

**ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ,
ИМЕЮЩИЕ ПРОСТЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ОСТОВЫ**

С. В. МАТВЕЕВ и В. В. САВВАТЕЕВ (МОСКВА)

1. Введение. *Остовом* 3-многообразия M мы называем такой двумерный полиэдр $P \subset M$, что M (или M без 3-шара, если $\partial M = A$) полиэдрально (т.е. симплициально в некоторой триангуляции) стягивается на P . *Остов P специален*, если, во-первых, P является ложной поверхностью в смысле Каслера и Икеды [1], [4] и, во-вторых, если множество „многообразных” точек P распадается в объединение открытых 2-дисков. Если P специален, то множество сингулярных точек P является правильным графом (т.е. графом, из каждой вершины которого исходит ровно 4 ребра). Каждое 3-многообразие имеет специальный остов, и по своему специальному остову 3-многообразию определяется однозначно [1], [5]. Таким образом, чтобы задать 3-многообразие, достаточно задать какой-нибудь его специальный остов. Специальный остов, в свою очередь, задается с точностью до конечного числа возможностей правильным графом — множеством своих сингулярных точек.

Этот способ задания 3-многообразий приводит к новому способу перечисления 3-многообразий: с точностью до конечного числа возможностей такое перечисление сводится к перечислению всех правильных графов.

В настоящей работе приведен список 3-многообразий, отвечающих правильным графам с не более чем 5 вершинами, полученный с помощью электронно-вычислительной машины.

Работа разделяется на пункты: п. 1 — введение, в п. 2 напомнимся нужные понятия и обозначения, в п. 3 приведено другое определение специальных остовов, теорема Каслера о их существовании и теорема 1 служащая основой следующих теорем 2 и 3.

В п. 4 доказываются теоремы 2 и 3, необходимые для отбрасывания машинным путем „лишних” 3-многообразий. В п. 5 подробно выясняется, как устроены специальные остовы 3-многообразий. В п. 6 приведено краткое описание программы ЭВМ. Распознавание выдан-

ных машиной многообразий производилось с помощью приемов, описанных в п. 7. В п. п. 7 и 8 доказан ряд следствий.

Авторы очень признательны А. В. Чернавскому и М. А. Штанько за ряд полезных советов.

2. Обозначения. D^k и S^{k-1} обозначают стандартный k -мерный диск и его край в евклидовом пространстве R^k , RP^k — проективное пространство размерности k , ∂M и $\text{Int} M$ — край и внутренность многообразия M , $M_1 \# M_2$ — связная сумма многообразий M_1 и M_2 . Если комплекс L лежит в комплексе K , то $\text{St}(L, K)$ обозначает замкнутую звезду L в K , т.е. объединение тех замкнутых симплексов комплекса K , которые имеют вершину в L . Если v — вершина K , то $\text{lk}(v, K)$ обозначает линк v в K , т.е. объединение тех замкнутых симплексов звезды $\text{St}(v, K)$, для которых v не служит вершиной. Так как линк инвариантен относительно триангуляции, то имеет смысл говорить о линке точки v в полиэдре P . K' — барицентрическое подразделение комплекса K , $|K|$ — его тело. $\text{Con}(X)$ и \bar{X} обозначают конус над пространством X и замыкание X . Через T обозначается триод (букет трех отрезков).

Пусть K — комплекс и $\sigma_1^n, \sigma_2^{n-1} \in K$ — два таких открытых симплекса, что σ_1 — главный, т.е. σ_1 не является гранью никакого симплекса из K , а σ_2 — его свободная грань, т.е. σ_2 не является гранью никакого отличного от σ_1 симплекса из K . Тогда операция отбрасывания этой пары открытых симплексов называется *элементарным симплициальным стягиванием* K на $K_1 = K \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_2)$. Мы говорим, что полиэдр Q *полиэдрально стягивается* на свой подполиэдр P (обозначение: $Q \searrow P$), если в некоторой триангуляции K , L пары Q, P комплекс K стягивается на L с помощью последовательности элементарных симплициальных стягиваний.

Графом мы называем одномерный полиэдр. Те точки графа Γ , которые не имеют в Γ гомеоморфной открытому интервалу окрестности, называются *вершинами* Γ . Граф *правилен*, если из каждой его вершины исходит ровно 4 ребра.

Простой кривой называется гомеоморфный образ окружности. Система L попарно не пересекающихся простых кривых на крае ∂H полного кренделя H называется *диаграммой Хегора* замкнутого 3-многообразия M , если многообразие, получающееся из H приклеивкой „толстых” дисков (ручек индекса 2) вдоль кривых из L , гомеоморфно многообразию $M \setminus \text{Int} B$, где B — 3-шар в M . Род кренделя H называется *родом диаграммы*.

Все рассматриваемые пространства являются полиэдрами, все отображения кусочно линейны, все многообразия компактны, если не оговорено противное.

