MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

# О СООТНОШЕНИИ ГЛУБИНЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ БЕСКОНТУРНЫХ ПРОГРАММ В БАЗИСЕ $\{x+y,\ x-y,\ 1;\ \operatorname{sign} x\}$

М. Ю. МОШКОВ

*Горьковский Университет, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Горький, СССР*

Определенный интерес представляет вопрос о соотношении сложности детерминированных и недетерминированных алгоритмов. В общем случае этот вопрос не решен. Ниже приводится результат, относящийся к алгоритмам специального вида — бесконтурным программам в базисе

$$B = \{x+y,\ x-y,\ 1;\ \operatorname{sign} x\},$$

где

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ +1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

## 1. Деревья — программы и задачи диагностики

В этом разделе приводится одна из теорем работы [1], используемая в дальнейшем.

Пусть $Q, Z, N$ – множества рациональных, целых и натуральных чисел. Обозначим

$$L_n = \Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1}\colon\ a_i \in Z,\ i = 1, \ldots, n+1\Big\},$$

$$S_n = \{\operatorname{sign} f\colon\ f \in L_n\}.$$

Пусть $f \in L_n$ и $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1}$. Обозначим

$$r(f) = r(\operatorname{sign} f)$$

$$= \begin{cases} \max\{\log_2 |a_i|\colon\ |a_i| > 0,\ i = 1, \ldots, n+1\}, & \text{если } \sum_{i=1}^{n+1} |a_i| > 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n+1} |a_i| = 0. \end{cases}$$

*Дерево — программа* (д. программа) с проверками из $S_n$ — конечное ориентированное дерево с корнем, в котором:

— каждой вершине, из которой не выходят ребра (такие вершины называются концевыми), приписано некоторое число из $N$;

— каждой вершине, не являющейся концевой, приписана некоторая функция из $S_n$;

— каждому ребру приписано число из множества $\{-1, 0, +1\}$, причем ребрам, выходящим из одной и той же вершины, приписаны различные числа.

Сопоставим д. программе $\Gamma$ с проверками из $S_n$ частичную функцию $\varphi_\Gamma$. *Полным путем* $\Gamma$ называется путь, начинающийся в корне и заканчивающийся в концевой вершине $\Gamma$. Пусть $\tau = v_1, r_1, \ldots, v_m, r_m, v_{m+1}$ — полный путь $\Gamma$, в котором для $i = 1, \ldots, m$ вершине $v_i$ приписана функция $f_i$, а ребру $r_i$ приписано число $\delta_i$. Обозначим $n(\tau)$ число, приписанное вершине $v_{m+1}$. Обозначим $A(\tau)$ множество решений из $Q^n$ системы уравнений

$$\{f_1(\bar{x}) = \delta_1, \ldots, f_m(\bar{x}) = \delta_m\}.$$

По определению, если $m = 0$, то $A(\tau) = Q^n$. Обозначим $\theta(\Gamma)$ множество полных путей $\Gamma$. Очевидно, $\theta(\Gamma) \neq \varnothing$. Обозначим $A(\Gamma) = \bigcup_{\tau\in\theta(\Gamma)} A(\tau)$. Очевидно, для любых $\tau_1, \tau_2 \in \theta(\Gamma)$, если $\tau_1 \neq \tau_2$, то $A(\tau_1) \cap A(\tau_2) = \varnothing$. Пусть $\bar{q} \in Q^n$. Если $\bar{q} \in Q^n \setminus A(\Gamma)$, то значение $\varphi_\Gamma(\bar{q})$ не определено. Если для некоторого $\tau \in \theta(\Gamma)$ $\bar{q} \in A(\tau)$, то $\varphi_\Gamma(\bar{q}) = n(\tau)$.

Обозначим $F(\Gamma)$ множество функций, приписанных вершинам $\Gamma$. Обозначим $r(\Gamma) = \max\{r(f)\colon f \in F(\Gamma)\}$ и $h(\Gamma)$ - глубину $\Gamma$ — максимальную длину полного пути $\Gamma$.

