MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ НИЖНИХ ОЦЕНКАХ СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ КЛАССАХ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ, С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА СТРУКТУРУ СХЕМ

Г. А. ТКАЧЕВ

Московский Гидромелиоративный Институт, Москва, СССР

Задача об оценке сложности реализации индивидуальных функций является одной из важных задач кибернетики.

Для решения этой задачи обычно можно воспользоваться перебором всех схем определенной сложности. Однако этот тривиальный метод связан с большой трудоемкостью и является, по-видимому, одним из наименее эффективных методов получения оценок сложности.

В связи с этим естественно отказаться от построения минимальной схемы и попытаться найти универсальные методы синтеза, позволяющие эффективно, существенно сокращая перебор, строить „достаточно хорошие", по сложности, схемы для реализации любой функции.

Для некоторых классов управляющих систем такие методы синтеза были разработаны. Однако, используя эти алгоритмы и не привлекая дополнительную информацию о функции, для функций, допускающих более простую схемную реализацию, мы не получим оптимальные схемы. То есть, для функции сложных и, с практической точки зрения, малоинтересных эти методы дают достаточно хорошие схемы, а функции, представляющие практическую ценность, реализуются при этом как „самые плохие" функции.

В связи с этим можно сделать ещё один шаг и разумным образом сузить класс реализуемых функций. Построению таких классов и выяснению сложности реализации функций из этих классов посвящен целый ряд работ. Однако и в такой постановке решение задачи об оценке сложности реализации функций, в свою очередь, сопряжено с большими и, по всей видимости, принципиальными трудностями, отмеченными выше.

Таким образом, особенно важно научиться оценивать сложность реализации конкретных функций. При нахождении сложности реализации конкретных функций естественно ограничиться установлением „достаточно хорошей" оценки. При этом для явно указанной функции качество оценки в значительной степени определяется близостью нижней и верхней оценки к действительному значению сложности, величиной нижней оценки, „мощностью" класса управляющих систем, в котором реализуется эта функция. Получение верхней оценки связано с разработкой алгоритма построения схемы, достаточно полно учитывающего информацию о функции. Нижняя оценка устанавливается другими методами. И основная трудность связана, как правило, с нахождением нижних оценок сложности реализации функций, при этом особую трудность представляет доказательство нелинейности, относительно числа переменных, нижней оценки сложности.

В настоящее время наряду с такими модельными объектами как формулы и контактные схемы все большее внимание исследователей привлекает весьма мощный класс управляющих систем — схемы из функциональных элементов. Схемы из функциональных элементов являются математической моделью реальных вычислительных устройств, предназначенных для переработки дискретной информации, например, ЭВМ, с другой стороны их можно трактовать как схемы вычисления, в которых промежуточные результаты вычислений запоминаются и тем самым могут быть многократно использованы. Схемы из функциональных элементов строятся из некоторого множества элементов, реализующих базисные функции. При этом задается некоторое множество выходных полюсов схемы, предполагается, что в нашем распоряжении имеется достаточное число элементов каждого вида, заданы правила соединения элементов в схеме. И любой схеме из функциональных элементов в заданном базисе можно естественным образом поставить в соответствие функцию, которую реализует эта схема. Каждому элементу приписывается некоторое неотрицательное число — сложность (в данной работе сложность любого элемента равна единице) и сложность $L(S)$ схемы S определяется как сумма сложностей всех элементов схемы S.

Сложностью реализации функции f схемами из функциональных элементов в конечном базисе $\boldsymbol{B}$ назовем число $L(f)$-нижнюю грань функции $L(S)$ на множестве всех схем S, реализующих функцию f в базисе $\boldsymbol{B}$.

Часть 1

В первой части доклада рассматривается вопрос об оценке сложности реализации конкретных функций многозначной логики схемами из функциональных элементов в неполном базисе. Основным результатом этой части является эффективное построение последовательности функций k-значной логики ($k \geqslant 3$), минимальная сложность реализации которых в классе схем из функциональных элементов в некотором неполном базисе имеет экспоненциальный относительно числа переменных, рост и этот неполный базис порождает „достаточно мощный" замкнутый класс.

