_3(H) > 0$, puisque $\mu_2(H_x) > 0$ pour tout point $x \in D$. De plus $H \subset B \subset A$ et $\operatorname{osc}_H f \leqslant \varepsilon$, d'où notre théorème.

Introduisons encore les deux définitions suivantes:

DÉFINITION 9. On dit qu'une fonction f: $X_1 \to R$ est *dégénérée supérieurement au point* $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ lorsqu'il existe un nombre positif δ tel que x est un point d'éclaircie de l'ensemble $f^{-1}([f(x), f(x+\delta)))$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$.

DÉFINITION 10. On dit qu'une fonction f: $X_3 \to R$ *possède la propriété* (P) lorsque, quels que soient le nombre $\varepsilon > 0$ et le point $y \in X_2$, il existe une suite croissante d'ensembles $X_1^i \in \mathscr{M}_1$ et une suite d'ensembles $A^i(y, \varepsilon) \subset X_2$ du type F_σ tels que:

(1) $X_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_1^i$;

(2) $D_s(y, A^i(y, \varepsilon)) > 0$ (la densité supérieure est prise par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et $i = 1, 2, \ldots$);

(3) $f(x, v)-f(x, y) < \varepsilon$ pour tout point $x \in X_1^i$ et pour tout point $v \in A^i(y, \varepsilon)$.

THÉORÈME 12. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité. Soit f: $X_3 \to R$ une fonction. Si la fonction f a la propriété* (P) *et si toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables et non dégénérées supérieurement en tout point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la fonction f est μ_3-mesurable.*

Démonstration. Afin d'établir ce théorème il suffit de démontrer que la fonction f satisfait à la condition (E) du lemme 1. Soit $A \in \mathscr{M}_3$ un ensemble tel que $\mu_3(A) > 0$. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la fonction f est bornée, car dans le cas contraire il suffit de considérer la fonction arc tg f, qui satisfait également aux hypothèses du théorème 12. Désignons par a l'infimum essentiel $\operatorname*{inf\,ess}_{(x,y)\in A} f(x, y)$ et par B l'ensemble $A-\{(x, y) \in A: f(x, y) < a\}$. En s'appuyant sur le lemme 2, nous remarquons qu'il existe un ensemble $C \subset B$ du type F_σ tel que $C \subset + C$ et $\mu_3(B-C) = 0$. Évidemment $\mu_3(A-C) = 0$. Désignons par D l'ensemble $\{(x, y) \in C: f(x, y) < a+\varepsilon/2\}$. Remarquons que $\mu_3^*(D) > 0$. De plus, toutes les coupes f^y étant non dégénérées supérieurement en tout point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, toutes les coupes D^y de l'ensemble D sont vides ou de mesure μ_1 positive. Soit $(x, y) \in C$ un point. La fonction f ayant la propriété (P) et $(x, y) \in C$, il existe deux ensembles $X_1^i \in \mathscr{M}_1$ et $A^i(y, \varepsilon/2) \subset X_2$ tels que l'ensemble $A^i(y, \varepsilon/2)$ est du type F_σ, $\mu_1(D^y \cap X_1^i) > 0$, $D_s(y, A^i(y, \varepsilon/2)) > 0$ (par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$) et

$$f(u, v)-f(u, y) < \varepsilon/2$$

pour tout point $u \in X_1^i$ et pour tout point $v \in A^i(y, \varepsilon/2)$. Désignons par G l'ensemble $C \cap [(X_1^i \cap D^y) \times A^i(y, \varepsilon/2)]$. L'ensemble $G \in \mathscr{M}_3$, puisqu'il est le produit de deux ensembles μ_3-mesurables et que sa mesure μ_3 est positive, car $\mu_2(G_x) > 0$ pour tout point $x \in X_1^i \cap D^y$. On a, en outre, pour tout point $(u, v) \in G$ l'inégalité suivante:

$$a \leqslant f(u, v) < f(u, y)+\varepsilon/2 < \varepsilon/2+a+\varepsilon/2 = a+\varepsilon,$$

qui signifie que $\operatorname*{osc}_G f \leqslant \varepsilon$ et la démonstration du théorème 12 est achevée.

Du théorème 12 résulte directement le:

THÉORÈME 13. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité. Si toutes les coupes f_x d'une fonction f: $X_3 \to R$ sont approximativement semi-équicontinues supérieurement par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ et toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables et non dégénérées supérieurement en tout point $x \in X_1$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, la fonction f est μ_3-mesurable.*

Remarque 8. Dans le cas particulier où $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$, μ_1 et μ_2 sont les mesures de Lebesgue dans ces espaces et les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 2, des théorèmes 11 et 13 résultent respectivement les théorèmes 3 et 4 de mon article [16].

THÉORÈME 14. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité. Si une fonction f: $X_3 \to R$ a la propriété* (P) *et si toutes ses coupes f_x sont semi-continues supérieurement et toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables, la fonction f est μ_3-mesurable.*

Démonstration. Afin d'établir ce théorème il suffit de démontrer que la fonction f satisfait à la condition (E) du lemme 1. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f est bornée. Soit $A \in \mathscr{M}_3$ un ensemble de mesure μ_3 positive. Fixons le nombre $\varepsilon > 0$. Désignons par a l'infimum essentiel $\operatorname*{inf\,ess}_{(x,y)\in A} f(x, y)$ et par B l'ensemble $A - \{(x, y) \in A: f(x, y) < a\}$. Il existe, d'après le lemme 2, un ensemble $C \subset B$ du type F_σ et tel que $\mu_3(B-C) = 0$ et $C \subset +C$. Évidemment $\mu_3(A-C) = 0$. Soit

$D = \{(x, y) \in C\colon f(x, y) < a + \varepsilon/4\}$. Remarquons que $\mu_3^*(D) > 0$. Soit $\{S_n\}$ la suite de tous les ensembles ouverts d'une base dénombrable de l'espace X_2. Les coupes f_x étant semi-continues supérieurement, à chaque point $(x, y) \in D$ correspond un ensemble ouvert $S_n(x, y)$ de la suite $\{S_n\}$ tel que $y \in S_n(x, y)$ et $f(x, v) < a + \varepsilon/2$ pour tout point $v \in S_n(x, y)$. Il existe donc un ensemble $S_{n_0}(x, y) \in \{S_n\}$ tel que

$$\mu_3\big(\{(x, y) \in D\colon \text{au point } (x, y) \text{ correspond } S_{n_0}(x, y)\}\big) > 0.$$

Désignons par G la projection parallèle à l'espace X_2 de l'ensemble

$$L = \{(x, y) \in D\colon \text{au point } (x, y) \text{ correspond } S_{n_0}(x, y)\}.$$

Remarquons que $\mu_1^*(G) > 0$. Soit $(x, y) \in L$. La coupe f^y étant μ_1-mesurable, on a

$$H = \{x \in C^y\colon f^y(x) < a + \varepsilon/2\} \in \mathscr{M}_1 \quad \text{et} \quad \mu_1(H) > 0,$$

puisque $G \subset H$.

D'autre part, la fonction f ayant la propriété (P), il existe deux ensembles $X_1^i \in \mathscr{M}_1$ et $A^i(y, \varepsilon/2) \subset X_2$ tels que $A^i(y, \varepsilon/2)$ est du type F_σ, la densité supérieure de l'ensemble $A^i(y, \varepsilon/2)$ au point y par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ est positive, $\mu_1(H \cap X_1^i) > 0$ et

$$f(u, v) - f(u, y) < \varepsilon/2$$

pour tout point $u \in X_1^i$ et pour tout point $v \in A^i(y, \varepsilon/2)$. Supposons, encore, que $\mu_3^*\big((H \cap X_1^i) \times A^i(y, \varepsilon/2) \cap L\big) > 0$. Remarquons ensuite que l'ensemble

$$M = C \cap [(X_1^i \cap H) \times A^i(y, \varepsilon/2)]$$

est μ_3-mesurable comme produit de deux ensembles appartenant à $\mathscr{M}_3$ et que sa mesure μ_3 est positive, car il contient un sous-ensemble de mesure extérieure positive. De plus, pour tout point $(u, v) \in M$ on a

$$a \leqslant f(u, v) < f(u, y) + \varepsilon/2 < a + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = a + \varepsilon,$$

qui signifie que $\operatorname*{osc}_M f \leqslant \varepsilon$ et la démonstration est achevée.