Пусть $n, k \in N$, $t \in \{0\} \cup N$. *$(n, k, t)$-задачей диагностики* будем называть любую задачу следующего вида: по произвольному $\bar{q} \in Q^n$ определить значение $v(g_1(\bar{q}), \ldots, g_m(\bar{q}))$, где $1 \leqslant m \leqslant k$, $v\colon \{-1, 0, +1\}^m \to N$, $g_1, \ldots, g_m \in S_n$ и для $j = 1, \ldots, m$, $r(g_j) \leqslant t$. Будем говорить, что д. программа $\Gamma$ с проверками из $S_n$ *решает эту задачу*, если $A(\Gamma) = Q^n$ и для любого $\bar{q} \in Q^n$ $\varphi_\Gamma(\bar{q}) = v(g_1(\bar{q}), \ldots, g_m(\bar{q}))$.

Теорема 1. [1]. *Для любой $(n, k, t)$-задачи диагностики существует решающая её д. программа $\Gamma$ с проверками из $S_n$, для которой*

$$h(\Gamma) \leqslant \frac{2(n+2)^3 \log_2(k+2n+2)}{\log_2(n+2)},$$

$$r(\Gamma) \leqslant 2(n+1)^2(2+t+\log_2(n+1)). \blacksquare$$

## 2. Программы в базисе $B$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — входной алфавит, $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ — рабочий алфавит. Буквы этих алфавитов называются соответственно *входными* и *рабочими переменными*.

Программа в базисе $B$ — конечный ориентированный граф, имеющий вершины шести типов:

— единственную вершину, в которую не входят ребра, — вершину „вход";

— единственную вершину, из которой не выходят ребра, — вершину „выход";

— функциональные вершины типов $y_j := 1$, $y_j := z_l + z_k$ и $y_j := z_l - z_k$, где $z_l, z_k \in X \cup Y$;

— предикатные вершины вида $\operatorname{sign} y_j$.

Ребрам, выходящим из предикатных вершин, приписаны числа из множества $\{-1, 0, +1\}$.

Программа в базисе $B$ называется *бесконтурной*, если в ней нет контуров. Программа называется *детерминированной*, если в ней из вершины „вход" и из любой функциональной вершины выходит ровно одно ребро, а для любой предикатной вершины ребрам, выходящим из нее, приписаны попарно различные числа из множества $\{-1, 0, +1\}$. Программа, не являющаяся детерминированной, называется *недетерминированной*.

Пусть $P$ — бесконтурная программа в базисе $B$ с входными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и рабочими переменными $y_1, \ldots, y_t$. Определим множество $A(P) \subseteq Q^n$, которое $P$ распознает. По определению, если $t = 0$, то $A(P) = Q^n$. Пусть $t > 0$.

*Полным путем* $P$ называется путь из вершины „вход" в вершину „выход" программы $P$. Пусть $\tau = v_1, r_1, \ldots, v_m, r_m, v_{m+1}$ — полный путь программы $P$. Определим множество элементов из $Q^n$, принимаемых полным путем $\tau$. Для $i = 1, \ldots, m$ сопоставим вершине $v_i$ пути $\tau$ набор $\bar{\psi}_i = \langle \psi_{i1}, \ldots, \psi_{it} \rangle$ функций из $L_n$. Положим $\bar{\psi}_1 = \langle 0, \ldots, 0 \rangle$. Пусть наборы $\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{i-1}$, где $2 \leqslant i \leqslant m$, уже определены. Если $v_i$ — предикатная вершина, то $\bar{\psi}_i = \bar{\psi}_{i-1}$. Пусть $v_i$ — функциональная вершина. Пусть для определенности эта вершина имеет вид $y_j := x_l + y_p$. Тогда $\bar{\psi}_i = \langle \psi_{i-1\,1}, \ldots, \psi_{i-1\,j-1}, x_l + \psi_{i-1\,p}, \psi_{i-1\,j+1}, \ldots, \psi_{i-1\,t} \rangle$. Для функциональных вершин других типов набор $\bar{\psi}_i$ определяется аналогично.