Более точно, пусть $L(f^{(k)})$-сложность реализации функций $f^{(k)} \in P_k$ ($k \geqslant 3$) схемами из функциональных элементов в неполном базисе $\boldsymbol{B}_k$, k-значной логики. В k-значной логике явно указывается последовательность функций $F^{(k)} = \{f_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\}$, для которых:

$$L(f_n^{(k)}) \sim C(k)\frac{(k-1)^n}{n^{(k-2)/2}}, \qquad C(k) = 2\frac{(k-1)^{(k-1)/2}}{(2\pi)^{(k-2)/2}}.$$

Далее всюду при любом фиксированном k ($k \geqslant 3$) под базисом будем понимать конечную систему функций $\boldsymbol{B}_k = \{\varphi(x, y); \psi(x, y); J_2(x); \ldots; J_{k-1}(x)\}$ ($\boldsymbol{B}_k \subset P_k$), где базисные функции задаются таблицами 1–3.

Таблица 1

$x \backslash y$	0	1	2	3	...	$k-1$
0	0	0	0	0	...	0
1	0	1	1	0	...	0
2	0	1	2	0	...	0
3	0	0	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...
$k-1$	0	0	0	0	...	0

$\varphi(x, y)$

Таблица 2

$x \backslash y$	0	1	2	3	...	$k-1$
0	0	0	0	0	...	0
1	0	1	0	0	...	0
2	0	0	0	0	...	0
3	0	0	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...
$k-1$	0	0	0	0	...	0

$\psi(x, y)$

Таблица 3

x	0	1	2	...	$m-1$	m	$m+1$	...	$k-1$
$J_m(x)$	0	1	1	...	1	2	1	...	1

($2 \leqslant m \leqslant k-1$).

Прежде, чем сформулировать основной результат главы, введем ряд вспомогательных понятий.

Набор τ длины n на множества $\varkappa = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ назовем главным, если:

1. Для любого i, $i \in \{2, 3, \ldots, k-1\}$, число вхождений символа i в набор τ равно $[n/(k-1)]$.

2. Число вхождений символа 1 в набор τ равно $n-(k-2)[n/(k-1)]$.
Число главных наборов длины n на множестве $\varkappa = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ обозначим через $N(k, n)$.

Будем говорить, что из набора τ можно выделить главный набор, если:

1. Набор τ не содержит символа 0;

2. Заменой (возможно пустой) некоторых символов в наборе τ единицами из него можно получить главный набор.

Набор, из которого можно выделить главный набор, назовем *приводимым*.

Пусть функция $f_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2k-2)$ из P_k определяется следующим образом:

$$f_n^{(k)}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } \tau \text{ не содержит символа 0 и } \tau \text{ не является} \\ & \text{приводимым набором;} \\ 0, & \text{если набор } \tau \text{ содержит ноль или } \tau \text{ приводимый} \\ & \text{набор.} \end{cases}$$

Наша цель показать, что для сложности реализации функций из последовательности $F^{(k)} = \{f_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)\}$ имеет место.

Теорема. *При любом фиксированном k $(k \geqslant 3)$ и $n \to \infty$ в классе схем из функциональных элементов в базисе B_k*

$$L(f_n^{(k)}) \sim C(k)\frac{(k-1)^n}{n^{(k-2)/2}}, \quad \text{где} \quad C(k) = 2\frac{(k-1)^{(k-1)/2}}{(2\pi)^{(k-2)/2}}.$$

Далее под схемой будем понимать приведенную схему из функциональных элементов в базисе B_k.

Базисные элементы, реализующие функции $\varphi(x, y)$; $\psi(x, y)$ и $J_m(x)$ $(2 \leqslant m \leqslant k-1)$ будем называть соответственно φ-, ψ- и J-элементами.

Если в схеме некоторая вершина определяет подсхему, построенную только из φ- и J-элементов, то такую подсхему будем называть $\varphi-J$-подсхемой. Пустую подсхему также считаем $\varphi-J$-подсхемой.

