POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY

BOGDAN BOJARSKI redaktor
WIESŁAW ŻELAZKO zastępca redaktora
ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, ZBIGNIEW CIESIELSKI,
JERZY ŁOŚ, ZBIGNIEW SEMADENI

CCCXLIII

PINGPING DONG

Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes p-adiques de nombres algébriques

WARSZAWA 1995

Pingping Dong
Problèmes Diophantiens
Univ. P. et M. Curie
Mathématiques
T. 45–46, 5ème ét.
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 Warszawa, ul. Jakobinów 23, tel: 846-79-66, tel/fax: 49-89-95

P R I N T E D I N P O L A N D

© Copyright by Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1995

ISSN 0012-3862

TABLES DES MATIÈRES

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11J86.
Received 17.3.1993; revised version 6.6.1994.

Introduction

Le but de ce texte est d'établir une minoration pour des combinaisons linéaires simultanées de logarithmes de nombres algébriques p-adiques.

L'origine de cette question remonte à la solution par Gel'fond [3] et Schneider [14] du septième problème de Hilbert : si α et β sont des nombres algébriques non nuls, le quotient $\log\alpha/\log\beta$ ne peut être algébrique sans être rationnel.

L'analogue p-adique de ce théorème a été obtenu en 1935 par Mahler [7]. En 1939, Gel'fond [4] établit une mesure p-adique d'irrationalité pour le quotient de deux logarithmes p-adiques de nombres algébriques, sous la forme

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{P}}(\alpha^n - \beta^m) < \log^{3+\varepsilon} \max(|m|, |n|)$$

où $\mathcal{P}$ est un idéal premier d'un corps de nombres K, α et β des unités p-adiques multiplicativement indépendantes dans K^*, n, m des entiers rationnels et $n > n(\varepsilon, \alpha, \beta, \mathcal{P})$. En 1967, Schinzel [13] raffine ce résultat de Gel'fond et explicite toutes les constantes; il en donne de plus diverses applications arithmétiques.

Après les travaux de Baker [1], [2], il est devenu possible de minorer effectivement des nombres de la forme

$$\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n} - 1$$

pour les valuations complexes ou ultramétriques; ces dernières ont fait l'objet de travaux notamment de Loxton [5] et van der Poorten [9], Morita [8] et Yu Kunrui [20], [21], qui utilisent la méthode de Baker. Ces énoncés sont entièrement explicites.

Les seuls travaux déjà publiés concernant les minorations de combinaisons linaires simultanées de logarithmes de nombres algébriques portent sur le cas archimédien. Ramachandra [12] a obtenu le premier résultat dans cette direction. Loxton [5], en 1986, donne un énoncé plus précis avec des applications. Un raffinement se déduit de l'article [10] de Philippon et Waldschmidt, qui concerne plus généralement les groupes algébriques commutatifs.

Il n'y avait donc, jusqu'à présent, aucun résultat p-adique pour des combinaisons linéaires simultanées de logarithmes de nombres algébriques. L'énoncé que nous allons établir (voir l'introduction de la deuxième partie) est intéressant même dans le cas où il n'y a qu'une seule combinaison linéaire : il raffine dans certains cas les résultats de Yu Kunrui [20], [21].

Je voudrais exprimer ici mes remerciements très cordiaux à Michel Waldschmidt pour son assistance permanente durant la rédaction et à Sinnou David. A la suggestion de M. Waldschmidt, j'ai pu trouver un moyen dans l'article de Yu Kunrui [20] pour enlever le facteur $p^{(n+m-1)/m}$ dans c' et c (voir les corollaires 2.2 et 2.3 de la deuxième partie), il m'a indiqué une contrainte superflue sur Z, G et $\log_p E$ dans le corollaire 2.2 de la deuxième partie, et a réalisé numériquement les tableaux. Il a par ailleurs consacré énormément de temps à la correction et à la présentation de ce texte. D'autre part S. David m'a proposé la forme plus précise de l'inégalité de Liouville (corollaire 3.5 de la deuxième partie).

I. Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques

1. Introduction. La plupart des démonstrations de transcendance commencent par la construction d'une fonction auxiliaire. Liouville utilisait le polynôme minimal du nombre algébrique qu'il considérait, Hermite produisait des formules explicites, Thue et Siegel se contentaient d'appliquer le principe des tiroirs pour assurer l'existence de leur fonction auxiliaire.

Dans [15], théorème 3.1, M. Waldschmidt a construit une fonction auxiliaire générale pouvant servir à de nombreuses démonstrations de transcendance ou d'indépendance algébrique; il a amélioré cette construction dans [16]; le résultat obtenu lui permet de donner une nouvelle minoration de combinaisons linéaires de logarithmes [18]. Pour résoudre des problèmes analogues dans le cas p-adique, on est amené à construire des fonctions auxiliaires dans des domaines ultramétriques. Nous traduisons ici l'article [16] de M. Waldschmidt dans le cas p-adique, en suivant la même suite d'idées, et nous résolvons une question (corollaire 3.10) posée spécifiquement dans le cas p-adique.

La construction va être réalisée de la manière suivante: grâce à une version p-adique (lemme 2.2) du lemme 2.1 de [16], pour résoudre des inéquations, nous remplaçons, dans les estimations, le nombre d'inégalités par le rang du système. Nous majorons ce rang non trivialement, d'une part quand l'espace des dérivations est plus grand que l'espace où se trouvent les points, et d'autre part quand les fonctions non polynomiales ne font pas intervenir toutes les variables.

Nous construisons nos fonctions auxiliaires générales dans la section 2, nous appliquons cette construction dans la section 3 à des fonctions exponentielles pour résoudre un système d'inéquations; un changement de variables nous permet de franchir un obstacle mis dans l'application à cause du domaine de définition très étroit de la fonction exponentielle p-adique; la résolution de ce système va rendre possible une minoration de combinaisons linéaires de logarithmes p-adique (problème simultané; voir la deuxième partie). Nous donnons, dans la section 4, un exemple concernant des polynômes exponentiels en plusieurs variables, et dans la section 5, nous explicitons le cas d'une seule variable.

NOTATIONS. Dans tout cet article, on désigne par $p \geq 2$ un nombre premier, par $\log_p x$, pour x réel positif, le logarithme de x en base p et par v la valuation usuelle du corps $\mathbb{C}_p$, par $|x|$, pour $x \in \mathbb{C}_p$, la valeur absolue de x:

$$|x| = p^{-v(x)} \quad \text{avec} \quad |0| = 0,$$

tandis que $\|x\|$ représente pour $x \in \mathbb{Q}$ la valeur absolue usuelle de x.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$ et $\zeta \in \mathbb{C}_p$, on note $x\zeta$ l'élément $(x_1\zeta, \ldots, x_n\zeta)$ de $\mathbb{C}_p^n$. On désigne aussi par xy le produit scalaire standard sur $\mathbb{C}_p^n$: $xy = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \in \mathbb{C}_p$. Quand $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_p^n$, on désigne par $\mathcal{E}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}_p^n$ pour ce produit scalaire. De plus, pour $w = (w_1, \ldots, w_t) \in (\mathbb{C}_p^n)^t$ et $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_t) \in \mathbb{C}_p^t$, on notera encore $w\zeta$ le point $w_1\zeta_1 + \ldots + w_t\zeta_t$ de $\mathbb{C}_p^n$. Enfin, pour $u = (u_1, \ldots, u_s) \in (\mathbb{C}_p^n)^s, z \in \mathbb{C}_p^n$ et $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_s) \in \mathbb{N}^s$, on note $(u \cdot z)^\sigma$ le nombre p-adique $\prod_{i=1}^s (u_i z)^{\sigma_i}$.

On considère des fonctions analytiques de n variables.

Pour $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $R_j \geq 0$, $(j = 1, \ldots, n)$, on désigne par $\mathcal{D}(0, R)$ le polydisque $\{z \in \mathbb{C}_p^n;\ |z_j| \leq R_j,\ j = 1, \ldots, n\}$.

On utilisera la norme $|z| = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$ sur $\mathbb{C}_p^n$. Pour $u = (u_1, \ldots, u_s) \in (\mathbb{C}_p^n)^s$, on notera encore de manière abrégée $|u|$ au lieu de $\max\{|u_1|, \ldots, |u_s|\}$.

Pour x et y dans $\mathbb{C}_p^n$, on a $|xy| \leq |x||y|$; pour $w \in (\mathbb{C}_p^n)^t$ et $\zeta \in \mathbb{C}_p^t$, on a $|w\zeta| \leq |w||\zeta|$. Enfin, pour $u \in (\mathbb{C}_p^n)^s$, $z \in \mathbb{C}_p^n$ et $\sigma \in \mathbb{N}^s$, on a $|(u.z)^\sigma| \leq (|u||z|)^{\|\sigma\|}$, avec $\|\sigma\| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_s$.

Pour chaque $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ dans $\mathbb{N}^n$, on note D^κ pour

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^{\kappa_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial z_n}\right)^{\kappa_n}$$

et $\kappa!$ pour $\kappa_1! \ldots \kappa_n!$.

On désignera désormais par $\mathcal{K}$ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

D'autre part, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}_p^n$ (ou $\in \mathcal{K}^n$), on pose $D_x = x_1(\partial/\partial z_1) + \ldots + x_n(\partial/\partial z_n)$. Si F est une fonction analytique au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}_p^n$ (ou dans $\mathcal{K}^n$), et ζ une nouvelle variable, on a

$$D_x F(z) = \frac{d}{d\zeta} F(z + x\zeta)|_{\zeta=0}.$$

Si $w_1, \ldots, w_t$ sont des éléments de $\mathbb{C}_p^n$ et τ un élément de $\mathbb{N}^t$, en notant $w = (w_1, \ldots, w_t)$, on pose $D_w^\tau = D_{w_1}^{\tau_1} \ldots D_{w_t}^{\tau_t}$. Ainsi, en introduisant t nouvelles variables $\zeta_1, \ldots, \zeta_t$, on a

$$(1.1) \qquad D_w^\tau F(z) = \prod_{i=1}^t \left(\frac{\partial}{\partial \zeta_i}\right)^{\tau_i} F(\zeta_1 w_1 + \ldots + \zeta_t w_t + z)|_{\zeta=0}.$$

Quand $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^n$ muni d'une base $w = (w_1, \ldots, w_t)$, F une fonction analytique au voisinage d'un point z_0 de $\mathcal{K}^n$, et T un entier ≥ 0, le système d'équations $D_w^\tau F(z_0) = 0$ ($\tau \in \mathbb{N}^t$, $\|\tau\| \leq T$) ne dépend pas du choix de la base w de $\mathcal{W}$; quand il est satisfait, on dit que F a un zéro au point z_0 de multiplicité au moins T le long de $\mathcal{W}$. Aussi écrira-t-on quelquefois (par abus de notation) $D^\tau_{\mathcal{W}}$ au lieu de D^τ_w.

Une fonction F est dite "analytique" dans un polydisque $\mathcal{D}(0,R)$ de $\mathbb{C}_p^n$ (ou de $\mathcal{K}^n$), quand elle admet une représentation dans $\mathcal{D}(0,R)$

$$F(z) = \sum_{\kappa\in\mathbb{N}^n} a_\kappa z^\kappa, \quad a_\kappa \in \mathbb{C}_p \text{ (ou } \in \mathcal{K}),\ z \in \mathcal{D}(0,R),$$

avec

$$\lim_{\|\kappa\|\to\infty} |a_\kappa| R^\kappa = 0,$$

où on écrit, bien sûr, κ pour $(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)$, z^κ pour $z_1^{\kappa_1}\ldots z_n^{\kappa_n}$, et donc R^κ pour $R_1^{\kappa_1}\ldots R_n^{\kappa_n}$. On écrit alors $M(F,R)$ pour $\sup_{\kappa\in\mathbb{N}^n} |a_\kappa|R^\kappa$, et on a

$$|F|_R := \sup_{z\in\mathcal{D}(0,R)} |F(z)| \le M(F,R);$$

ainsi $a_\kappa = (1/\kappa!)D^\kappa F(0)$ pour tout $\kappa \in \mathbb{N}^n$.

On se donne $r = (r_1,\ldots,r_t)$ avec $r_1,\ldots,r_t > 0$. Soient $z \in \mathcal{D}(0,R)$ et $w \in (\mathbb{C}_p^n)^t$ (ou $\in (\mathcal{K}^n)^t$) vérifiant la propriété suivante : $z + \zeta w \in \mathcal{D}(0,R)$ pour tout $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_t) \in \mathbb{C}_p^t$ (ou $\in \mathcal{K}^t$) tel que $\zeta \in \mathcal{D}(0,r)$; on définit alors

$$\Phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_t) = F(z+\zeta w), \quad \zeta \in \mathcal{D}(0,r);$$

cette fonction Φ est analytique sur le disque $\mathcal{D}(0,r) \subset \mathbb{C}_p^t$ (ou $\subset \mathcal{K}^t$) et vérifie

$$\left|\frac{r^\tau}{\tau!} D^\tau_w F(z)\right| = \left|\frac{1}{\tau!} D^\tau \Phi(0) r^\tau\right| \le M(r,\Phi).$$

Enfin, quand $K_1,\ldots,K_n$ sont des entiers positifs, on désigne par $\mathcal{N}(K_1,\ldots,K_n)$ l'ensemble des éléments $(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)$ de $\mathbb{N}^n$ vérifiant

$$\frac{\kappa_1}{K_1} + \ldots + \frac{\kappa_n}{K_n} < 1.$$

La condition $\kappa \in \mathcal{N}$ implique $\kappa_j < K_j$ pour $j = 1,\ldots,n$, donc $\mathrm{Card}\,\mathcal{N} \le K_1\ldots K_n$.

2. Fonctions auxiliaires. Dans cette section nous construisons des fonctions auxiliaires traduisant celle produite par la proposition 2.3 de [16]. Nous utiliserons deux lemmes préliminaires : d'abord (lemme 2.2) une version p-adique du lemme 2.1 de [16], ensuite (lemme 2.3) une formule d'interpolation. Le résultat principal de cette section est la proposition 2.4; elle fait intervenir le rang d'une matrice, et nous montrons (lemme 2.5) comment majorer ce rang non trivialement dans certains cas. L'énoncé qu'on en déduit (corollaire 2.6) sera utilisé dans la section suivante pour construire des polynômes exponentiels.

Nous notons respectivement e, f et g l'indice de ramification, le degré résiduel, et le degré sur $\mathbb{Q}_p$ de l'extension finie $\mathcal{K}$ de $\mathbb{Q}_p$; ainsi ef $= g$. Désignons par a une uniformisante pour $\mathcal{K}$ (c'est-à-dire $|a| = p^{-1/\mathrm{e}}$), et par $\mathcal{A}$ l'anneau de valuation de $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{K} : |x| \le 1\};$$

enfin, dans le présent texte, pour $x \in \mathbb{Q}$, nous désignons par $\|x\|$ la valeur absolue usuelle de x.

LEMME 2.1. *Soient ϱ, ι des entiers ≥ 0, Δ un nombre réel positif, et $u_{ij} \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \ldots, \nu$, $j = 1, \ldots, \mu$) des entiers de $\mathcal{K}$. On suppose que la matrice (u_{ij}) a un rang $\le \varrho$ et que*

$$\varrho \mathrm{f} \iota \le \nu \Delta.$$

Alors, il existe $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ vérifiant

$$0 < \max_{1 \le i \le \nu} \|x_i\| \le p^{\Delta}$$

et

$$\max_{1 \le j \le \mu} \Big| \sum_{i=1}^{\nu} u_{ij} x_i \Big| \le p^{-\iota/\mathrm{e}}.$$

Démonstration. Notons d'abord que $\mathcal{K}^\mu$, muni de la norme définie précédemment:

$$|u| = \max_{1 \le j \le \mu} |u_j|, \qquad u = (u_1, \ldots, u_\mu) \in \mathcal{K}^\mu,$$

est un espace de Banach sur $\mathcal{K}$. On pose $\delta = [p^{\Delta}]$ et

$$\mathcal{E} = \{(x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu : 0 \le x_i \le \delta,\ i = 1, \ldots, \nu\}.$$

On définit une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{A}^\mu \subset \mathcal{K}^\mu$ par

$$\varphi : (x_1, \ldots, x_\nu) \mapsto \Big(\sum_{i=1}^{\nu} u_{ij} x_i \Big)_{1 \le j \le \mu}, \qquad (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathcal{E}.$$

L'image $\varphi(\mathcal{E})$ est contenue dans un sous-espace de Banach E de $\mathcal{K}^\mu$ de dimension ϱ, car la matrice (u_{ij}) a un rang $\le \varrho$. Mais E admet une base normale $(e_1, \ldots, e_\varrho)$ [1] :

$$\varphi(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}^\mu \cap E = \Big\{ \sum_{\kappa=1}^{\varrho} a_\kappa e_\kappa : a_\kappa \in \mathcal{A},\ \kappa = 1, \ldots, \varrho \Big\}.$$

Comme $\mathcal{A}$ est une union de $p^{\mathrm{f}\iota}$ boules (fermées) de même rayon que la boule $a^\iota \mathcal{A}$, à savoir $p^{-\iota/\mathrm{e}}$, et que ces boules sont deux-à-deux disjointes, il en résulte que $\mathcal{A}^\mu \cap E$ est divisé en $p^{\varrho \mathrm{f} \iota}$ boules (dans E) de rayon $p^{-\iota/\mathrm{e}}$, et que ces petites boules sont deux-à-deux disjointes. Puisque $\operatorname{Card} \mathcal{E} = (\delta + 1)^\nu > p^{\nu\Delta} \ge p^{\varrho \mathrm{f} \iota}$, d'après le principe des tiroirs, il existe deux points distincts $x', x'' \in \mathcal{E}$ dont les images $\varphi(x'), \varphi(x'')$ appartiennent à une même boule :

$$|\varphi(x' - x'')| = |\varphi(x') - \varphi(x'')| \le p^{-\iota/\mathrm{e}};$$

donc $x = x' - x''$ vérifie ce que l'on veut. ∎

---

[1] Voir par exemple Y. Amice, *Les Nombres p-adiques*, Presses Universitaires de France, 1975, p. 80 et 82.

Lemme 2.2. *Soient ϱ, ι des entiers ≥ 0, $U_1, \ldots, U_\mu$ des nombres réels, Δ un nombre réel positif, et u_{ij} $(i = 1, \ldots, \nu,\ j = 1, \ldots, \mu)$ des éléments de $\mathcal{K}$. On suppose que la matrice (u_{ij}) a un rang $\leq \varrho$, que l'on a*

$$|u_{ij}| \leq p^{U_j} \qquad (i = 1, \ldots, \nu,\ j = 1, \ldots, \mu),$$

et que

$$\varrho \mathrm{f} \iota \leq \nu \Delta.$$

Alors, il existe $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ vérifiant

$$0 < \max_{1 \leq i \leq \nu} \|x_i\| \leq p^\Delta$$

et

$$\Big|\sum_{i=1}^{\nu} u_{ij} x_i\Big| \leq p^{-(\iota/\mathrm{e}) + U_j} \qquad (j = 1, \ldots, \mu).$$

Démonstration. On pose $t_j = [\mathrm{e} U_j]$ $(j = 1, \ldots \mu)$, de sorte que $|u_{ij}| \leq p^{t_j/\mathrm{e}}$ pour $i = 1, \ldots, \nu$ et $j = 1, \ldots, \mu$. Donc $a^{t_j} u_{ij} \in \mathcal{A}$ pour $i = 1, \ldots, \nu$ et $j = 1, \ldots, \mu$. Le lemme 2.1 assure qu'il existe $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \mathbb{Z}^\nu$ vérifiant $0 < \max_{1 \leq i \leq \nu} \|x_i\| \leq p^\Delta$ et

$$\max_{1 \leq j \leq \mu} \Big|a^{t_j} \sum_{i=1}^{\nu} u_{ij} x_i\Big| \leq p^{-\iota/\mathrm{e}};$$

alors

$$\Big|\sum_{i=1}^{\nu} u_{ij} x_i\Big| \leq p^{(-\iota + t_j)/\mathrm{e}} \leq p^{-(\iota/\mathrm{e}) + Uj} \qquad (j = 1, \ldots, \mu). \ \blacksquare$$

Lemme 2.3 (Formule d'interpolation). *Soient $K_1, \ldots, K_n$ des entiers positifs, $r_1, \ldots, r_n$, $R_1, \ldots, R_n$ des nombres réels positifs avec $r_j \leq R_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. On écrit $\mathcal{N}$ pour $\mathcal{N}(K_1, \ldots, K_n)$. Quand F est une fonction analytique dans le polydisque $\mathcal{D}(0; R)$ de $\mathbb{C}_p^n$ (ou de $\mathcal{K}^n$), de développement de Taylor à l'origine*

$$F(z) = \sum_{\kappa \in \mathbb{N}^n} a_\kappa z^\kappa, \qquad a_\kappa \in \mathbb{C}_p \ (ou\ \in \mathcal{K}),\ \kappa \in \mathbb{N}^n,$$

on a

$$M(F, r) \leq \max\{M(F, R) \max_{1 \leq j \leq n} (R_j/r_j)^{-K_j}, \max_{\kappa \in \mathcal{N}} |a_\kappa| r^\kappa\}.$$

Démonstration. Commençons par démontrer l'inégalité annoncée dans le cas particulier $a_\kappa = 0$, pour tout $\kappa \in \mathcal{N}$ (*lemme de Schwarz*).

On pose $q = \max_{1 \leq j \leq n} (R_j/r_j)^{-K_j} \leq 1$. On a

$$\begin{aligned} M(F, r) &= \sup_{\kappa \notin \mathcal{N}} |a_\kappa| r^\kappa = \sup_{\kappa \notin \mathcal{N}} |a_\kappa| R^\kappa (r_1/R_1)^{\kappa_1} \ldots (r_n/R_n)^{\kappa_n} \\ &\leq \sup_{\kappa \notin \mathcal{N}} |a_\kappa| R^\kappa \cdot q^{(\kappa_1/K_1) + \ldots + (\kappa_n/K_n)} \leq q M(F, R). \end{aligned}$$

Passons au cas général. On pose $G = \sum_{\kappa \notin \mathcal{N}} a_\kappa z^\kappa$; on peut appliquer le lemme de Schwarz que nous venons de démontrer à la fonction G; on trouve ainsi $M(G,r) \le qM(G,R) \le qM(F,R)$ et

$$M(F,r) = \max\bigl\{M(G,r),\ \max_{\kappa\in\mathcal{N}} |a_\kappa| r^\kappa\bigr\} \le \max\bigl\{qM(F,R),\ \max_{\kappa\in\mathcal{N}} |a_\kappa| r^\kappa\bigr\}. \ \blacksquare$$

PROPOSITION 2.4. *Soient L, A et $K_1,\dots,K_n$ des entiers positifs, U, V des nombres réels, et Δ, W, $r_1,\dots,r_n$, $R_1,\dots,R_n$ des nombres réels positifs vérifiant*

$$r_j \le R_j, \quad U+V \le K_j \log_p(R_j/r_j) \quad (j=1,\dots,n) \tag{2.1}$$

et soit $\iota\in\mathbb{Z}$, $\iota\ge 0$, tel que

$$g(U+V) \le \mathrm{f}\iota \le \frac{L\Delta}{W}. \tag{2.2}$$

Soient $\varphi_{\lambda\alpha}$ $(\lambda=1,\dots,L,\ \alpha=1,\dots,A)$ des fonctions analytiques dans le polydisque $\mathcal{D}(0,R)$ de $\mathcal{K}^n$, majorées par

$$M(\varphi_{\lambda\alpha},R) \le p^U \quad (\lambda=1,\dots,L,\ \alpha=1,\dots,A).$$

On note encore $\mathcal{N}=\mathcal{N}(K_1,\dots,K_n)$ et on considère la matrice

$$(D^\kappa\varphi_{\lambda\alpha}(0))_{\lambda,(\alpha,\kappa)},$$

où λ est, disons, l'indice de ligne $(1\le\lambda\le L)$, et (α,κ) celui de colonne $(1\le \alpha\le A, \kappa\in\mathcal{N})$; on suppose que le rang de cette matrice est inférieur ou égale à W. Alors, il existe des entiers rationnels $p_1,\dots,p_L$, non tous nuls, majorés par

$$\max_\lambda \|p_\lambda\| \le p^\Delta, \tag{2.3}$$

tels que, pour $1\le\alpha\le A$, la fonction

$$\Phi_\alpha = \sum_{\lambda=1}^L p_\lambda\varphi_{\lambda\alpha}$$

vérifie

$$M(\Phi_\alpha,r) \le p^{-V}. \tag{2.4}$$

Remarque. Il suffit de supposer $L\Delta/W - g(U+V) \ge \mathrm{f}$ pour garantir l'existence d'un entier ι vérifiant la condition (2.2).