3. Почти специальные полиэдры и специальные остовы. Компактный полиэдр P называется *полиэдрально неуменьшаемым*, если его нельзя полиэдрально стянуть на собственный подполиэдр. Полиэдрально неуменьшаемый двумерный полиэдр называется *почти специальным*, если линк каждой его точки есть либо 0-мерный полиэдр, либо объединение 0-мерного (может быть, пустого) полиэдра и одного из графов S^1 , G или G_1 , где граф G состоит из окружности вместе с тремя ее радиусами, а граф G_1 имеет две вершины и три соединяющих их ребра. Объединение точек почти специального полиэдра P , линк которых содержит G или G_1 , обозначается через SP . Ясно, что SP является правильным графом. Вершины SP называются вершинами P . Множество точек полиэдра P , линк которых содержит S^1 , но не содержит G или G_1 , распадается в объединение некоторого числа 2-многообразий (быть может, открытых). Эти 2-многообразия мы будем называть *2-компонентами* P . Почти специальный полиэдр P называется *специальным*, если линк каждой его точки есть S^1 , G или G_1 и если все его 2-компоненты являются открытыми 2-дисками.

Лемма 1. *Полиэдрально неуменьшаемый подполиэдр почти специального полиэдра почти специален.*

Доказательство очевидно, так как полиэдрально неуменьшаемыми подполиэдрами S^1 , G или G_1 могут быть либо они сами, либо их объединения с 0-мерными полиэдрами, либо 0-мерные полиэдры.

Полиэдр $P \subset M$ называется *остовом* 3-многообразия M , если $M \setminus P$ в случае $\partial M \neq \Lambda$ и $(M \setminus \text{Int} B) \setminus P$ в случае $\partial M = \Lambda$, где B — 3-шар в M .

Остов P *специален* или *почти специален*, если P является специальным или почти специальным полиэдром соответственно.

Теорема Каслера. *Каждое 3-многообразие имеет специальный остов. Многообразия, имеющие гомеоморфные специальные остовы, гомеоморфны.*

Доказательство см. в [1] и [5].

Будем говорить, что почти специальный полиэдр P_1 *проще* (не сложнее) почти специального полиэдра P_2 , если число вершин P_1 меньше (не больше) числа вершин P_2 .

Теорема 1. *Пусть Q — почти специальный остов замкнутого ориентируемого 3-многообразия M . Тогда $M = \#_i M_i$, где каждое M_i либо гомеоморфно $S^2 \times S^1$ или RP^3 , либо имеет такой специальный остов P_i , что P_i не сложнее Q .*

Доказательство см. в [6].

4. Два способа упрощения специального остова. Пусть a — 2-компонента специального полиэдра P . Кривую $s = \bar{a} \setminus a$ назовем *границей* 2-компоненты a . Будем говорить, что a имеет *короткую гра-*

ничную кривую, если $\bar{\alpha}$ является вложенным в P 2-диском и содержит $k = 1, 2$ или 3 вершины P . Это означает, что кривая s проходит по k вершинам P и по каждой из них по одному разу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть какая-нибудь 2-компонента специального остова P замкнутого ориентируемого 3-многообразия M имеет короткую граничную кривую. Тогда $M = \#_i M_i$, где каждое M_i либо гомеоморфно $S^2 \times S^1$ или RP^3 , либо имеет такой специальный остов P_i , что P_i проще P .

Доказательство. Пусть α — такая 2-компонента P , что $\bar{\alpha}$ является вложенным в P 2-диском и содержит $k = 1, 2$ или 3 вершины P .

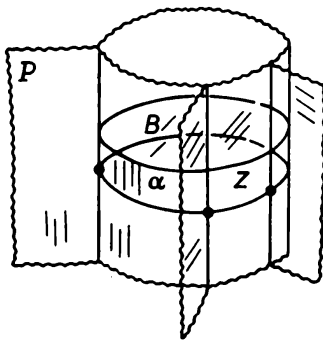


Рис. 1

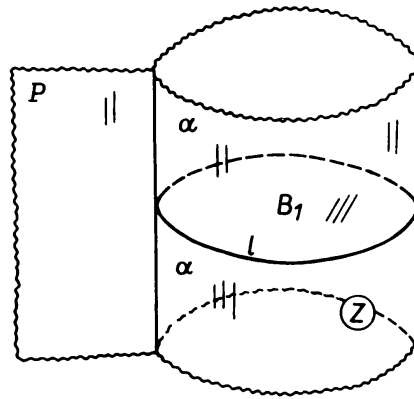


Рис. 2

Вложим $B = \bar{\alpha} \times [0, 1]$ в M так, чтобы $\bar{\alpha} \times \{0\} = \bar{\alpha}$, $\partial\bar{\alpha} \times [0, 1] \subset P$ и $B \cap P = \bar{\alpha} \cup (\partial\bar{\alpha} \times [0, 1])$ (см. рис. 1 для $k = 3$). Пусть Z обозначает одну из компонент, на которые SP разрезает $\partial\bar{\alpha} \times (0, 1)$. Тогда Z является открытым 2-диском. Ясно, что $M \setminus P \cup B$ и $(P \cup B) \setminus P_1 = P \cup (\partial B \setminus Z)$. Стянем полиэдр P_1 на какой-нибудь его полиэдрально неуменьшаемый подполиэдр P_2 . Тогда P_2 является почти специальным полиэдром (достаточно заметить, что P_2 содержится в почти специальном полиэдре $P \cup \partial B$ и применить лемму 1). При этом P_2 проще P , так как при добавлении ∂B к P появляется ровно k новых вершин, а при удалении Z из $P \cup \partial B$ исчезает по крайней мере $k+1$ вершина.

Остается заметить, что P_2 является почти специальным остовом M и применить теорему 1.