Пусть в пути $\tau$ предикатными вершинами являются вершины $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ и только они. Пусть $k > 0$. Пусть вершины $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ имеют вид $\operatorname{sign} y_{j_1}, \ldots, \operatorname{sign} y_{j_k}$ соответственно, а ребрам $r_{i_1}, \ldots, r_{i_k}$ приписаны числа $\delta_1, \ldots, \delta_k$. Обозначим $F(\tau) = \{\psi_{i_1 j_1}, \ldots, \psi_{i_k j_k}\}$ и $A(\tau)$ — множество решений из $Q^n$ системы уравнений

$$S(\tau) = \{\operatorname{sign} \psi_{i_1 j_1}(\bar{x}) = \delta_1, \ldots, \operatorname{sign} \psi_{i_k j_k}(\bar{x}) = \delta_k\}.$$

Если $k = 0$, то, по определению, $S(\tau)$ — пустая система и $A(\tau) = Q^n$. Будем говорить, что $A(\tau)$ — *множество элементов из $Q^n$, принимаемых полным путем* $\tau$. Обозначим $\Theta(P)$ множество полных путей программы $P$. Очевидно, $\theta(P) \neq \emptyset$. Обозначим $A(P) = \bigcup_{\tau \in \theta(P)} A(\tau)$ и $F(P) = \bigcup_{\tau \in \theta(P)} F(\tau)$. Будем говорить, что программа $P$ *распознает множество* $A(P)$.

Обозначим $h(P)$ — глубину программы $P$ — максимальную длину полного пути $P$ без единицы.

## 3. Функциональные программы в базисе $B$

Функциональная программа в базисе $B$ — детерминированная бесконтурная программа в базисе $B$, не содержащая предикатных вершин. Пусть $P$ — функциональная программа в базисе $B$ с входными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и рабочими переменными $y_1, \ldots, y_t$. Очевидно, $P$ имеет ровно один полный путь $\tau = v_1, r_1, \ldots, v_m, r_m, v_{m+1}$. Пусть $\langle \psi_{m1}, \ldots, \psi_{mt} \rangle$ — набор функций из $L_n$, сопоставленный вершине $v_m$ этого пути. Будем говорить, что программа $P$ реализует функции $\psi_{m1}, \ldots, \psi_{mt}$ в рабочих переменных $y_1, \ldots, y_t$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть $n \in N$, $t \in \{0\} \cup N$, $f \in L_n$ и $r(f) \leqslant t$. Тогда существует функциональная программа $P$ в базисе $B$ с входными переменными $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, которая реализует функцию $f$ и для которой $h(P) \leqslant 2(n+1)(t+1)$.*

*Доказательство.* Пусть $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_{n+1}$.

Нетрудно построить функциональную программу $P_1$ в базисе $B$, которая реализует функции $0, 2^0, 2^1, \ldots, 2^t, 2^0 x_1, 2^1 x_1, \ldots, 2^t x_1, \ldots,$ $2^0 x_n, 2^1 x_n, \ldots, 2^t x_n$ и для которой $h(P_1) \leqslant (n+1)(t+1)$.

Далее, используя программу $P_1$, нетрудно построить функциональную программу $P_2$ в базисе $B$, которая реализует функции $|a_1| x_1, \ldots$ $\ldots, |a_n| x_n, |a_{n+1}|$ и для которой $h(P_2) \leqslant h(P_1) + (n+1)t$.