Démonstration. Pour $1\le\alpha\le A$ et $\kappa\in\mathcal{N}$ on a

$$\left|\frac{1}{\kappa!}D^\kappa\varphi_{\lambda\alpha}(0)\right| r^\kappa \le M(\varphi_{\lambda\alpha},r) \le M(\varphi_{\lambda\alpha},R) \le p^U \quad (\lambda=1,\dots,L)$$

et

$$\left|\frac{1}{\kappa!}D^\kappa\varphi_{\lambda\alpha}(0)\right| \le p^U r^{-\kappa} \quad (\lambda=1,\dots,L).$$

La matrice $((1/\kappa!)D^\kappa\varphi_{\lambda\alpha}(0))_{\lambda,(\alpha,\kappa)}$ a un rang $\le W$. En tenant compte de la condition (2.2), le lemme 2.2 entraîne qu'il existe des entiers rationnels $p_1,\dots,p_L$, non tous nuls, majorés par (2.3), vérifiant

$$\left|\sum_{\lambda=1}^L p_\lambda \frac{1}{\kappa!}D^\kappa\varphi_{\lambda\alpha}(0)\right| \le p^{-(\iota/\mathrm{e})+U} r^{-\kappa} \quad (\alpha=1,\dots,A,\ \kappa\in\mathcal{N}),$$

ce qui donne, d'après (2.2),

$$
\left|\sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \frac{1}{\kappa!} D^\kappa \varphi_{\lambda\alpha}(0)\right| r^\kappa \le p^{-(\iota/\mathrm{e})+U} = p^{-(\mathrm{f}\iota/g)+U} \le p^{-V} \tag{2.5}
$$

$$
(1 \le \alpha \le A,\ \kappa \in \mathcal{N}).
$$

On pose $\Phi_\alpha(z) = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \varphi_{\lambda\alpha}(z)$ $(\alpha = 1, \dots, A)$. Alors les relations (2.5) s'écrivent

$$
\left|\frac{1}{\kappa!} D^\kappa \Phi_\alpha(0)\right| r^\kappa \le p^{-V} \qquad (\alpha = 1, \dots, A,\ \kappa \in \mathcal{N}).
$$

Pour $1 \le \alpha \le A$, on a $M(\Phi_\alpha, R) \le p^U$. On utilise alors la condition (2.1) :

$$
M(\Phi_\alpha, R) \max_{1\le j\le n} \left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j} \le p^U \max_{1\le j\le n} \left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{-K_j} \le p^{-V}.
$$

Une application du lemme 2.3 à la fonction analytique $\Phi_\alpha(z)$ dans $\mathcal{D}(0, R)$ permet de conclure. ∎

LEMME 2.5. *Soient m, η, t et S, T des entiers ≥ 0, soient d, n, K, L, J des entiers positifs avec $n \ge m$, et soient $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{K}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \eta$. On choisit une base de $\mathcal{W}$ (de manière à définir $D^\tau_{\mathcal{W}}$ pour $\tau \in \mathbb{N}^t$) et une base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathcal{V}$ (qui permet de définir $D^\kappa_{\mathcal{V}}$ pour $\kappa \in \mathbb{N}^n$). Soient $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m)$ une application linéaire de $\mathcal{K}^n$ dans $\mathcal{K}^m$, et $\varphi_1, \dots, \varphi_L$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathcal{K}^d$. On suppose que, pour tout (λ, τ) vérifiant $1 \le \lambda \le L$, $\tau \in \mathbb{N}^t$ avec $\|\tau\| \le T$, la fonction $(D^\tau_{\mathcal{W}}\varphi_\lambda)(z_1v_1 + \dots + z_nv_n)$ admet une représentation*

$$
(D^\tau_{\mathcal{W}}\varphi_\lambda)(z_1v_1 + \dots + z_nv_n) = \sum_{j=1}^{J} P_{\lambda\tau j}(z) \cdot (\psi_{\lambda\tau j} \circ \mathcal{L}(z)), \tag{2.6}
$$

où $P_{\lambda\tau j}$ $(j = 1, \dots, J)$ sont des polynômes en n variables à coefficients dans $\mathcal{K}$, de degrés totaux $\le S$, et où $\psi_{\lambda\tau j}$ $(j = 1, \dots, J)$ sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathcal{K}^m$. Alors, la matrice

$$
M = (D^\kappa_{\mathcal{V}} \circ D^\tau_{\mathcal{W}}\varphi_\lambda(0))_{\lambda,(\tau,\kappa)},
$$

où λ est l'indice de ligne $(\lambda = 1, \dots, L)$, tandis que (τ, κ) est l'indice de colonne $(\tau \in \mathbb{N}^t,\ \|\tau\| \le T,\ \kappa \in \mathbb{N}^n,\ \|\kappa\| < K)$, a un rang

$$
W \le \binom{K+T+m-1}{m}\binom{T+t-\eta}{t-\eta}\binom{S+n-m}{n-m}.
$$

En particulier, on a

$$
W \le (K+T)^m (T+1)^{t-\eta} (S+1)^{n-m}.
$$

Démonstration. Il n'y a pas de restriction à supposer $\mathcal{L}$ surjective. On choisit des formes linéaires $\mathcal{L}_{m+1}, \dots, \mathcal{L}_n$ de telle sorte que l'application $\overline{\mathcal{L}} =$

$(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m, \mathcal{L}_{m+1}, \ldots, \mathcal{L}_n)$ soit un automorphisme linéaire de $\mathcal{K}^n$, et on note $\mathcal{L}' = (\mathcal{L}'_1, \ldots, \mathcal{L}'_n)$ l'automorphisme inverse.

On complète la base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{V}$ en une base $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_{t-\eta})$ de $\mathcal{V} + \mathcal{W}$. On pose $\mathcal{U} = \mathcal{K}u_1 + \ldots + \mathcal{K}u_{t-\eta}$, et on définit, pour $1 \leq \lambda \leq L$ et $\tau \in \mathbb{N}^{t-\eta}$ avec $\|\tau\| \leq T$, la fonction

$$\varphi_{\lambda\tau}(z_1, \ldots, z_n) = D_{\mathcal{U}}^{\tau}\varphi_\lambda(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n).$$

Comme $u_1, \ldots, u_{t-\eta}$ sont des combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_n$ et des éléments de la base choisie de $\mathcal{W}$, cette fonction admet aussi une représentation de type (2.6) :

$$\varphi_{\lambda\tau}(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{h=1}^{H} Q_{\lambda\tau h}(z) \cdot (\theta_{\lambda\tau h} \circ \mathcal{L}(z)),$$

où H est un entier positif fixe, $Q_{\lambda\tau h}(z)$ $(h = 1, \ldots, H)$ sont des polynômes en n variables, de degrés totaux $\leq S$, et $\theta_{\lambda\tau h}$ $(h = 1, \ldots, H)$ sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathcal{K}^m$. En composant avec l'automorphisme $\mathcal{L}'$, on trouve

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda\tau}(w_1, \ldots, w_n) &= \varphi_{\lambda\tau} \circ \mathcal{L}'(w_1, \ldots, w_n) \\ &= \sum_{h=1}^{H} Q_{\lambda\tau h} \circ \mathcal{L}(w)\theta_{\lambda\tau h}(w_1, \ldots, w_m). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Si une fonction Φ, analytique au voisinage de l'origine dans $\mathcal{K}^d$, vérifie

$$D_{\mathcal{V}}^{\kappa} \circ D_{\mathcal{U}}^{\tau}\Phi(0) = 0, \quad \tau \in \mathbb{N}^{t-\eta},\ \|\tau\| \leq T,\ \kappa \in \mathbb{N}^n,\ \|\kappa\| < K + T,$$

alors, elle vérifie

$$D_{\mathcal{V}}^{\kappa} \circ D_{\mathcal{W}}^{\tau}\Phi(0) = 0, \quad \tau \in \mathbb{N}^{t},\ \|\tau\| \leq T,\ \kappa \in \mathbb{N}^n,\ \|\kappa\| < K.$$

On suppose que $c = (c_1, \ldots, c_L) \in \mathcal{K}^L$ vérifie

$$\sum_{\lambda=1}^{L} c_\lambda D_{\mathcal{K}^n}^{\kappa}\psi_{\lambda\tau}(0) = 0, \quad \tau \in \mathbb{N}^{t-\eta},\ \|\tau\| \leq T,\ \kappa \in \mathbb{N}^n,\ \|\kappa\| < K + T.$$

Cela équivaut à dire

$$\sum_{\lambda=1}^{L} c_\lambda D_{\mathcal{V}}^{\kappa} \circ D_{\mathcal{U}}^{\tau}\varphi_\lambda(0) = 0$$

pour $\tau \in \mathbb{N}^{t-\eta}$, $\|\tau\| \leq T$, $\kappa \in \mathbb{N}^n$, $\|\kappa\| < K + T$. En prenant $\Phi = \sum_{\lambda=1}^{L} c_\lambda\varphi_\lambda$, nous obtenons

$$\sum_{\lambda=1}^{L} c_\lambda D_{\mathcal{V}}^{\kappa} \circ D_{\mathcal{W}}^{\tau}\varphi_\lambda(0) = 0, \quad \tau \in \mathbb{N}^{t},\ \|\tau\| \leq T,\ \kappa \in \mathbb{N}^n,\ \|\kappa\| < K.$$

Alors, le rang W de la matrice M est inférieur ou égale à celui de la matrice

$$(D_{\mathcal{K}^n}^{\kappa}\psi_{\lambda\tau}(0))_{\lambda,(\tau,\kappa)},$$

où λ est l'indice de ligne ($\lambda = 1, \ldots, L$), tandis que (τ, κ) est celui de colonne ($\tau \in \mathbb{N}^{t-\eta}$, $\|\tau\| \le T$, $\kappa \in \mathbb{N}^n$, $\|\kappa\| < K + T$). Mais par rapport aux variables $w_{m+1}, \ldots, w_n$, les fonctions $\psi_{\lambda\tau}$ sont des polynômes de degrés totaux $\le S$; il suffit donc de faire varier κ dans le domaine $\kappa_1 + \ldots + \kappa_m < K + T$, $\kappa_{m+1} + \ldots + \kappa_n \le S$; ceci montre que le rang de la dernière matrice est majoré par l'entier que nous avons annoncé. ■

Remarque. Dans le lemme 2.5, le corps $\mathcal{K}$ peut être remplacé par $\mathbb{C}_p$.

COROLLAIRE 2.6. *Soient m, η, t, ι et S, T des entiers ≥ 0, d, n, L, J des entiers positifs, U, V des nombres réels, Δ, ϱ, $r_1, \ldots, r_n$, $R_1, \ldots, R_n$, E des nombres réels positifs, et $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{K}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim_{\mathcal{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \eta$. On suppose*

$$E > 1, \quad Er_i \le R_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$(T + m) \log_p E \le \varrho(U + V), \tag{2.7}$$

et

$$g(U + V) \le \mathrm{f}\iota \le \frac{m! L \Delta (\log_p E)^m}{(1 + \varrho)^m (U + V)^m \binom{T+t-\eta}{t-\eta} \binom{S+n-m}{n-m}}. \tag{2.8}$$

On choisit une base de $\mathcal{W}$ (de manière à définir $D^\tau_{\mathcal{W}}, \tau \in \mathbb{N}^t$) et une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{V}$. Soient $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_m)$ une application linéaire de $\mathcal{K}^n$ dans $\mathcal{K}^m$, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ des fonctions analytiques dans un voisinage ouvert du compact

$$\{z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n : z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{K}^n, \ |z| \le R\} \subset \mathcal{V}$$

de $\mathcal{K}^d$. On suppose que, pour tout $\lambda = 1, \ldots, L$ et tout $\tau \in \mathbb{N}^t$ avec $\|\tau\| \le T$, la fonction $(D^\tau_{\mathcal{W}} \varphi_\lambda)(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n)$ admet une représentation

$$(D^\tau_{\mathcal{W}} \varphi_\lambda)(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n) = \sum_{j=1}^{J} P_{\lambda\tau j}(z) \psi_{\lambda\tau j} \circ \mathcal{L}(z),$$

où $P_{\lambda\tau j}$ ($j = 1, \ldots, J$) sont des polynômes en n variables à coefficients dans $\mathcal{K}$, de degrés totaux $\le S$, et $\psi_{\lambda\tau j}$ ($j = 1, \ldots, J$) sont des fonctions analytiques au voisinage de l'origine dans $\mathcal{K}^m$. On suppose de plus que

$$M(D^\tau_{\mathcal{W}} \varphi_\lambda(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n), R) \le p^U \quad (\lambda = 1, \ldots, L, \ \tau \in \mathbb{N}^t, \ \|\tau\| \le T).$$

Alors, il existe des entiers rationnels $p_1, \ldots, p_L$, non tous nuls, majorés par

$$\max_{1 \le \lambda \le L} \|p_\lambda\| \le p^\Delta, \tag{2.9}$$

tels que la fonction $\Phi = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \varphi_\lambda$ vérifie

$$M(D^\tau_{\mathcal{W}} \Phi(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n), r) \le p^{-V} \quad (\tau \in \mathbb{N}^t, \ \|\tau\| \le T).$$

Démonstration. On applique la proposition 2.4 en remplaçant l'indice α $(1 \le \alpha \le A)$ par $\tau \in \mathbb{N}^t$ ($\|\tau\| \le T$), avec $A = \binom{T+t}{t}$, et on prend pour fonctions

$\varphi_{\lambda\alpha}(z)$ les fonctions

$$(D^{\tau}_{\mathcal{W}}\varphi_\lambda)(z_1v_1+\ldots+z_nv_n).$$

On choisit $K_1=\ldots=K_n=K$, où K est le plus petit entier $\geq (U+V)/\log_p E$:

$$(K-1)\log_p E < U+V,$$
$$(K+T+m-1)\log_p E < (1+\varrho)(U+V).$$

Le lemme 2.5 permet de majorer le rang W de la matrice M dans l'énoncé du lemme 2.5 par

$$\begin{aligned} W &\leq \binom{K+T+m-1}{m}\binom{T+t-\eta}{t-\eta}\binom{S+n-m}{n-m} \\ &\leq \frac{(K+T+m-1)^m}{m!}\binom{T+t-\eta}{t-\eta}\binom{S+n-m}{n-m} \\ &\leq \frac{(1+\varrho)^m(U+V)^m}{m!(\log_p E)^m}\binom{T+t-\eta}{t-\eta}\binom{S+n-m}{n-m}. \end{aligned}$$

Donc la condition (2.8) assure que l'hypothèse principale (2.2) de la proposition 2.4 est satisfaite. Alors, il existe des rationnels $p_1,\ldots,p_L$ non tous nuls, majorés par (2.9), tels que

$$M\Big(\sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda D^{\tau}_{\mathcal{W}}\varphi_\lambda(z_1v_1+\ldots+z_nv_n), r\Big) \leq p^{-V} \qquad (\tau\in\mathbb{N}^t,\ \|\tau\|\leq T).$$

La fonction $\Phi=\sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda\varphi_\lambda$ vérifie donc ce que l'on veut. ∎

R e m a r q u e. L'existence d'un entier rationnel ι pour lequel la condition (2.8) a lieu est assurée par l'hypothèse

$$g(1+\varrho)^m(U+V)^m(U+V+1)\binom{T+t-\eta}{t-\eta}\binom{S+n-m}{n-m} \leq m!L\Delta(\log_p E)^m. \tag{2.10}$$

3. Application aux fonctions exponentielles. On définit, pour $z\in\mathbb{C}_p$ ou pour $z\in\mathcal{K}$, ou encore pour $z\in\mathbb{C}$,

$$\Delta(z;\kappa)=(z+1)\ldots(z+\kappa)/\kappa! \qquad (\kappa\in\mathbb{Z},\ \kappa\geq 1)$$

avec $\Delta(z;0)=1$; d'autre part, pour $\iota,s\in\mathbb{Z}$ ($\iota,\ s\geq 0$), on pose

$$\Delta(z;\kappa,\iota,s)=\frac{1}{s!}\bigg\{\frac{d^s}{dy^s}(\Delta(y;\kappa))^{\iota}\bigg\}_{y=z}.$$

LEMME 3.1. *Soient* T_1 *un entier positif*, S, T_2, H *des entiers* ≥ 0, *et* $T=T_1T_2$; *soient* $p_{sh}\in\mathbb{C}_p$ (*ou* $\in\mathcal{K}$) ($s=0,1,\ldots,S,\ h=0,1,\ldots,H$). *Considérons le* *polynôme exponentiel en une variable*

$$\psi(z)=\sum_{s=0}^{S}\sum_{h=0}^{H}p_{sh}z^se^{hz}.$$

Alors, *pour* $0\le\tau_1<T_1$ *et* $0\le\tau_2\le T_2$, *on a*

$$\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1;T_1,\tau_2,\tau)\left(\frac{d}{dz}\right)^{\tau}\psi(0)=\sum_{s=0}^{S}\sum_{h=0}^{H}p_{sh}s!\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,s).$$

De plus, *si*

$$\sum_{s=0}^{S}\sum_{h=0}^{H}p_{sh}s!\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,s)=0$$

pour tout $0\le\tau_1<T_1$ *et* $0\le\tau_2\le T_2$, *alors* $(d/dz)^{\tau}\psi(0)=0$ *pour tout* $0\le\tau\le T$, *c'est-à-dire que* ψ *a un zéro d'ordre au moins* $T+1$ *à l'origine.*

Démonstration. On utilise la relation

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\tau}(z^se^{hz})_{z=0}=\left(\frac{d}{dz}\right)^{s}(z^{\tau})_{z=h}$$

(voir à ce sujet [16], lemmes 3.1 et 7.6). On a pour tout $0\le\tau_1<T_1$ et $0\le\tau_2\le T_2$,

$$\Delta(z+\tau_1;T_1)^{\tau_2}=\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1;T_1,\tau_2,\tau)z^{\tau};$$

donc pour tout $0\le s\le S$ et $0\le h\le H$,

$$\begin{aligned}\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,s)&=\frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{s}(\Delta(z+\tau_1;T_1)^{\tau_2})_{z=h}\\&=\frac{1}{s!}\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1;T_1,\tau_2,\tau)\left(\frac{d}{dz}\right)^{\tau}(z^se^{hz})_{z=0}.\end{aligned}$$

La deuxième partie de l'énoncé résulte du fait que les polynômes 1 et $\Delta(z+\tau_1;T_1)^{\tau_2}$ ($\tau_1=0,\dots,T_1-1$, $\tau_2=1,\dots,T_2$) forment, d'après [21], lemme 1.6, une base de l'espace des polynômes de degré $\le T$. ■

LEMME 3.2. *Soient* σ *un entier positif*, R *un nombre réel* ≥ 0. *On a*

$$M(\Delta(z;\sigma),R)\le(p^{1/(p-1)}\max(1,R))^{\sigma}.$$

Démonstration. On a

$$M((z+1)\dots(z+\sigma),R)\le\big(\max(1,R)\big)^{\sigma}\quad\text{et}\quad v_p(\sigma!)\le\frac{\sigma}{p-1},$$

d'où $|\sigma!|\ge p^{-\sigma/(p-1)}$. ■

Lemme 3.3. *Soient* $\sigma \geq 1$, $\iota \geq 1$, $m \geq 0$ *des entiers et* R *un nombre réel* ≥ 0. *On a*

$$M(\Delta(z;\sigma,\iota,m),R) \leq \frac{1}{|\sigma!|^{\iota}} \max(1,R)^{\sigma\iota-m} \leq p^{\sigma\iota/(p-1)} \max(1,R)^{\sigma\iota-m}.$$

Démonstration. On peut supposer $m \leq \sigma\iota$; alors

$$\begin{aligned}\Delta(z;\sigma,\iota,m) &= (\Delta(z;\sigma))^{\iota} \sum \frac{1}{(z+1)^{i_1}(z+2)^{i_2}\dots(z+\sigma)^{i_\sigma}} \\ &= \frac{1}{(\sigma!)^{\iota}} \sum (z+1)^{\iota-i_1}(z+2)^{\iota-i_2}\dots(z+\sigma)^{\iota-i_\sigma},\end{aligned}$$

où $i = (i_1,i_2,\dots,i_\sigma)$ décrit les σ-uplets de $\mathbb{N}^\sigma$ vérifiant $i_1,i_2,\dots,i_\sigma \leq \iota$ et $\|i\| = m$. Alors

$$\begin{aligned}M&((z+1)^{\iota-i_0}(z+2)^{\iota-i_1}\dots(z+\sigma)^{\iota-i_\sigma},R) \\ &\leq M((z+1)^{\iota-i_0},R)M((z+2)^{\iota-i_1},R)\dots M((z+\sigma)^{\iota-i_\sigma},R) \\ &\leq \max\{1,R\}^{\sigma\iota-\|i\|} = \max\{1,R\}^{\sigma\iota-m};\end{aligned}$$

Enfin on a $|\sigma!| \geq p^{-\sigma/(p-1)}$. ∎

Le premier résultat important de cette section est le suivant :

Proposition 3.4. *Soient* d, D, S, T_1 *des entiers positifs*, T_2, H, ι *des entiers* ≥ 0, ϱ, $r_1,\dots,r_{d-1}$, E, Δ *des nombres réels* > 0, U, V *des nombres réels, et* $\omega_1,\dots,\omega_{d-1}$ *et* $\xi_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1,\dots,D,\ \sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}) \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0,1,\dots,H)$ *des éléments de* $\mathcal{K}$. *On suppose*

$$\begin{gathered}Er_i \leq \frac{1}{|\omega_i|} p^{-1/(p-1)} \qquad (i = 1,\dots,d-1), \\ 0 < \log_p E \leq \varrho(U+V), \\ g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta D(H+1)\log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)}\end{gathered}$$

et

$$S\left(\frac{1}{p-1} + \log_p \max(1,E\overline{r})\right) + \log_p \max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| + T\left(\log_p E + \frac{2}{p-1}\right) \leq U,$$

avec $\overline{r} = \max\{r_1,\dots,r_{d-1},E^{-1}p^{-1/(p-1)}\}$ *et* $T = T_1T_2$. *Alors, il existe des entiers rationnels* $p_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1,\dots,D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0,\dots,H)$, *non tous nuls, majorés par* $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, *tels que pour tout* (τ_1,τ_2) *avec* $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$, *on ait*

$$M\Big(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|\leq S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0) \prod_{i=1}^{d-1} \Delta(z_i;\sigma_i)e^{h\omega_i z_i}, r'\Big) \leq p^{-V},$$

où $r' = (r_1,\dots,r_{d-1})$.