Пусть P — специальный полиэдр. Скажем, что на ребре b графа SP имеется *противоход*, если граничная кривая какой-нибудь 2-компоненты P проходит по ребру b два раза в противоположных направлениях.

Нам понадобится следующая лемма:

ЛЕММА 2. Пусть M — замкнутое ориентируемое 3-многообразие, $M_1 = M \setminus \text{Int } B$, где B — 3-шар в M , и P — специальный остов многообразия M_1 . Тогда существует такое отображение $\gamma: \partial M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_1$, что:

1. $\gamma(\partial M_1 \times \{0\}) = P$;
2. γ является локальным гомеоморфизмом, т.е. вложением на некоторой окрестности каждой точки;
3. γ является гомеоморфизмом $\partial M_1 \times (0, 1]$ на $M_1 \setminus P$.

Доказательство см. в [5].

ТЕОРЕМА 3. Пусть P — специальный остов замкнутого ориентированного 3-многообразия M и пусть на каком-нибудь ребре графа SP имеется противоход. Тогда $M = \# M_i$, где каждое M_i либо гомеоморфно $S^2 \times S^1$ или RP^3 , либо имеет такой специальный остов P_i , что P_i проще P .

Доказательство. Пусть граничная кривая 2-компоненты a специального остова P проходит по ребру b два раза в противоположных направлениях. Проведем в \bar{a} простую замкнутую кривую l , которая ровно один раз трансверсально пересекает SP в точке a , лежащей на ребре b (рис. 2). Мы утверждаем, что существует такой 2-диск $B_1 \subset M$, что $B_1 \cap P = \partial B_1 \cap P = l$. Действительно, по лемме 2, для многообразия M_1 , полученного из M выбрасыванием такого 3-шара B , что $B \cap P = A$, существует такой локальный гомеоморфизм $\gamma: \partial M_1 \times [0, 1] \rightarrow M_1$, что $\gamma(\partial M_1 \times \{0\}) = P$ и $\gamma|_{\partial M_1 \times (0, 1]}$ является гомеоморфизмом. Тогда $\gamma^{-1}(l)$ состоит из окружности $S \subset \partial M_1 \times \{0\}$ и отрезка $I \subset \partial M_1 \times \{0\}$, а $\gamma^{-1}(a)$ — из трех точек, одна из которых лежит на S , а две другие совпадают с концами I , причем $\gamma|_S$ является гомеоморфизмом S на l . (Здесь мы использовали условие противохода: если бы граничная кривая 2-компоненты a проходила ребро b два раза в одном и том же направлении, то $\gamma^{-1}(l)$ состояло бы из одного отрезка.)

Пусть диск $B_2 \subset \partial M_1 \times \{0\}$ ограничен окружностью S и не содержит I . Тогда в качестве искомого диска B_1 можно взять диск

$$\gamma((S \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (B_2 \times \{\frac{1}{2}\})).$$

Диск B_1 разбивает $E = M_1 \setminus P$ на две части, $E \setminus B_1 = E_1 \cup E_2$, причем только одна из них — пусть E_1 — содержит ∂M_1 . Пусть $Z \subset a$ — такой 2-диск, что $Z \subset \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$. Мы полиэдрально стягиваем M_1 на $P_1 = (P \cup B_1) \setminus Z$ так: сначала, начиная с ∂M_1 , стягиваем E_1 , потом через диск Z проникаем в E_2 и стягиваем E_2 . Полиэдр P_1 стягивается на свой какой-нибудь полиэдрально неуменьшаемый подполиэдр P_2 , который по лемме 1 является почти специальным. Полиэдр P_2 проще P , так как, заменив P на P_2 , мы не добавили новых вершин, в то же время вершины ребра b не являются вершинами P_2 . Остается заметить, что P_2 является почти специальным остовом M и применить теорему 1.

5. Описание конструкции специального остова по правильному графу. Пусть $\Pi = \text{Con}(G)$, где G — граф из п. 3. Мы считаем, что полиэдр Π стандартно вложен в R^3 так, как это изображено на рис. 3. Занумеруем вершины G и для i -ой вершины ($1 \leq i \leq 4$) выберем ее

малую замкнутую окрестность T_i в G , гомеоморфную T (T обозначает букет трех отрезков). На рис. 3 T_i отмечены, стрелками указаны индуцированные ориентацией R^3 направления обходов концов T_i . $G \setminus (\bigcup_i T_i)$ обозначим через \mathcal{C} . Тогда \mathcal{C} состоит из 6 дуг.

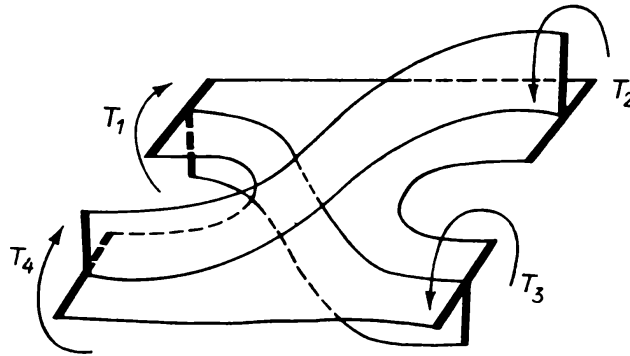


Рис. 3

Пусть дан связный правильный граф Γ с n вершинами. Занумеруем его вершины. Для каждой вершины занумеруем также все исходящие из нее ребра числами от 1 до 4. Таким образом, каждое ребро b графа Γ получает два номера, каждый из которых отвечает своему концу b .