Du théorème 14 résulte directement le:

Théorème 15. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité. Si toutes les coupes f_x d'unefonction $f\colon X_3 \to R$ sont semi-équicontinues supérieurement et toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables, la fonction f est μ_3-mesurable.*

Remarque 9. Dans le cas particulier où $X_1 = R^n$, $X_2 = R^m$, μ_1 et μ_2 sont respectivement les mesures de Lebesgue dans ces espaces et les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 2, le théorème 15 a été déjà démontré dans l'article [16], (Théorème 5).

CHAPITRE III

Mesurabilité des fonctions de deux variables dont les coupes sont des dérivées

Soit $(X_4, \varrho_4, \mathcal{M}_4, \mu_4)$ un espace métrique avec une mesure μ_4 définie sur un σ-corps $\mathcal{M}_4$ d'ensembles de cet espace, qui est σ-finie, complète, G_δ-régulière et sansatomique.

Définition 11. Une famille $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_4$ est dite *structure de cellules* de l'espace $(X_4, \varrho_4, \mathcal{M}_4, \mu_4)$ lorsque les cinq conditions suivantes sont satisfaites:

(a) $0 < \mu_4(A) < \infty$ pour tout ensemble $A \in \mathcal{N}$;

(b) si $A_1 \in \mathcal{N}$ et $A_2 \in \mathcal{N}$, on a $A_1 \subset A_2$ ou $A_2 \subset A_1$ ou $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

(c) la famille $\mathcal{N}$ est dénombrable;

(d) il existe pour tout ensemble $A \in \mathcal{N}$ un nombre au plus fini d'ensembles de la famille $\mathcal{N}$ qui contiennent A;

(e) il existe pour tout point $x \in X_4$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble $A \in \mathcal{N}$ tel que $x \in A$ et $\mu_4(A) < \varepsilon$.

On sait que, quel que soit l'espace $(X_4, \varrho_4, \mathcal{M}_4, \mu_4)$ satisfaisant à notre hypothèse et dont la mesure μ_4 est séparable, il existe une structure de cellules de l'espace $(X_4, \varrho_4, \mathcal{M}_4, \mu_4)$ qui satisfait au théorème de Vitali (voir [2], p. 35).

Exemple 6. Considérons l'espace euclidien à n dimensions avec la mesure de Lebesgue m_n. La famille de tous les intervalles fermés à gauche $N_r(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots$ et $i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ définie par la relation:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in N_r(i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

$$\text{lorsque} \quad 2^{-r} i_j \leqslant x_j < 2^{-r}(i_j + 1) \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

est une structure de cellules.

D'autres exemples de structures de cellules dans des espaces métriques de dimension finie et dans espaces ultramétriques ont été donnés dans le livre [28] aux pages 101–106.

Les éléments de la structure de cellules sont dits cellules. Il résulte de la définition 11 qu'il existe pour tout point $x \in X_4$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) $\{N_k\}$ de cellules de la structure $\mathcal{N}$ contenant le point x. Une telle suite $\{N_k\}$ sera dite *convergente au sens* $\overset{4}{\Rightarrow}$ vers le point x. ($N_k \overset{4}{\Rightarrow} x$). Remarquons que toutes les définitions qui se rapportent aux familles $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ont lieu également dans le cas de la structure de cellules.

Supposons maintenant qu'il existe dans l'espace $(X_4, \varrho_4, \mathcal{M}_4, \mu_4)$ une structure de cellules $\mathcal{N}$.

Introduisons encore la définition suivante:

DÉFINITION 12. Une fonction $f\colon X_4 \to R$ sommable par rapport à la mesure μ_4 sur toute cellule A de la structure $\mathcal{N}$ est dite *fonction dérivée au point* $x \in X_4$ par rapport à la famille $\mathcal{N}$ lorsqu'on a l'égalité

$$\lim_{k\to\infty}[1/\mu_4(N_k)] \int_{N_k} f d\mu_4 = f(x)$$

pour toute suite N_k de cellules de la structure $\mathcal{N}$ convergente au sens $\overset{4}{\Rightarrow}$ vers x.

Si $f\colon X_4 \to R$ est une fonction dérivée en chaque point $x \in X_4$ par rapport à la famille $\mathcal{N}$, elle est dite *fonction dérivée* par rapport à la même structure.

Soit $(X_5, \mathcal{M}_5, \mu_5)$ un espace avec une mesure μ_5.

Désignons par $(X_6, \mathcal{M}_6, \mu_6)$ l'espace-produit

$$(X_4 \times X_5, \overline{\mathcal{M}_4 \times \mathcal{M}_5}, \overline{\mu_4 \times \mu_5}).$$

DÉFINITION 13. On dit qu'une fonction $f\colon X_6 \to R$ *possède la propriété* (J) lorsque toutes ses coupes f_x sont μ_5-mesurables, toutes ses coupes f^y sont μ_4-mesurables et, quel que soit un ensemble $A \in \mathcal{N}$, la fonction

$$g_A(y) = \int_A f(x, y)\, d\mu_4$$

est μ_5-mesurable.

THÉORÈME 16. *Si une fonction $f\colon X_6 \to R$ possède la propriété* (J) *et si toutes ses coupes f^y sont des dérivées par rapport à la structure de cellules $\mathcal{N}$ sommables sur toute cellule de $\mathcal{N}$ par rapport à la mesure μ_4, la fonction f est μ_6-mesurable.*

La démonstration de ce théorème est la même que celle de mon théorème (relatif aux fonctions bornées) 4.3 du travail [12], qui généralise un théorème de Lipiński [22].

DÉFINITION 14. On dit que la famille $\mathcal{F}_2$ *possède la propriété* (R) lorsque, quelles que soient deux suites $\{I_i\}$ et $\{I'_i\}$ d'ensembles de la famille $\mathcal{F}_2$ convergentes au sens $\overset{2}{\Rightarrow}$ vers un point $x \in X_2$, tous les produits $I_i \cap I'_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à la famille $\mathcal{F}_2$.

LEMME 4. *Supposons que la famille $\mathcal{F}_2$ soit dénombrable et possède la propriété* (R). *Soit $A \in \mathcal{M}_3$ un ensemble de mesure μ_3 positive et tel que toutes ses coupes $A_x \in \mathcal{M}_2$. Soit $y_0 \in X_2$ un point tel que $A^{y_0} \in \mathcal{M}_1$, $\mu_1(A^{y_0}) < \infty$ et quel que soit le point $x \in A^{y_0}$, y_0 est un point de densité de la coupe A_x par rapport à la famille $\mathcal{F}_2$. Dans ces hypothèses, il existe pour tout nombre positif δ un ensemble $B \in \mathcal{M}_2$ de mesure μ_2 positive et tel que, quel que soit le point $y \in B$, la coupe $A^y \in \mathcal{M}_1$ et*

$$\mu_1(A^y) > \mu_1(A^{y_0}) - \delta.$$

Démonstration. Fixons un nombre $\delta > 0$. Posons $\delta_1 = \delta/\mu_1(A^{y_0})$. À chaque point $x \in A^{y_0}$ correspond un ensemble ouvert $L(x) \in \mathcal{F}_2$ contenant y_0 et tel que

$$\mu_2(L \cap A_x) > (1 - \delta_1/2)\mu_2(L) \tag{1}$$

pour tout ensemble ouvert $L \in \mathcal{F}_2$ contenant y_0 et contenu dans $L(x)$. La famille d'ensembles ouverts $\{L(x)\}$, $x \in A^{y_0}$, étant dénombrable, on peut la ranger en une suite $\{L_1, L_2, \ldots\}$. Désignons par A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble

$$\{x \in A^{y_0}\text{: au point } x \text{ correspond un ensemble ouvert } L_i\}.$$

Comme $A^{y_0} = \bigcup_i A_i$, il existe un nombre naturel N tel que

$$\mu_1^*\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) > (1 - \delta_1/2)\mu_1(A^{y_0}).$$