La démonstration de la proposition 3.4 utilisera l'énoncé suivant :

Proposition 3.5. *Soient d, M, S des entiers positifs, ι un entier ≥ 0, ϱ, $r_0, r_1, \ldots, r_{d-1}$, E, Δ des nombres réels > 0, U, V des nombres réels satisfaisant*

$$0 < \log_p E \leq \varrho(U+V)$$

et

$$g(U+V) \leq \mathfrak{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta M \log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)}.$$

Soient $\psi_{\sigma\mu}$ ($\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $\mu = 1, \ldots, M$) des fonctions analytiques d'une variable dans $\mathcal{K}$, et $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{d-1}$ des éléments de $\mathcal{K}$, tels que les fonctions

$$f_{\sigma\mu}(z_0, z_1, \ldots, z_{d-1}) = \psi_{\sigma\mu}(\omega_0 z_0 + \omega_1 z_1 + \ldots + \omega_{d-1} z_{d-1})$$

soient analytiques dans le disque $\mathcal{D}(0, Er)$ et vérifient

$$\max(1, E\,\overline{r})^S \max_{\substack{\|\sigma\| \leq S \\ 1 \leq \mu \leq M}} \{p^{(S-\sigma_0)/(p-1)} M(f_{\sigma\mu}, Er)\} \leq p^U,$$

avec $\overline{r} = \max_{0 \leq i \leq d-1} r_i$. Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\sigma h}$ ($\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $\mu = 1, \ldots, M$), non tous nuls, majorés par $\max_{\sigma,\mu} \|p_{\sigma\mu}\| \leq p^{\Delta}$, tels que la fonction

$$F(z) = \sum_{\|\sigma\| \leq S} \sum_{\mu=1}^{M} p_{\sigma\mu} z_0^{\sigma_0} \Big(\prod_{i=1}^{d-1} \Delta(z_i; \sigma_i) \Big) f_{\sigma\mu}(z)$$

vérifie $M(F, r) \leq p^{-V}$.

Démonstration. On applique le corollaire 2.6 aux fonctions

$$\varphi_{\sigma\mu}(z) = z_0^{\sigma_0} \Big(\prod_{i=1}^{d-1} \Delta(z_i; \sigma_i) \Big) f_{\sigma\mu}(z) \qquad (\sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ \mu = 1, \ldots, M),$$

en prenant $\mathcal{V} = \mathcal{K}^d$, $\mathcal{W} = 0$, $\mathcal{L}(z) = \omega_0 z_0 + \omega_1 z_1 + \ldots + \omega_{d-1} z_{d-1}$ donc $n = d$, $t = \eta = 0$, $T = 0$, $m = 1$, $L = \binom{S+d}{d} M$, et en remarquant que l'on a

$$\binom{S+d}{d} \Big/ \binom{S+d-1}{d-1} = \frac{S+d}{d}.$$

Enfin le lemme 3.2 nous permet de majorer, pour $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$ et $\mu = 1, \ldots, M$, le nombre $M(\varphi_{\sigma\mu}, Er)$ par

$$\begin{aligned}
(Er_0)^{\sigma_0} & \prod_{i=1}^{d-1} (p^{1/(p-1)} \max(1, Er_i))^{\sigma_i} M(f_{\sigma\mu}, Er) \\
& \leq (Er_0)^{\sigma_0} \max(1, Er_1, \ldots, Er_{d-1})^{\|\sigma\| - \sigma_0} p^{(\|\sigma\| - \sigma_0)/(p-1)} M(f_{\sigma\mu}, Er) \\
& \leq \max(1, E\overline{r})^{\|\sigma\|} p^{(\|\sigma\| - \sigma_0)/(p-1)} M(f_{\sigma\mu}, Er) \\
& \leq \max(1, E\overline{r})^S p^{(S-\sigma_0)/(p-1)} M(f_{\sigma\mu}, Er) \leq p^U. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

De la proposition 3.5 on déduit :

Corollaire 3.6. *Soient* d, D, S *des entiers positifs*, H, ι *des entiers* ≥ 0, ϱ, $r_0, r_1, \ldots, r_{d-1}$, E, Δ *des nombres réels* > 0, U, V *des nombres réels et* $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{d-1}$, $\xi_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$ *des éléments de* $\mathcal{K}$. *On suppose*

$$Er_i \leq \frac{1}{|\omega_i|} p^{-1/(p-1)} \qquad (i = 0, \ldots, d-1),$$

$$0 < \log_p E \leq \varrho(U + V),$$

$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta D(H+1)\log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)},$$

et

$$S\left(\frac{1}{p-1} + \log_p \max(1, E\,\overline{r})\right) + \log_p \max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| \leq U,$$

avec $\overline{r} = \max_{0 \leq i \leq d-1} r_i$. *Alors, il existe des entiers rationnels non tous nuls* $p_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$, *majorés par* $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, *tels que*

$$M\left(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\| \leq S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} \frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!} e^{h\omega_0 z_0} \prod_{i=1}^{d-1} \Delta(z_i; \sigma_i) e^{h\omega_i z_i}, r\right) \leq p^{-V}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Prenons $\varepsilon > 0$. On utilise la proposition 3.5 avec μ remplacé par (δ, h), donc $M = D(H+1)$, pour les fonctions de d variables

$$f_{\delta\sigma h}(z) = \psi_{\delta\sigma h}(\omega_0 z_0 + \omega_1 z_1 + \ldots + \omega_{d-1} z_{d-1}),$$

avec

$$\psi_{\delta\sigma h}(w) = \frac{1}{\sigma_0!} \xi_{\delta\sigma h} e^{hw} \qquad (\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0, 1, \ldots, H).$$

Puisque

$$|\omega_i| E r_i p^{-\varepsilon} < p^{-1/(p-1)} \qquad (i = 0, \ldots, d-1),$$

les fonctions $f_{\delta\sigma h}(z)$ sont toutes analytiques sur le disque $\mathcal{D}(0, Erp^{-\varepsilon})$. Pour $1 \leq \delta \leq D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $0 \leq h \leq H$, on a

$$\begin{aligned} M(f_{\delta\sigma h}, Erp^{-\varepsilon}) &= \left|\frac{\xi_{\delta\sigma h}}{\sigma_0!}\right| M\big(e^{h(\omega_0 z_0 + \omega_1 z_1 + \ldots + \omega_{d-1} z_{d-1})}, Erp^{-\varepsilon}\big) \\ &= \left|\frac{\xi_{\delta\sigma h}}{\sigma_0!}\right| \leq p^{\sigma_0/(p-1)} |\xi_{\delta\sigma h}| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\max(1, E\,\overline{r} p^{-\varepsilon})^S p^{(S-\sigma_0)/(p-1)} M(f_{\delta\sigma h}, Erp^{-\varepsilon}) \\ &\qquad \leq \max(1, E\,\overline{r})^S p^{(S-\sigma_0)/(p-1)} \cdot p^{\sigma_0/(p-1)} |\xi_{\delta\sigma h}| \\ &\qquad = p^{S/(p-1)} \max(1, E\,\overline{r})^S |\xi_{\delta\sigma h}| \leq p^U. \end{aligned}$$

On trouve alors des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)$ $(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$ non tous nuls, dépendant de ε, majorés par $\max_{\delta,\sigma h} \|p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)\| \leq p^{\Delta}$, tels que

$$M\biggl(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h\omega_0 z_0}\prod_{i=1}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)e^{h\omega_i z_i}, rp^{-\varepsilon}\biggr)\le p^{-V}.$$

On fait tendre ε vers zéro; le principe des tiroirs permet de trouver une suite $(\varepsilon_k)_{k=1,2,\dots}$ de nombres positifs tendant vers zéro telle que les coefficients $p_{\delta\sigma h}(\varepsilon_k)$ ($\delta=1,\dots,D$, $\sigma\in\mathbb{N}^d$, $\|\sigma\|\le S$, $h=0,1,\dots,H$) soient indépendants de k; on les note $p_{\delta\sigma h}$. On a donc

$$M\biggl(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h\omega_0 z_0}\prod_{i=1}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)e^{h\omega_i z_i}, rp^{-\varepsilon_k}\biggr)\le p^{-V}.$$

On conclut en faisant tendre k vers l'infini. ∎

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 3.4. On applique le corollaire 3.6 en prenant pour "U" et "V" les quantités

$$U-T\biggl(\log_p E+\frac{2}{p-1}\biggr)\quad\text{et}\quad V+T\biggl(\log_p E+\frac{2}{p-1}\biggr)$$

respectivement, et $\omega_0=1, r_0=1/(Ep^{1/(p-1)})$. On trouve des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta=1,\dots,D$, $\sigma\in\mathbb{N}^d$, $\|\sigma\|\le S$, $h=0,1,\dots,H$) non tous nuls, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h}\|p_{\delta\sigma h}\|\le p^{\Delta}$, tels que la fonction

$$\psi(z)=\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{hz_0}\prod_{i=1}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)e^{h\omega_i z_i}$$

vérifie

$$M(\psi,r)\le(Ep^{2/(p-1)})^{-T}p^{-V},$$

où $r=(r_0,r_1,\dots,r_{d-1})$.

On suppose $0\le\tau_1<T_1, 0\le\tau_2\le T_2$. Le lemme 3.1 permet de représenter la fonction $F(z_1,\dots,z_{d-1},\tau_1,\tau_2)$ que l'on veut majorer en termes de ψ :

$$F(z_1,\dots,z_{d-1},\tau_1,\tau_2)=\sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1;T_1,\tau_2,\tau)\biggl(\frac{\partial}{\partial z_0}\biggr)^{\tau}\psi(0,z_1,\dots,z_{d-1}).$$

On utilise le lemme 3.3 : pour $\tau=0,1,\dots,T$, on a

$$|\Delta(\tau_1;T_1,\tau_2,\tau)|\le p^{T_1\tau_2/(p-1)}\le p^{T/(p-1)},$$

et, pour $r=(r_0,r_1,\dots,r_{d-1})$,

$$\begin{aligned}M\biggl(\biggl(\frac{\partial}{\partial z_0}\biggr)^{\tau}\psi(0,z_1,\dots,z_{d-1}),r'\biggr)&\le M\biggl(\biggl(\frac{\partial}{\partial z_0}\biggr)^{\tau}\psi,r\biggr)\\&\le\frac{|\tau!|}{r_0^{\tau}}M(\psi,r)\le(Ep^{1/(p-1)})^{T}M(\psi,r),\end{aligned}$$

donc

$$M(F(z_1,\dots,z_{d-1},\tau_1,\tau_2),r')\le(Ep^{2/(p-1)})^{T}M(\psi,r)\le p^{-V}.\ ∎$$

Voici une variante de la proposition 3.4.

Proposition 3.7. *Soient d, D, S, T_1 des entiers positifs, T_2, H, ι des entiers ≥ 0, ϱ, $r_1,\ldots,r_{d-1}$, E, Δ des nombres réels > 0, U, V des nombres réels, Ω un nombre réel ≥ 1 et enfin $\xi_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1,\ldots,D$, $\sigma = (\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0,1,\ldots,H$) et $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{d-1}$ des éléments de $\mathcal{K}$ vérifiant*

$$|\omega_1| \geq \max(1/(\Omega p^{1/(p-1)}), |\omega_2|,\ldots,|\omega_{d-1}|).$$

On suppose

$$Er_1 \leq p^{-1/(p-1)}, \qquad 0 < \log_p E \leq \varrho(U+V),$$
$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta D(H+1)\log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)},$$

et

$$S\biggl(\log_p \max(\Omega, E\overline{r}) + \frac{1}{p-1}\biggr) + \log_p \max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| + T\biggl(\log_p E + \frac{2}{p-1}\biggr) \leq U,$$

avec $\overline{r} = \max_{2\leq i\leq d-1} r_i$, et $T = T_1T_2$. Alors, il existe des entiers rationnels non tous nuls $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1,\ldots,D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0,1,\ldots,H$), majorés par $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, tels que, pour tout τ_1,τ_2 avec $0 \leq \tau_1 < T_1, 0 \leq \tau_2 \leq T_2$, la fonction

$$\begin{aligned}F_{\tau_1\tau_2} = {} & \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|\leq S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1; T_1,\tau_2,\sigma_0) \\ & \times \Delta\biggl(\frac{1}{\omega_1}(z_1 - \omega_2 z_2 - \ldots - \omega_{d-1}z_{d-1}); \sigma_1\biggr) \prod_{i=2}^{d-1} \Delta(z_i;\sigma_i)\cdot e^{hz_1}\end{aligned}$$

vérifie $M(F_{\tau_1\tau_2}, r') \leq p^{-V}$, où $r' = (r_1,\ldots,r_{d-1})$.

La démonstration de la proposition 3.7 utilisera l'énoncé suivant :

Proposition 3.8. *Soient d, M, S des entiers positifs, ι un entier ≥ 0 et ϱ, $r_0, r_1,\ldots,r_{d-1}$, E, Δ des nombres réels > 0, U, V des nombres réels, Ω un nombre réel ≥ 1 satisfaisant*

$$\max\{Er_0, Er_1\} \leq p^{-1/(p-1)}, \qquad 0 < \log_p E \leq \varrho(U+V),$$

et

$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta M \log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)}.$$

Soient $\psi_{\sigma\mu}$ ($\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $\mu = 1,\ldots,M$) des fonctions analytiques d'une variable dans $\mathcal{K}$, et $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{d-1}$ des éléments de $\mathcal{K}$, vérifiant

$$|\omega_1| \geq \max\{1/(\Omega p^{1/(p-1)}), |\omega_2|,\ldots,|\omega_{d-1}|\},$$

tels que les fonctions $f_{\sigma\mu}(z_0,z_1) = \psi_{\sigma\mu}(z_0+z_1)$ soient analytiques dans le disque $\mathcal{D}(0, E(r_0,r_1)) \subset \mathcal{K}^2$ et vérifient

$$\max_{\substack{\|\sigma\|\leq S\\ 1\leq\mu\leq M}} [(p^{1/(p-1)}\max(\Omega, E\overline{r}))^{S-\sigma_0} M(f_{\sigma\mu}, E(r_0,r_1))] \leq p^U$$

avec $\overline{r} = \max_{2\le i\le d-1} r_i$. *Alors, il existe des entiers rationnels* $p_{\sigma\mu}$ $(\sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ \mu = 1,\dots,M)$ *non tous nuls, majorés par* $\max_{\sigma,\mu}\|p_{\sigma\mu}\| \le p^{\Delta}$, *tels que la fonction*

$$F(z) = \sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{\mu=1}^{M} p_{\sigma\mu} z_0^{\sigma_0} \Delta\biggl(\frac{1}{\omega_1}(z_1 - \omega_2 z_2 - \ldots - \omega_{d-1} z_{d-1}); \sigma_1\biggr) \times \prod_{i=2}^{d-1} \Delta(z_i;\sigma_i) f_{\sigma\mu}(z_0, z_1)$$

vérifie $M(F,r) \le p^{-V}$, *où* $r = (r_0, r_1, \dots, r_{d-1})$.

Démonstration. On applique le corollaire 2.6 aux fonctions

$$\varphi_{\sigma\mu}(z) = z_0^{\sigma_0}\Delta\biggl(\frac{1}{\omega_1}(z_1 - \omega_2 z_2 - \ldots - \omega_{d-1} z_{d-1}); \sigma_1\biggr) \prod_{i=2}^{d-1} \Delta(z_i;\sigma_i) f_{\sigma\mu}(z_0, z_1)$$

$(\sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ \mu = 1,\dots,M)$, en prenant $\mathcal{V} = K^d$, $\mathcal{W} = 0$, $\mathcal{L}(z) = z_0 + z_1$, donc $n = d$, $t = \eta = 0$, $T = 0$, $m = 1$, $L = \binom{S+d}{d}M$, et en remarquant que l'on a

$$\frac{\binom{S+d}{d}}{\binom{S+d-1}{d-1}} = \frac{S+d}{d}.$$

Enfin, le lemme 3.2 nous permet de majorer, pour $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \le S$, $\mu = 1,\dots,M$, le nombre $M(\varphi_{\sigma\mu}, Er)$ par

$$\begin{aligned}
&(Er_0)^{\sigma_0} M(\Delta(z;\sigma_1), \max(\Omega, E\overline{r})) \prod_{i=2}^{d-1} (p^{1/(p-1)} \max(1, Er_i))^{\sigma_i} M(f_{\sigma\mu}, E(r_0, r_1))\\
&\quad\le (p^{1/(p-1)} \max(\Omega, E\overline{r}))^{\sigma_1} \prod_{i=2}^{d-1} (p^{1/(p-1)} \max(1, Er_i))^{\sigma_i} M(f_{\sigma\mu}, E(r_0, r_1))\\
&\quad\le (p^{1/(p-1)} \max(\Omega, E\overline{r}))^{\|\sigma\|-\sigma_0} M(f_{\sigma\mu}, E(r_0, r_1))\\
&\quad\le (p^{1/(p-1)} \max(\Omega, E\overline{r}))^{S-\sigma_0} M(f_{\sigma\mu}, E(r_0, r_1)) \le p^{U}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire 3.9. *Soient* d, D, S *des entiers positifs*, H, ι *des entiers* ≥ 0, *et* ϱ, r_0, $r_1, \dots, r_{d-1}$, E, Δ *des nombres réels* > 0, U, V *des nombres réels*, Ω *un nombre réel* ≥ 1 *et* $\omega_1,\dots,\omega_{d-1}$, $\xi_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1,\dots,D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0, 1, \dots, H)$ *des éléments de* $\mathcal{K}$, *vérifiant*

$$|\omega_1| \ge \max\{1/(\Omega p^{1/(p-1)}), |\omega_2|, \dots, |\omega_{d-1}|\}.$$

On suppose

$$\max\{Er_0, Er_1\} \le p^{-1/(p-1)}, \qquad 0 < \log_p E \le \varrho(U+V),$$
$$g(U+V) \le \mathrm{f}\iota \le \frac{(S+d)\Delta D(H+1)\log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)},$$

$$S\left(\log_p \max(\Omega, E\overline{r}) + \frac{1}{p-1}\right) + \log_p \max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| \le U$$

avec $\overline{r} = \max_{2\le i\le d-1} r_i$. *Alors, il existe des entiers rationnels non tous nuls* $p_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1,\dots,D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0,1,\dots,H)$, *majorés par* $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \le p^{\Delta}$, *tels que la fonction*

$$F = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|\le S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h(z_0+z_1)}$$
$$\times \Delta\left(\frac{1}{\omega_1}(z_1 - \omega_2 z_2 - \dots - \omega_{d-1}z_{d-1}); \sigma_1\right) \prod_{i=2}^{d-1} \Delta(z_i; \sigma_i)$$

vérifie $M(F,r) \le p^{-V}$ *avec* $r = (r_0, r_2, \dots, r_{d-1})$.