Схемы, в которых входы φ-элементов не присоединяются к выходам ψ-элементов, назовем *правильными*.

Отметим одно очевидное, но, тем не менее, важное *свойство* рассматриваемых схем.

Если на некотором входном наборе в схеме найдется вершина, с которой связан выход схемы, и этой вершине на этом наборе приписан ноль, то выходу схемы на этом входном наборе будет приписан ноль.

Обозначим через $f(S)$ функцию, которую реализует схема S.

Замечание. Если в произвольной схеме вход J-элемента присоединяется к выходу некоторого ψ-элемента, то такой J-элемент можно удалить, отождествив вход этого J-элемента с его выходом, причем полученная таким образом новая схема реализует ту же функцию, что и исходная.

Lemma 1. *В любой схеме; реализующей функцию $f_n^{(k)}$, на входы φ-элементов на любом входном наборе могут поступать только символы* 0, 1 *и* 2.

Лемма 2. *Если на некотором входном наборе в схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, выходу некоторой $\varphi - J$-подсхемы приписан ноль, то на этом наборе одному из входов этой $\varphi - J$-подсхемы приписан ноль.*

Лемма 3. *Для любой схемы S, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, существует правильная схема S', реализующая ту же функцию и $L(S') \leqslant L(S)$.*

Из леммы 3 следует, что в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением правильных схем, реализующих функции $f_n^{(k)}$.

В любой правильной схеме вершину, принадлежащую $\varphi - J$-подсхеме, назовем граничной, если к этой вершине присоединяется хотя бы один вход некоторого ψ-элемента.

Будем говорить, что граничная вершина схемы соответствует входному набору, если набор не содержит ноль, и на этом входном наборе этой граничной вершине приписывается символ 2.

Лемма 4. *В любой схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, отсутствует ψ-элементы, у которых хотя бы один вход присоединен к входу схемы.*

Лемма 5. *В любой правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, каждому главному набору соответствует по крайней мере одна граничная вершина.*

Лемма 6. *Если в некотором входном наборе в правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$ выходу какой-то $\varphi - J$-подсхемы приписан символ 2, то все символы входного набора, поступающие на входы этой $\varphi - J$-подсхемы, определяются однозначно, причем ни один из этих символов не является единицей.*

Лемма 7. *Если в правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, граничная вершина соответствует некоторому набору, то эта вершина связана не менее, чем с $(k-2)[n/(k-1)]$ входами схемы.*

Лемма 8. *Если в правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, граничная вершина соответствует главному набору, то эта вершина связана не более, чем с $(k-2)[n/(k-1)]$ входами схемы.*

Лемма 9. *В любой правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, каждая граничная вершина соответствует не более, чем одному главному набору.*

Доказательство теоремы

Нижняя оценка. Покажем, что при любом фиксированном k $(k \geqslant 3)$ и $n \geqslant 2k-2$ в классе схем из функциональных элементов в базисе B_k

$$2 \cdot N(k, n) - 1 \leqslant L(f_n^{(k)}),$$

где $N(k, n)$ — число главных наборов.

В самом деле, из леммы 5 и 9 получаем, что любой правильной схеме, реализующей функцию $f_n^{(k)}$, число граничных вершин не меньше $N(k, n)$ и, по лемме 4, каждая граничная вершина является выходом либо φ-, либо J-элемента. Таким образом, φ- и J-элементов в схеме не меньше $N(k, n)$.

Далее, так как рассматриваемая схема является приведенной, потребуется еще не менее $N(k, n)-1$ элементов, чтобы связать выход схемы со всеми граничными вершинами.