Возьмем n экземпляров полиэдра Π . Все обозначения, относящиеся к i -ому экземпляру, будем снабжать индексом i в скобках. Пусть ребро b графа Γ соединяет i_1 -ую вершину с i_2 -ой, и номера b , отвечающие этим вершинам, равны j_1 и j_2 соответственно. Пусть $i_1 \leq i_2$ и, если $i_1 = i_2$, то $j_1 < j_2$. Выберем меняющий направление обхода концов $T_{j_1}(i_1)$ гомеоморфизм $h_b: T_{j_1}(i_1) \rightarrow T_{j_2}(i_2)$. Прделавав эту операцию для всех ребер b , получим набор гомеоморфизмов h_b — по одному для каждого ребра.

Склеив все $\Pi(i)$ между собой по этим гомеоморфизмам, получим полиэдр P_1 . При этом из дуг $\mathcal{C}(i)$ склеятся простые замкнутые кривые на P_1 , совокупность которых обозначим через L . Приклеив к P_1 2-диски вдоль кривых из L , получим специальный полиэдр P . Заметим, что $SP = \Gamma$.

Будем говорить, что специальный полиэдр P сконструирован на правильном графе Γ , если его можно получить из Γ описанным выше способом.

ТЕОРЕМА 4. *Специальный полиэдр P сконструирован на графе SP тогда и только тогда, когда P является специальным остовом некоторого ориентируемого 3-многообразия.*

Доказательство. Достаточность доказана в [6], п. 6, теорема 2.

Необходимость. Пусть специальный полиэдр P сконструирован

на правильном графе Γ , имеющем n вершин. В R^3 возьмем n экземпляров полиэдра Π — полиэдры $\Pi(i)$ — так, чтобы они отличались от стандартно лежащего в R^3 полиэдра Π на параллельные переносы. Так как гомеоморфизмы h_b меняют указанные на рис. 3 направления обходов концов $T_j(i)$, то склейку P_1 из $\Pi(i)$ по гомеоморфизмам h_b можно произвести внутри R^3 . Обозначим через H такую замкнутую окрестность множества сингулярных точек P_1 , что H является полным кренделем, $H \supset P_1$, $\partial H \cap P_1 = L$ и $H \searrow P_1$.

Возьмем одну кривую l_k из L . Она имеет в ∂H замкнутую окрестность U , гомеоморфную $S^1 \times [-1, 1]$. Приклеим $D^2 \times [-1, 1]$ к H по такому гомеоморфизму $f_k: \partial D^2 \times [-1, 1] \rightarrow U$, что $f_k(\partial D^2 \times \{0\}) = l_k$. Прделавав такую же операцию для всех кривых из L , получим 3-многообразие M с краем. Ясно, что полиэдр P , получающийся из P_1 приклейкой 2-дисков $D^2 \times \{0\}$ вдоль кривых из L по отображениям $f_k|_{\partial D^2 \times \{0\}}$, является специальным остовом M .

Замечание. Если $\partial M = S^2$, то кривые L на ∂H образуют диаграмму Хегора многообразия, получающегося из M заклейкой ∂M 3-шаром.

6. Краткое описание перебирающей 3-многообразия программы ЭВМ. Программа была основана на теоремах 2, 3 и 4. Машина перебрала все специальные полиэдры, сконструированные на правильных графах, имеющих $n \leq 5$ вершин. При этом нас интересовали только те специальные полиэдры, которые являются специальными остовами замкнутых многообразий. Графы перебирались вручную.

В машину вводился правильный граф с $n \leq 5$ вершинами и она выполняла следующие операции:

1. Различными способами нумеровала исходящие из каждой вершины графа ребра.

2. Для каждой нумерации рассматривала все возможные варианты выбора гомеоморфизмов $h_b: T_{j_1}(i_1) \rightarrow T_{j_2}(i_2)$ (см. п. 5, мы сохраняем обозначения этого пункта).

3. Для каждого фиксированного набора гомеоморфизмов h_b проводила кривые L и подвергала их следующей проверке:

(а) Есть ли короткие кривые (т.е. кривые, проходящие не более чем по трем экземплярам полиэдра Π и по каждому из них не более одного раза).

(б) Есть ли противоходы (т.е. имеется ли кривая, которая пересекает какой-нибудь из образов (при склейке) триэдров $T_j(i)$ два раза в противоположных направлениях).

(с) Равно ли число кривых в L числу $n+1$.

При положительном ответе на один из первых двух вопросов

или при отрицательном на третий, машина браковала этот вариант выбора гомеоморфизмов h_b и переходила к следующему варианту.

В противном случае она считала одномерную группу гомологий специального остова P , получающегося при данном выборе гомеоморфизмов h_b и результат выдавала на печать вместе с нумерацией ребер графа и гомеоморфизмами h_b .