Posons $L = \bigcap_{i=1}^{N} L_i$. La famille $\mathcal{F}_2$ ayant la propriété (R), on a $L \in \mathcal{F}_2$. De plus $y_0 \in L$ et $L \subset L_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, N$, l'inégalité (1) a donc lieu pour l'ensemble L. Désignons par D l'ensemble $(X_1 \times L) \cap A$. L'ensemble D est μ_3-mesurable et

$$\begin{aligned}\mu_3(D) &> (1 - \delta_1/2)\mu_2(L)\mu_1^*\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) \\ &> (1 - \delta_1/2)^2\mu_2(L)\mu_1(A^{y_0}),\end{aligned}$$

car $\mu_2(D_x) > (1 - \delta_1/2)\mu_2(L)$ pour tout point $x \in \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ et $\mu_1^*\Big(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\Big) > (1 - \delta_1/2)\mu_1(A^{y_0})$. Comme, de plus, $(1 - \delta_1/2)^2 > (1 - \delta_1)$, on a donc

$$\mu_3(D) > (1 - \delta_1)\mu_1(A^{y_0})\mu_2(L). \tag{2}$$

Supposons, au contraire, que

$$\mu_1(A^y) \leqslant \mu_1(A^{y_0}) - \delta = \mu_1(A^{y_0}) - \delta_1\mu_1(A^{y_0}) = (1 - \delta_1)\mu_1(A^{y_0})$$

pour presque tous (relativement à la mesure μ_2) les points $y \in L$. On aurait par conséquent

$$\mu_3(D) = \int_L \mu_1(D^y)\,d\mu_2 \leqslant \int_L \mu_1(A^y)\,d\mu_2 \leqslant (1 - \delta_1)\mu_1(A^{y_0})\mu_2(L),$$

ce qui est contraire à l'inégalité (2) et la démonstration du lemme 4 est achevée.

THÉORÈME 17. *Supposons que les familles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ont la propriété de densité, que la famille $\mathcal{F}_2$ a, en outre, la propriété* (R) *et que la famile $\mathcal{F}_2$ soit dénombrable. Soit $M \in \mathcal{M}_1$ un ensemble de mesure μ_1 positive et finie. Soit $f\colon X_3 \to R$ une fonction bornée et telle que toutes ses coupes f_x ont la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathcal{F}_2$ et toutes ses coupes f^y sont μ_1-mesurables. Dans ces hypothèses la fonction*

$$g_M(y) = \int_M f(x, y)\, d\mu_1$$

est μ_2-mesurable.

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que l'ensemble M est borelien. Nous démontrerons que la fonction g_M satisfait à la condition (E) du lemme 1. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Soit $A \in \mathcal{M}_2$ un ensemble de mesure μ_2 positive et finie. Nous définirons par induction transfinie deux suites transfinies $\{E_a\}$ et $\{L_a\}$ telles que les six conditions suivantes soient satisfaites:

(1) tout ensemble $E_a \subset M \times A$ et tout $L_a \in \mathcal{F}_2$;

(2) tout ensemble E_a est borelien et de mesure μ_3 positive;

(3) $E_a \cap E_\beta = \emptyset$ pour $a \neq \beta$;

(4) si $(x, y) \in E_a$, y est un point de densité de la coupe $(E_a)_x$ par rapport à la famille $\mathcal{F}_2$;

(5) la projection $P(E_a)$ (parallèle à l'axe X_2) de tout ensemble E_a contient un sous-ensemble C_a tel que $\mu_1^*(C_a) = \mu_1\big(P(E_a)\big)$ et $\operatorname{osc}_{L_a \cap (E_a)_x} f_x \leqslant \varepsilon/2\mu_1(M)$ pour tout point $x \in C_a$;

(6) $$\mu_3\Big((M \times A) - \bigcup_a E_a\Big) = 0.$$

Soit $A_1 \subset A$ un ensemble du type F_σ tel que $\mu_2(A_1) = \mu_2(A)$ et tout point $y \in A_1$ est un point de densité de l'ensemble A_1 par rapport à la famille $\mathcal{F}_2$. Posons $B = M \times A_1$. Toutes les coupes f_x ayant la propriété (G) par rapport à la famille $\mathcal{F}_2$, on peut faire correspondre à chaque point $x \in M$ un ensemble ouvert $L_x^1 \in \mathcal{F}_2$ tel que $\mu_2(L_x^1 \cap A_1) > 0$ et $\operatorname{osc} f_x \leqslant \varepsilon/2\mu_1(M)$ sur l'ensemble $L_x^1 \cap A_1$. La famille d'ensembles ouverts $\{L_x^1\}$, $x \in M$, étant dénombrable, nous la rangeons en une suite

$$\{L_1^1, L_2^1, \ldots\}.$$

Posons

$$C_i^1 = \{x \in M\colon \text{au point } x \text{ correspond l'ensemble ouvert } L_i^1\}.$$

Il résulte de l'égalité $M = \bigcup_i C_i$ qu'il existe un indice naturel $i(1)$ tel que $\mu_1^*(C_{i(1)}^1) > 0$. Soit D_1 un ensemble borelien tel que $M \supset D_1 \supset C_{i(1)}^1$

et $\mu_1(D_1) = \mu_1^*(C^1_{i(1)})$. Désignons par L_1 l'ensemble $L^1_{i(1)}$ et par E_1 l'ensemble $D_1 \times (L_1 \cap A_1)$. On vérifie facilement que les ensembles E_1 et L_1 satisfont aux conditions (1)–(5).

Soit $\alpha > 1$ un nombre transfini. Supposons que tous les ensembles E_β et $L_\beta \in \mathscr{F}_2$ soient déjà définis pour $\beta < \alpha$ et qu'ils satisfassent aux conditions (1)–(5). Supposons, en outre, que $\mu_3\big(B - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta\big) > 0$. Désignons par F_1 l'ensemble $B - \bigcup_{\beta<\alpha} E_\beta$. D'après le lemme 2 il existe pour l'ensemble F_1 un ensemble $F \subset F_1$ du type F_σ et tel que $\mu_3(F) = \mu_3(F_1)$ et $F \subset + F$. Désignons par G la projection parallèle à l'espace X_2 de l'ensemble F. Toutes les coupes f_x possédant la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$, à chaque point $x \in G$ correspond un ensemble ouvert $L^\alpha_x \in \mathscr{F}_2$ tel que $\mu_2(L^\alpha_x \cap F_x) > 0$, $\operatorname{osc} f_x \leqslant \varepsilon/2\mu_1(M)$ sur l'ensemble $L^\alpha_x \cap F_x$. Soit

$$\{L^\alpha_1, L^\alpha_2, \ldots\}$$

la suite de tous les ensembles de la famille $\{L^\alpha_x\}_{x\in G}$.

Désignons par C^α_i l'ensemble

$$\{x \in G\colon \text{au point } x \text{ correspond l'ensemble } L^\alpha_i\}.$$

Il résulte de l'égalité $G = \bigcup_i C^\alpha_i$ qu'il existe un indice naturel $i(\alpha)$ tel que $\mu_1^*(C^\alpha_{i(\alpha)}) > 0$. Soit D_α un ensemble borelien tel que $G \supset D_\alpha \supset C^\alpha_{i(\alpha)}$ et $\mu_1(D_\alpha) = \mu_1^*(C^\alpha_{i(\alpha)})$. Désignons par L_α l'ensemble ouvert $L^\alpha_{i(\alpha)}$ et par E_α l'ensemble $(D_\alpha \times L_\alpha) \cap F$. Les ensembles E_α et L_α satisfont aux conditions (1)–(5) (lorsqu'on admet que $C^\alpha_{i(\alpha)} = C_\alpha$).