Démonstration. On pose $r(\varepsilon) = (p^{-\varepsilon}r_0, p^{-\varepsilon}r_1, r_2, \dots, r_{d-1})$ pour $\varepsilon > 0$. On utilise la proposition 3.8 avec μ remplacé par (δ, h), donc $M = D(H+1)$, pour les fonctions de deux variables z_0 et z_1, $f_{\delta\sigma h}(z_0, z_1) = \psi_{\delta\sigma h}(z_0 + z_1)$, avec

$$\psi_{\delta\sigma h}(w) = \frac{1}{\sigma_0!}\xi_{\delta\sigma h}e^{hw} \qquad (\delta = 1,\dots,D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0,1,\dots,H).$$

Puisque $\max\{Er_0p^{-\varepsilon}, Er_1p^{-\varepsilon}\} < p^{-1/(p-1)}$, les fonctions $f_{\delta\sigma h}(z_0, z_1)$ sont analytiques sur le disque $\mathcal{D}(0, Ep^{-\varepsilon}(r_0, r_1))$. Pour $1 \le \delta \le D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \le S$, $0 \le h \le H$, on a

$$M(f_{\delta\sigma h}, Ep^{-\varepsilon}(r_0, r_1)) = \left|\frac{\xi_{\delta\sigma h}}{\sigma_0!}\right| M(e^{h(z_0+z_1)}, Ep^{-\varepsilon}(r_0, r_1)) \le |\xi_{\delta\sigma h}|p^{\sigma_0/(p-1)}$$

et

$$\begin{aligned}(p^{1/(p-1)}\max(\Omega, E\overline{r}))^{S-\sigma_0} & M(f_{\delta\sigma h}, Ep^{-\varepsilon}(r_0, r_1)) \\ &\le (\max(\Omega, E\overline{r}))^S p^{(S-\sigma_0)/(p-1)} \cdot p^{\sigma_0/(p-1)}|\xi_{\delta\sigma h}| \\ &\le (\max(\Omega, E\overline{r}))^S p^{S/(p-1)}|\xi_{\delta\sigma h}| \le p^U.\end{aligned}$$

On trouve alors des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)$, non tous nuls, dépendant de ε, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)\| \le p^{\Delta}$, tels que

$$M\Bigg(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|\le S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}(\varepsilon)\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h(z_0+z_1)}$$
$$\times \Delta\left(\frac{1}{\omega_1}(z_1 - \omega_2 z_2 - \dots - \omega_{d-1}z_{d-1}); \sigma_1\right) \prod_{i=2}^{d-1} \Delta(z_i; \sigma_i), r(\varepsilon)\Bigg) \le p^{-V}.$$

On fait tendre ε vers zéro; le principe des tiroirs permet de trouver une suite $\{\varepsilon_k\}_{k=1,2,\dots}$ de nombres positifs tendant vers zéro telle que les coefficients $p_{\delta\sigma h}(\varepsilon_k)$ $(\delta = 1,\dots,D,\ \sigma \in \mathbb{N}^d,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0,1,\dots,H)$ soient indépendants de k; on les note $p_{\delta\sigma h}$. On a donc

$$M\bigg(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h(z_0+z_1)} \times \Delta\bigg(\frac{1}{\omega_1}(z_1-\omega_2 z_2-\ldots-\omega_{d-1}z_{d-1});\sigma_1\bigg)\prod_{i=2}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i), r(\varepsilon_k)\bigg) \le p^{-V}.$$

On conclut en faisant tendre k vers l'infini. ■

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 3.7. On applique le corollaire 3.9 en prenant pour "U" et "V"

$$U - T\bigg(\log_p E + \frac{2}{p-1}\bigg) \quad \text{et} \quad V + T\bigg(\log_p E + \frac{2}{p-1}\bigg)$$

respectivement, et $r_0 = 1/(Ep^{1/(p-1)})$. On trouve des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1,\ldots,D$, $\sigma\in\mathbb{N}^d$, $\|\sigma\|\le S$, $h = 0,1,\ldots,H$), non tous nuls, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h}\|p_{\delta\sigma h}\| \le p^{\Delta}$, tels que la fonction

$$\psi(z) = \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\frac{z_0^{\sigma_0}}{\sigma_0!}e^{h(z_0+z_1)} \times \Delta\bigg(\frac{1}{\omega_1}(z_1-\omega_2 z_2-\ldots-\omega_{d-1}z_{d-1});\sigma_1\bigg)\prod_{i=2}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)$$

vérifie

$$M(\psi, r) \le (Ep^{2/(p-1)})^{-T}p^{-V},$$

où $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{d-1})$. Pour $0\le\tau_1 < T_1$, $0\le\tau_2\le T_2$, le lemme 3.1 permet de représenter la fonction $F(z_1,\ldots,z_{d-1},\tau_1,\tau_2)$ que l'on veut majorer en termes de ψ :

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_{d-1}, \tau_1, \tau_2) = \sum_{\tau=0}^{T}\Delta(\tau_1; T_1, \tau_2, \tau)\bigg(\frac{\partial}{\partial z_0}\bigg)^{\tau}\psi(0, z_1, \ldots, z_{d-1}).$$

Pour $0\le\tau\le T$, on utilise le lemme 3.3 :

$$|\Delta(\tau_1; T_1, \tau_2, \tau)| \le p^{T_1\tau_2/(p-1)} \le p^{T/(p-1)},$$

et on a

$$M\bigg(\bigg(\frac{\partial}{\partial z_0}\bigg)^{\tau}\psi(0, z_1, \ldots, z_{d-1}), r'\bigg) \le M\bigg(\bigg(\frac{\partial}{\partial z_0}\bigg)^{\tau}\psi, r\bigg) \le \frac{|\tau!|}{r_0^{\tau}}M(\psi, r) \le (Ep^{1/(p-1)})^{T}M(\psi, r),$$

donc

$$M(F(z_1, \ldots, z_{d-1}, \tau_1, \tau_2), r') \le (Ep^{2/(p-1)})^{T}M(\psi, r) \le p^{-V}.$$ ■

COROLLAIRE 3.10. *Soient* d, D, T_1, S *des entiers positifs*, T_2, H, ι *des entiers* ≥ 0, ϱ, R, E, Δ *des nombres réels* > 0, U, V *des nombres réels et* $\omega_1, \ldots, \omega_{d-1}$, $\xi_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0, 1, \ldots, H$) *des éléments de* $\mathcal{K}$. *On suppose*

$$ER \geq 1, \qquad 0 < \log_p E \leq \varrho(U+V),$$
$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)\Delta D(H+1)\log_p E}{d(1+\varrho)(U+V)},$$

et

$$S\left(\frac{1}{p-1} + \log_p(ER)\right) + \log_p \max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| + T\left(\log_p E + \frac{2}{p-1}\right) \leq U$$

avec $T = T_1T_2$. *Alors, il existe des entiers rationnels* $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0, 1, \ldots, H$), *non tous nuls, majorés par* $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, *tels que, pour tout* τ_1, τ_2 *avec* $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$ *et tout* $(u_1, \ldots, u_{d-1}) \in \mathcal{K}^{d-1}$ *satisfaisant*

$$|u_i| \leq R \qquad (i = 1, \ldots, d-1) \tag{3.1}$$

et

$$|\omega_1 u_1 + \ldots + \omega_{d-1}u_{d-1}| \leq \frac{1}{Ep^{1/(p-1)}}, \tag{3.2}$$

on ait

$$\Big|\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\| \leq S} \sum_{h=0}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1; T_1, \tau_2, \sigma_0) \times \prod_{i=1}^{d-1} \Delta(u_i; \sigma_i) \cdot e^{h\Sigma_{i=1}^{d-1}\omega_i u_i}\Big| \leq p^{-V}. \tag{3.3}$$

Démonstration. On pose $\Omega = ER \geq 1$. On distingue deux cas suivant que $\max_{1\leq i\leq d-1} |\omega_i|$ est inférieur ou supérieur à $1/(\Omega p^{1/(p-1)})$.

Le cas 1 : $\max_{1\leq i\leq d-1} |\omega_i| \leq 1/(\Omega p^{1/(p-1)})$. On applique la proposition 3.4 avec $r_1 = \ldots = r_{d-1} = R$; on vérifie que l'on a

$$ER = \Omega \leq \frac{1}{|\omega_i|}p^{-1/(p-1)} \qquad (i = 1, \ldots, d-1)$$

et que toutes les conditions de cette proposition 3.4 sont satisfaites. Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma \in \mathbb{N}^d$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0, 1, \ldots, H$), non tous nuls, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, tels que, pour tout τ_1, τ_2 avec $0 \leq \tau_1 < T_1$, $0 \leq \tau_2 \leq T_2$, on ait

$$M\Big(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0)$$

$$\times\prod_{i=1}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)\cdot e^{h\Sigma_{i=1}^{d-1}\omega_i z_i},R\Big)\le p^{-V},$$

où on a noté $R=(R,\ldots,R)\in\mathbb{R}^{d-1}$. Donc, pour tout $(u_1,u_2,\ldots,u_{d-1})\in\mathcal{K}^{d-1}$ vérifiant (3.1), on obtient la majoration (3.3).

L e c a s 2 : $\max_{1\le i\le d-1}|\omega_i|\ge 1/(\Omega p^{1/(p-1)})$. On suppose sans perte de généralité $|\omega_1|=\max_{1\le i\le d-1}|\omega_i|$. On a donc

$$|\omega_1|\ge\max\{1/(\Omega p^{1/(p-1)}),|\omega_2|,\ldots,|\omega_{d-1}|\}.$$

On applique la proposition 3.7 avec $r_1=1/(Ep^{1/(p-1)})$ et $r_2=\ldots=r_{d-1}=R$. On vérifie la condition

$$Er_1\le p^{-1/(p-1)}$$

ainsi que toutes les autres hypothèses de la proposition 3.7. Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta=1,\ldots,D$, $\sigma\in\mathbb{N}^d$, $\|\sigma\|\le S$, $h=0,1,\ldots,H$), non tous nuls, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h}\|p_{\delta\sigma h}\|\le p^{\Delta}$, tels que, pour tout τ_1,τ_2 avec $0\le\tau_1<T_1$, $0\le\tau_2\le T_2$, on ait

(3.4) $$M\Bigg(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h}\Delta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0)$$

$$\times\Delta\bigg(\frac{1}{\omega_1}(z_1-\omega_2z_2-\ldots-\omega_{d-1}z_{d-1});\sigma_1\bigg)\prod_{i=2}^{d-1}\Delta(z_i;\sigma_i)\cdot e^{hz_1},r'\Bigg)\le p^{-V},$$

où $r'=(1/(Ep^{1/(p-1)}),R,\ldots,R)\in\mathbb{R}^{d-1}$. On prend $(u_1,\ldots,u_{d-1})\in\mathcal{K}^{d-1}$ vérifiant (3.1) et (3.2) et on pose dans la majoration (3.4)

$$z_1=\sum_{i=1}^{d-1}\omega_iu_i\quad\text{et}\quad z_i=u_i\quad(i=2,\ldots,d-1);$$

on a alors

$$|z_1|\le\frac{1}{Ep^{1/(p-1)}},\quad |z_i|\le R\quad(i=2,\ldots,d-1)$$

et

$$\frac{1}{\omega_1}(z_1-\omega_2z_2-\ldots-\omega_{d-1}z_{d-1})=u_1;$$

on en déduit, pour tout τ_1,τ_2 avec $0\le\tau_1<T_1$, $0\le\tau_2\le T_2$, la majoration (3.3). ■

4. Exemple : polynômes exponentiels

a) *Un calcul préliminaire*

LEMME 4.1. *Soient d, s, t des entiers positifs, $\tau\in\mathbb{N}^t$, $\sigma\in\mathbb{N}^s$ et soient $w_1,\ldots,w_t$, $u_1,\ldots,u_s$, x, y des éléments de $\mathcal{K}^d$, avec $v(xy)>1/(p-1)$. Alors, on a*

(4.1) $$D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xz})_{z=y} = \sum_\kappa\sum_\varrho\sum_\mu \frac{(\kappa_1+\ldots+\kappa_s)!(\varrho_1+\ldots+\varrho_t)!}{\mu!(\kappa_1+\ldots+\kappa_s-\mu)!(\varrho_1+\ldots+\varrho_t-\mu)!} \times\Big(\prod_{i=1}^s \frac{\sigma_i!}{\kappa_i!}u_i^{\kappa_i}\Big)\Big(\prod_{j=1}^t \frac{\tau_j!}{\varrho_j!}w_j^{\varrho_j}\Big)x^{\varrho_1+\ldots+\varrho_t-\mu}y^{\kappa_1+\ldots+\kappa_s-\mu}e^{xy},$$

où κ décrit les s-uplets $(\kappa_1,\ldots,\kappa_s)$ avec $\kappa_i\in\mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\kappa_i\|=\sigma_i$ ($i=1,\ldots,s$), ϱ décrit les t-uplets $(\varrho_1,\ldots,\varrho_t)$ avec $\varrho_j\in\mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\varrho_j\|=\tau_j$ ($j=1,\ldots,t$), et enfin μ décrit les éléments de $\mathbb{N}^d$ vérifiant $\mu\le\kappa_1+\ldots+\kappa_s$ et $\mu\le\varrho_1+\ldots+\varrho_t$.

Notation. Pour $\mu,\kappa\in\mathbb{N}^d$, $\mu\le\kappa$ signifie $\kappa-\mu\in\mathbb{N}^d$.

Remarque 1. Dans le lemme 4.1 le corps $\mathcal{K}$ peut être remplacé par $\mathbb{C}_p$.

Remarque 2. De la symétrie du côté droit de cette formule quand on échange (w,τ,x,ϱ) et (u,σ,y,κ), on déduit
$$D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xz})_{z=y}=D_u^\sigma((w\cdot z)^\tau e^{yz})_{z=x}.$$

Démonstration. Voir [16], lemme 3.1.

LEMME 4.2. *Sous les hypothèses du lemme* 4.1, *si X, Y, U, W sont des nombres réels vérifiant* $\max(1,|x|)\le X$, $\max(1,|y|)\le Y$, $|u|\le U$ *et* $|w|\le W$, *on a*
$$|D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xz})_{z=y}|\le X^{\|\tau\|}Y^{\|\sigma\|}\prod_{i=1}^s|u_i|^{\sigma_i}\prod_{j=1}^t|w_j|^{\tau_j}\le (XW)^{\|\tau\|}(YU)^{\|\sigma\|}.$$

Démonstration. Pour des éléments κ,ϱ et μ de $\mathbb{N}^d$ avec $\mu\le\kappa$ et $\mu\le\varrho$,
$$\frac{\kappa!\varrho!}{\mu!(\kappa-\mu)!(\varrho-\mu)!}\in\mathbb{Z},$$
donc les coefficients de la somme à la droite de (4.1) sont entiers. Pour $\kappa_i\in\mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\kappa_i\|=\sigma_i$ et $\varrho_j\in\mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\varrho_j\|=\tau_j$, on a $\sigma_i!/\kappa_i!\in\mathbb{Z}$, $\tau_j!/\varrho_j!\in\mathbb{Z}$ ($i=1\ldots,s$, $j=1,\ldots,t$). Enfin, on remarque que $|e^{xy}|=1$, donc
$$|D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xy})_{z=y}|\le\prod_{i=1}^s|u_i|^{\sigma_i}\prod_{j=1}^t|w_j|^{\tau_j}(\max_\mu|x|^{\|\tau\|-\|\mu\|})(\max_\mu|y|^{\|\sigma\|-\|\mu\|})$$
$$\le X^{\|\tau\|}Y^{\|\sigma\|}\prod_{i=1}^s|u_i|^{\sigma_i}\prod_{j=1}^t|w_j|^{\tau_j}\le(XW)^{\|\tau\|}(YU)^{\|\sigma\|}. \ \blacksquare$$

Remarque. Si $x=0$, on a la majoration, pour $\|\sigma\|\ge\|\tau\|$,
$$|D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma)_{z=y}|\le\prod_{i=1}^s|u_i|^{\sigma_i}\prod_{j=1}^t|w_j|^{\tau_j}\cdot|y|^{\|\sigma\|-\|\tau\|}.$$
Dans le cas $\|\sigma\|<\|\tau\|$, on a $D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma)=0$.

D é m o n s t r a t i o n d e l a r e m a r q u e. On suppose $x = 0$. Pour qu'un terme de la somme à la droite de (4.1) ne soit pas nulle, il est nécessaire que $\mu = \varrho_1 + \ldots + \varrho_t$ et alors que $\kappa_1 + \ldots + \kappa_s \geq \varrho_1 + \ldots + \varrho_t$ et que $\|\sigma\| \geq \|\tau\|$.

On suppose $\|\sigma\| \geq \|\tau\|$. On a

$$D_w^\tau((u \cdot z)^\sigma)_{z=y} = \sum_\kappa \sum_\varrho \frac{(\kappa_1 + \ldots + \kappa_s)!}{(\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \varrho_1 - \ldots - \varrho_t)!} \times \biggl(\prod_{i=1}^s \frac{\sigma_i!}{\kappa_i!} u_i^{\kappa_i}\biggr)\biggl(\prod_{j=1}^t \frac{\tau_j!}{\varrho_j!} w_j^{\varrho_j}\biggr) y^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \varrho_1 - \ldots - \varrho_t} e^{xy},$$

où κ décrit les s-uplets $(\kappa_1, \ldots, \kappa_s)$ avec $\kappa_i \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\kappa_i\| = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, s$, ϱ décrit les t-uplets $(\varrho_1, \ldots, \varrho_t)$ avec $\varrho_j \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $\|\varrho_j\| = \tau_j$, $j = 1, \ldots, t$, et $\varrho_1 + \ldots + \varrho_t \leq \kappa_1 + \ldots + \kappa_s$. Par le même argument que dans la démonstration du lemme 4.2, on en déduit

$$|D_w^\tau((u \cdot z)^\sigma)_{z=y}| \leq \prod_{i=1}^s |u_i|^{\sigma_i} \prod_{j=1}^t |w_j|^{\tau_j} \cdot |y|^{\|\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \varrho_1 - \ldots - \varrho_t\|}$$

mais $\|\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \varrho_1 - \ldots - \varrho_t\| = \|\sigma\| - \|\tau\|$. ∎

LEMME 4.3. *Soient d, s, t des entiers positifs*, $\tau \in \mathbb{N}^t$, $\sigma \in \mathbb{N}^s$, *et* $w_1, \ldots, w_t$, $u_1, \ldots, u_s$, x *des éléments de* $\mathcal{K}^d$, $0 \leq r < (1/|x|)p^{-1/(p-1)}$ *de telle sorte que* e^{xz} *existe pour* $|z| \leq r$. *Si* X, U, W *sont des nombres réels vérifiant* $\max(1, |x|) \leq X$, $|u| \leq U$ *et* $|w| \leq W$, *on a*

$$\begin{aligned} M(D_w^\tau((u \cdot z)^\sigma e^{xz}), r) &\leq \prod_{i=1}^s |u_i|^{\sigma_i} \prod_{j=1}^t |w_j|^{\tau_j} \cdot X^{\|\tau\|} \max(1, r)^{\|\sigma\|} \\ &\leq (XW)^{\|\tau\|}(U \max(1, r))^{\|\sigma\|}. \end{aligned}$$

D é m o n s t r a t i o n. Le lemme 4.1 montre que l'on peut écrire

$$D_w^\tau((u \cdot z)^\sigma e^{xz}) = \sum_\kappa \sum_\varrho \sum_\mu \frac{(\kappa_1 + \ldots + \kappa_s)!(\varrho_1 + \ldots + \varrho_t)!}{\mu!(\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \mu)!(\varrho_1 + \ldots + \varrho_t - \mu)!} \times \biggl(\prod_{i=1}^s \frac{\sigma_i!}{\kappa_i!} u_i^{\kappa_i}\biggr)\biggl(\prod_{j=1}^t \frac{\tau_j!}{\varrho_j!} w_j^{\varrho_j}\biggr) \cdot x^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_t - \mu} z^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \mu} e^{xz},$$

où (κ, ϱ, μ) décrit le domaine énoncé dans le lemme 4.1. Pour (κ, ϱ, μ) dans ce domaine on a

$$\biggl|\biggl(\prod_{i=1}^s \frac{\sigma_i!}{\kappa_i!} u_i^{\kappa_i}\biggr)\biggl(\prod_{j=1}^t \frac{\tau_j!}{\varrho_j!} w_j^{\varrho_j}\biggr) \cdot x^{\varrho_1 + \ldots + \varrho_t - \mu}\biggr| \leq \prod_{i=1}^s |u_i|^{\sigma_i} \prod_{j=1}^t |w_j|^{\tau_j} X^{\|\tau\|}$$

et

$$M(z^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_s - \mu}, r) = r^{\|\sigma\| - \|\mu\|} \leq \max(1, r)^{\|\sigma\|}$$

avec $M(e^{xz}, r) = 1$; donc

$$M(D_w^\tau((u\cdot z)^\sigma e^{xz}), r) \le \prod_{i=1}^{s} |u_i|^{\sigma_i} \prod_{j=1}^{t} |w_j|^{\tau_j} X^{\|\tau\|} \max(1, r)^{\|\sigma\|}. \ \blacksquare$$

b) *Une fonction auxiliaire pour les groupes linéaires*

Théorème 4.4. *Soient μ, m, S, T, ι des entiers ≥ 0, et s, t, d, n, D, H des entiers positifs, U, V des nombres réels, Δ, ϱ, r, R, E des nombres réels positifs, $\xi_{\delta\sigma h} \in \mathcal{K}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma \in \mathbb{N}^s$, $\|\sigma\| \le S$, $h = 1, \ldots, H$) et $u_1, \ldots, u_s$ des éléments de $\mathcal{K}^d$. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{K}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) = \eta$, et soit $\mathcal{X}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}^d$ avec $\dim(\mathcal{V}/(\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^\perp)) = m$. On choisit une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathcal{V}$ et une base $(w_1, \ldots, w_t)$ de $\mathcal{W}$. Enfin, soient $x_1, \ldots, x_H$ des éléments de $\mathcal{X}$. On suppose*

$$E > 1,$$

$$Er \le R < \frac{1}{|x||v|} p^{-1/(p-1)}, \tag{4.2}$$

$$(T+m)\log_p E \le \varrho(U+V), \tag{4.3}$$

$$g(U+V) \le \mathrm{f}\iota \le \frac{m!(n-m)!(S+n-m+1)^{s-n+m} DH\Delta(\log_p E)^m}{s!(1+\varrho)^m (U+V)^m \binom{T+t-\eta}{t-\eta}}, \tag{4.4}$$

et

$$(\max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}|)(\max(1, |w|, |w||x|))^T (\max(1, |u|, R|u||v|))^S \le p^U, \tag{4.5}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_H)$, $u = (u_1, \ldots, u_s)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_t)$. Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma \in \mathbb{N}^s$, $\|\sigma\| \le S$, et $h = 1, \ldots, H$), non tous nuls, majorés par $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \le p^\Delta$, tels que la fonction Φ de d variables définie par

$$\Phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_d) = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\|\le S} \sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} (u\cdot\zeta)^\sigma e^{x_h\zeta}$$

vérifie

$$M(D_w^\tau \Phi(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n), r) \le p^{-V}$$

(r désigne $(r, \ldots, r) \in \mathbb{R}^n$ ici et dans les situations similaires de la suite de cette partie) pour tout $\tau \in \mathbb{N}^t$ avec $\|\tau\| \le T$.

Démonstration. On applique le corollaire 2.6 aux fonctions

$$\varphi_{\delta\sigma h}(\zeta) = \xi_{\delta\sigma h}(u\cdot\zeta)^\sigma e^{x_h\zeta} \qquad (\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^s,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 1, \ldots, H)$$

en remplaçant λ par (δ, σ, h) et L par $D\binom{S+s}{s}H$. Le lemme 4.1 permet d'expliciter, pour tout τ, δ, σ, h variant comme dans l'énoncé, un polynôme $P_{\tau\delta\sigma h}$ en n variables, de degré total $\le S$, pour lequel

$$D_w^\tau \varphi_{\delta\sigma h}(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n) = P_{\tau\delta\sigma h}(z) e^{x_h(z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n)}.$$

On désigne par $\mathcal{L} : \mathcal{K}^n \to \mathcal{V}/(\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^\perp) \cong \mathcal{K}^m$ la composée de l'isomorphisme de $\mathcal{K}^n$ sur $\mathcal{V}$ associé à la base $(v_1, \ldots, v_n)$, avec la surjection canonique $\mathcal{V} \to \mathcal{V}/(\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^\perp)$. La fonction linéaire $\zeta \to x_h\zeta$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{K}$ s'annule sur $\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^\perp$, elle induit donc une fonction linéaire ψ_h de $\mathcal{V}/(\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^\perp)$ dans $\mathcal{K}$ et

$$e^{x_h(z_1v_1+\ldots+z_nv_n)} = e^{\psi_h\circ\mathcal{L}(z)}.$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (4.5), le lemme 4.3 fournit la majoration

$$\begin{aligned}
&M(D_w^\tau\varphi_{\delta\sigma h}(z_1v_1+\ldots+z_nv_n), R)\\
&\qquad \le M(D_w^\tau\varphi_{\delta\sigma h}(\zeta), R|v|)\\
&\qquad \le |\xi_{\delta\sigma h}| M(D_w^\tau((u\cdot\zeta)^\sigma e^{x_h\zeta}), R|v|)\\
&\qquad \le |\xi_{\delta\sigma h}|(|w|\max(1,|x|))^{\|\tau\|}(|u|\max(1,R|v|))^{\|\sigma\|}\\
&\qquad \le |\xi_{\delta\sigma h}|(\max(1,|w|,|w||x|))^{\|\tau\|}(\max(1,|u|,R|u||v|))^{\|\sigma\|} \le p^U
\end{aligned}$$

$(\tau\in\mathbb{N}^t,\ \|\tau\|\le T,\ \delta=1,\ldots,D,\ \sigma\in\mathbb{N}^s,\ \|\sigma\|\le S,\ h=1,\ldots,H)$.

L'hypothèse (4.3) est la condition (2.7) du corollaire 2.6.