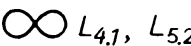
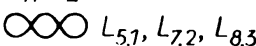

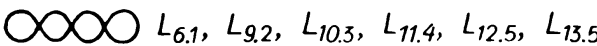

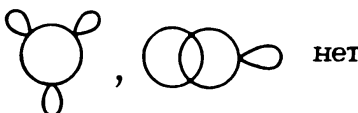
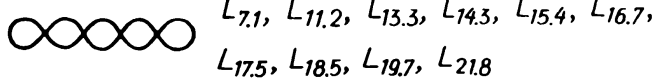
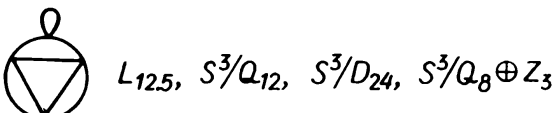
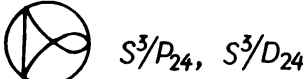
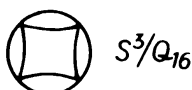
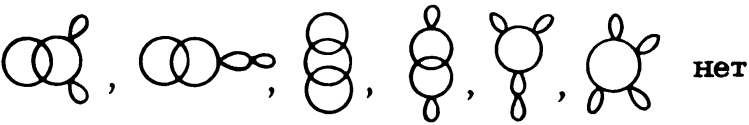
$n=0$ пустой граф S^3  $L_{3,1}$	$n=1$  $L_{4,1}, L_{5,2}$	$n=2$  $L_{5,1}, L_{7,2}, L_{8,3}$  S^3/Q_8
$n=3$  $L_{6,1}, L_{9,2}, L_{10,3}, L_{11,4}, L_{12,5}, L_{13,5}$  S^3/Q_{12}  нет		
$n=4$  $L_{7,1}, L_{11,2}, L_{13,3}, L_{14,3}, L_{15,4}, L_{16,7}, L_{17,5}, L_{18,5}, L_{19,7}, L_{21,8}$  $L_{12,5}, S^3/Q_{12}, S^3/D_{24}, S^3/Q_8 \oplus Z_3$  $S^3/P_{24}, S^3/D_{24}$  S^3/Q_{16}  нет		

Таблица результатов машинного подсчета для $n < 5$

Браковка по признаку (а) основана на теореме 2, по признаку (b) — на теореме 3, а по признаку (с) — на том замечании, что край многообразия, для которого P служит специальным остовом, не гомеоморфен S^2 , если число кривых в L не равно $n+1$.

Всего машина перебрала около 50 миллионов различных специальных остовов. Из них только 81 выдержали проверку по признакам (а), (b) и (с).

$n=5$				
	$L_{8,1}, L_{13,2}, L_{16,3}, L_{17,2}, L_{17,3}, L_{19,4}, L_{20,9},$ $L_{22,5}, L_{23,5}, L_{23,7}, L_{24,7}, L_{25,7}, L_{25,9}, L_{26,7},$ $L_{27,8}, L_{29,8}, L_{29,12}, L_{30,11}, L_{31,2}, L_{34,13}$			
	$L_{11,2}, L_{16,7}, L_{17,5}, L_{19,7}, S^3/P_{24}, S^3/D_{48},$ $S^3/P'_{72}, S^3/Q_8 \oplus Z_5, S^3/Q_{12} \oplus Z_5, S^3/P_{24} \oplus Z_5$			
	$L_{16,7}, S^3/Q_{16}, S^3/D_{40}, S^3/D_{48}, S^3/Q_8 \oplus Z_5,$ $S^3/Q_{12} \oplus Z_5, S^3/Q_{16} \oplus Z_3, S^3/Q_{20} \oplus Z_3$			
	$S^3/Q_{16}, S^3/D_{40}, S^3/Q_{16} \oplus Z_3, S^3/Q_{20} \oplus Z_3$			
	S^3/D_{40}		$L_{10,3}, L_{11,4}, S^3/P_{48}, S^3/P'_{72}$	
	S^3/Q_{20}		$S^3/P_{48}, S^3/P_{120}$	
} нет				

Таблица результатов машинного подсчета для $n = 5$

Таблица результатов устроена так: рядом с рисунком графа стоят замкнутые многообразия, имеющие сконструированные на этом графе и выдерживающие проверку по признакам (а) и (б) специальные остовы. $L_{p,q}$ обозначает линзовое пространство с параметрами p и q , S^3/G — многообразие с конечной фундаментальной группой G , универсальным накрывающим которого служит S^3 ; другими словами — фактор S^3 по некоторому свободному действию группы G .

Группы G таковы:

1. $Q_{4n} = \{x, y; x^2 = (xy)^2 = y^n\}$, где $n \geq 2$;
 2. $P_{24}, P_{48}, P_{120} = \{x, y; x^2 = (xy)^3 = y^n\}$, где $n = 3, 4$ и 5 соответственно;
 3. $D_{2k(2n+1)} = \{x, y; x^{2k} = y^{2n+1} = 1, xyx^{-1} = y^{-1}\}$, где $k \geq 3, n \geq 1$;
 4. $P'_{72} = \{x, y, z; x^2 = (xy)^2 = y^2, zyz^{-1} = xy, zxz^{-1} = y, z^9 = 1\}$.
- (Индекс внизу показывает, из скольких элементов состоит группа.)
5. Прямые суммы вышеперечисленных групп с циклической группой взаимно простого порядка.