Наконец, используя программу $P_2$, нетрудно построить функциональную программу $P$ в базисе $B$, которая реализует функцию $f$ и для которой $h(P) \leqslant h(P_2) + (n+1) \leqslant 2(n+1)(t+1)$. ∎

## 4. Основное утверждение

Бесконтурные программы $P_1$ и $P_2$ в базисе $B$ будем называть эквивалентными, если множества их входных переменных совпадают и $A(P_1) =$ $= A(P_2)$.

Теорема 2. *Для любой бесконтурной программы $P$ в базисе $B$, имеющей $n$ входных переменных, существует детерминированная бесконтурная программа $P_1$ в базисе $B$, которая эквивалентна $P$ и для которой $h(P_1) \leqslant 8(n+2)^7 (h(P)+3)^2$.*

*Доказательство.* Пусть $P$ — бесконтурная программа в базисе $B$ со входными переменными $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть $f_1, f_2 \in L_n$. Тогда, очевидно,

$$\max\{r(f_1 - f_2), r(f_1 + f_2)\} \leqslant 1 + \max\{r(f_1), r(f_2)\}.$$

Используя это неравенство, нетрудно показать, что для любой функции $f$ из множества $F(P)$

$$(1) \qquad r(f) \leqslant h(P).$$

Из (1) следует, что

$$(2) \qquad |F(P)| \leqslant (2^{h(P)+1} + 1)^{n+1}.$$

Пусть $l = |F(P)|$. Если $l = 0$, то $A(P) = Q^n$ и утверждение теоремы, очевидно, выполняется. Пусть $l > 0$ и $F(P) = \{f_1, f_2, \ldots, f_l\}$. Определим отображение $v$: $\{-1, 0, +1\}^l \to N$. Пусть $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_l) \in \{-1, 0, +1\}^l$. Если существуют число $k \in \{0\} \cup N$, числа $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, l\}$ и полный путь $\tau \in \theta(P)$, для которых

$$S(\tau) = \{f_{i_1}(\bar{x}) = \delta_{i_1}, \ldots, f_{i_k}(\bar{x}) = \delta_{i_k}\},$$

то $v(\bar{\delta}) = 1$. В противном случае $v(\bar{\delta}) = 2$. Нетрудно показать, что для любого $\bar{q} \in Q^n$ $v(f_1(\bar{q}), \ldots, f_l(\bar{q})) = 1$ тогда и только тогда, когда $\bar{q} \in A(P)$. Отсюда, из (1) и из (2) следует, что задача распознавания множества $A(P)$ является $(n, (2^{h(P)+1} + 1)^{n+1}, h(P))$ — задачей диагностики. Используя теорему 1, получаем, что существует д. программа $\Gamma$ с проверками из $S_n$, которая решает рассматриваемую задачу и для которой

$$(3) \qquad h(\Gamma) \leqslant \frac{2(n+2)^4(h(P)+2)}{\log_2(n+2)},$$

$$(4) \qquad r(\Gamma) \leqslant 2(n+1)^2(2 + h(P) + \log_2(n+1)).$$

Преобразуем д. программу $\Gamma$ в программу $P_1$ в базисе $B$. Добавим к $\Gamma$ новую вершину „вход", из которой проведем ребро в корень $\Gamma$. „Склеим" все концевые вершины $\Gamma$, которым приписано число 1, в одну вершину и заменим эту вершину на вершину „выход". Удалим все вершины и все ребра, через которые не проходит ни один путь из вершины „вход" в вершину „выход". Обозначим полученный граф $G$.