Enfin, en tenant compte de la majoration

$$\binom{S+n-m}{n-m} \le \frac{s!\binom{S+s}{s}}{(n-m)!(S+n-m+1)^{s-n+m}}$$

l'hypothèse (4.4) assure la condition (2.8). ∎

R e m a r q u e. Pour $\varrho = 1, U = V$, les hypothèses (4.3) et (4.4) deviennent

$$(T+m)\log_p E \le 2U, \tag{4.6}$$

$$2gU \le \mathrm{f}\iota \le \frac{m!(n-m)!(S+n-m+1)^{S-n+m+1}DH\Delta(\log_p E)^m}{4^m s!U^m\binom{T+t-\eta}{t-\eta}}. \tag{4.7}$$

c) *La méthode de Baker*. Voici le cas particulier $S = 0$ du théorème 4.4.

COROLLAIRE 4.5. *Soient η un entier ≥ 0, t, d, n des entiers positifs, $\mathcal{V} = \mathcal{K}v_1 + \ldots + \mathcal{K}v_n$ et $\mathcal{W} = \mathcal{K}w_1 + \ldots + \mathcal{K}w_t$ des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{K}^d$, de dimensions n et t respectivement, avec $\dim(\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) = \eta$. Soient T et ι deux entiers ≥ 0, D, H des entiers positifs, Δ, r, R, U des nombres réels positifs, $\xi_{\delta h} \in \mathcal{K}$ $(\delta = 1,\ldots,D,\ h = 1,\ldots,H)$ et $x_1,\ldots,x_H$ des éléments de $\mathcal{K}^d$. On suppose*

$$E > 1,\qquad Er \le R < \frac{1}{|x||v|}p^{-1/(p-1)},$$

$$(T+n)\log_p E \le 2U,$$

$$2gU \le \mathrm{f}\iota \le \frac{n!DH\Delta(\log_p E)^n}{(4U)^n\binom{T+t-\eta}{t-\eta}}$$

et

$$(\max_{\delta,h}|\xi_{\delta h}|)(\max(1,|w|,|w||x|))^T \le p^U,$$

où $x = (x_1, \dots, x_H), v = (v_1, \dots, v_n)$ *et* $w = (w_1, \dots, w_t)$. *Alors, il existe des entiers rationnels* $p_{\delta h}$ $(\delta = 1, \dots, D, h = 1, \dots, H)$ *non tous nuls, majorés par* $\max_{\delta,h} \|p_{\delta h}\| \le p^{\Delta}$, *tels que*

$$M\Big(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{h=1}^{H} p_{\delta h}\xi_{\delta h}(w\cdot x_h)^{\tau}\prod_{i=1}^{n} e^{(x_h v_i)z_i}, r\Big) \le p^{-U}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{N}^t, \|\tau\| \le T$.

Démonstration. On prend $S = 0$, $s = 1$, $\mathcal{X} = \mathcal{K}^d$ et alors $m = n$, dans le théorème 4.4; les conditions de ce théorème sont toutes satisfaites avec $V = U$ et $\varrho = 1$ sous nos hypothèses.

Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\delta h}$ $(\delta = 1, \dots, D,\ h = 1, \dots, H)$ majorés par $\max_{\delta,h} \|p_{\delta h}\| \le p^{\Delta}$ tels que la fonction

$$\Phi(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{h=1}^{H} p_{\delta h}\xi_{\delta h} e^{x_h\zeta}$$

vérifie

$$M(D_w^{\tau}\Phi(z_1v_1 + \ldots + z_nv_n), r) \le p^{-U}, \qquad \tau \in \mathbb{N}^t,\ \|\tau\| \le T;$$

mais

$$D_w^{\tau}(e^{xz})_{z=y} = (w\cdot x)^{\tau} e^{xy} \tag{4.8}$$

montre

$$D_w^{\tau}\Phi(z_1v_1 + \ldots + z_nv_n) = \sum_{\delta=1}^{D}\sum_{h=1}^{H} p_{\delta h}\xi_{\delta h}(w\cdot x_h)^{\tau}\prod_{i=1}^{n} e^{(x_h\cdot v_i)z_i}$$

$(\tau \in \mathbb{N}^t,\ \|\tau\| \le T)$. ∎

d) *La méthode de Schneider en plusieurs variables.* Voici le cas particulier $T = 0$ du théorème 4.4 “dual” du corollaire 4.5.

COROLLAIRE 4.6. *Soient* S, ι *deux entiers* ≥ 0, s, d, n, D, H *des entiers positifs*, U *un réel*, Δ, ϱ, r, R, E *des nombres réels positifs*, $\xi_{\delta\sigma h}$ *des élements de* $\mathcal{K}$ $(\delta = 1, \dots, D;\ \sigma \in \mathbb{N}^s,\ \|\sigma\| \le S,\ h = 1, \dots, H)$, *et* $u_1, \dots, u_s$ *des éléments de* $\mathcal{K}^d$. *Soient* $\mathcal{V} = \mathcal{K}v_1 + \ldots + \mathcal{K}v_n$ *et* $\mathcal{X}$ *des sous-espaces vectoriels de* $\mathcal{K}^d$, *avec* $\dim \mathcal{V} = n$ *et* $\dim(\mathcal{V}/(\mathcal{V}\cap\mathcal{X}^{\perp})) = m \ge 0$, *et* $x_1, \dots, x_H \in \mathcal{X}$. *On suppose*

$$E > 1, \quad Er \le R < \frac{1}{|x||v|}p^{-1/(p-1)}, \quad m\log_p E \le 2U,$$

$$2gU \le \mathrm{f}\iota \le \frac{m!(n-m)!(S+n-m-1)^{s-n+m}DH\Delta(\log_p E)^m}{s!(4U)^m},$$

et

$$(\max_{\delta,\sigma,h}|\xi_{\delta\sigma h}|)\big(\max(1, |u|, R|u||v|)\big)^S \le p^U,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_H), u = (u_1, \ldots, u_s)$ *et* $v = (v_1, \ldots, v_n)$. *Alors, il existe des entiers rationnels* $p_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma \in \mathbb{N}^s,\ \|\sigma\| \leq S,\ h = 1, \ldots, H)$, *non tous nuls, majorés par* $\max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, *tels que*

$$M\Big(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\| \leq S} \sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} (u \cdot (z_1 v_1 + \ldots + z_n v_n))^{\sigma} \prod_{i=1}^{n} e^{(x_h v_i) z_i}, r\Big) \leq p^{-U}.$$

Démonstration. On prend, dans le théorème 4.4, $T = 0$, $\varrho = 1$, $V = U$. ∎

Exemple. Prenons $s = n = d$, $\mathcal{V} = \mathcal{K}^d$ et choisissons pour $(u_1, \ldots, u_d)$ et pour $(v_1, \ldots, v_d)$ la base canonique de $\mathcal{K}^d$. Choisissons de plus $x_h = h(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ $(h = 1, \ldots, H)$ et $\dim \mathcal{X} = 1$, de sorte que $m = 1$. Le système s'écrit

$$M\Big(\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\|\sigma\| \leq S} \sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h} \xi_{\delta\sigma h} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\sigma_i} e^{h\zeta_i z_i}, r\Big) \leq p^{-U}.$$

L'hypothèse principale devient alors

$$2gU \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+d)DH\Delta \log_p E}{4dU}, \qquad \text{pour un } \iota \in \mathbb{Z}.$$

5. Fonctions auxiliaires en une variable. Les constructions précédentes sont spécialement utiles pour les fonctions de plusieurs variables. Néanmoins le cas d'une variable, que nous allons maintenant expliciter, a aussi des applications en théorie des nombres transcendants.

Voici un exemple de ce que donne la proposition 2.4 dans le cas $n = 1$:

Corollaire 5.1. *Soient* ι *un entier* ≥ 0, B, T, L *des entiers positifs*, U, V *des nombres réels, et soient* Δ, r, R, ϱ *des nombres réels positifs, vérifiant*

$$r < R, \qquad (R/r)^T \leq p^{\varrho(U+V)}$$

et

$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{L\Delta \log_p(R/r)}{(1+\varrho)B(U+V)}. \tag{5.1}$$

Soient $\varphi_{\lambda\beta}$ $(\lambda = 1, \ldots, L,\ \beta = 1, \ldots, B)$ *des fonctions d'une variable analytiques dans le disque* $\mathcal{D}(0, R)$ *de* $\mathcal{K}$, *majorées par*

$$\max_{\substack{1\leq\lambda\leq L\\ 1\leq\beta\leq B\\ 0\leq\tau<T}} M\Big(\Big(\frac{d}{dz}\Big)^{\tau} \varphi_{\lambda\beta}, R\Big) \leq p^{U}.$$

Alors, il existe des entiers rationnels $p_1, \ldots, p_L$, *non tous nuls, majorés par*

$$\max_{\lambda} \|p_\lambda\| \leq p^{\Delta}, \tag{5.2}$$

tels que, pour $1 \le \beta \le B$, *la fonction*

$$\Phi_\beta = \sum_{\lambda=1}^{L} p_\lambda \varphi_{\lambda\beta}$$

vérifie

$$\max_{0\le\tau<T} M\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau \Phi_\beta, r\right) \le p^{-V}.$$

Démonstration. On utilise la proposition 2.4 avec $n = 1$ pour les fonctions $(\frac{d}{dz})^\tau \varphi_{\lambda\beta}$ ($\lambda = 1,\dots,L$, $\beta = 1,\dots,B$, $\tau = 0,1,\dots,T-1$), avec α remplacé par (β,τ), et $A = BT$. On prend $K = K_1$ le plus petit entier $\ge (U+V)/\log_p(R/r)$, donc $K-1 < (U+V)/\log_p(R/r)$ et

$$T + K - 1 < \frac{(1+\varrho)(U+V)}{\log_p(R/r)}.$$

D'autre part $W = B(T+K-1)$, la condition principale (2.2) est assurée par (5.1). Alors, il existe des entiers rationnels $p_1,\dots,p_L$, non tous nuls, majorés par (5.2), vérifiant ce que l'on veut. ∎

Pour donner un cas particulier (corollaire 5.3) du corollaire 5.1, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5.2. *Soient* r_1, R *des nombres réels positifs, et soit* $F(z)$ *une fonction analytique dans le disque* $\mathcal{D}(0,\max(r_1,R))$ *de* $\mathcal{K}$. *Alors pour tout* $\tau \ge 0$,

$$M\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau F(z), R\right) \le \frac{|\tau!|}{r_1^\tau} M(F, \max(r_1,R)).$$

Démonstration. On pose, pour $|z| \le \max(r_1,R)$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{avec } a_n \in \mathcal{K}\ (n = 0,1,2,\dots);$$

on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau F(z) = \sum_{n=\tau}^{\infty} n(n-1)\dots(n-(\tau-1))a_n z^{n-\tau}, \qquad |z| \le \max(r_1,R),$$

et

$$\begin{aligned}
M\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau F(z), R\right) &= \sup_{n\ge\tau} |n(n-1)\dots(n-(\tau-1))||a_n|R^{n-\tau} \\
&\le |\tau!| \sup_{n\ge\tau} |a_n|R^{n-\tau} r_1^\tau M\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^\tau F(z), R\right) \\
&\le |\tau!| \sup_{n\ge\tau} |a_n| r_1^\tau R^{n-\tau} \le |\tau!| \sup_{n\ge\tau} |a_n| \cdot \max(r_1,R)^n \\
&\le |\tau!| M(F, \max(r_1,R)).
\end{aligned}$$ ∎

Corollaire 5.3. *Soient ι un entier ≥ 0, ϱ, Δ, T, r, R, r_1, R_0 des nombres réels positifs, U, V des nombres réels et $\mathcal{E}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{K}$; pour chaque $a \in \mathcal{E}$, soit $\mathcal{T}_a$ un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ ayant $t(a)$ éléments. On pose $N = \sum_{a\in\mathcal{E}} t(a)$. Enfin, pour chaque (δ, a, t) avec $1 \leq \delta \leq D$, $a \in \mathcal{E}$ et $t \in \mathcal{T}_a$, soit $\xi_{\delta at} \in \mathcal{K}$. On suppose*

$$r < R, \quad (R/r)^T \leq p^{\varrho(U+V)}, \quad \max\{\max_{a\in\mathcal{E}} |a|, r_1, R\} \leq R_0,$$

$$g(U+V) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{DN\Delta \log_p(R/r)}{(1+\varrho)(U+V)}$$

et

$$\max_{\delta,a,t}(|\xi_{\delta at}| \frac{|(t+\tau)!|}{r_1^{t+\tau}}) \leq p^U \qquad (0 \leq \tau < T).$$

Enfin, soit F une fonction analytique dans le disque $\mathcal{D}(0, R_0)$ de $\mathcal{K}$. Alors, il existe des entiers rationnels $p_{\delta at}$ ($\delta = 1, \ldots, D$, $t \in \mathcal{T}_a$, $a \in \mathcal{E}$) vérifiant $0 < \max_{\delta,a,t} \|p_{\delta at}\| \leq p^{\Delta}$ et

$$\max_{0\leq\tau<T} M\biggl(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{a\in\mathcal{E}}\sum_{t\in\mathcal{T}_a} p_{\delta at}\xi_{\delta at}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{t+\tau} F(a+z), r\biggr) \leq p^{-V} M(F, R_0).$$

Remarque. On majore $|n!|$ brutalement par 1 et soigneusement par $np^{1-n/(p-1)}$.

Démonstration. On utilise le corollaire 5.1 avec $B = 1$, $L = DN$, pour les fonctions

$$\varphi_{\delta ta}(z) = \xi_{\delta at}(d/dz)^t F(a+z) \qquad (\delta = 1, \ldots, D,\ a \in \mathcal{E},\ t \in \mathcal{T}_a)$$

Posons $U' = U + \log_p M(F, R_0)$, $V' = V - \log_p M(F, R_0)$. Nous voyons que les trois premières conditions sont vérifiées avec U, V remplacés par U', V' respectivement. Pour obtenir la dernière condition, il suffit de vérifier

$$\max_{\substack{\delta,a,t\\0\leq\tau<T}} M\biggl(\xi_{\delta at}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{t+\tau} F(a+z), R\biggr) \leq p^U M(F, R_0).$$

On suppose $1 \leq \delta \leq D$, $t \in \mathcal{T}_a$, $a \in \mathcal{E}$ et $0 \leq \tau < T$. On applique le lemme 5.2 à la fonction $F(a+z)$:

$$\begin{aligned} M\biggl(\xi_{\delta at}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{t+\tau} F(a+z), R\biggr) &= |\xi_{\delta at}| M\biggl(\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{t+\tau} F(a+z), R\biggr) \\ &\leq |\xi_{\delta at}| \frac{|(t+\tau)!|}{r_1^{t+\tau}} M\bigl(F(a+z), \max(r_1, R)\bigr) \\ &\leq p^U M(F, R_0). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Enfin la fonction auxiliaire que voici, cas particulier du corollaire 5.1, intervient dans les démonstrations, par la méthode de Gel'fond–Schneider, des théorèmes de transcendance classiques sur la fonction exponentielle (Hermite–Lindemann, Gel'fond–Schneider, six exponentielles) ainsi que dans les démonstrations d'indépendance algébrique (théorème de Lindemann–Weierstraß, et minorations de degrés de transcendance du corps engendré par des nombres de la forme $\exp(x_iy_j)$; rappelons que l'analogue p-adique du théorème de Lindemann–Weierstraß n'est pas encore connu).

COROLLAIRE 5.4. *Soient* S, ι *des entiers* ≥ 0, T, D, H *des entiers positifs*, ϱ, Δ, r, R, U, X *des nombres réels positifs*, *et soient* $x_1, \ldots, x_H$, $\xi_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma = 0, 1, \ldots, S$, $h = 1, \ldots, H)$ *des éléments de* $\mathcal{K}$. *On suppose*

$$X \geq \max(1, |x|), \quad r < R < \frac{1}{|x|} p^{-1/(p-1)}, \quad (R/r)^T \leq p^{\varrho(U+V)},$$

$$2gU \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{D(S+1)H\Delta \log_p(R/r)}{2(1+\varrho)U}$$

et

$$\max_{\delta,\sigma,h} |\xi_{\delta\sigma h}| X^T \max(1, R)^S \leq p^U,$$

où $x = (x_1, \ldots, x_H)$. *Alors*, *il existe des entiers rationnels* $p_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma = 0, 1, \ldots, S$, $h = 1, \ldots, H)$, *non tous nuls*, *majorés par* $\|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta}$, *tels que*, *pour tout* τ *avec* $0 \leq \tau < T$, *on ait*

$$M\biggl(\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\sigma=0}^{S}\sum_{h=1}^{H} p_{\delta\sigma h}\xi_{\delta\sigma h} \sum_{\mu=0}^{\min(\tau,\sigma)} \frac{\sigma!}{(\sigma-\mu)!}\binom{\tau}{\mu} x_h^{\tau-\mu} z^{\sigma-\mu} e^{x_h z}, r\biggr) \leq p^{-U}.$$

Démonstration. On applique le corollaire 5.1 aux fonctions

$$\varphi_{\delta\sigma h}(z) = \xi_{\delta\sigma h} z^{\sigma} e^{x_h z} \qquad (\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma = 0, 1, \ldots, S,\ h = 1, \ldots, H)$$

avec $B = 1$ et λ remplacé par (δ, σ, h), donc $L = D(S+1)H$.

Le lemme 4.3 avec $u = w = 1$ permet de vérifier pour $0 \leq \delta \leq D$, $0 \leq \sigma \leq S$, $1 \leq h \leq H$ et $0 \leq \tau \leq T$,

$$\begin{aligned} M\biggl(\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{\tau} \varphi_{\delta\sigma h}, R\biggr) &\leq |\xi_{\delta\sigma h}| M\biggl(\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^{\tau} (z^{\sigma} e^{x_h z}), R\biggr) \\ &\leq |\xi_{\delta\sigma h}| X^{\tau} \max(1, R)^{\sigma} \leq |\xi_{\delta\sigma h}| X^T \max(1, R)^S \leq p^U; \end{aligned}$$

on a donc la conclusion en prenant $V = U$. ∎

II. Minorations de combinaisons linéaires simultanées de logarithmes p-adiques de nombres algébriques

1. Introduction. Dans le cas p-adique, les seules minorations effectives portant sur des combinaisons linéaires en un nombre quelconque de logarithmes utilisaient la méthode de Baker. Nous adaptons ici la méthode de [17] et [18], qui généralise la méthode de Schneider de la même façon que Baker généralise celle de Gel'fond. L'outil de base est une construction de fonction auxiliaire ([16] dans le cas complexe, première partie dans le cas p-adique).

Partons pour simplifier d'une expression

$$\Theta = \alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n} - 1$$

que l'on veut minorer. On construit d'abord une fonction auxiliaire p-adique de la forme

$$P(z_1, \dots, z_{n-1}, \alpha_1^{z_1} \dots \alpha_{n-1}^{z_{n-1}}),$$

où P est un polynôme non nul; la construction de P est faite de telle manière que ses premières dérivées à l'origine soient petites. Le lemme de Schwarz (en une seule variable) permet de montrer que notre fonction a un module petit sur un disque autour de 0; si le nombre $|\Theta|$ est petit, l'inégalité de Liouville implique alors que le polynôme P s'annule en beaucoup de points de la forme

$$(\lambda_1 - \lambda_n b_1/b_n, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n b_{n-1}/b_n, \alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n}),$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$. On utilise ensuite un lemme de zéros pour obtenir des relations linéaires entre les coefficients b_i, et on termine la démonstration par une récurrence (descente finale).

Remarquons enfin que la démonstration peut se transposer au cas complexe et permet de raffiner les résultats de [18] dans le cas de plusieurs combinaisons linéaires.

On désignera par $h_p(\alpha)$, pour α nombre algébrique, la hauteur logarithmique absolue de α en base p :

$$h_p(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{\log p}.$$

Dans tout ce texte, on se donne des nombres entiers b_{ik} ($i = 1, \dots, n-1, n$, $k = 1, \dots, m$, avec $m \geq 1$ et $n \geq 2$) satisfaisant $b_{n1}, \dots, b_{nm} > 0$ et des nombres algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m-1} \in \mathbb{C}_p$ vérifiant

$$v(\alpha_i - 1) > 0 \quad (i = 1, \dots, n+m-1);$$

on désigne par Θ_k les nombres de $\mathbb{C}_p$ définis par

$$\Theta_k = \alpha_1^{b_{1k}} \dots \alpha_{n-1}^{b_{n-1k}} \alpha_{n+k-1}^{b_{nk}} - 1 \quad (k = 1, \dots, m).$$

On considère le corps de nombres K engendré sur $\mathbb{Q}$ par $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+m-1}$ et on désigne par $\mathcal{K}$ le complété de K dans $\mathbb{C}_p$ ($\mathcal{K}$ est la clôture topologique de K dans $\mathbb{C}_p$). On note $D = [K : \mathbb{Q}]$ et $g = [\mathcal{K} : \mathbb{Q}_p]$; on désigne par e et f respectivement l'indice de ramification et le degré résiduel de K sur $\mathbb{Q}$ (ou de $\mathcal{K}$ sur $\mathbb{Q}_p$); on a $g = \mathrm{ef}$.

On choisit un multiple commun $b > 0$ aux entiers $b_{n1}, \dots, b_{nm}$ et on note $b_k = b/b_{nk}$ ($k = 1, \dots, m$). On introduit ensuite des nombres réels positifs $A_1, \dots, A_{n+m-1}$, E et M vérifiant

$$\log_p A_i \geq \max\{\mu/D, h_p(\alpha_i)\} \quad (i = 1, \ldots, n+m-1), \tag{1.1}$$

avec $A = \max_{1 \leq i \leq n+m-1} A_i$,

$$p^\mu \leq E \leq \min_{1 \leq i \leq n+m-1} \min\left\{ \frac{1}{|\alpha_i^{p^\kappa} - 1|p^{1/(p-1)}}, A_i^D \right\}, \tag{1.2}$$

$$M = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{b}{\log_p A_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k \|b_{ik}\|}{\log_p A_{n+k-1}} \right\}, \tag{1.3}$$

où κ est l'entier satisfaisant

$$\frac{1}{p-1} \leq \frac{p^\kappa}{2\mathrm{e}} < \frac{p}{p-1} \tag{1.4}$$

et où

$$\mu = \frac{p^\kappa}{2\mathrm{e}}.$$

Le théorème principal (théorème 2.1) et deux des corollaires (corollaires 2.2, 2.3) sont énoncés dans la section 2. Voici cinq conséquences simples des théorèmes principaux.

Dans les corollaires 1.1 à 1.4, la définition des quantités $A_1, \ldots, A_{n+m-1}$ est remplacée par une forme plus forte que (1.1), à savoir

$$\log_p A_i \geq \max\{\mu'/D, h_p(\alpha_i)\} \quad (i = 1, \ldots, n+m-1),$$

avec $\mu' = \max(1, \mu)$. On note $t = n/m$.

Les corollaires 1.1 à 1.3 établissent des minorations de plusieurs combinaisons linéaires logarithmiques, tandis que les corollaires 1.4 et 1.5 donnent des minorations d'une seule combinaison linéaire. Parmi les cinq corollaires, les deux premiers font intervenir le paramètre E; ce paramètre atteint dans les trois derniers son minimum p^μ et donc disparaît.

De même que G dans les corollaires initiaux 2.2 et 2.3, la quantité G_0 se définit en fonction de M dans le corollaire 1.1; elle est remplacée par B dans les corollaires suivants. On voit que le corollaire 1.1 a une forme plus compliquée que le corollaire 1.2; il nous apporte, pourtant, une meilleure précision.