Отсюда:

$$2\cdot N(k, n)-1 \leqslant L(f_n^{(k)}).$$

Верхняя оценка. Доказывается, что при любом фиксированном k ($k \geqslant 3$) и $n \geqslant 2k-2$ можно построить схему S, реализующую функцию $f_n^{(k)}$ в базисе B_k и для сложности схемы S имеет место оценка

$$L(S) \leqslant 2\cdot N(k, n)+2\cdot n\cdot k\cdot k^{n/2}.$$

Далее, нетрудно показать, что

$$N(k, n) = \frac{n!}{\left[\frac{n}{k-1}\right]!^{k-2}\left(n-(k-2)\left[\frac{n}{k-1}\right]\right)!}.$$

Преобразуя выражение для $N(k, n)$ с помощью формулы Стирлинга, при $n\to\infty$ окончательно получаем:

$$L(f_n^{(k)}) \sim C(k)\frac{(k-1)^n}{n^{(k-2)/2}},$$

где

$$C(k) = 2\frac{(k-1)^{(k-1)/2}}{(2\pi)^{(k-2)/2}}.$$

Часть 2

Известно, что при рассмотрении асимптотически наилучших формул и схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, -\}$ для почти всех функций алгебры логики, достаточно ограничиться рассмотрением формул и схем глубины 3. В силу этого, представляет определенный интерес задача эффективного построения последовательности булевых функций, для которых минимальная сложность схем из функциональных элементов и формул ограниченной глубины ($\geqslant 3$) имеет нелинейный относительно числа переменный рост.

Схему S из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, -\}$ назовем схемой глубины r, если в любой цепи, соединяющей входы схемы S с выходом схемы, типы элементов меняются не более чем $r-1$ раз и существует цепь, в которой типы элементов меняются ровно $r-1$ раз.

В данной работе эффективно строится последовательность монотонных булевых функций, сложность реализации которых схемами из функциональных элементов глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, -\}$ и π-схемами (формулами) глубины 3 в базисе $\{\&, \vee\}$ имеет „почти экспоненциальный” относительно числа переменных рост.

Можно показать, что в любой минимальной схеме глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, -\}$, реализующей монотонную булеву функцию, нет элементов отрицания. Таким образом, для оценки сложности реализации монотонных булевых функций схемами из функциональных элементов глубины 3 можно ограничиться схемами глубины 3 в базисе $\{\&, \vee\}$.

Рассмотрим последовательность булевых функций:

$$f_0(x_1) = x_1;$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \vee x_3 \cdot x_4;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_{n+1}(x_1, \dots, x_{4^{n+1}}) = f_1(f_n(x_1, \dots, x_{4^n}), f_n(_{4^n+1}, \dots, x_{2\cdot 4^n}),$$
$$f_n(x_{2\cdot 4^n+1}, \dots, x_{3\cdot 4^n}), f_n(x_{3\cdot 4^n+1}, \dots, x_{4^{n+1}}));$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Доказано, что для сложности реализации

$$L_3^{\vee}(f_n(x_1, \dots, x_{4^n}))$$

функций из последовательности $\{f_n(x_1, \dots, x_{4^n})\}$ схемами из функциональных элементов глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, -\}$, у которых выходным элементом является элемент дизъюнкции, имеет место

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$2^{[n-[n/2]+1]/2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]-1}+2^{[n/2]}} - 5 \leqslant$$
$$\leqslant L_3^{\vee}(f_n) \leqslant 4^{n-[(n-1)/2]} \cdot 2^{2^{[(n-1)/2]+1}-1} + 2^{2^{n-[(n-1)/2]}}.$$

Замечание. Пусть $N = 4^n$, тогда при $n = 2m+1$ и $m \to \infty$

$$\sqrt[4]{8}\sqrt[8]{N} \cdot 2^{\sqrt{2}\sqrt[4]{N}} \lesssim L_3^{\vee}(f_n) \lesssim \sqrt{N} 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{N}}$$

при $n = 2m$ и $n \to \infty$

$$\sqrt{2}\sqrt[8]{N} \cdot 2^{\frac{3}{2}\sqrt[4]{N}} \lesssim L_3^{\vee}(f_n) \lesssim 2^{2\sqrt[4]{N}}.$$