Заменим в графе $G$ каждую вершину $v$, не совпадающую с вершинами „вход" и „выход", на некоторый граф $G_v$. Пусть вершине $v$ приписана функция $\operatorname{sign} f_v$, где $f_v \in L_n$. Из (4) и из леммы 1 следует, что существует функциональная программа $P_v$ в базисе $B$ с входными переменными $x_1, \ldots, x_n$, которая реализует функцию $f_v$ в некоторой рабочей переменной $y_{j(v)}$ и для которой

$$(5) \qquad h(P_v) \leqslant 2(n+1)\left(\lceil 2(n+1)^2(2 + h(P) + \log_2(n+1)) \rceil + 1\right).$$

Пусть также для различных вершин $v_1$ и $v_2$ множества рабочих переменных программ $P_{v_1}$ и $P_{v_2}$ не пересекаются. Обозначим $u_1$ вершину $P_v$, в которую входит ребро, выходящее из вершины „вход" программы $P_v$. Обозначим $G_v$ граф, полученный из $P_v$ удалением вершины „вход" вместе с выходящим из нее ребром и заменой вершины „выход" на вершину $\operatorname{sign} y_{j(v)}$, которую обозначим $u_2$.

Замена вершины $v$ на граф $G_v$ производится следующим образом: вершина $v$ удаляется, ребро, входившее в вершину $v$, входит в вершину $u_1$ графа $G_v$, а ребра, выходившие из вершины $v$, выходят из вершины $u_2$ графа $G_v$.

Обозначим $P_1$ граф, полученный из $G$ заменой всех вершин $v$, отличных от вершин „вход" и „выход", на $G_v$. Нетрудно показать, что $P_1$ — детерминированная бесконтурная программа в базисе $B$, для которой $A(P_1) = A(P)$. Учитывая, что множества входных переменных программ $P_1$ и $P$ совпадают, получаем, что программы $P_1$ и $P$ эквивалентны. Из (3) и из (5) следует, что

$$h(P_1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2(n+2)^4(h(P)+2)}{\log_2(n+2)}\left(2(n+1)\left(\lceil 2(n+1)^2(2+h(P)+\log_2(n+1))\rceil + 1\right)+1\right) \leqslant$$
$$\leqslant 8(n+2)^7(h(P)+3)^2. \;\blacksquare$$

## 5. Пример

Обозначим $U_n$ множество наборов $(q_1, \ldots, q_n) \in Q^n$, для каждого из которых существует набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \{-1, +1\}^n$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i q_i = 0$. Задача определения принадлежности набора $\bar{q} \in Q^n$ множеству $U_n$ извест-

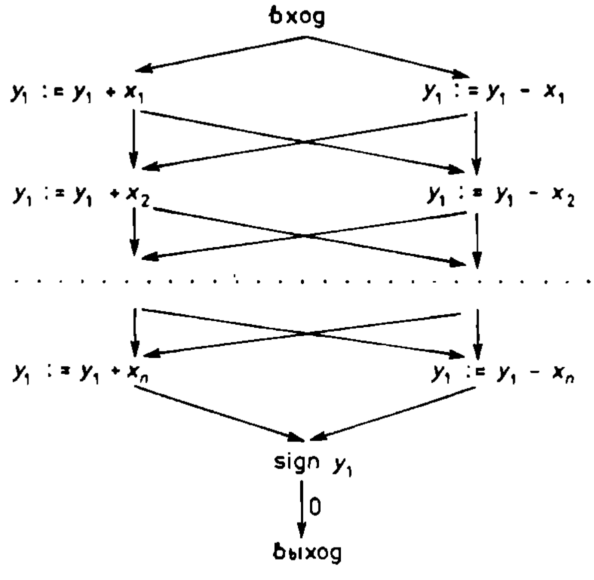


Рис. 1

на, как задача разбиения $n$ чисел. На рис. 1 приводится недетерминированная бесконтурная программа $P_n$ в базисе $B$, для которой $A(P_n) = U_n$ и $h(P_n) = n+1$. Используя теорему 2, получаем, что существует распознающая множество $U_n$ детерминированная бесконтурная программа в базисе $B$, глубина которой не превосходит $8(n+4)^9$.

## Литература

[1] М. Ю. Мошков, *Об условных тестах*, ДАН СССР 265, № 3 (1982), 550–552.

*Presented to the semester*
*Mathematical Problems in Computation Theory*
*September 16–December 14, 1985*