Замечание. Известно, что эти группы могут свободно и линейно действовать на S^3 [7]. В частности, группы Q_{4n}, P_{24}, P_{48} и P_{120} являются подгруппами группы S^3 (группы кватернионов единичной длины). При двукратном накрытии $S^3 \rightarrow RP^3 = SO(3)$ эти подгруппы двукратно накрывают группы (сохраняющих ориентацию) симметрий правильной n -угольной призмы (диэдра), тетраэдра, октаэдра и додекаэдра соответственно.

7. Обработка результатов.

ЛЕММА 3. Пусть система кривых L на крае ∂H полного кренделя H рода n является диаграммой Хегора замкнутого 3-многообразия M , и пусть одна из кривых диаграммы (обозначим ее через l) ровно один раз трансверсально пересекает один из меридианов (обозначим его через m) кренделя H . Тогда M имеет диаграмму Хегора рода $n-1$.

Доказательство. Многообразие M_1 , получающееся из M удалением 3-шара, получается из H приклеиванием „толстых” дисков вдоль кривых из L . Обозначим через B_1 „толстый” диск, приклеенный вдоль l , а через B_2 — гомеоморфную D^3 замкнутую окрестность меридионального диска кренделя H , натянутого на m . Тогда кривые $L \setminus l$ на кренделе $\overline{H \setminus B_2}$ рода $n-1$ образуют диаграмму Хегора многообразия M , так как $Z = B_1 \cup B_2$ является 3-шаром и $Z \cap (\overline{M_1 \setminus Z})$ является 2-диском.

Пусть P — специальный остов замкнутого 3-многообразия M и α — его 2-компонента. Так как P не разбивает M , то в M существует простая замкнутая кривая l , пересекающая P только в одной точке, лежащей в α . Так как $M \setminus P$ является открытой клеткой, то такая кривая единственна с точностью до гомотопии. Кривая l определяет в $\pi_1(M)$ класс сопряженных элементов, который мы будем обозначать через $\langle \alpha \rangle$.

ЛЕММА 4. Пусть α — такая 2-компонента специального остова P замкнутого 3-многообразия M , что:

1. $\bar{\alpha}$ содержит все вершины P .
2. Существует такой гомоморфизм $\rho: \pi_1(M) \rightarrow Z_k$, где $k > 1$ — не-

которое натуральное число и Z_k — циклическая группа порядка k , что $\rho(\langle a \rangle)$ является образующей группы Z_k .

Тогда накрытие \tilde{M} многообразия M , отвечающее нормальному делителю $\text{Ker } \rho \subset \pi_1(M)$, имеет такой почти специальный остов P_1 , что P_1 не сложнее P .

Доказательство. Выберем такой 3-шар B в M , что $B \cap P = \Lambda$. Тогда $(M \setminus \text{Int} B) \searrow P$. Прообраз B при накрытии $f: \tilde{M} \rightarrow M$ состоит из k шаров, которые мы обозначим через B_i ($0 \leq i \leq k-1$). При этом можно считать, что трансляция t накрытия, отвечающая образующей $\rho(\langle a \rangle)$, переводит шар B_i в B_{i+1} (индексы берутся по модулю k). Так как полиэдральное стягивание $M \setminus \text{Int} B$ на P можно представить в виде последовательности очень малых элементарных симплициальных стягиваний, и так как каждое малое элементарное симплициальное стягивание поднимается до элементарного симплициального стягивания в накрытии, то

$$(\tilde{M} \setminus (\bigcup_i \text{Int} B_i) \searrow \tilde{P} = f^{-1}(P)).$$

Обозначим через E объединение точек \tilde{M} , отброшенных в процессе этого стягивания. Тогда E состоит из k компонент:

$$E = \bigcup_i E_i, \quad \text{причем } E_i \supset B_i.$$

$f^{-1}(a)$ состоит также из k компонент,

$$f^{-1}(a) = \bigcup_i \alpha_i,$$

причем α_i являются 2-компонентами \tilde{P} . Можно считать, что трансляция t переводит α_i в α_{i+1} . Тогда для каждого i имеем $\alpha_i \subset \bar{E}_i \cap \bar{E}_{i+1}$. Мы полиэдрально стягиваем $\tilde{M} \setminus \text{Int} B_1$ на

$$Q = \tilde{P} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right)$$

так: сначала, начиная с ∂B_1 , стягиваем E_1 , потом через α_1 проникаем в E_2 и стягиваем E_2 вместе с B_2 , потом через α_2 проникаем в E_3 и т.д. Полиэдр Q стягивается на свой почти специальный подполиэдр P_1 . Полиэдр P_1 является почти специальным остовом \tilde{M} и не сложнее P , так как только те вершины \tilde{P} , которые лежат в α_0 и не лежат в α_i для $i \neq 0$, могут сохраниться в P_1 , а число таких вершин не превосходит числа вершин P .

По выданному машине специальному остову P строилась диаграмма Хегора 3-многообразия M , отвечающего этому специальному остову (см. замечание в конце п. 5). Идентификация полученных

многообразий с написанными осуществлялась с помощью комбинаций следующих приемов:

1. По диаграмме Хегора выписывалось копредставление фундаментальной группы многообразия M и с помощью операций Титце [3], это копредставление сводилось к одному из перечисленных в п. 6.

2. В случае циклической фундаментальной группы диаграмма Хегора сводилась с помощью несколько раз примененной леммы 3 к диаграмме Хегора рода 1 (для графов типа „длинная восьмерка” этот процесс подробно описан в [6]).