La mesure μ_3 étant σ-finie, il résulte des conditions (3) et (6) que la famille d'ensembles $\{E_\alpha\}_\alpha$ est dénombrable. Par conséquent l'ensemble $\bigcup_\alpha E_\alpha$ est borelien et en outre on a, d'après la condition (6),

$$\mu_3\big((M \times A) - \bigcup_\alpha E_\alpha\big) = 0.$$

Désignons par H_1 l'ensemble

$$\{y \in A\colon \mu_1\big((\bigcup_\alpha E_\alpha)^y\big) = \mu_1(M)\}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble $H_1 \in \mathscr{M}_2$ et que $\mu_2(H_1) > 0$. Fixons un point $y_0 \in H_1$. Soit

$$\{E^1, E^2, \ldots\}$$

la suite de tous les ensembles de la famille $\{E_\alpha\}_\alpha$ dont les coupes $(E_\alpha)^{y_0}$ sont de mesure μ_1 positive. À chaque ensemble E^i correspond, d'après la condition (5), un ensemble de la famille $\{L_\alpha\}_\alpha$ que nous désignons par L^i. Soit M_1 un nombre tel que $|f(x, y)| \leqslant M_1$ pour tout $(x, y) \in M \times A$. De l'égalité

$$\sum_i \mu_1\big((E^i)^{y_0}\big) = \mu_1(M)$$

il résulte qu'il existe un indice naturel k tel que

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_1\big((E^i)^{y_0}\big) > \mu_1(M) - \varepsilon/8M_1.$$

Posons $L = \bigcap_{i=1}^{k} L^i$. La famille $\mathscr{F}_2$ ayant la propriété (R), l'ensemble L appartient également à $\mathscr{F}_2$. En outre $y_0 \in L$ et $L \subset L^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

Soit

$$H = \bigcup_{i=1}^{k} \big[\big((E^i)^{y_0} \times L\big) \cap E^i\big].$$

Remarquons que l'ensemble H et sa coupe H^{y_0} satisfont aux hypothèses du lemme 4. Il existe donc, d'après ce lemme, un ensemble $H_2 \subset A \cap L$, μ_2-mesurable, de mesure μ_2 positive et tel que

$$\mu_1(H^y) > \mu_1(M) - \varepsilon/8M_1$$

pour tout point $y \in H_2$.

Désignons par C^i un ensemble qui correspond à l'ensemble E^i en vertu de la condition (5) ($i = 1, 2, \ldots$) et par H_3 la somme $\bigcup_{i=1}^{k} C^i$. Soit $y_1, y_2 \in H_2$.

Remarquons que

$$\mu_1^*(H^{y_1} \cap H_3) = \mu_1(H^{y_1}) > \mu_1(M) - \varepsilon/8M_1$$

et

$$\mu_1^*(H^{y_2} \cap H_3) = \mu_1(H^{y_2}) > \mu_1(M) - \varepsilon/8M_1.$$

Par conséquent

$$\mu_1^*(H^{y_1} \cap H^{y_2} \cap H_3) \geqslant \mu_1(M) - \varepsilon/4M_1.$$

D'autre part, l'ensemble

$$H_4 = \{x \in M\colon\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant \varepsilon/2\mu_1(M)\}$$

est μ_1-mesurable et il contient, comme sous-ensemble, l'ensemble $H^{y_1} \cap \cap H^{y_2} \cap H_3$ (condition (5)). On a donc

$$\mu_1(H_4) \geqslant \mu_1(M) - \varepsilon/4M_1.$$

Par conséquent, les inégalités suivantes ont lieu:

$$\begin{aligned}
|g_M(y_1) - g_M(y_2)| &= \Big|\int_M f(x, y_1)\,d\mu_1 - \int_M f(x, y_2)\,d\mu_1\Big| \\
&= \Big|\int_M \big(f(x, y_1) - f(x, y_2)\big)\,d\mu_1\Big| \leqslant \int_M |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,d\mu_1 \\
&= \int_{H_4} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,d\mu_1 + \int_{M-H_4} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|\,d\mu_1 \\
&\leqslant \big(\varepsilon/2\mu_1(M)\big)\mu_1(H_4) + 2M_1\mu_1(M - H_4) \leqslant \varepsilon/2 + (\varepsilon/4M_1)2M_1 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

y_1 et y_2 étant des points arbitraires de l'ensemble H_2, on a donc $\operatorname{osc}_{H_2} g_M \leqslant \varepsilon$, d'où notre théorème.

Remarque 10. Dans le théorème 17 on ne saurait remplacer la propriété (G) des coupes f_x par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ par leur μ_2-mesurabilité (voir Remarque 4 et Théorème 16).

Remarque 11. Dans le théorème 17 il est permis de remplacer l'hypothèse que la fonction f est bornée par la sommabilité par rapport à la mesure μ_1 de toutes les coupes f^y de la fonction f.

Démonstration. En effet, en posant

$$f_n(x, y) = \begin{cases} n & \text{lorsque} \quad f(x, y) \geqslant n, \\ f(x, y) & \text{lorsque} \quad -n < f(x, y) < n, \\ -n & \text{lorsque} \quad f(x, y) \leqslant -n, \end{cases}$$

et

$$g_{M,n}(y) = \int\limits_M f_n(x, y)\, d\mu_1,$$

on a

$$g_M(y) = \lim_{n\to\infty} g_{M,n}(y).$$

D'après le théorème 17 toutes les fonctions $g_{M,n}$ sont μ_2-mesurables, la fonction g_M l'est donc aussi.

Des théorèmes 16 et 17 et de la remarque 11 on obtient le:

THÉORÈME 18. *Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ possèdent la propriété de densité, la famille $\mathscr{F}_2$ soit dénombrable et possède la propriété* (R). *Supposons, en outre, qu'il existe dans l'espace $(X_1, \varrho_1, \mathscr{M}_1, \mu_1)$ une structure de cellules $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}_1$. Dans ces hypothèses, si une fonction $f: X_3 \to R$ est telle que toutes ses coupes f^y sont sommables par rapport à la mesure μ_1 et sont des dérivées par rapport à la structure de cellules $\mathscr{N}$ et si toutes ses coupes f_x possèdent la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$, la fonction f est μ_3-mesurable.*

En particulier, de ce théorème on obtient le:

THÉORÈME 19. *Soient (X_1, ϱ_1) et (X_2, ϱ_2) les espaces euclidiens à n et m dimensions respectivement. Supposons que les familles $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ soient les mêmes que dans l'exemple 2. Dans ces hypothèses, si une fonction f: $X_3 \to R$ est telle que toutes ses coupes f^y sont des dérivées par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ sommables par rapport à la mesure m_n et si toutes ses coupes f_x sont des dérivées par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$* [4], *la fonction f est m_{n+m}-mesurable.*

---

[4] Une fonction g: $X_2 \to R$ sommable sur tout ensemble de la famille $\mathscr{F}_2$ est dite *fonction dérivée* par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ lorsqu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ [1/\mu_2(J_n)] \int\limits_{J_n} g\, d\mu_2 \right\} = g(x)$$

pour toute suite d'ensembles $J_n \in \mathscr{F}_2$ convergente au sens $\overset{2}{\Rightarrow}$ vers le point x.

Démonstration. La démonstration résulte du théorème 18. Dans ce but remarquons que toute fonction dérivée par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$ est de premiére classe de Baire et par conséquent elle a la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_2$, et que toute fonction dérivée par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ est aussi une fonction dérivée par rapport à la structure de cellules $\mathscr{N}$ définie dans l'exemple 6.

THÉORÈME 20. *Dans les hypothèses du théorème* 19, *si, en outre, la fonction f est bornée, elle est de deuxième classe de Baire* .

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 2 de la note [4].

Dans le cas particulier où $X_1 = X_2 = R$, $\mu_1 = \mu_2$ est la mesure de Lebesgue dans R et $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$ sont les mêmes que dans l'exemple 1 on obtient des théorèmes 18, 19 et 20 les théorèmes 1, 2 et 3 de ma note [15]

CHAPITRE IV

Caractérisation des fonctions ayant la propriété (G)

DÉFINITION 15. On dit qu'une fonction $f\colon X_1 \to R$ *a la propiriété* (G_1) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, ayant la propriété de densité, lorsqu'il existe une suite transfinie d'ensembles ouverts $G_\alpha \in \mathscr{F}_1$ ($\alpha < \alpha_0$ et α_0 étant un nombre transfini dénombrable) telle que les trois conditions suivantes soient satisfaites:

(1) $\mu_1\big((X_1 - \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta) \cap G_\alpha\big) > 0$ pour tout nombre transfini $\alpha < \alpha_0$;

(2) $\mu_1\big(X_1 - \bigcup_{\alpha<\alpha_0} G_\alpha\big) = 0$;

(3) la fonction f est constante sur l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble $G_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à cet ensemble, quel que soit le nombre transfini $\alpha < \alpha_0$.

THÉORÈME 21. *Si une fonction $f\colon X_1 \to R$ a la propriété* (G_1) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, ayant la propriété de densité, elle a également la propriété* (G) *par rapport à la même famille.*

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_1$ un ensemble de mesure μ_1 positive. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Soit $\alpha_1 < \alpha_0$ le premier nombre transfini tel que $\mu_1(A \cap G_{\alpha_1}) > 0$. L'ensemble des points de densité de l'ensemble $A \cap G_{\alpha_1}$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à cet ensemble est contenu dans l'ensemble des points de densité de l'ensemble $G_{\alpha_1} - \bigcup_{\beta<\alpha_1} G_\beta$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à cet ensemble. D'après la condition (3) de la définition 15 la fonction f est constante sur ce dernier ensemble, donc elle a la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$.