Для сложности реализации $M_3^{\vee}(f_n(x_1, \dots, x_{4^n}))$ функций из последовательности $\{f_n(x_1, \dots, x_{4^n})\}$ формулами из класса $B_3^{\vee}$ имеет место

Теорема 2. *Пусть $N = 4^n$, тогда при любом целом неотрицательном n*

$$M_3^{\vee}\left(f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})\right) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{N}}{8} 2^{2\sqrt{2\sqrt[4]{N}}}, & \text{если } n = 2m+1, \\ \dfrac{\sqrt{N}}{8} 2^{3\sqrt[4]{N}}, & \text{если } n = 2m. \end{cases}$$

Прежде чем перейти к доказательству теорем, введем ряд вспомогательных понятий.

Опишем сначала процесс построения бесповторной π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$.

Бесповторная π-схема $P_0(x_1)$ представляет собой ребро, которому приписан символ x_1, концевые вершины ребра объявляем полюсами этой π-схемы.

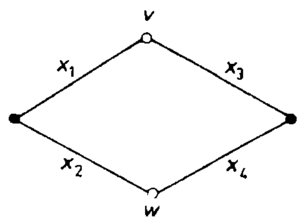

Рис. 1

Бесповторная π-схема $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ изображена на рис. 1, где символами v и w отмечаем её полюсы. Предположим, что построена π-схема $P_{n-1}(x_1, \ldots, x_{4^{n-1}})$. Из π-схемы $P_{n-1}(x_1, \ldots, x_{4^{n-1}})$ заменой символа x_j $(j = \overline{1, 4^{n-1}})$ на символ $x_{j+k\cdot 4^{n-1}}$ построим четыре π-схемы:

$$P_{n-1}(x_{1+k\cdot 4^{n-1}}, \ldots, x_{(k+1)4^{n-1}}) \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Для построения π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ поступаем следующим образом: в π-схеме $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ребро, помеченное символом x_{k+1}, заменяем π-схемой $P_{n-1}(x_{1+k\cdot 4^{n-1}}, \ldots, x_{(k+1)\cdot 4^{n-1}})$, при этом полюсы π-схемы $P_{n-1}(x_{1+k\cdot 4^{n-1}}, \ldots, x_{(k+1)\cdot 4^{n-1}})$ играют роль концевых вершин. Полюсами π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ объявляем полюсы π-схемы $P_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Главными подсхемами π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ назовем π-схемы

$$P_t(x_{1+i\cdot 4^t}, \ldots, x_{(i+1)\cdot 4^t}) \qquad (0 \leqslant t \leqslant n,\ 0 \leqslant i \leqslant 4^{n-t}-1).$$

Простую цепь, соединяющую полюс v с полюсом w π-схемы, назовем простой связывающей цепью. Длину максимальной простой связывающей цепи π-схемы назовем длиной этой π-схемы.

Процесс построения π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ организуем так, чтобы в любой простой связывающей цепи π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ индексы переменных, приписанных ребрам цепи, образовали возрастающую последовательность.

Удалив в π-схеме $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ символы переменных, приписанные ребрам этой π-схемы, получим π-сеть, которую обозначим через P_n и будем говорить при этом, что π-сеть P_n соответствует π-схеме $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$.

Далее π-сети будем называть для краткости сетями.

Подсети P_t, соответствующие главным подсхемам π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, назовем главными сетями сети P_n.

Связанную параллельно-последовательную подсеть $\mathfrak{G}$ сети P_n назовем приведенной, если полюсы v и w сети P_n принадлежат $\mathfrak{G}$ и для любого ребра u сети $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}$ найдется простая связывающая цепь, которой принадлежит ребро u.

Сеть $\mathfrak{G}$ назовем правильной, если она изоморфна некоторой приведенной подсети сети P_n.

Обозначим через $\delta(\mathfrak{G})$ число всех попарно-различных, простых цепей, соединяющих полюсы сети $\mathfrak{G}$.

Обозначим $\mathfrak{H}_n$ множество всех правильных сетей длины 2^n.