Corollaire 1.1. *On définit les quantités Z_0, G_0 et U_0 par*

$$Z_0 \geq \begin{cases} \log_p \left[643 \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(n^2+1) \dfrac{DZ_0}{\log_p E} \right], & m = 1, \\ \log_p \left[608 \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)(n^2+1) \dfrac{DZ_0}{\log_p E} \right], & 2 \leq m \leq 9, \\ \log_p \left[212 \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)(n^2+1) \dfrac{DZ_0}{\log_p E} \right], & m \geq 10; \end{cases}$$

$$Z_0 \geq \max\left\{ \frac{p+1}{p-1} \frac{g}{D} \max(\log_p E, 1), 1 \right\},$$

$$G_0 \geq \max\left\{\log_p \frac{M}{p^{\kappa}(n+m)}, 25nZ_0\right\},$$

et

$$U_0 \geq \max\left\{DG_0\left(\frac{\mu^{n+m-1}DZ_0}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\right)^{1/m}, pD^2G_0\log_p E\right\}.$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}$ *sont multiplicativement indépendants, on a*

(1.5)

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}|\Theta_k| > \begin{cases} -25\Big[12(n+1)\Big(1+\dfrac{n^2}{\mathrm{f}}\Big)\Big]^{n+1}\dfrac{n+1}{\mathrm{f}}U_0, & m=1,\\ -12\Big[12(n+m)\Big(1+\dfrac{n^2}{\mathrm{f}}\Big)\Big]^{t+1}\dfrac{n+m}{\mathrm{f}}U_0, & 2\leq m\leq 9,\\ -16\Big[12(n+m)\Big(1+\dfrac{n^2}{\mathrm{f}}\Big)\Big]^{t+1}\dfrac{n+m}{\mathrm{f}}U_0, & m\geq 10.\end{cases}$$

Corollaire 1.2. *Soit B un nombre réel vérifiant*

$$7b\max_{1\leq i\leq n-1}\left(1+\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{b_{ik}}{b_{nk}}\right\|\right) \leq 10(n+m)B. \tag{1.6}$$

On définit les quantités Z_0, G_0 *et* U_0 *par*

$$Z_0 = \begin{cases} 2\max\left\{\log_p(40(n+1)pD), \dfrac{p}{p-1}\dfrac{g}{D}\log_p E\right\}, & m=1,\\ 2\max\left\{\log_p(35(n+m)pD), \dfrac{p}{p-1}\dfrac{g}{D}\log_p E\right\}, & 2\leq m\leq 9,\\ 2\max\left\{\log_p(14(n+m)pD), \dfrac{p}{p-1}\dfrac{g}{D}\log_p E\right\}, & m\geq 10,\end{cases}$$

$$G_0 = \begin{cases}\max\{\log_p(\mathrm{e}B), 10nZ_0\}, & 1\leq m\leq 9,\\ \max\{\log_p(\mathrm{e}B), 11nZ_0\}, & m\geq 10,\end{cases}$$

et

$$U_0 = \max\left\{DG_0\left(\frac{\mu^{n+m-1}DZ_0}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\right)^{1/m}, pD^2G_0\log_p A\right\}.$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}$ *sont multiplicativement indépendants, on a*

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}|\Theta_k| > \begin{cases} -25[12n^2(n+1)]^{n+1}\dfrac{n+1}{\mathrm{f}}U_0, & m=1,\\ -12[12n^2(n+m)]^{t+1}\dfrac{n+m}{\mathrm{f}}U_0, & 2\leq m\leq 9,\\ -16[12n^2(n+m)]^{t+1}\dfrac{n+m}{\mathrm{f}}U_0, & m\geq 10.\end{cases} \tag{1.7}$$

Corollaire 1.3. *Soit B un nombre réel vérifiant*

$$7b \max_{1\le i\le n-1}\left(1+\sum_{\kappa=1}^{m}\left\|\frac{b_{ik}}{b_{nk}}\right\|\right) \le 20(n+m)B. \tag{1.8}$$

On définit les quantités Z_0, G_0 et U_0 par

$$Z_0 = \begin{cases} 2\log_p[4665n(n+1)pD], & m=1,\\ 2\log_p[2949n(n+m)pD], & 2\le m\le 9,\\ 2\log_p[892n(n+m)pD], & m\ge 10,\end{cases} \qquad G_0=\max(\log_p B, 10nZ_0)$$

et

$$U_0=\max\left\{\frac{DG_0}{\mathrm{e}}\Big(D^{n+m}Z_0\prod_{i=1}^{n+m-1}\log_p A_i\Big)^{1/m}, pD^2G_0\log_p A\right\}.$$

Si $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+m-1}$ sont multiplicativement indépendants, on a (1.7).

Corollaire 1.4. *Supposons $m=1$ et notons $b_i=b_{i1}$ $(i=1,\dots,n)$, $\Theta=\Theta_1$. Soit B un nombre réel vérifiant*

$$7\max_{1\le i\le n}\|b_i\|\le 10(n+1)B. \tag{1.9}$$

On définit les quantités Z_0, G_0 et U_0 par

$$Z_0=\begin{cases}\log_2(143nD), & p=2,\\ \log_p(54npD), & p\ge 3,\end{cases} \qquad G_0=\max(\log_p B, 20nZ_0)$$

et $U_0=D^{n+2}Z_0G_0\prod_{i=1}^n\log_p A_i$. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont multiplicativement indépendants, on a

$$\log_p|\Theta| > \begin{cases} -580\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0, & p=2,\\ -560\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0, & p\ge 3.\end{cases} \tag{1.10}$$

Le corollaire suivant est une application d'un des théorèmes principaux à la minoration de la différence entre deux produits de puissances de nombres entiers.

Corollaire 1.5. *Soient $a_1,\dots,a_n$, $b_1,\dots,b_n$ des entiers rationnels vérifiant*

$$a_i\equiv 1 \pmod p \qquad (i=1,\dots,n,\ n\ge 1),$$

soient $A_1,\dots,A_n$, B des nombres réels vérifiant

$$A_i\ge \max(\|a_i\|,p) \quad (i=1,\dots,n);\quad 7\max_{1\le i\le n}\|b_i\|\le 10(n+1)B. \tag{1.11}$$

On définit les quantités Z_0, G_0 et U_0 par

$$Z_0=\begin{cases}\log_2(143n), & p=2,\\ \log_p(37np), & p\ge 3;\end{cases} \qquad G_0=\begin{cases}\max(\log_p B, 5nZ_0), & p=2,\\ \max(\log_p B, 20nZ_0), & p\ge 3,\end{cases}$$

et $U_0=Z_0G_0\prod_{i=1}^n\log_p A_i$. Si le nombre $\Theta=a_1^{b_1}\dots a_n^{b_n}-1$ n'est pas nul, il est minoré par

$$\log_p|\Theta| > \begin{cases} -290\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0, & p=2,\\ -560\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0, & p\ge 3.\end{cases} \tag{1.12}$$

Dans la section 3, nous introduisons quelques lemmes préliminaires; dans la section 4, nous énonçons le lemme de zéros de P. Philippon dans le cas particulier des groupes algébriques linéaires; dans la section 5, nous définissons les paramètres S, H, T_1, T_2 et $L_1, \ldots, L_{n+m-1}$ et nous déduisons une collection de conditions (5.1) à (5.8) sur ces paramètres grâce aux conditions (2.1), (2.2) et (2.4) à (2.10). Dans la section 6, en profitant des conditions (5.1) à (5.8), nous appliquons le corollaire 3.10 de la première partie et le corollaire 3.5 (inégalité de Liouville) sous l'hypothèse

$$\max_{1\le k\le m} \frac{|\Theta_k|}{p^{\kappa}|b_{nk}|} < p^{-vU}, \tag{1.13}$$

pour montrer qu'il existe une solution non triviale du système d'équations (6.4). La démonstration du théorème principal est donnée dans la section 7; le résultat obtenu sous l'hypothèse (1.13) dans la section précédente nous permet d'utiliser le lemme de zéros pour distinguer trois possibilités 1), 2) et 3) et nous pourrons éliminer toutes ces possibilités à l'aide des conditions (2.11), (2.12), (2.13) et (2.3). Dans la section 8, un choix convenable respectant toutes les hypothèses (2.6) à (2.10) et (2.12) des paramètres η, q, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 nous conduit aux corollaire 2.2, 2.3, tandis que les corollaires 1.1 à 1.5 sont déduits des corollaires 2.2 et 2.3. A cause de la nature de la question, il n'existe pas de bonnes valeurs des paramètres N, λ, γ, γ_0, γ_1 qui soient communes à toutes les possibilités des valeurs de n, m et p; deux tableaux sont alors mis à la fin pour faire paraître les valeurs différentes de ces paramètres dans tous les cas.

2. Le théorème principal. On choisit des paramètre η, q réels > 0, c_0 réel $\ge 100, c_1$ réel > 0, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 réels ≥ 4 vérifiant une collection d'inégalités que nous allons expliciter. On prend aussi des nombres réels Z, G auxquels on impose les conditions suivantes :

$$Z \ge \log_p \left\{ c_0 e \max\left\{ \frac{D}{\log_p E}, \frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A} \right\} + 2e \right\} \tag{2.1}$$

et

$$Z \ge \frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{gn}{D(n+m)} \cdot \max(\log_p E, 1),$$

$$G \ge \log_p \left(c_1 e \frac{M \log_p E}{D} + e \right) \quad \text{et} \quad G \ge c_2 \frac{p}{p-1} \frac{gn}{D(n+m)} \max(\log_p E, 1). \tag{2.2}$$

Le paramètre principal est

$$U \ge DG \left(\frac{\mu^{n+m-1} DZ}{\mathrm{e}^{m+1} \log_p E} \prod_{i=1}^{n+m-1} \frac{D \log_p A_i}{\log_p E} \right)^{1/m}. \tag{2.3}$$

Dans les sections 5 et 6, nous ferons les hypothèses (2.4) à (2.10) suivantes (ainsi que (2.13)) :

$$G \geq c_5 n, \qquad \mathrm{e}U \geq c_5 n D Z, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{e}U \geq D^2 \log_p A, \tag{2.5}$$

$$c_0 \geq \frac{n c_4 c_5}{(n-1)\mathrm{e}}, \tag{2.6}$$

$$c_1 \geq \frac{n\mathrm{e}}{p^{\kappa}\big(c_4 - \frac{1}{c_2 \mathrm{f}}\big(1+\frac{1}{t}\big)\big)}, \qquad c_3 \geq n, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{e}\eta > \frac{D}{U}\log_p(\mathcal{A}(\mathrm{e}U)^n), \tag{2.8}$$

avec

$$\mathcal{A} = 2c_5 n\left(\frac{c_3}{c_5 n}\right)^n \left[c_4 + \frac{1}{c_2 \mathrm{f}}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right] p^{-\kappa},$$

$$\left(c_6 n + \frac{1}{4c_5 n}\right)\frac{1}{\mathrm{f}} \leq q \leq w\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right), \tag{2.9}$$

$$4nw^2 \leq c_3 c_4 q, \tag{2.10}$$

avec

$$w = \left\{\left[n+m+\left(2+\frac{1}{c_2}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)+\frac{107}{103 c_5 \log p}\right]c_3 + n + m + \eta\right\}\frac{1}{\mathrm{f}};$$

on note

$$v = q + \left[\left(n+m+1+\frac{1}{t}+\frac{107}{103c_5\log p}\right)c_3 + n + m + \eta - \frac{1}{c_5}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{1}{2n}\right)\right]\frac{1}{\mathrm{f}}.$$

Dans la section 7, il faudra en outre supposer

$$G \geq \frac{(n+1)^2}{n} Z, \tag{2.11}$$

$$c_3^m\left(1 - \frac{p^{\kappa}(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2 c_3}\right)^{n+m-1} \geq (n+1)^2(2n)^{n+m-1}c_4^{n+m} \tag{2.12}$$

et

$$U \log_p E \geq D^2 G \log_p A. \tag{2.13}$$

Voici l'énoncé du théorème principal de cet article.

Théorème 2.1. *Sous les hypothèses* (2.1) *à* (2.13), *si on suppose que* $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n+m-1}$ *sont multiplicativement indépendants*, *on a*

$$\max_{1\leq k\leq m} \frac{|\Theta_k|}{p^{\kappa}|b_{nk}|} > p^{-vU}.$$

Un choix convenable des constantes η, q, c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 en fonction de n, m, p et de e et f nous conduit aux corollaires 2.2, 2.3 ci-dessous dont les démonstrations seront données dans la section 8.

Corollaire 2.2. *On définit les quantités Z, G et U par*

$$Z \geq \log_p \left\{ c_0 e \max\left[\frac{D}{\log_p E}, \frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A}\right] + 2e \right\} \tag{2.14}$$

et

$$Z \geq \frac{p+1}{p-1}\frac{gn}{D(n+m)}\max(\log_p E, 1)$$

avec

$$c_0 = N\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{g}\right),$$

$$G \geq \max\left\{ \log_p e\left[\frac{\mathrm{e}n^2 M\log_p E}{4p^\kappa(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)D} + 1\right], \right. \\ \left. 50\frac{p}{p-1}\frac{gn}{D(n+m)}\max(\log_p E, 1), 20n \right\} \tag{2.15}$$

et

$$U \geq \max\left\{ DG\left(\frac{\mu^{n+m-1}DZ}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\right)^{1/m}, \frac{20nDZ}{\mathrm{e}}, \right. \\ \left. \frac{D^2\log_p A}{\mathrm{e}}, \frac{D^2 G\log_p A}{\log_p E} \right\}; \tag{2.16}$$

on impose aussi la restriction (2.11)*. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}$ sont multiplicativement indépendants, on a*

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}\frac{|\Theta_k|}{p^\kappa |b_{nk}|} > -c'(n,m,p,\mathrm{f})U \tag{2.17}$$

avec

$$c' = 2\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}\left\{8(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\right\}^{t+1} \\ \times\left(1+\frac{\gamma_1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\frac{n+m}{\mathrm{f}}$$

et

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}|\Theta_k| > -c(n,m,p,\mathrm{f})U \tag{2.18}$$

avec

$$c = 2\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}\left\{8(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\right\}^{t+1}\left\{\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\right\}^{t+2}\frac{n+m}{\mathrm{f}},$$

où le réel $\lambda > 1$, les réels positifs γ, γ_0, γ_1 et l'entier N sont donnés dans le tableau I *ci-après.*

Corollaire 2.3. *On définit les quantités* Z, G *et* U *par*

$$Z \geq \log_p e\left\{c_0 \max\left[\frac{D}{\log_p E}, \frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A}\right] + 2\right\}, \tag{2.19}$$

$$Z \geq \frac{p+1}{p-1}\frac{gn}{D(n+m)}\max(\log_p E, 1),$$

avec

$$c_0 = Nn(n+m),$$

$$G \geq \max\left\{\log_p e\left[\frac{\mathrm{e}M\log_p E}{4p^\kappa(n+m)D} + 1\right],\right. \tag{2.20}$$

$$\left. 50\frac{p}{p-1}\frac{gn}{D(n+m)}\max(\log_p E, 1), 20n\right\},$$

et

$$U \geq \max\left\{DG\left(\frac{\mu^{n+m-1}DZ}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\right)^{1/m}, \frac{20nDZ}{\mathrm{e}},\right. \tag{2.21}$$

$$\left. \frac{D^2\log_p A}{\mathrm{e}}, \frac{D^2 G\log_p A}{\log_p E}\right\};$$

on impose aussi la restriction (2.11). *Si* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}$ *sont multiplicativement indépendants*, *on a d'une part*

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}\frac{|\Theta_k|}{p^\kappa|b_{nk}|} > -c'(n,m,p,\mathrm{f})U \tag{2.22}$$

avec

$$c' = 2\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}$$

$$\times\left\{8n^2(n+m)\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\right\}^{t+1}\left(1+\frac{\gamma_1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\frac{n+m}{\mathrm{f}},$$

et d'autre part

$$\log_p \max_{1\leq k\leq m}|\Theta_k| > -c(n,m,p,\mathrm{f})U \tag{2.23}$$

avec

$$c = 2\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}\{8n^2(n+m)\}^{t+1}\left\{\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\right\}^{t+2}\frac{n+m}{\mathrm{f}},$$

où le réel $\lambda > 1$, *les réels positifs* γ, γ_0, γ_1 *et l'entier* N *sont donnés dans le tableau* II *ci-après.*

Remarque. Une révision partielle des démonstrations des corollaires 2.2 et 2.3 nous permettra de voir que l'on peut modifier la signification de γ en le remplaçant par la formule

$$\gamma = \frac{107}{2060(n+m)}.$$

3. Lemmes préliminaires

Lemme 3.1. *Soit* κ *l'entier satisfaisant* (1.4), *et soit* $\mu = p^\kappa/(2\mathrm{e})$. *Si* $\alpha \in \mathcal{K}$ *satisfait* $v(\alpha - 1) > 0$, *alors*

$$v(\alpha^{p^\kappa} - 1) \geq \begin{cases} \mu + \dfrac{1}{p-1} \\ 1 + \dfrac{1}{p-1} & \text{si } p^{\kappa-1}(p-1) \geq \mathrm{e}. \end{cases}$$

Remarque. On peut généraliser le lemme 3.1 en remplaçant la condition $v(\alpha-1) > 0$ par $v(\alpha - 1) \geq \sigma/\mathrm{e}$, σ étant un nombre entier positif. On obtient la même conclusion avec l'entier κ défini par

$$\frac{1}{p-1} \leq \frac{\sigma p^\kappa}{2\mathrm{e}} < \frac{p}{p-1}$$

et $\mu = \sigma p^\kappa/(2\mathrm{e})$. La démonstration est essentiellement la même. Ainsi, sous cette condition plus générale imposée aux nombres α_i de l'introduction, on peut mettre un facteur $\sigma^{-(n+m-1)/m}$ dans la définition (2.3) de U sans modifier l'énoncé du théorème 2.1.

Démonstration. En considérant le développement de $\gamma^p = (1 + (\gamma - 1))^p$, il est facile de vérifier, pour tout entier $\gamma \in \mathbb{C}_p$,

$$v(\gamma^p - 1) \geq \min(pv(\gamma - 1), 1 + v(\gamma - 1)). \tag{3.1}$$

Le lemme est évidemment vrai si $\kappa = 0$.

Si $\kappa \geq 1$, nous obtenons par récurrence en appliquant (3.1) que

$$v(\alpha^{p^j} - 1) \geq \frac{p^j}{\mathrm{e}} \quad (j = 0, 1, \ldots, \kappa - 1). \tag{3.2}$$

En combinant (3.2) pour $j = \kappa - 1$ avec (3.1), nous obtenons

$$v(\alpha^{p^\kappa} - 1) \geq \min\left(\frac{p^\kappa}{\mathrm{e}}, 1 + \frac{p^{\kappa-1}}{\mathrm{e}}\right) \geq \begin{cases} \mu + 1/(p-1) \\ 1 + 1/(p-1) & \text{si } p^{\kappa-1}(p-1) \geq \mathrm{e}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Pour chaque entier positif k, soit $\nu(k)$ le plus petit multiple commun de $1, \ldots, k$.

Lemme 3.2. *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *et pour des entiers* $k \geq 1$, $\iota \geq 0$ *et* $s \geq 0$, *on a*

$$\|\Delta(z; k, \iota, s)\| \leq \left(e\frac{\|z\| + k}{k}\right)^{k\iota}; \tag{3.3}$$

si x *est un entier, on a*

$$\nu(k)^s \Delta(x; k, \iota, s) \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

avec la majoration

$$\log \nu(k) \leq \frac{107}{103}k. \tag{3.5}$$

Finalement, pour tous entiers positifs k et L, les polynômes 1, $(\Delta(z+r;k))^{\iota}$ $(r=0,1,\dots,k-1,\ \iota=1,\dots,L)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{C}$ *ou sur* $\mathbb{C}_p$.

Démonstration. Voir [21], lemme 1.6. La majoration de $\nu(k)$ provient de [17], lemme 2.2. ∎

LEMME 3.3. *Soient* $\sigma_1,\dots,\sigma_d, S$ *des entiers* ≥ 0, *et* $z_1,\dots,z_d \in \mathbb{C}$. *On suppose* $\max_{1\leq i\leq d}\|z_i\| \leq R$. *Alors, pour tout* $\sigma \in \mathbb{N}^d$ *avec* $\|\sigma\| \leq S$, *on a*

$$\prod_{i=1}^{d} \|\Delta(z_i;\sigma_i)\| \leq \left(\frac{dR}{S}+1\right)^{S} e^{\|\sigma\|}$$

et aussi

$$\prod_{i=1}^{d} \|\Delta(z_i;\sigma_i)\| \leq \left(\frac{dR}{S}+1\right)^{\|\sigma\|} e^{S}.$$

Démonstration. Voir [18], lemme 3.3. ∎

Soit α un nombre algébrique et soit K un corps de nombres contenant α; pour chaque place v de K, on note K_{v} le complété de K en v et d_{v} le degré local $d_{\mathrm{v}} = [K_{\mathrm{v}} : \mathbb{Q}_{\mathrm{v}}]$. Alors, pour chaque place v_0 de $\mathbb{Q}$ on a $\sum_{\mathrm{v}|\mathrm{v}_0} d_{\mathrm{v}} = [K:\mathbb{Q}]$ et la formule du produit s'écrit

$$\sum_{\mathrm{v}} d_{\mathrm{v}} \log|\alpha|_{\mathrm{v}} = 0 \qquad \text{si } \alpha \neq 0.$$

La hauteur logarithmique absolue de α est

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\mathrm{v}} d_{\mathrm{v}} \log\max(1, |\alpha|_{\mathrm{v}}).$$

Ceci entraîne directement le lemme suivant.

LEMME 3.4. *Soit K un corps de nombres contenu dans $\mathbb{C}_p$, de degré D sur $\mathbb{Q}$, et soit $\mathcal{K}$ le complété de K dans $\mathbb{C}_p$, de degré g sur $\mathbb{Q}_p$. On a, pour* $\alpha \in K^*$,

$$\log|\alpha| \geq -\frac{D}{g} h(\alpha), \quad \text{c'est-à-dire} \quad v(\alpha) \leq \frac{D}{g} h_p(\alpha).$$

Démonstration. On considère la place v de K induite dans $\mathbb{C}_p$; on a $K_{\mathrm{v}} = \mathcal{K}, \mathbb{Q}_{\mathrm{v}} = \mathbb{Q}_p$ et alors $d_{\mathrm{v}} = g$, d'où

$$h(\alpha) = h(1/\alpha) \geq \frac{g}{D}\log|1/\alpha| = -\frac{g}{D}\log|\alpha|$$

et la conclusion s'en déduit. ∎

On conserve dans le corollaire suivant toutes les notations du lemme 3.4.