La remarque suivante est une conséquence directe de la définition 4 d'une fonction ayant la propriété (G):

Remarque 12. Si une suite de fonctions $f_n\colon X_1 \to R$ ayant la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ est uniformément convergente vers une fonction $f\colon X_1 \to R$, la fonction f a également la propriété (G) par rapport à la même famille.

THÉORÈME 22. *Pour qu'une fonction $f\colon X_1 \to R$ ait la propriété* (G) *par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, ayant la propriété de densité, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions ayant la propriété* (G_1) *par rapport à la même famille uniformément convergente vers la fonction f.*

Démonstration. La *suffisance* de cette condition résulte directement du théorème 21 et de la remarque 12.

Nécessité. Fixons un nombre naturel n. Soit un ensemble ouvert $G_1 \in \mathscr{F}_1$ tel que $\operatorname{osc} f \leqslant 1/n$ sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble G_1 par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à G_1. Soit a un nombre transfini dénombrable. Admettons que tous les ensembles $G_\beta (\beta < a)$ soient déjà définis de manière que $G_\beta \in \mathscr{F}_1$, $\mu_1(G_\beta - \bigcup_{\gamma<\beta} G_\gamma) > 0$ et $\operatorname{osc} f \leqslant 1/n$ sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble $G_\beta - \bigcup_{\gamma<\beta} G_\gamma$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à cet ensemble. Supposons, en outre, que $\mu_1\big(X_1 - \bigcup_{\beta<a} G_\beta\big) > 0$. La fonction f ayant la propriété (G) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$, il existe un ensemble $G_a \in \mathscr{F}_1$ tel que $\mu_1\Big(G_a \cap \big(G_a - \bigcup_{\beta<a} G_\beta\big)\Big) > 0$ et $\operatorname{osc} f \leqslant 1/n$ sur l'ensemble des points de densité de l'ensemble $G_a \cap \big(G_a - \bigcup_{\beta<a} G_\beta\big)$ par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ appartenant à cet ensemble. La mesure μ_1 étant σ-finie, la famille d'ensembles $\{G_a\}$ est dénombrable. Soit a_0 le premier nombre transfini qui est plus grand que tous les nombres a qui sont des indices des ensembles de la famille $\{G_a\}$. Évidemment a_0 est un nombre transfini dénombrable et $\mu_1\big(X_1 - \bigcup_{a<a_0} G_a\big) = 0$. Nous faisons maintenant correspondre à chaque nombre transfini $a < a_0$ un point $x_a \in G_a - \bigcup_{\beta<a} G_\beta$ qui est un point de densité de cet ensemble par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$. Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x_a) & \text{lorsque } x \in G_a - \bigcup_{\beta<a} G_\beta \text{ et } x \text{ est un point} \\ & \text{de densité de cet ensemble par rapport} \\ & \text{à la famille } \mathscr{F}_1; \\ f(x) & \text{lorsque } x \in X_1 - \bigcup_{a<a_0} G_a \text{ ou } x \in G_a - \bigcup_{\beta<a} G_\beta \\ & \text{et } x \text{ n'est aucun point de densité de cet} \\ & \text{ensemble par rapport à la famille } \mathscr{F}_1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f_n a la propriété (G_1) par rapport à la famille $\mathscr{F}_1$ et que $|f(x)-f_n(x)| \leqslant 1/n$ pour tout point $x \in X_1$, d'où notre théorème.

CHAPITRE V

Mesurabilité de la superposition $F(x, f(x))$

Dans ce chapitre nous allons considérer des fonctions réelles $F\colon R^2 \to R$ de deux variables réelles. Admettons, en outre, que toutes les notions dans lesquelles intervient la famille $\mathscr{F}_1$ ou $\mathscr{F}_2$ se rapporteront à la famille $\mathscr{F}_1$ de l'exemple 1.

DÉFINITION 16 (voir [32]). On dit qu'une fonction $F\colon R^2 \to R$ est *sup-mesurable* (L) (au sens de Lebesgue) lorsque, quelle que soit la fonction $f\colon R \to R$ mesurable (L), la fonction

$$g(x) = F(x, f(x))$$

est également mesurable (L).

Nous connaissons, entre autres, deux conditions suffisantes pour la sup-mesurabilité (L) d'une fonction $F\colon R^2 \to R$, à savoir les suivantes:

1° l'appartenance de la fonction F à une certaine classe de Baire;

2° la mesurabilité (L) de toutes les coupes F^y et la continuité à droite de toutes les coupes F_x (voir [32]).

On connaît également l'exemple suivant (voir [32]):

EXEMPLE 7. Soit $A \subset R$ un ensemble non mesurable (L). Posons

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad y = x \text{ et } x \in A, \\ 0 & \text{lorsque} \quad y \neq x \text{ ou } x \notin A. \end{cases}$$

Cet exemple montre qu'il existe une fonction $F\colon R^2 \to R$ continue presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue dans R^2) dans le plan R^2, dont les coupes F_x et F^y sont semi-continues supérieurement et ne sont continues qu'en un point au plus et qui n'est pas sup-mesurable (L).

De 1° et du théorème 20 résulte directement le:

THÉORÈME 23. *Si une fonction $F\colon R^2 \to R$ est bornée et si toutes ses coupes F_x et F^y sont des dérivées, la fonction F est sup-mesurable* (L).

De 1° et du théorème de Kempisty de son travail [20] résulte le:

THÉORÈME 24. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ sont semi-continues supérieurement et toutes ses coupes F^y sont semi-continues inférieurement, la fonction F est sup-mesurable* (L).

Nous avons déjà rémarqué (exemple 7) que la mesurabilité (L) n'implique pas la sup-mesurabilité (L). Cependant la mesurabilité (L) d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ et la continuité approximative de toutes ses coupes F_x implique déjà sa sup-mesurabilité (L).

Dans la démonstration de ce théorème nous profiterons du suivant:

LEMME 5. *Soit $A \subset R^2$ un ensemble mesurable* (L), *de mesure positive et tel que toutes ses coupes A_x soient mesurables* (L). *Supposons qu'une fonction $f\colon R \to R$ soit mesurable* (L). *Dans ces hypothèses, si l'ensemble*

$$B = \{x \in R\colon f(x) \text{ est un point de densité de la coupe } A_x\}$$

est de mesure extérieure de Lebesgue positive, il existe pour tout nombre a tel que $0 \leqslant a < 1$, un ensemble $C \subset R$ mesurable (L) *et tel que $B \subset C$ et, quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de la coupe A_x au point $f(x)$ est $\geqslant a$.*

Démonstration. Désignons par B_n l'ensemble de tous les points $x \in B$ pour lesquels la densité moyenne de la coupe A_x sur tout intervalle ouvert contenant $f(x)$ et contenu dans l'intervalle ouvert $\big(f(x)-1/n, f(x)+1/n\big)$ est plus grande que a. La suite d'ensembles B_n est croissante et $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Soit n_0 le premier nombre naturel tel que l'ensemble B_{n_0} soit de mesure extérieure de Lebesgue positive. Remarquons qu'il existe pour tout nombre naturel $n \geqslant n_0$ un ensemble $C_n \subset R$ mesurable (L) et tel que $B_n \subset C_n$ et, quel que soit le point $x \in C_n$, la densité moyenne de la coupe A_x sur l'intervalle ouvert $\big(f(x)-1/n, f(x)+1/n\big)$ est plus grande que a. En effet, la fonction f étant mesurable (L), l'ensemble

$$A \cap \{(x, y) \in R^2\colon f(x)-1/n < y < f(x)+1/n\}$$

l'est aussi. Comme

$$m\big[A_x \cap \big(f(x)-1/n, f(x)+1/n\big)\big] > (2/n)\,a$$

(m désignant la mesure de Lebesgue dans R) pour tout $x \in B_n$, l'ensemble

$$C_n = \big\{x \in R\colon m\big[A_x \cap \big(f(x)-1/n, f(x)+1/n\big)\big] > (2/n)\,a\big\}$$

(étant mesurable (L) d'après le théorème de Fubini) contient l'ensemble B_n. Posons

$$C = \bigcup_{k=n_0}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n.$$

L'ensemble $C \supset B$, puisque $B_k \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n$ pour tout indice $k \geqslant n_0$. De plus l'ensemble C est mesurable (L) et, quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de l'ensemble A_x au point $f(x)$ n'est pas plus petite que a, d'où notre lemme.