3. В случае некоммутативной фундаментальной группы многообразия M всегда удавалось найти 2-компоненту α его специального остова P , удовлетворяющую условиям леммы 4. Тогда по лемме 4 некоторое нетривиальное накрытие \tilde{M} многообразия M имеет почти специальный остов с не более чем 5 вершинами. Так как из многообразий, перечисленных в таблице, только S^3 имеет единичную фундаментальную группу, то отсюда следует, что универсальное накрытие M является сферой.

4. Если специальный остов P имеет такую 2-компоненту α , что $\bar{\alpha}$ является вложенным в P 2-диском и $\bar{\alpha}$ содержит ровно 4 вершины P , то, повторяя рассуждения теоремы 2, мы, хотя и не добиваемся упрощения специального остова, но получаем другой почти специальный остов того же самого многообразия с тем же числом вершин. С помощью этого приема установлен гомеоморфизм тех перечисленных в таблице многообразий, которые имеют изоморфные некоммутативные фундаментальные группы.

5. Для групп Q_{4n} ($n \leq 5$), P_{24} , P_{48} и P_{120} удалось построить такие специальные остовы F_i факторов S^3 по их действию, индуцированному вложением в S^3 , что F_i имеют не более 5 вершин. Отсюда следует, что многообразия S^3/Q_{4n} , S^3/P_{24} , S^3/P_{48} и S^3/P_{120} совпадают с пространствами диэдра, тетраэдра, октаэдра и додекаэдра соответственно.

Список ориентируемых неприводимых 3-многообразий, имеющих специальные остовы с не более чем 5 вершинами:

Линзы. RP^3 , $L_{3.1}$, $L_{4.1}$, $L_{5.1}$, $L_{5.2}$, $L_{6.1}$, $L_{7.1}$, $L_{7.2}$, $L_{8.1}$, $L_{8.3}$, $L_{9.2}$, $L_{10.3}$, $L_{11.2}$, $L_{11.4}$, $L_{12.5}$, $L_{13.2}$, $L_{13.3}$, $L_{13.5}$, $L_{14.3}$, $L_{15.4}$, $L_{16.3}$, $L_{16.7}$, $L_{17.2}$, $L_{17.3}$, $L_{17.5}$, $L_{18.5}$, $L_{19.4}$, $L_{19.7}$, $L_{20.9}$, $L_{21.8}$, $L_{22.5}$, $L_{23.5}$, $L_{23.7}$, $L_{24.7}$, $L_{25.7}$, $L_{25.9}$, $L_{26.7}$, $L_{27.8}$, $L_{29.8}$, $L_{29.12}$, $L_{30.11}$, $L_{31.2}$, $L_{34.13}$.

Не линзы. S^3 , $S^2 \times S^1$ и S^3/G , где $G = Q_8, Q_{12}, Q_{16}, Q_{20}, P_{24}, P_{48}, P_{120}, D_{24}, D_{40}, D_{48}, P'_{72}, Q_8 \oplus Z_3, Q_{16} \oplus Z_3, Q_{20} \oplus Z_3, Q_8 \oplus Z_5, Q_{12} \oplus Z_5, P_{24} \oplus Z_5$.

ТЕОРЕМА 5. Если почти специальный остов P замкнутого ориентируемого 3-многообразия M имеет не более 5 вершин, то M есть связная сумма перечисленных в списке многообразий. Если P имеет не более 4 вершин и $H_1(M) = 0$, то $M = S^3$.

Доказательство немедленно вытекает из результатов машинного просчета и из теорем 1, 2, 3. Для доказательства последнего утверждения теоремы нужно еще заметить, что из перечисленных в списке многообразий только S^3 и пространство додекаэдра имеют тривиальную группу гомологий, но минимальный остов пространства додекаэдра имеет 5 вершин.

Следствие. Если ориентируемое 3-многообразие M с краем, гомеоморфным S^2 , имеет такую триангуляцию K , что не более $n = 4$ 3-симплексов K не имеют ребра на ∂M , и $H_1(M) = 0$, то M гомеоморфно 3-шару.

Доказательство. Пусть многообразие M_1 получено из M выбрасыванием малых шаровых окрестностей вершин K , лежащих внутри M . Тогда M_1 полиэдрально стягивается на полиэдр

$$Q_1 = \left| \bigcup_i \text{lk}(v_i, K') \right|,$$

где v_i — вершины K . Полиэдр Q_1 , в свою очередь, полиэдрально стягивается на такой почти специальный полиэдр P_1 , что P_1 имеет не более 4 вершин. (Вершинами P_1 могут служить только барицентры тех 3-симплексов триангуляции K , которые не имеют ребра на ∂M .) Пусть $E = M \setminus P_1$ и пусть Z обозначает такой набор открытых 2-дисков в P_1 , что каждый диск из Z является окрестностью в P_1 своей внутренней точки и что $E \cup Z$ является открытой клеткой. Тогда многообразие M можно стянуть на полиэдр $Q = P_1 \setminus Z$, по очереди отбрасывая компоненты связности E и проникая через диски Z из одной такой компоненты в другую. Полиэдр Q полиэдрально стягивается на свой почти специальный подполиэдр P . Число вершин P не превосходит 4, поэтому остается применить теорему 5.

Доказательство этого результата для $n = 0$ содержится в работе [2].