Пусть $\mathfrak{G} \in \mathfrak{H}_n$. Число всех, попарно-различных, тупиковых сечений сети $\mathfrak{G}$ назовем σ-сложностью сети $\mathfrak{G}$ и обозначим $\Sigma(\mathfrak{G})$.

Сумму мощностей всех попарно-различных тупиковых сечений сети $\mathfrak{G}$ назовем π-сложностью сети $\mathfrak{G}$ и обозначим $\Pi(\mathfrak{G})$.

Приведенной σ-сложностью сети $\mathfrak{G} \in \mathfrak{H}_n$ назовем число

$$\sigma(\mathfrak{G}) = \frac{\Sigma(\mathfrak{G})}{\delta(\mathfrak{G})}.$$

Приведенной π-сложностью сети $\mathfrak{G} \in \mathfrak{H}_n$ назовем число

$$\pi(\mathfrak{G}) = \frac{\Pi(\mathfrak{G})}{\delta(\mathfrak{G})}.$$

Основная лемма. *Для любой сети* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{H}_n$

$$2^{n-[n/2]-2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n} \leqslant \sigma(\mathfrak{G}),$$

$$2^{n-2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n} \leqslant \pi(\mathfrak{G}).$$

Набор τ длины 4^n на множество $\{0, 1\}$ назовем отмеченным если τ содержит ровно 2^n единиц и при замене символов переменных $x_1, \ldots, x_{4^n}$ соответствующими компонентами набора τ в π-схеме $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ найдется простая связывающая цепь, ребрам которой будут приписаны единицы.

Очевидно, по каждому отмеченному набору можно построить конъюнкцию, которая входит в минимальную ДНФ функции $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ и с каждой конъюнкцией из минимальной ДНФ функции $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ можно связать простую связывающую цепь в π-схеме $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$. Множество всех простых связывающих цепей в π-схеме $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ равномощно множеству всех отмеченных наборов.

Приведенную схему из функциональных элементов глубины 3 в базисе $\{\&, \vee, -\}$ назовем правильной, если выходным элементом этой схемы является элемент дизъюнкции.

В правильной схеме S вершину назовем граничной, если она является выходом некоторого конъюнктивного элемента и к этой вершине присоединяется хотя бы один вход некоторого дизъюнктивного элемента.

Будем считать, что в любой правильной схеме S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, все граничные вершины занумерованы.

Будем говорить, что i-я граничная вершина правильной схемы S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, соответствует набору τ, если τ — набор длины 4^n и на наборе τ, i граничной вершине схемы S прыписывается единица.

Лемма 1. *В любой правильной схеме, реализующей функцию каждому отмеченному набору соответствует по крайней мере одна граничная вершина.*

Будем говорить, что набор τ длины 4^n отвечает i граничной вершине правильной схемы S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ если i-я граничная вершина этой схемы соответствует набору τ.

Пусть схема S реализует функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$. Множество всех отмеченных наборов, которым соответствует i-я граничная вершина схемы S, обозначим через K_i, а подсхему, которая определяется этой вершиной ([3]), обозначим через S_i. Выделим подсхему S_i.

По множеству всех отмеченных наборов, отвечающих i-й граничной вершине правильной схемы S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, можно построить соответствующее множество Q_i простых связывающих цепей π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$. Очевидно мощность $|Q_i|$ множества Q_i равна мощности $|K_i|$ множества K_i. Мощность множества K_i назовем порядком i-й граничной вершины схемы S.

Ребра π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, входящие хотя бы в одну простую связывающую цепь из множества Q_i, задают некоторую π-схему $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$. При этом π-схема $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$ получается из π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, если из $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, удалить все ребра, не принадлежащие ни одной простой связывающей цепи из множества Q_i. Полюсы π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ будут полюсами в π-схеме $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$. Очевидно, каждая простая связывающая цепь из множества Q_i является некоторой простой цепью, соединяющей полюсы π-схемы $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$. Таким образом, если через C_i обозначить множество всех простых цепей в $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$, соединяющих полюсы, то можно написать, что мощность $|C_i|$ множества C_i не меньше мощности $|Q_i|$ множества Q_i.