COROLLAIRE 3.5 (Inégalité de Liouville). *Soit* $P \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_q]$ *un polynôme en q variables, de degré au plus N_i en X_i,* $i = 1,\dots,q$, *et de longueur* $L(P)$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ *des éléments de* K. *Si le nombre* $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ *n'est pas nul, alors*

$$\log |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)| \geq -\frac{D}{g}\Big(\log L(P) + \sum_{i=1}^{q} N_i h(\alpha_i)\Big).$$

Démonstration. Prenons dans le lemme 3.4 pour α le nombre $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$; on a

$$h(\alpha) \leq \log L(P) + \sum_{i=1}^{q} N_i h(\alpha_i). \ \blacksquare$$

Lemme 3.6. *Soit* $\mathcal{V}$ *un sous-espace de* K^{n+m-1} *de dimension* d *qui contient les vecteurs*

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= (b_{11}, \ldots, b_{n-1,1},\ b_{n1}, \ldots, b_{n+m-1,1}),\\ b^{(2)} &= (b_{12}, \ldots, b_{n-1,2},\ b_{n2}, \ldots, b_{n+m-1,2}),\\ &\ \vdots\\ b^{(m)} &= (b_{1m}, \ldots, b_{n-1,m},\ b_{nm}, \ldots, b_{n+m-1,m}) \end{aligned}$$

de K^{n+m-1}, *avec*

$$\begin{vmatrix} b_{n1} & \ldots & b_{n+m-1,1} \\ b_{n2} & \ldots & b_{n+m-1,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{nm} & \ldots & b_{n+m-1,m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors, $\mathcal{V}$ *admet une représentation*

$$z_j = \sum_{i\in I} u_i^{(j)} z_i \qquad (j \in J) \tag{3.6}$$

avec $u_i^{(j)} \in K$ $(i \in I,\ j \in J)$, *où* I *est un sous-ensemble de* $\{1, 2, \ldots, n+m-1\}$ *de* d *éléments contenant* $\{n, \ldots, n+m-1\}$ *et* J *est le complémentaire de* I.

Démonstration. Le sous-espace $\mathcal{V}$ est défini par un système de $s = n + m - 1 - d$ équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \ldots + a_{n+m-1,1}z_{n+m-1} = 0, & a_{ji} \in K \\ \vdots & (i = 1, \ldots, s) \\ a_{1s}z_1 + \ldots + a_{n+m-1,s}z_{n+m-1} = 0 & (j = 1, \ldots, n+m-1) \end{cases} \tag{3.7}$$

avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{n+m-1,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1s} & \ldots & a_{n+m-1,s} \end{pmatrix}$$

ayant pour rang s.

Nous notons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & b_{n-1,m} \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n+m-1,1} & b_{n+m-1,2} & \dots & b_{n+m-1,m} \end{pmatrix}.$$

La condition $b^{(1)}, b^{(2)}, \dots b^{(m)} \in \mathcal{V}$ équivaut à dire

$$AB = 0. \tag{3.8}$$

Les matrices A et B se décomposent en blocs de la manière suivante :

$$A = (\overbrace{A_1}^{n-1}\overbrace{A_2}^{m})\}_s, \qquad B = \overbrace{\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}}^{m} \begin{matrix} \}\, n-1 \\ \}\, m \end{matrix}.$$

Alors B_2 est de rang m, et (3.8) est équivalent à

$$A_2B_2 = -A_1B_1, \qquad A_2 = -A_1B_1B_2^{-1},$$

donc

$$A = A_1(\overbrace{E}^{n-1}, -\overbrace{B_1B_2^{-1}}^{m})\}_{n-1}$$

(où E est la matrice identité), d'où $\operatorname{rang} A_1 \geq \operatorname{rang} A = s$; ainsi on a $\operatorname{rang} A_1 = s$; cela nous permet de transformer (3.7) en (3.6), pour un sous-ensemble J de s éléments de $\{1, \dots, n-1\}$ et pour son complémentaire I dans $\{1, \dots, n+m-1\}$, I contient donc $\{n, \dots, n+m-1\}$. ∎

Nous rappelons aussi le lemme 2.7 de [17] que nous utiliserons plusieurs fois.

LEMME 3.7. *Soient $\psi : G_1 \to G_2$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules et $\mathcal{C}$ un sous-ensemble fini de G_1; on note $\underline{\mathcal{C}}$ l'ensemble des éléments $\lambda - \lambda'$ $(\lambda, \lambda' \in \mathcal{C})$. Alors*

$$\operatorname{Card} \psi(\mathcal{C}) \cdot \operatorname{Card}(\underline{\mathcal{C}} \cap \ker \psi) \geq \operatorname{Card} \mathcal{C}.$$

Nous aurons besoin, dans la section 8, du lemme suivant.

LEMME 3.8. *Quand α et β sont des nombres positifs vérifiant $\alpha \leq 2\beta$, la fonction $g_{\alpha\beta}$ définie par*

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{x+\beta}$$

est strictement décroissante sur $(0, \infty)$.

Démonstration. Pour $x \in (0, \infty)$,

$$\log g_{\alpha\beta}(x) = (x+\beta)\log\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right) = (x+\beta)(\log(x+\alpha) - \log x).$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\log g_{\alpha\beta}(x) = -\frac{\alpha(x+\beta)}{x(x+\alpha)} + \log(x+\alpha) - \log x$$
$$= -\frac{\alpha(x+\beta)}{x(x+\alpha)} + \log\left(1+\frac{\alpha}{x}\right),$$

d'où on déduit successivement

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \log g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\alpha[(2\beta-\alpha)x+\alpha\beta]}{x^2(x+\alpha)^2} > 0 \qquad \text{pour } x \in (0,\infty)$$

et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{d}{dx}\log g_{\alpha\beta}(x) = 0;$$

ces deux résultats impliquent $(d/dx)\log g_{\alpha\beta}(x) < 0$ pour tout $x \in (0,\infty)$; la décroissance stricte de $g_{\alpha\beta}$ en découle. ■

4. Le lemme de zéros. Nous donnons ici une proposition (proposition 4.1) qui est un exemple d'application du lemme de zéros de [11], et qui nous permettra dans la section 7 d'exploiter la construction transcendante de la section 6.

Soient K un corps de caractéristique nulle, d, n deux entiers positifs, $\theta_1,\ldots,\theta_n$ des éléments de K^d, Φ un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$, et $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des éléments de K^*. D'autre part soient S, H, T, $L_1,\ldots,L_n$ des entiers positifs. Rappelons que $\Phi(L)$ est l'ensemble des $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Phi$ qui satisfont $\|\lambda_i\| \le L_i$ $(i = 1,\ldots,n)$.

On définit une dérivation

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y\frac{\partial}{\partial Y} \tag{4.1}$$

sur l'anneau $K[X_0,\ldots,X_{d-1},Y]$ de telle sorte que, dans le cas $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}_p$, pour tout polynôme Q dans cet anneau, la fonction de $d+1$ variables

$$F(z_0,\ldots,z_d) = Q(z_0,z_1,\ldots,z_{d-1},e^{z_0}z_d)$$

vérifie

$$\frac{\partial}{\partial z_0}F(z) = (D_0Q)(z_0,z_1,\ldots,z_{d-1},e^{z_0}z_d).$$

On veut savoir s'il existe un polynôme non nul $Q \in K[X_0,\ldots,X_{d-1},Y]$, de degré total $\le S$ en $X_0,\ldots,X_{d-1}$ et de degré $\le H$ en Y, satisfaisant

$$D_0^\tau Q(\lambda_1\theta_1+\ldots+\lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1}\ldots\alpha_n^{\lambda_n}) = 0 \tag{4.2}$$
$$\text{pour tout } \tau\in\mathbb{N} \text{ avec } 0 \le \tau < T \text{ et tout } (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Phi(L).$$

Si $\mathcal{W}$ est un sous-espace vectoriel de K^d, de dimension ν, on note d'une part

$$p_{\mathcal{W}} : K^d \times K^* \to (K^d/\mathcal{W}) \times K^*$$

la surjection canonique et

$$\Sigma = \{(\lambda_1\theta_1+\ldots+\lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1}\ldots\alpha_n^{\lambda_n} : (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \Phi(L)\} \subset K^d \times K^*,$$

d'autre part

$$s_{\mathcal{W}} : K^d \to K^d/\mathcal{W}$$

la surjection canonique et

$$\mathcal{E} = \{\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_n\theta_n : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(L)\} \subset K^d.$$

On choisit des nombres réels $a_0, \ldots, a_d$ vérifiant $0 < a_0 \leq \ldots \leq a_d$ et $a_0 + \ldots + a_d \leq 1$; pour $0 \leq \nu \leq d$, on pose

$$\Sigma_\nu = \{(\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_n\theta_n, \alpha_1^{\lambda_1} \ldots \alpha_n^{\lambda_n}) : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu L)\} \subset K^d \times K^*$$

et

$$\mathcal{E}_\nu = \{\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_n\theta_n : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Phi(a_\nu L)\} \subset K^d.$$

Noter que l'on a $\Sigma_0 \subset \ldots \subset \Sigma_d$ et $\Sigma_0 + \ldots + \Sigma_d \subset \Sigma$.

PROPOSITION 4.1. *S'il existe un polynôme non nul $Q \in K[X_0, \ldots, X_{d-1}, Y]$, de degré total $\leq S$ en $X_0, \ldots, X_{d-1}$ et de degré $\leq H$ en Y, vérifiant la condition* (4.2), *alors, il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^d, de dimension ν, tel que l'une au moins des conditions suivantes soit réalisée* :

1) *On a*

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma_\nu) \leq (d+1)^2 S^{d-\nu} H.$$

2) *On a $0 \leq \nu < d$, $\mathcal{W}$ ne contient pas* $(1, 0, \ldots, 0)$, *et*

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) \leq \frac{(d+1)^2}{\nu+1} S^{d-\nu}.$$

3) *Le sous-espace $\mathcal{W}$ contient* $(1, 0, \ldots, 0)$, *il est différent de K^d et on a*

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}_{\nu+1}) \leq \frac{d+1}{\nu+1} S^{d-\nu}.$$

Démonstration. Voir [18], corollaire 5.3.

5. Les paramètres. On définit ici à l'aide des quantités et des constantes données dans la section 2 des entiers positifs $S, H, T, L_1, \ldots, L_{n+m-1}$:

$$S = \left[\frac{c_3 \mathrm{e} U}{DG}\right], \qquad H = \left[\frac{c_4 DG}{\mathrm{e} \log_p E}\right],$$

$$T = T_1 T_2, \quad \text{avec} \quad T_1 = \min\left\{\left[\frac{G}{c_5}\right], \left[\frac{\mathrm{e}U}{c_5 DZ}\right]\right\}, \quad T_2 = \left[\left(c_3 + \frac{1}{c_5}\right)\frac{\mathrm{e}U}{DZT_1}\right],$$

et

$$L_i = \left[\frac{c_3 \mathrm{e} U}{p^\kappa DH \log_p A_i}\right] \qquad (i = 1, \ldots, n+m-1),$$

de telle sorte que les quantités $p^\kappa DHL_i \log_p A_i$, DSG, DTZ et $SH \log_p E$ soient majorées par U (à une constante près).

LEMME 5.1. *On peut choisir des nombres réels* r, Δ, Δ_0, U_0, U_1, U_2, V_0 *et* ϱ *de telle sorte que les inégalités* (5.1) *à* (5.8) *soient satisfaites* :

$$r \geq \max_{1\leq i\leq n-1}\Big(L_i b + \sum_{k=1}^{m} L_{n+k-1} b_k \|b_{ik}\|\Big), \tag{5.1}$$

$$\log_p E \leq \varrho(U_0+V_0), \tag{5.2}$$

$$g(U_0+V_0) \leq \mathrm{f}\iota \leq \frac{(S+n)D\Delta(H+1)\log_p E}{n(1+\varrho)(U_0+V_0)} \quad \textit{pour un } \iota\in\mathbb{Z}, \tag{5.3}$$

$$S\bigg(\log_p E + \frac{1}{p-1}\bigg) + T\bigg(\log_p E + \frac{2}{p-1}\bigg) \leq U_0, \tag{5.4}$$

$$\Delta_0 \geq \Delta + \frac{107}{103\log p} S T_1, \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} U_1 > \Delta_0 &+ T\log_p\bigg[e\bigg(\frac{H}{T_1}+2\bigg)\bigg] \\ &+ S\log_p\bigg[e\bigg(\frac{(n-1)r}{S}+1\bigg)\bigg] + \log_p(DS^n(H+1)), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$U_2 \geq \frac{D}{g}\bigg[U_1 + \sum_{i=1}^{n+m-1}(p^{\kappa}L_i H + D - 1)h_p(\alpha_i)\bigg], \tag{5.7}$$

et

$$U_2 \leq V_0, \qquad U_2 \leq vU. \tag{5.8}$$

Démonstration. Prenons d'abord

$$r = \max_{1\leq i\leq n-1}\Big(L_i b + \sum_{k=1}^{m} L_{n+k-1} b_k \|b_{ik}\|\Big),$$

$$\Delta = \frac{qg}{D}U, \qquad \Delta_0 = \bigg(qg + \frac{107\mathrm{e}c_3}{103c_5\log p}\bigg)\frac{U}{D}.$$

Posons ensuite

$$u = \bigg[\bigg(1+\frac{1}{c_2}\bigg)c_3 + \frac{1}{c_5}\bigg]\bigg(1+\frac{1}{t}\bigg)\frac{1}{\mathrm{f}},$$

de telle sorte que

$$u + v = w + q - \frac{1}{2c_5 n\mathrm{f}},$$

et choisissons $U_0 = uU$, $V_0 = vU$. Enfin posons

$$\begin{aligned} U_1 &= \Delta_0 + \bigg(2c_3 + \frac{1}{c_5} + \eta\bigg)\frac{\mathrm{e}U}{D} \\ &= \bigg\{qg + \bigg[\bigg(2 + \frac{107}{103c_5\log p}\bigg)c_3 + \frac{1}{c_5} + \eta\bigg]\mathrm{e}\bigg\}\frac{U}{D}, \\ U_2 &= vU, \\ \varrho &= 2/(4c_6 n - 1). \end{aligned}$$

Vérification de (5.1). Cette inégalité résulte du choix de r.

Vérification de (5.2) *et de* (5.3). De la définition de ϱ, on déduit

$$1+\frac{\varrho}{2}=\frac{2}{2-1/(2c_6n)}.$$

L'inégalité (2.9) permet alors de vérifier

$$\begin{aligned} u+v=w+q-\frac{1}{2c_5n\mathrm{f}} &\geq 2\left(q-\frac{1}{4c_5n\mathrm{f}}\right)\geq\frac{2c_6n}{\mathrm{f}}\\ &=\frac{2\mathrm{e}c_6n}{g}\geq\mathrm{e}\left(\frac{2c_6n}{g}-\frac{1}{2D}\right),\end{aligned}$$

$$D\varrho(u+v)\geq\mathrm{e} \tag{5.9}$$

et

$$\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)\left(u+v+\frac{1}{2c_5n\mathrm{f}}\right)=\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)(w+q)\leq\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2c_6n}\right)w=2w. \tag{5.10}$$

D'après (1.2), (2.5) et (5.9), on a

$$\log_p E\leq D\log_p A\leq\frac{\mathrm{e}U}{D}\leq\varrho(u+v)U=\varrho(U_0+V_0). \tag{5.11}$$

Les inégalités (2.10) et (5.10) montrent

$$\begin{aligned} n(1+\varrho)(u+v)\left(u+v+\frac{1}{c_5n\mathrm{f}}\right) &\leq n\left(1+\frac{\varrho}{2}\right)^2\left(u+v+\frac{1}{2c_5n\mathrm{f}}\right)^2\\ &\leq 4nw^2\leq c_3c_4q.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Donc (5.3) est impliqué par

$$n(1+\varrho)(U_0+V_0)(U_0+V_0+1)\leq\frac{D\Delta}{g}(S+1)(H+1)\log_p E. \tag{5.13}$$

Mais (2.13) implique

$$U\geq DG; \tag{5.14}$$

ceci donne $U\geq c_5n\mathrm{f}$, en tenant compte de l'inégalité

$$(S+1)(H+1)\log_p E\geq c_3c_4U.$$

Finalement, (5.13) résulte de (5.12).

Vérification de (5.4). On a

$$\begin{aligned} S\left(\log_p E+\frac{1}{p-1}\right)+T\left(\log_p E+\frac{2}{p-1}\right)\\ \leq\left(S\frac{p}{p-1}+T\frac{p+1}{p-1}\right)\max(\log_p E,1)\end{aligned}$$

$$\le \mathrm{e}\left[\frac{c_3}{DG}\frac{p}{p-1}+\left(c_3+\frac{1}{c_5}\right)\frac{1}{DZ}\frac{p+1}{p-1}\right]U\max(\log_p E,1)$$
$$\le \left[\frac{c_3}{c_2}+\left(c_3+\frac{1}{c_5}\right)\right]\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{U}{\mathrm{f}}=uU=U_0.$$

Vérification de (5.5). On a

$$ST_1\le \frac{c_3\mathrm{e}U}{DG}\frac{G}{c_5}=\frac{c_3\mathrm{e}U}{c_5D}$$

et

$$\varDelta_0=\varDelta+\frac{107c_3\mathrm{e}}{103c_5\log p}\frac{U}{D}\ge \varDelta+\frac{107}{103\log p}ST_1.$$

Vérification de (5.6). Commençons par vérifier

$$e\left(\frac{H}{T_1}+2\right)\le p^Z \tag{5.15}$$

et

$$e\left(\frac{(n-1)r}{S}+1\right)\le p^G. \tag{5.16}$$

Si $T_1=[G/c_5]$, alors, $T_1>(G/c_5)-1\ge (n-1)G/(c_5n)$ (à cause de (2.4)) et

$$\frac{H}{T_1}<\frac{c_4DG}{\mathrm{e}\log_p E}\frac{c_5n}{(n-1)G}=\frac{c_4c_5nD}{\mathrm{e}(n-1)\log_p E}.$$

Si $T_1=[\mathrm{e}U/(c_5DZ)]$, alors, $T_1>(\mathrm{e}U/(c_5DZ))-1\ge (n-1)\mathrm{e}U/(c_5nDZ)$, et on a, en utilisant (2.13),

$$\frac{H}{T_1}<\frac{c_4DG}{\log_p E}\frac{c_5nDZ}{(n-1)\mathrm{e}^2U}=\frac{c_4c_5n}{n-1}\frac{D^2GZ}{\mathrm{e}^2U\log_p E}\le\frac{c_4c_5n}{n-1}\frac{Z}{\mathrm{e}^2\log_p A}.$$

On a donc

$$e\left(\frac{H}{T_1}+2\right)\le e\left(\frac{c_4c_5n}{(n-1)\mathrm{e}}\frac{D}{\log_p E}+2\right)\le e\left(c_0\frac{D}{\log_p E}+2\right)$$

ou

$$e\left(\frac{H}{T_1}+2\right)\le e\left(\frac{c_4c_5n}{(n-1)\mathrm{e}}\frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A}+2\right)\le e\left(c_0\frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A}+2\right);$$

l'inégalité (2.1) signifie que (5.15) est vrai dans tous les cas. Passons à (5.16). On majore $L_ib+\sum_{k=1}^m L_{n+k-1}b_k\|b_{ik}\|$ pour $1\le i\le n-1$ par

$$\frac{c_3\mathrm{e}U}{p^\kappa DH}\left(\frac{b}{\log_p A_i}+\sum_{k=1}^m\frac{b_k\|b_{ik}\|}{\log_p A_{n+k-1}}\right)\le\frac{c_3\mathrm{e}MU}{p^\kappa DH}$$

et alors $r\le (c_3\mathrm{e}MU)/(p^\kappa DH)$; on minore ensuite S et H par

$$S\ge\frac{\mathrm{e}(c_3-1)U}{DG}\quad\text{et}\quad H\ge\left[c_4-\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]\frac{DG}{\mathrm{e}\log_p E},$$

ce qui permet de majorer $U/(SH)$ par

$$\frac{\log_p E}{(c_3-1)\big[c_4-\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\big(1+\frac{1}{t}\big)\big]};$$

on a ensuite

$$\begin{aligned}
e\biggl(\frac{(n-1)r}{S}+1\biggr) &\le e\biggl(\frac{\mathrm{e}(n-1)c_3MU}{p^\kappa DSH}+1\biggr)\\
&\le e\biggl[\frac{\mathrm{e}(n-1)c_3}{p^\kappa(c_3-1)\big(c_4-\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\big(1+\frac{1}{t}\big)\big)}\frac{M\log_p E}{D}+1\biggr]\\
&\le e\biggl[\frac{\mathrm{e}n}{p^\kappa\big(c_4-\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\big(1+\frac{1}{t}\big)\big)}\frac{M\log_p E}{D}+1\biggr] \qquad (\text{grâce à } c_3\ge n)\\
&\le e\biggl(c_1\frac{M\log_p E}{D}+1\biggr)\le p^G.
\end{aligned}$$

Nous majorons ensuite $DS^n(H+1)$:

$$\begin{aligned}
DS^n(H+1) &\le D\biggl(\frac{c_3}{DG}\biggr)^n\biggl[c_4+\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\biggl(1+\frac{1}{t}\biggr)\biggr]\frac{DG}{\mathrm{e}\log_p E}(\mathrm{e}U)^n\\
&\le \mathcal{A}(\mathrm{e}U)^n < p^{\eta\mathrm{e}U/D}.
\end{aligned}$$

Le membre droit de (5.6) est strictement inférieur à

$$\varDelta_0+TZ+SG+\frac{\eta\mathrm{e}U}{D}\le\varDelta_0+\biggl(c_3+\frac{1}{c_5}\biggr)\frac{\mathrm{e}U}{D}+\frac{c_3\mathrm{e}U}{D}+\frac{\eta\mathrm{e}U}{D}=U_1.$$

Vérification de (5.7). On majore $\sum_{i=1}^{n+m-1}p^\kappa L_iHh_p(\alpha_i)$ par $(n+m-1)c_3 \times \mathrm{e}U/D$ et on applique ensuite (2.5) :

$$(D-1)\sum_{i=1}^{n+m-1}h_p(\alpha_i)\le(n+m-1)\frac{\mathrm{e}U}{D},$$

donc

$$\begin{aligned}
U_2=vU &\ge\biggl\{q+\biggl[\biggl(2+\frac{107}{103c_5\log p}\biggr)c_3+\frac{1}{c_5}+\eta+(n+m-1)(c_3+1)\biggr]\frac{1}{\mathrm{f}}\biggr\}U\\
&=\frac{D}{g}\biggl[U_1+(n+m-1)(c_3+1)\frac{\mathrm{e}U}{D}\biggr]\\
&\ge\frac{D}{g}\biggl[U_1+\sum_{i=1}^{n+m-1}(p^\kappa L_iH+D-1)h_p(\alpha_i)\biggr].
\end{aligned}$$

Vérification de (5.8). On a pris $V_0=U_2=vU$. ∎

6. Résolution d'un système d'équations

a) *Notations.* On note $d_i = [\mathbb{Q}(\alpha_i) : \mathbb{Q}]$ $(i = 1, \ldots, n+m-1)$ et on choisit une base $\xi_1, \ldots, \xi_D$ de K sur $\mathbb{Q}$, formée d'éléments de la forme $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_{n+m-1}^{k_{n+m-1}}$ avec $0 \le k_i < d_i$ et $k_1 + \ldots + k_{n+m-1} < D$.