8. Способ построения почти специального остова 3-многообразия по его диаграмме Хегора. Пусть система кривых L на крае ∂H полного кренделя H является диаграммой Хегора многообразия M . Тогда многообразие $M_1 = M \setminus \text{Int} B$, где B — 3-шар в M , получается из H приклеиванием „толстых” дисков вдоль кривых из L . Пусть α — одна из компонент, на которые кривые L вместе с меридианами кренделя H разрезают ∂H . Мы полиэдрально стягиваем M_1 на $P_1 = (\partial H \setminus \alpha) \cup Z_1 \cup Z_2$, где Z_1 — объединение „сердцевин” приклеенных к H „толстых” дисков, а Z_2 — объединение меридиональных дисков H , так: сначала стягиваем M_1 на $H \cup Z_1$, стягивая каждый „толстый” диск на его „сердцевину”, а потом через α проникаем внутрь H и стягиваем H на $(\partial H \cup Z_2) \setminus \alpha$. Полиэдр P_1 стягивается на свой почти специальный подполиэдр Q . Полиэдр Q является почти специальным остовом M .

Заметим, что число вершин Q не превосходит $n - m$, где n — общее число точек пересечения L и ∂Z_2 , а m — число таких точек на \bar{a} .

ТЕОРЕМА 6. *Если 3-многообразие M имеет такую диаграмму Хегора, что общее число точек пересечения кривых диаграммы с меридианами кренделя не превосходит 9, то M есть связная сумма многообразий, перечисленных в списке п. 7 и, может быть, линзы $L_{9,1}$.*

Доказательство. Пусть кривые L на крае ∂H полного кренделя H образуют диаграмму Хегора многообразия M , причем число точек в $X = L \cap Z$, где Z — объединение меридиональных дисков H , не превосходит 9.

(а) Пусть одна из кривых диаграммы (обозначим ее через l) не содержит точек из X , т.е. $l \cap Z = \emptyset$. Тогда на l внутри H можно натянуть вложенный 2-диск B так, что $B \cap Z = \emptyset$ (достаточно это сделать в шаре, получающемся из H после разрезания по Z). Диски $Z \cup B$ разрезают H на два шара. Пусть $F \subset Z$ — такой диск, что после разрезания H по дискам $B \cup (Z \setminus F)$ получается один шар. Тогда диски $Z \setminus F$ являются меридиональными дисками кренделя H_1 , где H_1 — разрезанный по B крендель H , и кривые $L \setminus l$ образуют на H_1 диаграмму Хегора меньшего рода такого многообразия M_1 , что $M = M_1 \# S^2 \times S^1$, при этом общее число точек пересечения $L \setminus l$ и $Z \setminus F$ также не превосходит 9.

(б) Будем считать, что каждая кривая из L пересекает меридианы. Перевернув рассуждение (а), т.е. заменив H на крендель $\overline{M \setminus H}$ и поменяв L и ∂Z местами, добьемся, чтобы каждый меридиан кренделя H пересекал L .

(с) Пусть на одном из меридиональных дисков H (обозначим его через F) лежит только одна точка из X , и кривая l из L , пересекающая ∂F , пересекает ∂F трансверсально. Тогда по лемме 3 многообразии M имеет диаграмму Хегора меньшего рода, причем из доказательства леммы 3 вытекает, что общее число точек пересечения кривых новой диаграммы с меридианами кренделя также не превосходит 9.

(д) Будем считать, что на каждом меридиане H имеется по крайней мере две точки из X . Пусть a — такая компонента $\partial H \setminus (L \cup \partial Z)$, что \bar{a} пересекается по крайней мере с двумя меридианами H . Тогда на \bar{a} имеется по крайней мере 4 различные точки из X (по крайней мере две на одном и две на другом меридиане). Из способа построения почти специального остова по диаграмме Хегора вытекает, что тогда M имеет почти специальный остов Q с не более чем 5 вершинами. Остается применить теорему 5. Единственное исключение из рассуждения (д): род кренделя H равен 1. Тогда $M = L_{p,q}$, где $p \leq 9$, но все такие линзы перечислены в списке, кроме линзы $L_{9,1}$.

СЛЕДСТВИЕ. Если 3-многообразию M имеет такую диаграмму Хегора, что общее число точек пересечения кривых диаграммы с меридианами кренделя не превосходит 9, и $H_1(M) = 0$, то M есть либо сфера S^3 , либо пространство додекаэдра.

Доказательство очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. G. Casler, *An imbedding theorem for connected 3-manifolds with boundary*, Proceedings of the American Mathematical Society 16 (1965), стр. 559-566.
- [2] A. C. Connor, *Concerning fake cubes*, Topological Seminar, Wisconsin 1965, Princeton, N. J., 1966, стр. 101-102.
- [3] R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to knot theory*, 1963.
- [4] H. Ikeda, *Acyclic fake surfaces*, Topology 10 (1971), стр. 9-36.
- [5] С. В. Матвеев, *Специальные остовы кусочно линейных многообразий*, Математический сборник 92 (134), вып. 2 (10) (1973), стр. 282-293.
- [6] — *Один способ задания 3-многообразий*, Вестник Московского университета (в печати).
- [7] J. Milnor, *Groups, which can act on S^n without fixed points*, American Journal of Mathematics 79 (1957), стр. 623-630.

Reçu par la Rédaction le 16. 11. 1973