Пусть R — некоторое множество простых связывающих цепей π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, а X' — подмножество множества $X = \{x_1, \ldots, x_{4^n}\}$.

Подмножество X' назовем сечением множества R, если для любой простой связывающей цепи из множества R, в X' найдется хотя бы одно переменное, приписанное некоторому ребру этой простой связывающей цепи. Сечение X' множества R назовем тупиковым, если любое собственное подмножество сечения X' не является сечением множества R. Тупиковое сечение множества всех простых связывающих цепей π-схемы $P_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ назовем главным.

В выделенной подсхеме S_i' вершину назовем квазиграничной, если она является выходом некоторого дизъюнктивного элемента и к этой вершине присоединяется хотя бы один вход некоторого конъюнктивного элемента.

В подсхеме S_i занумеруем все квазиграничные вершины. Обозначим через S_{ij} подсхему, которая определяется j-й квазиграничной вершиной подсхемы S_i. Через $X(S_{ij})$ обозначим множество переменных, приписанных входными полюсами подсхемы S_{ij}. Пусть X' некоторое тупиковое сечение множества C_i. Будем говорить, что подсхема S_{ij} покрывает сечение X' множества C_i, если $X' \subset X(S_{ij})$.

Лемма 2. *Для любого тупикового сечения X' множества C_i в подсхеме S_i найдется подсхема S_{ij}, покрывающая это сечение.*

Замечание. В выделенной подсхеме S_i различные тупиковые сечения множества C_i покрываются различными подсхемами S_{ij}. Отбросим в π-схеме $T_i(x_1, \ldots, x_{4^n})$ символы переменных, приписанные ребрам этой π-схемы. Полученную сеть обозначим через T_i. Очевидно

$$T_i \in \mathfrak{H}_n \text{ и } \Sigma(T_i) \geqslant \delta(T_i)\cdot\sigma(T_i).$$

Доказательство теоремы 1

Нижняя оценка. Выделим в правильной схеме S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, граничную вершину максимального порядка и обозначим его через k, а через S_i — подсхему, которую определяет эта граничная вершина.

Из леммы 2 и замечания следует, что $L(S_i) \geqslant 2\cdot\Sigma(T_i) - 3$.

Поскольку всех отмеченных наборов длины 4^n ровно 2^{2^n-1} штук, то из леммы 1 и из определения порядка вершины следует, что число граничных вершин не меньше $(1/k)\cdot 2^{2^n-1}$. Таким образом,

$$L_3^{\vee}(S) \geqslant L(S_i) + \frac{1}{k} 2\cdot 2^{2^n-1} - 2.$$

В силу основной леммы

$$\Sigma(T_i) \geqslant k\cdot 2^{n-[n/2]-2}\cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n}.$$

Отсюда

$$L(S_i') \geqslant 2^{n-[n/2]-1}\cdot k\cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n} - 3$$

и

$$L_3^{\vee}(S) \geqslant k \cdot 2^{n-[n/2]-1} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n} + \frac{1}{k} \cdot 2^{2^n} - 5.$$

Минимум правой части как функции параметра k достигается при

$$k = 2^{(-n+[n/2]+1)/2} \cdot 2^{2^n - 2^{n-[n/2]-1} - 2^{[n/2]}},$$

следовательно, для любой правильной схемы S, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, имеет место соотношение

$$L_3^{\vee}(S) \geqslant 2^{(n-[n/2]+1)/2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]-1}+2^{[n/2]}} - 5.$$

Верхняя оценка. Строится правильная схема S, реализующая функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$ так, чтобы для сложности схемы S имела место оценка

$$L_3^{\vee}(S) \leqslant 4^{n-[(n-1)/2]} \cdot 2^{2^{[(n-1)/2]+1}-1} + 2^{2^{n-[(n-1)/2]}} + 4^n \cdot 2^{2^{[(n-1)/2]}} + 2^n \cdot 2^{2^{n-[n/2]-1}}.$$

Доказательство теоремы 2

Нижняя оценка. Пусть $F = F_1 \vee \ldots \vee F_p$ — формула из класса $B_3^{\vee}$, реализующая функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, и пусть k_i — порядок подформулы F_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$. Порядок подформулы F_i — число отмеченных наборов длины 4^n, на которых подформуле F_i приписывается единица.