Théorème 25. *Soit F: $R^2 \to R$ une fonction mesurable* (L). *Si, en outre, toutes les coupes F_x de cette fonction sont approximativement continues, la fonction F est sup-mesurable* (L).

Démonstration. Fixons une fonction f: $R \to R$ mesurable (L). Afin d'établir que la fonction $g(x) = F(x, f(x))$ est mesurable (L), il suffit de démontrer qu'elle satisfait à la condition (E) du lemme 1. Soit $A \subset R$ un ensemble mesurable (L), de mesure positive. Soit $\varepsilon > 0$. Rangeons tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles, dont la longueur n'est pas plus grande que $\varepsilon/4$, en une suite $\{J_n\}$. Désignons par A_n l'ensemble $\{x \in A\colon F(x, f(x)) \in J_n\}$. Comme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $m(A) > 0$, il existe donc un indice n_0 tel que $m^*(A_{n_0}) > 0$ (m^* désignant la mesure extérieure de Lebesgue dans R). Fixons un point $x_0 \in A_{n_0}$ et désignons par B l'ensemble

$$\{(x, y) \in R^2\colon |F(x, y) - F(x_0, y_0)| \leqslant \varepsilon/2, \text{ où } y_0 = f(x_0)\}.$$

L'ensemble B est mesurable (L) et $\{(x, f(x)) \in R^2\colon x \in A_{n_0}\} \subset B$. Toutes les coupes F_x étant supposées approximativement continues, toutes les coupes B_x de l'ensemble B sont mesurables (L) et, quel que soit le point $x \in A_{n_0}$, $f(x)$ est un point de densité de la coupe B_x. Il existe donc, d'après le lemme 5, un ensemble $C \subset R$ mesurable (L) et tel que $A_{n_0} \subset C$ et, quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de la coupe B_x au point $f(x)$ n'est pas plus petite que $3/4$. Supposons, au contraire, que, quel que soit l'ensemble $D \subset A$ mesurable (L), de mesure positive, on ait $\operatorname*{osc}_D g > \varepsilon$. Il existe donc un point $x_1 \in A \cap C$ tel que $|F(x_1, f(x_1)) - F(x_0, f(x_0))| > \varepsilon/2$. Il en résulte qu'il existe un ensemble $G \subset R$ mesurable (L), dont la densité au point $f(x_1)$ est égale à 1, et tel que $|F(x_1, y) - F(x_0, y_0)| > \varepsilon/2$ pour tout point $y \in G$. Mais la densité supérieure de la coupe B_{x_1} au point $f(x_1)$ n'est pas plus petite que $3/4$, on a donc $B_{x_1} \cap G \neq \emptyset$. Soit $y_0 \in B_{x_1} \cap G$. Le point $(x_1, y_2) \in B$, donc $|F(x_1, y_2) - F(x_0, f(x_0))| \leqslant \varepsilon/2$ D'autre part $y_2 \in G$, on a donc $|F(x_1, y_2) - F(x_0, f(x_0))| > \varepsilon/2$. Cette contradiction achève la démonstration.

Remarque 13. Dans le théorème 25 on peut remplacer l'hypothèse de la continuité approximative de toutes les coupes F_x par la continuité approximative de presque toutes (au sens de la mesure de Lebesgue) les coupes F_x.

Du théorème 25 et respectivement des théorèmes 4, 11 et du théorème 3 de la note [22] résultent directement les suivants:

Théorème 26. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction F: $R^2 \to R$ sont approximativement continues et si toutes ses coupes F^y ont la propriété* (G), *la fonction F est sup-mesurable* (L).

THÉORÈME 27. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction F: $R^2 \to R$ sont approximativement équicontinues et si toutes ses coupes F^y sont mesurables* (L), *la fonction F est sup-mesurable* (L).

THÉORÈME 28. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction F: $R^2 \to R$ sont approximativement continues et presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue) continues et si toutes ses coupes F^y sont mesurables* (L), *la fonction F est sup-mesurable* (L).

Démontrons encore que la continuité approximative de toutes les coupes F_x d'une fonction F: $R^2 \to R$ et la mesurabilité (L) de toutes ses coupes F^y n'impliquent pas la sup-mesurabilité (L) de la fonction F.

THÉORÈME 29. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction F: $R^2 \to R$ dont les coupes F_x sont approximativement continues, dont les coupes F^y sont mesurables* (L) *et qui n'est pas sup-mesurable* (L).

Démonstration. Rangeons tous les points de l'espace R en une suite transfinie du type Ω (Ω désignant le plus petit nombre transfini qui n'est pas dénombrable):

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \Omega \text{ et } a_\alpha \neq a_\beta \text{ pour } \alpha \neq \beta. \tag{1}$$

Soit $A \subset R$ un ensemble non mesurable (L). Posons

$$B_\alpha = \{a_\beta\colon \beta \leqslant \alpha\} \quad \text{pour} \quad \alpha < \Omega.$$

Soit $\alpha < \Omega$. L'ensemble B_α étant dénombrable, il existe un ensemble G_α du type G_δ, de mesure lebesguienne zéro, qui contient l'ensemble B_α.

Si $a_\alpha \in A$, soit $g_\alpha\colon R \to R$ une fonction approximativement continue qui satisfait aux conditions:

$$g_\alpha(x) = 0 \quad \text{lorsque} \quad x \in G_\alpha$$

et

$$0 < g_\alpha(x) \leqslant 1 \quad \text{lorsque} \quad x \notin G_\alpha.$$

Dans le cas contraire où $a_\alpha \notin A$, soit g_α: $R \to R$ une fonction approximativement continue qui satisfait aux conditions suivantes:

$$g_\alpha(x) = 0 \quad \text{lorsque} \quad x \in G_\alpha - \{a_\alpha\}$$

et

$$0 < g_\alpha(x) \leqslant 1 \quad \text{lorsque} \quad x \notin G_\alpha - \{a_\alpha\}.$$

Les fonctions g_α satisfaisant à ces conditions existent d'après le lemme 11 du travail [34]. Posons

$$F(x, y) = g_\alpha(y) \quad \text{lorsque} \quad x = a_\alpha.$$

On vérifie facilement que toutes les coupes F_x de la fonction F sont approximativement continues. Démontrons encore que toutes ses coupes F^y

sont mesurables (L). Fixons un point $y \in R$. Soit α_0 un nombre ordinal tel que $y = a_{\alpha_0}$. Remarquons que le point $y = a_{\alpha_0} \in G_\alpha - \{a_\alpha\}$ pour tout $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \Omega$) et par conséquent $g_\alpha(a_{\alpha_0}) = 0$ lorsque $\alpha > \alpha_0$. Cela signifie que l'ensemble

$$\{x \in R\colon\ F^y(x) \neq 0\}$$

est dénombrable. Donc la coupe F^y est mesurable (L).

Afin d'établir que la fonction F n'est pas sup-mesurable (L), il suffit de remarquer que la fonction $g(x) = F(x, x)$ n'est pas mesurable (L) et la démonstration est achevée.

EXEMPLE 8. Soit $f\colon R \to R$ une injection mesurable (L) et telle qu'il existe un ensemble $A \subset R$ mesurable (L), de mesure zéro et tel que $f^{-1}(A)$ n'est pas mesurable (L) (voir [27]. Théorème 13.1, p. 89). Posons

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque} \quad y \in A, \\ 1 & \text{lorsque} \quad y \notin A. \end{cases}$$

La fonction F n'est pas sup-mesurable (L), puisque la fonction $g(x) = F(x, f(x))$ n'est pas mesurable (L).

Cet exemple montre les faits suivants:

Remarque 14. Il existe une fonction $F\colon R^2 \to R$ approximativement semi-continue inférieurement qui n'est pas sup-mesurable (L).

Remarque 15. Il existe une fonction $F\colon R^2 \to R$, dont toutes les coupes F_x sont approximativement semi-continues inférieurement et les coupes F^y sont constantes, et qui n'est pas sup-mesurable (L).

Cependant on a le:

THÉORÈME 30. *Si une fonction $F\colon R^2 \to R$ est approximativement semi-continue inférieurement et si toutes ses coupes F_x sont semi-continues supérieurement, la fonction F est sup-mesurable* (L).

Démonstration. Soit $f\colon R \to R$ une fonction mesurable (L). Nous démontrerons que la fonction $g(x) = F(x, f(x))$ satisfait à la condition (E) du lemme 1. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction F est bornée, sinon pourrait considérer la fonction $\operatorname{arc\,tg} F$. Supposons, au contraire, que la fonction g ne satisfasse pas à la condition (E) du lemme 1. Il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et un ensemble $A \subset R$ mesurable (L), de mesure positive et tel que $\operatorname{osc} g > \varepsilon$ sur tout sous-ensemble de l'ensemble A qui est mesurable (L) et de mesure positive. Désignons par a la supremum essential $\operatorname*{sup\,ess}_{x \in A} g(x)$ et par A_1 l'ensemble $\{x \in A\colon\ g(x) \leqslant a\}$. Évidemment l'ensemble A_1 est mesurable (L) et $m(A - A_1) = 0$. Soient J_1 et J_2 deux intervalles fermés tels que $a \in \operatorname{Int}(J_1)$, $J_1 \subset \operatorname{Int}(J_2)$ et que la longueur de l'intervalle J_2 est plus petite que ε. Désignons par B_1 et B_2 respectivement les ensembles $g^{-1}(J_1)$ et $g^{-1}(J_2)$. L'ensemble $B_1 \subset B_2$ et $m^*(A_1 \cap B_1) > 0$, car $a \in \operatorname{Int}(J_1)$. D'autre part les ensembles $B_1 \cap A_1$

et $B_2 \cap A_1$ doivent être de mesure intérieure lebesguienne zéro. Désignons par B_3 l'ensemble de tous les points de densité extérieure de l'ensemble $B_1 \cap A_1$. L'ensemble B_3 est mesurable (L) et $m(B_3) = m^*(B_1 \cap A_1)$. Remarquons que $m^*([B_3 \cap A_1 \cap (R - B_2)]) > 0$, car l'ensemble $B_3 \cap A_1$ est mesurable (L) et sa mesure est positive. Toutes les coupes F_x étant approximativement semi-continues supérieurement, on peut faire correspondre à chaque point $x \in B_3 \cap A_1 \cap (R - B_2)$, un intervalle ouvert $J(x)$ d'extrémités rationnelles tel que $f(x) \in J(x)$ et $F(x, y) \notin J_2$ et $F(x, y) \leqslant a$ pour tout point $y \in J(x)$. La famille des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable et $m^*\big([B_3 \cap A_1 \cap (R - B_2)]\big) > 0$, il existe un intervalle $J(x)$ que nous désignons par J_3 tel que $m^*(B_4) > 0$, où

$$B_4 = \{x \in B_3 \cap A_1 \cap (R - B_2) \colon \text{ au point } x \text{ correspond l'intervalle } J_3\}.$$

Soit B_5 l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble B_4. L'ensemble B_5 est mesurable (L) et sa mesure est positive. De plus $B_5 \subset B_3$ et $m^*(B_4) = m(B_5)$. Remarquons que l'ensemble

$$C = \{x \in B_5 \colon f(x) \in J_3\}$$

est mesurable (L) et $m(C) = m(B_5)$. La mesure intérieure de Lebesgue de l'ensemble $B_5 - B_1$ est égale à zéro, l'ensemble $B_5 \cap B_1 \cap A_1 \cap C$ est donc de mesure extérieure positive. Soit $x_1 \in B_5 \cap B_1 \cap A_1 \cap C$. Le point x_1 est un point de densité extérieure de l'ensemble B_4, $f(x_1) \in J_3$ et $g(x_1) \in J_1$. Le point $\big(x_1, f(x_1)\big)$ est donc un point de densité extérieure par rapport à la mesure extérieure de Lebesgue dans R^2 de l'ensemble $B_4 \times J_3$ et par conséquent de l'ensemble $F^{-1}\big([(R - J_2) \cap (-\infty, a]]\big)$. D'autre part $F\big(x_1, f(x_1)\big) \in J_1$, ce qui contredit l'hypothèse de la semi-continuité approximative inférieurement de la fonction F. Ainsi la fonction g est mesurable (L), d'où notre théorème.

THÉORÈME 31. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction $F \colon R^2 \to R$ sont semi-continues supérieurement et toutes ses coupes F^y sont approximativement semi-continues inférieurement, la fonction F est sup-mesurable* (L).

Démonstration. De même que dans la démonstration du théorème précédent on peut supposer que la fonction F est bornée. Posons, pour $k = 1, 2, \ldots,$

$$M_k^y(x_0, y_0) = \sup_{y_0 - 1/k \leqslant y \leqslant y_0 + 1/k} F_{x_0}(y).$$

Toutes les coupes F_x étant semi-continues supérieurement, on a

$$F(x, y) = \lim_{k \to \infty} M_k^y(x, y).$$

D'après les hypothèses de notre théorème on constate, d'après le lemme 1 de ma note [10], la semi-continuité approximative inférieurement de toutes les fonctions M_k^y (comme fonctions de deux variables). Pour compléter la démonstration, il suffit donc, d'après le théorème 30, de démontrer que toutes les coupes $(M_k^y)_x$ des fonctions M_k^y sont semi-continues supérieurement. Dans ce but fixons un indice k, un point (x_0, y_0) et un nombre $\varepsilon > 0$. La coupe F_{x_0} étant semi-continue supérieurement, il existe pour le nombre ε deux nombres positifs δ_1 et δ_2 tels que

$$F(x_0, y_0+1/k)+\varepsilon > F(x_0, y) \quad \text{pour tout point } y \in (y_0+1/k-\delta_1, y_0+1/k+\delta_1)$$

et

$$F(x_0, y_0-1/k)+\varepsilon > F(x_0, y) \quad \text{pour tout point } y \in (y_0-1/k-\delta_2, y_0-1/k+\delta_2).$$

Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Fixons un point $y_1 \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$. Des inégalités précédentes et de la définition de $M_k^y(x_0, y_0)$ résulte que, quel que soit le point $y \in (y_1-1/k, y_1+1/k)$ on a $F(x_0, y) < M_k^y(x_0, y_0)+\varepsilon$. Il en résulte que

$$M_k^y(x_0, y) \leqslant M_k^y(x_0, y_0)+\varepsilon$$

pour tout point $y \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$. Cela signifie que la coupe $(M_k^y)_{x_0}$ est semi-continue supérieurement et la démonstration est achevée.

Pour formuler le théorème 32, introduisons la définition suivante:

DÉFINITION 17. On dit qu'une fonction $F\colon R^2 \to R$ *a la propriété* (0) lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes:

1° toutes ses coupes F_x et F^y sont mesurables (L); et

2° il existe, pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout point $y_0 \in R$, une suite d'intervalles ouverts $\{J_n\}$ et une suite d'ensembles mesurables (L) $\{A_n\}$ telles que

(2a) $R = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $y_0 \in J_k$ et $A_k \subset A_{k+1}$ pour $k = 1, 2, \ldots;$

(2b) La densité supérieure de l'ensemble A_n en chacun de ses points est positive, quel que soit l'indice n;

(2c) $F(x, y) < F(x, y_0)+\varepsilon$ pour tout point $x \in A_n$ et pour tout point $y \in J_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

THÉORÈME 32. *Si une fonction $F\colon R^2 \to R$ a la propriété* (0), *la fonction F est sup-mesurable* (L).