Используя аналоги лемм 1 и 2, а также основную лемму (оценку для $\pi(\mathfrak{G})$), можно показать, что для сложности $M(F_i)$ подформулы F_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ имеет место оценка

$$M(F_i) \geqslant k_i 2^{n-2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n}.$$

Поскольку $M_3^{\vee}(F) = \sum_1^p M(F_i)$, учитывая оценку величины $M(F_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, получаем

$$M_3^{\vee}(F) \geqslant 2^{n-2} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}-2^n} \cdot \sum_1^p k_i.$$

Из определения величины k_i следует, что $\sum_1^p k_i \geqslant 2^{2^n-1}$.

Таким образом, окончательно получаем

$$M_3^{\vee}(F) \geqslant 2^{n-3} 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}}$$

для любой формулы $F \in B_3^{\vee}$, реализующей функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$.

Верхняя оценка. Можно построить формулу $F \in B_3^{\vee}$, реализующую функцию $f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})$, для сложности которой имеет место оценка

$$M_3^{\vee}(F) \leqslant 2^{n-3} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}},$$

Учитывая нижнюю оценку, окончательно получаем

$$M_3^{\vee}(F) = 2^{n-3} \cdot 2^{2^{n-[n/2]}+2^{[n/2]+1}}.$$

Теорема 2 доказана.

Можно показать, что для сложности реализации $L_3^{\&}(f_n(x_1, \ldots, x_{4^n}))$ функций из последовательности $\{f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})\}$ схемами глубины 3, в которых выходным элементом является элемент конъюнкции, имеет место оценка при $n \to \infty$

$$2^{(n-[(n+2)/2])/2} \cdot 2^{2^{[(n+2)/2]-1}+2^{n-[(n+2)/2]}} - 5 \leqslant$$

$$\leqslant L_3^{\&}(f_n) \lesssim 4^{n-[(n+2)/2]} \cdot 2^{2^{[(n+1)/2]}} + 2^{2^{n-[(n+1)/2]-1}}.$$

Можно также доказать, что для сложности реализации $M_3^{\&}(f_n(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{4^n}))$ функций из последовательности $\{f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})\}$ формулами из класса $B_3^{\&}$ имеет место оценка

$$M_3^{\&}(f_n(x_1, \ldots, x_{4^n})) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{N}}{8} \cdot 2^{2\sqrt{2}\sqrt[4]{N}}, & \text{если } n = 2m+1, \\ \dfrac{\sqrt{N}}{8} \cdot 2^{3\sqrt[4]{N}}, & \text{если } n = 2m, \end{cases}$$

где $N = 4^n$.

Литература

[1] О. Б. Лупанов, *О синтезе некоторых классов управляющих систем*, Проблемы кибернетики 10 (1963), 63–97.

[2] Г. А. Ткачев, *О влиянии базиса на сложность реализации функций многозначной логики схемами из функциональных элементов*, ТР. ВЦ АН СССР 2 (1977), 16–45.

[3] —, *О сложности реализации одной последовательности функций k-значной логики*, Вестн, МГУ. Серия выч. матем. и кибернетика 1 (1977), 45–57.

[4] —, *О сложности реализации одной последовательности булевых функций схемами из функциональных элементов и π-схемами при дополнительных ограничениях на структуру схем*, Сб. Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике 2 (1980), 161–207.

[5] —, *О влиянии базиса на поведение функции Шеннона*, Сб. трудов института математики СО АН СССР, Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач. 34 (1980), 88–99.

[6] С. В. Яблонский, *Функциональные построения в k-значной логике*, Тр. Мат. ин-та АН СССР 51 (1958), 5–142.

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computation Theory
September 16–December 14, 1985