Démonstration. Afin d'établir que la fonction $g(x) = F(x, f(x))$ est mesurable (L), il suffit de démontrer qu'elle satisfait à la condition (E) du lemme 1. De même que dans la démonstration du théorème précédent, on peut supposer que la fonction F est bornée. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Soit $A \subset R$ un ensemble mesurable (L) de mesure positive. Désignons par a l'infimum essentiel $\operatorname*{inf\,ess}\limits_{x\in A} g(x)$ et par B_1 l'ensemble

$$\{x \in A\colon\ g(x) \geqslant a\}.$$

L'ensemble B_1 est mesurable (L) et $m(A - B_1) = 0$. Soit

$$B_2 = \{x \in B_1\colon\ g(x) < a + \varepsilon/4\}.$$

Le nombre $a = \operatorname*{inf\,ess}_{x \in A} g(x)$, on a donc $m^*(B_2) > 0$. La fonction F ayant la propriété (0), toutes ses coupes F_x sont semi-continues supérieurement. On peut donc faire correspondre à chaque point $x \in B_2$ un intervalle ouvert d'extrémités rationnelles $J(x)$, tel que $f(x) \in J(x)$ et $F(x, y) < F(x, f(x)) + \varepsilon/4$ pour tout point $y \in J(x)$. La famille de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable et $m^*(B_2) > 0$, il existe un intervalle de cette famille, que nous désignons par J_1, tel que

$$m^*(\{x \in B_2\colon \text{ au point } x \text{ correspond l'intervalle } J_1\}) > 0.$$

Soit $B_3 = \{x \in B_2\colon$ au point x correspond l'intervalle $J_1\}$. Soit $x_1 \in B_3$ un point de densité extérieure de l'ensemble B_3 qui est également un point de continuité approximative de la fonction f. Il existe, pour le nombre $\varepsilon/4$ et pour le point $f(x_1)$, une suite d'intervalles ouverts $\{J_n\}$ et une suite d'ensembles $\{A_n\}$ mesurables (L) qui satisfont aux conditions (2a)–(2c). En particulier, il existe un ensemble A_{n_0} mesurable (L) et un intervalle ouvert J_{n_0} tels que $x_1 \in A_{n_0}$, $f(x_1) \in J_{n_0}$, la densité supérieure de l'ensemble A_{n_0} au point x_1 est positive et

$$F(x, y) < F(x, f(x_1)) + \varepsilon/4$$

pour tout point $x \in A_{n_0}$ et pour tout point $y \in J_{n_0}$.

Soit $B_4 = f^{-1}(J_1 \cap J_{n_0})$. Remarquons que

$$m^*(B_3 \cap B_4 \cap A_{n_0}) > 0.$$

Comme $f(x_1) \in J_1$, on a

$$F(x, f(x_1)) < F(x, f(x)) + \varepsilon/4 < a + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = a + \varepsilon/2$$

pour tout point $x \in B_3 \cap B_4 \cap A_{n_0}$.

La coupe $F^{f(x_1)}$ étant mesurable (L), l'ensemble

$$B_5 = \{x \in B_1\colon\ F(x, f(x_1)) < a + \varepsilon/2\}$$

est mesurable (L) et sa mesure est positive, car il contient l'ensemble $B_3 \cap B_4 \cap A_{n_0}$.

D'autre part $f(x) \in J_{n_0}$ pour tout point $x \in B_4 \cap B_5 \cap A_{n_0}$, d'où il vient

$$F(x, f(x)) < F(x, f(x_1)) + \varepsilon/4 < a + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 < a + \varepsilon.$$

Cela signifie que $\operatorname{osc} g(x) \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble $B_5 \cap B_4 \cap A_{n_0}$. De plus cet ensemble est mesurable (L), de mesure positive et il est contenu dans l'ensemble A, d'où notre théorème.

Du théorème 32 résulte directement le suivant:

THÉORÈME 33. *Si toutes les coupes F_x d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ sont semi-équicontinues supérieurement et toutes ses coupes F^y sont mesurables* (L), *la fonction F est sup-mesurable* (L).

Problèmes ouverts

1° Soit $f: R^2 \to R$ une fonction ayant ses coupes f_x et f^y mesurables (L). Désignons par $D(f)$ l'ensemble $\{(x, y) \in R^2: f_x$ est dégénérée au point y ou f^y est dégénérée au point $x\}$. La condition $m_2(D(f)) = 0$ est-elle suffisante pour la mesurabilité (L) de fonction f?

2° Soit $f: R^2 \to R$ une fonction. La semi-équicontinuité approximative supérieurement de toutes les coupes f_x et la mesurabilité (L) de toutes les coupes f^y impliquent-elles la mesurabilité (L) de la fonction f?

3° Soit $f: R^2 \to R$ une fonction. Supposons que toutes ses coupes f_x possèdent la propriété (G) et toutes ses coupes f^y sont des dérivées. La fonction f doit-elle être mesurable (L) ?

4° Soit $F: R^2 \to R$ une fonction mesurable (L) dont toutes les coupes F_x sont des dérivées. La fonction F doit-elle être sup-mesurable (L)?

5° Existe-t-il une fonction $F: R^2 \to R$ sup-mesurable (L) qui n'est pas mesurable (L)?

6° Existe-t-il une fonction $f: R^2 \to R$ qui n'est pas de première classe de Baire, dont toutes les coupes f_x sont continues et toutes les coupes f^y sont approximativement continues?

Travaux cités

[1] A. Aleksiewicz, W. Orlicz, *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fund. Math. 35 (1948), p. 105–126.

[2] A. M. Bruckner, *Differentiation of integrals*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), P. II, p. 1–54.

[3] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig – Berlin 1927.

[4] R. O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability*, Proc. Camb. Phil. Soc. 73 (1973), p. 461–465.

[5] — J. Dravecky, *On the measurability of functions of two variables*, Matematicky Časopis 23 (1973), p. 285-289.

[6] J. Dravecky, *On the measurability of functions of two variables*, Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math. 28 (1972), p. 11-18.

[7] —, T. Neubrunn, *Measurability of functions of two variables*, Matematicky Časopis 23 (1973), p. 147–157.

[8] Z. Grande, *Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21 (1973), p. 813–816.

[9] — *O zbiorach mierzalnych na płaszczyźnie*, Zeszyty Naukowe Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Gdańskiego 1974, p. 117–122.

[10] — *La mesurabilité des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), p. 657–661.

[11] — *Mierzalność funkcji określonych na pewnych przestrzeniach produktowych*, Université de Gdańsk 1974, (thèse de doctorat).

[12] — *Les fonctions qui ont la propriété* (K) *et la mesurabilité des fonctions de deux variables*, Fund. Math. 93 (1976), p. 155–160.

[13] — *Le rang de Baire de la famille de toutes les fonctions ayant la propriété* (K), Fund. Math. 96 (1977), p. 9–15.

[14] — *On the measurability of functions of two variables*, Proc. Camb. Phil. Soc. 77 (1975), p. 335–336.

[15] — *Sur les fonctions de deux variables dont les coupes sont des dérivées*, Proc. Amer. Math. Soc. 57(1976), p. 69–74.

[16] — *L'équicontinuité approximative et la mesurabilité*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23 (1975), p. 1059–1064.

[17] M. Guzman, *A general form of the Vitali lemma*, Colloq. Math. 34 (1975), p. 69–72.

[18] F. Hausdorff, *Set theory*, Chelsea, Now York 1962.

[19] E. Kamke, *Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen*, Fund. Math. 10 (1927), p. 431–433.

[20] S. Kempisty, *Sur les fonctions semi-continuues par rapport á chacune de deux variables*, Fund. Math. 14 (1929), p. 237–241.

[21] G. Krajewska, *O mierzalności funkcji określonych na przestrzeniach produktowych*, Zeszyty Naukowe Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Gdańskiego (sous presse).

[22] J. S. Lipiński, *On measurability of functions of two variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), p. 131–135.

[23] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa 1973.
[24] M. Mahowald, *On the measurability of functions in two variables*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), p. 410–411.
[25] E. Marczewski, Cz. Ryll-Nardzewski, *Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables*, Ann. Soc. Polon. Math. 25 (1953), p. 145–154.
[26] J. H. Michael, C. Rennie, *Measurability of functions of two variables*, J. Austral. Math. Soc. 1 (1959), p. 21–26.
[27] J. Oxtoby, *La mesure et la catégorie* (en russe), Moscou 1974.
[28] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge 1970.
[29] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.
[30] W. Sierpiński, *Sur un probléme concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. 1 (1920), p. 112–115.
[31] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste I*, Warszawa 1958.
[32] J. W. Szragin, *Les conditions de la mesurabilité de la superposition* (*en russe*), Dokl. Akad. Nauk SSSR 197 (1971), p. 295–298.
[33] H. D. Ursell, *Some methods of proving measurability*, Fund. Math. 32 (1939), p. 311–320.
[34] Z. Zahorski, *Sur la premiére dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1–54.
[35] Z. Zalcwasser, *O pewnej zależności między mierzalnością płaską a liniową*, Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie, Mars 1919.