On pose $\beta_{ik} = -b_{ik}/b_{nk}$ $(i = 1, \ldots, n-1,\ k = 1, \ldots, m)$, de telle sorte que

$$\frac{\Lambda_k}{b_{nk}} = -\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ik} \log \alpha_i^{p^\kappa} + \log \alpha_{n+k-1}^{p^\kappa}$$

avec

$$\Lambda_k = \sum_{i=1}^{n-1} b_{ik} \log \alpha_i^{p^\kappa} + b_{nk} \log \alpha_{n+k-1}^{p^\kappa} \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

(le lemme 3.1 assure l'existence des logarithmes).

On se donne un entier s avec $0 \le s \le n-1$ et un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de K^{n+m-1} de dimension $d = n+m-s-1$ qui contient les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= (b_{11}, \ldots, b_{n-1,1}, b_{n1}, 0, \ldots, 0), \\ b^{(2)} &= (b_{12}, \ldots, b_{n-1,2}, 0 b_{n2}, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ b^{(m)} &= (b_{1m}, \ldots, b_{n-1,m}, 0, 0, \ldots, b_{nm}) \end{aligned}$$

et qui est défini par des équations

$$z_j = \sum_{i=s+1}^{n+m-1} u_i^{(j)} z_i \qquad (j = 1, \ldots, s), \tag{6.1}$$

avec $u_i^{(j)} \in K$ $(i = s+1, \ldots, n+m-1,\ j = 1, \ldots, s)$.

On suppose donc

$$b_{jk} = \sum_{i=s+1}^{n-1} u_i^{(j)} b_{ik} + u_{n+k-1}^{(j)} b_{nk} \qquad (j = 1, \ldots, s,\ \ k = 1, \ldots, m).$$

(Le cas "générique" est celui où $s = 0$, $d = n+m-1$.)

On définit des nombres ϑ_i $(i = s+1, \ldots, n+m-1)$ par

$$\vartheta_i = \sum_{j=1}^{s} u_i^{(j)} \log \alpha_j^{p^\kappa} + \log \alpha_i^{p^\kappa} \ \in \mathcal{K} \qquad (i = s+1, \ldots, n+m-1).$$

Ainsi, pour $(z_1, \ldots, z_{n+m-1}) \in \mathcal{V}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n+m-1} z_i \log \alpha_i^{p^\kappa} = \sum_{i=s+1}^{n+m-1} z_i \vartheta_i;$$

il en découle

$$\sum_{i=s+1}^{n-1} \beta_{ik}\vartheta_i = \vartheta_{n+k-1} - \frac{\Lambda_k}{b_{nk}} \qquad (k = 1, \ldots, m). \tag{6.2}$$

b) *Enoncé de la proposition*

Proposition 6.1. *Sous l'hypothèse*

$$\max_{1\le k\le m} \frac{|\Theta_k|}{p^\kappa |b_{nk}|} \le p^{-vU}, \tag{6.3}$$

il existe des entiers rationnels $q_{\delta\sigma h}$ $(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{d-m+1},\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$, *non tous nuls, tels que*

$$\sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\sigma_0=0}^{\min(\tau,S)} \sum_{\substack{\sigma_{s+1},\ldots,\sigma_{n-1}\\ \|\sigma\|\le S}} \sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta \binom{\tau}{\sigma_0} h^{\tau-\sigma_0} \tag{6.4}$$

$$\times \prod_{i=s+1}^{n-1} \Delta\Big(\lambda_i b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} b_k b_{ik}, \sigma_i\Big) \prod_{i=1}^{n+m-1} \alpha_i^{p^\kappa \lambda_i h} = 0$$

pour $0 \le \tau \le T$ *et pour tout* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m-1}) \in \mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$.

c) *Démonstration de la proposition*

Première étape. Utilisation du lemme 5.1. Le lemme 5.1 nous permet de choisir des nombres réels r, Δ, Δ_0, U_0, U_1, U_2, V_0 et ϱ satisfaisant les conditions (5.1) à (5.8).

Deuxième étape. Utilisation du corollaire 3.10 *de la première partie*. On va appliquer le corollaire 3.10 de la première partie avec d remplacé par $d - m + 1$, $\omega_i = \vartheta_i / b$ $(i = s + 1, \ldots, n - 1)$, $R = 1$,

$u_i = \lambda_i b - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} b_k b_{ik}$ $(i = s+1, \ldots, n-1)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m-1}) \in \mathbb{Z}^{n+m-1}$,

$\xi_{\delta\sigma h} = \nu(T_1)^S \xi_\delta$

$(\delta = 1, \ldots, D,\ \sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{d-m+1},\ \|\sigma\| \le S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$.

D'après (6.2), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=s+1}^{n-1} \omega_i u_i &= \sum_{i=s+1}^{n-1} \lambda_i \vartheta_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} \sum_{i=s+1}^{n-1} \beta_{ik} \vartheta_i \\
&= \sum_{i=s+1}^{n-1} \lambda_i \vartheta_i + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} \Big(\vartheta_{n+k-1} - \frac{\Lambda_k}{b_{nk}} \Big) \\
&= \sum_{i=s+1}^{n+m-1} \lambda_i \vartheta_i - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} \frac{\Lambda_k}{b_{nk}};
\end{aligned}$$

donc pour $\lambda \in \mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^{n+m-1}$ on a

$$(6.5) \qquad \sum_{i=s+1}^{n-1} \omega_i u_i = \sum_{i=1}^{n+m-1} \lambda_i \log \alpha_i^{p^\kappa} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_{n+k-1} \frac{\Lambda_k}{b_{nk}}.$$

Evidemment, on a $v \geq 2(1+1/t)/\mathrm{f}$ et $2ep/(p-1) \geq p^\kappa$, donc en s'aidant de (5.14) et (2.2), on trouve

$$vU \geq 2\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{DG}{\mathrm{f}} \geq c_2 \frac{2ep}{p-1} \max(\log_p E, 1);$$

il en découle

$$(6.6) \qquad vU \geq c_2 p^\kappa > \kappa + \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad vU \geq \log_p E + \frac{1}{p-1}.$$

On utilise l'hypothèse (6.3) :

$$v(\Theta_k) \geq vU - \kappa > \frac{1}{p-1};$$

comme

$$\Lambda_k = \log\Big(\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{b_{ik}} \cdot \alpha_{n+k-1}^{b_{nk}}\Big)^{p^\kappa} = \log(1+\Theta_k)^{p^\kappa} = p^\kappa \log(1+\Theta_k),$$

on a

$$(6.7) \quad \left|\frac{\Lambda_k}{b_{nk}}\right| = \frac{|\log(1+\Theta_k)|}{p^\kappa |b_{nk}|} = \frac{|\Theta_k|}{p^\kappa |b_{nk}|} \leq p^{-vU} \leq \frac{1}{Ep^{1/(p-1)}} \qquad (k=1,\ldots,m);$$

on obtient ainsi en tenant compte de (1.2),

$$(6.8) \qquad \Big|\sum_{i=s+1}^{n-1} \omega_i u_i\Big| \leq \frac{1}{Ep^{1/(p-1)}}.$$

Nous prenons, dans le corollaire 3.10 de la première partie, pour U et V, U_0 et V_0 respectivement; les conditions (1.2), (5.2), (5.3) et (5.4) (en tenant compte de $|\xi_{\delta\sigma h}| \leq 1$ ($\delta = 1,\ldots,D$, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{d-m+1}$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0,1,\ldots,H$) permettent de vérifier toutes les autres hypothèses du corollaire 3.10 de la première partie; on en déduit l'existence d'entiers rationnels $p_{\delta\sigma h}$ ($\delta = 1,\ldots,D$, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{d-m+1}$, $\|\sigma\| \leq S$, $h = 0,1,\ldots,H$), non tous nuls, avec

$$(6.9) \qquad \max_{\delta,\sigma,h} \|p_{\delta\sigma h}\| \leq p^{\Delta},$$

tels que, si on pose

$$q_{\delta\sigma h} = \nu(T_1)^S p_{\delta\sigma h},$$

on ait, pour tout τ_1,τ_2 avec $0\le\tau_1<T_1$, $0\le\tau_2\le T_2$, et tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+m-1})\in\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}$,

$$(6.10)\qquad \Big|\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\varDelta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0) \times\prod_{i=s+1}^{n-1}\varDelta(u_i,\sigma_i)\cdot e^{h\Sigma_{i=s+1}^{n-1}\omega_i u_i}\Big|\le p^{-V_0}.$$

Alors, (6.9) et l'inégalité $\log\nu(k)\le 107k/103$ du lemme 3.2 montrent que l'on a

$$(6.11)\qquad \max_{\delta,\sigma,h}\|q_{\delta\sigma h}\|\le p^{\varDelta_0}.$$

Troisième étape. Majoration d'un nombre algébrique. Pour chaque τ_1, τ_2, $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+m-1}$ entiers rationnels avec $0\le\tau_1<T_1$, $0\le\tau_2\le T_2$ et $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+m-1})\in\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}$, nous posons

$$\nu_{\tau\lambda}=\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\varDelta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0)\prod_{i=s+1}^{n-1}\varDelta(u_i,\sigma_i)\prod_{i=1}^{n+m-1}\alpha_i^{p^\kappa\lambda_i h},$$

où $u_{s+1},\dots,u_{n-1}$ sont donnés au début de la deuxième étape.

Nous allons vérifier la majoration

$$|\nu_{\tau\lambda}|\le\max\{p^{-V_0},p^{-vU}\}.$$

D'après (6.5), pour $\lambda\in\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}$ et $h\in\mathbb{Z}$ on a

$$e^{h\Sigma_{i=s+1}^{n-1}\omega_i u_i}=e^{-h\Sigma_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\varLambda_k/b_{nk}}\prod_{i=1}^{n+m-1}\alpha_i^{p^\kappa\lambda_i h}$$

et, en tenant compte de (6.7) et (6.6),

$$(6.12)\qquad \Big|e^{h\Sigma_{i=s+1}^{n-1}\omega_i u_i}-\prod_{i=1}^{n+m-1}\alpha_i^{p^\kappa\lambda_i h}\Big|=|e^{-h\Sigma_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\varLambda_k/b_{nk}}-1|$$
$$=\Big|h\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\varLambda_k/b_{nk}\Big|\le\max_{1\le k\le m}|\varLambda_k/b_{nk}|\le p^{-vU}.$$

Ayant (6.10), il suffit pour conclure de vérifier que la quantité

$$\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H} q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\varDelta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0) \times\prod_{i=s+1}^{n-1}\varDelta(u_i,\sigma_i)\Big(e^{h\Sigma_{i=s+1}^{n-1}\omega_i u_i}-\prod_{i=1}^{n+m-1}\alpha_i^{p^\kappa\lambda_i h}\Big)$$

est majorée par p^{-vU}; mais cela est impliqué par (6.12) et par

$$(6.13)\qquad q_{\delta\sigma h}\varDelta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0)=p_{\delta\sigma h}\nu(T_1)^S\varDelta(h+\tau_1;T_1,\tau_2,\sigma_0)\in\mathbb{Z}$$

pour $\delta = 1, \ldots, D$, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1}) \in \mathbb{N}^{d-m+1}$, $\|\sigma\| \le S$, $h = 0, 1, \ldots, H$ (voir le lemme 3.2).

Quatrième étape. Minoration d'un nombre algébrique (*Utilisation de l'inégalité de Liouville – corollaire* 3.5). On suppose que τ_1, τ_2, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m-1}$ sont des entiers rationnels avec $0 \le \tau_1 < T_1$, $0 \le \tau_2 \le T_2$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+m-1}) \in \mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$. Montrons que, si le nombre algébrique $\nu_{\tau\lambda}$ n'est pas nul, il est minoré par

$$|\nu_{\tau\lambda}| > p^{-U_2}.$$

Soient $i_1, \ldots, i_l$ avec $i_1 < \ldots < i_l$ tous les indices parmi $1, \ldots, n+m-1$ pour lesquels $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_l}$ sont < 0. On voit que $\nu_{\tau\lambda}$ est la valeur d'un polynôme évalué au point $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}, \alpha_{i_1}^{-1}, \ldots, \alpha_{i_l}^{-1})$, les coefficients de ce polynôme étant des entiers rationnels, grâce à (6.13).

Le degré de ce polynôme en α_i, pour $i \notin I = \{i_1, \ldots, i_l\}$, est au plus $p^\kappa L_i H + d_i - 1$, et pour $i \in I$, il est au plus $d_i - 1$; son degré en α_i^{-1}, pour $i \in I$, est au plus $p^\kappa L_i H$:

$$\sum_{i \notin I} (p^\kappa L_i H + d_i - 1) h(\alpha_i) + \sum_{i \in I} (d_i - 1) h(\alpha_i) + \sum_{i \in I} p^\kappa L_i H h(\alpha_i^{-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n+m-1} (p^\kappa L_i H + d_i - 1) h(\alpha_i) \le \sum_{i=1}^{n+m-1} (p^\kappa L_i H + D - 1) h(\alpha_i).$$

La majoration (6.11) et les majorations

$$\|\mathit{\Delta}(h + \tau_1; T_1, \tau_2, \sigma_0)\| \le \left[e\left(\frac{H}{T_1} + 2 \right) \right]^T \qquad (\|\sigma\| \le S,\ h = 0, 1, \ldots, H)$$

(cf. lemme 3.2) et

$$\prod_{i=s+1}^{n-1} \|\mathit{\Delta}(u_i, \sigma_i)\| \le \left[e\left(\frac{(d-m)r}{S} + 1 \right) \right]^S \le \left[e\left(\frac{(n-1)r}{S} + 1 \right) \right]^S \qquad (\|\sigma\| \le S)$$

(cf. lemme 3.3) jointes à (5.6) permettent de majorer strictement la longueur de ce polynôme par p^{U_1}.

On utilise l'inégalité de Liouville (le corollaire 3.5) avec la condition (5.7) pour conclure.

Cinquième étape. Conclusion. Grâce à (5.8), les deux étapes précédentes montrent que l'on a $\nu_{\tau\lambda} = 0$ pour tout $0 \le \tau_1 < T_1$, $0 \le \tau_2 \le T_2$ et $\lambda \in \mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$.

Posons, pour $0 \le \sigma_0 \le S$ et $0 \le h \le H$,

$$p_{\sigma_0 h} = \sum_{\delta=1}^{D} \sum_{\substack{\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{n-1} \\ \|\sigma\| \le S}} q_{\delta\sigma h} \xi_\delta \prod_{i=s+1}^{n-1} \mathit{\Delta}(u_i, \sigma_i) \prod_{i=1}^{n+m-1} \alpha_i^{p^\kappa \lambda_i h};$$

on a donc

$$\nu_{\tau\lambda} = \sum_{\sigma_0=0}^{S} \sum_{h=0}^{H} p_{\sigma_0 h} \Delta(h+\tau_1; T_1, \tau_2, \sigma_0);$$

on applique la fin du lemme 3.1 de la première partie, et on trouve

$$\sum_{\sigma_0=0}^{\min(\tau,S)} \sum_{h=0}^{H} p_{\sigma_0 h} \binom{\tau}{\sigma_0} h^{\tau-\sigma_0} = 0$$

pour $0 \le \tau \le T$, $\lambda \in \mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$. Ceci termine la démonstration de la proposition. ■

7. Démonstration du théorème (Utilisation de la machine transcendante). On va utiliser la construction précédente; elle produit un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}^{n+m-1}$, de dimension d.

Démonstration du théorème. Expliquons d'abord les hypothèses (2.11) à (2.13).

On utilise (2.11) :

$$T > T_1\left[\left(c_3+\frac{1}{c_5}\right)\frac{\mathrm{e}U}{DZT_1}-1\right] = \left(c_3+\frac{1}{c_5}\right)\frac{\mathrm{e}U}{DZ}-T_1 \ge \frac{c_3\mathrm{e}U}{DZ} \ge \frac{(n+1)^2}{n}S. \tag{7.1}$$

La condition (2.12) s'écrit

$$\frac{(c_3\mathrm{e})^{n+m}}{(2c_4n)^{n+m-1}}\left(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\right)^{n+m-1} \ge (n+1)^2 c_3^n c_4 \mathrm{e}^{n+m}, \tag{7.2}$$

ce qui sert à satisfaire l'inégalité

$$T \operatorname{Card} \mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n) > (n+1)^2 S^n H, \tag{7.3}$$

où on note, comme d'habitude, $L/2n$ pour $(L_1/2n, \dots, L_{n+m-1}/2n)$.

En effet, on a

$$\operatorname{Card} \mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n) \ge \prod_{i=1}^{n+m-1} \left(\frac{L_i}{n}-1\right),$$

avec

$$L_i > \frac{c_3\mathrm{e}U}{p^\kappa DH \log_p A_i} - 1 \ge \frac{c_3\mathrm{e}^2U\log_p E}{c_4p^\kappa D^2G\log_p A_i} - 1;$$

on déduit, en tenant compte de (2.13)

$$\frac{L_i}{n} - 1 > \frac{c_3\mathrm{e}^2U\log_p E}{c_4np^\kappa D^2G\log_p A_i}\left(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\right) \qquad (i=1,\dots,n+m-1),$$

et on a en tenant compte de (7.1),

$$
\begin{aligned}
&T\operatorname{Card}\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)\\
&\quad> \frac{c_3\mathrm{e}U}{DZ}\left(\frac{c_3\mathrm{e}^2U\log_p E}{c_4np^\kappa D^2G}\right)^{n+m-1}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n+m-1}\log_p A_i}\left(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\right)^{n+m-1}\\
&\quad\ge (c_3\mathrm{e})^{n+m}\left(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\right)^{n+m-1}\\
&\qquad\times\left(\frac{\mathrm{e}}{c_4np^\kappa}\right)^{n+m-1}\frac{U^{n+m}}{(DG)^{n+m-1}DZ}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{\log_p E}{D\log_p A_i}\\
&\quad\ge \frac{(c_3\mathrm{e})^{n+m}}{(2c_4n)^{n+m-1}}\left(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\right)^{n+m-1}\\
&\qquad\times\frac{U^{n+m}}{\mu^{n+m-1}(DG)^{n+m-1}DZ}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{\log_p E}{D\log_p A_i},
\end{aligned}
$$

et

$$
S^nH\le c_3^nc_4\mathrm{e}^{n-1}\frac{U^n}{(DG)^{n-1}\log_p E}=c_3^nc_4\mathrm{e}^{n+m}\frac{U^n}{\mathrm{e}^{m+1}(DG)^{n-1}\log_p E};
$$

ainsi, (7.3) est une conséquence de (7.2) et de (2.3).

Dans cette section, si $h\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de K^h, $s_{\mathcal{U}}$ désignera la surjection canonique de K^h sur $K^h/\mathcal{U}$, tandis que $p_{\mathcal{U}}$ désignera la surjection canonique de $K^h\times K^*$ sur $(K^h/\mathcal{U})\times K^*$.

Soit d le plus petit entier dans l'intervalle $m\le d\le n+m-1$ tel qu'il existe un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de K^{n+m-1}, de dimension d, contenant les vecteurs $b^{(1)},\dots,b^{(m)}$ et vérifiant

$$
\operatorname{Card}s_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n))\le\left(\frac{n+1}{d-m+2}\right)^2S^{n+m-1-d}. \tag{7.4}
$$

L'existence d'un tel entier d vient de ce que cette inégalité est trivialement satisfaite pour $\mathcal{V}=K^{n+m-1}$.

Comme $b^{(1)},\dots,b^{(m)}\in\mathcal{V}$, et que $b_{n1},\dots,b_{nm}$ ne sont pas nuls, le lemme 3.6 fournit un système de $s=n+m-1-d$ équations avec d variables indépendantes $z_{l_1},\dots,z_{l_{d-m}}$, $z_n,\dots,z_{n+m-1}$ $(1\le l_1<\dots<l_{d-m}<n)$, qui définit $\mathcal{V}$; nous supposons sans perte de généralité que l'on peut choisir $z_{s+1},\dots,z_n,\dots,z_{n+m-1}$, c'est-à-dire que $\mathcal{V}$ admet une représentation (6.1).

On suppose maintenant que la conclusion du théorème n'est pas satisfaite, c'est-à-dire que l'hypothèse (6.3) est réalisée. La proposition 6.1 nous fournit alors des entiers rationnels $q_{\delta\sigma h}$ ($\delta=1,\dots,D$, $\sigma=(\sigma_0,\sigma_{s+1},\dots,\sigma_{n-1})\in\mathbb{N}^{d-m+1}$, $\|\sigma\|\le S$, $h=0,1,\dots,H$), non tous nuls, vérifiant (6.4) pour $0\le\tau\le T$ et pour tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+m-1})\in\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$; alors le polynôme non nul

$$Q(X_0,X_{s+1},\dots,X_{n-1},Y)=\sum_{\delta=1}^{D}\sum_{\|\sigma\|\le S}\sum_{h=0}^{H}q_{\delta\sigma h}\xi_\delta\frac{1}{\sigma_0!}X_0^{\sigma_0}\Big(\prod_{i=s+1}^{n-1}\Delta(bX_i;\sigma_i)\Big)Y^h \in K[X_0,X_{s+1},\dots,X_{n-1},Y]$$

(avec $\sigma=(\sigma_0,\sigma_{s+1},\dots,\sigma_{n-1})\in\mathbb{N}^{d-m+1}$), de degré $\le S$ en $X_0,X_{s+1},\dots,X_{n-1}$, et de degré $\le H$ en Y, vérifie

$$D_0^\tau Q\Big(0,\lambda_{s+1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{s+1,k},\dots,\lambda_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{n-1,k},\alpha_1^{p^\kappa\lambda_1}\dots\alpha_{n+m-1}^{p^\kappa\lambda_{n+m-1}}\Big)=0$$

pour $0\le\tau\le T$ et pour tout $\lambda\in\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}(L)$, avec D_0 défini par (4.1). Par conséquent, Q satisfait les conditions (4.2) avec d remplacé par $d-m+1$, n remplacé par $n+m-1$, $\Phi=\mathcal{V}\cap\mathbb{Z}^{n+m-1}$, $\theta_1=\dots=\theta_s=0$, tandis que $(\theta_{s+1},\dots,\theta_{n-1})$ est la base canonique de $0\times K^{d-m}$, enfin $\theta_{n+k-1}=(0,\beta_{s+1,k},\dots\dots,\beta_{n-1,k})$ $(k=1,\dots,m)$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont remplacés par $\alpha_1^{p^\kappa},\dots,\alpha_{n+m-1}^{p^\kappa}$.

On utilise la proposition 4.1 avec $a_\nu=1/n$ $(0\le\nu\le d-m+1)$ pour $m\le d<n+m-1$ et avec $a_\nu=1/2n$ $(0\le\nu\le n)$ pour $d=n+m-1$.

En imitant les notations de cette proposition, nous posons, dans le cas $m\le d<n+m-1$,

$$\Sigma=\Big\{\Big(0,\lambda_{s+1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{s+1,k},\dots,\lambda_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{n-1,k},\alpha_1^{p^\kappa\lambda_1}\dots\alpha_{n+m-1}^{p^\kappa\lambda_{n+m-1}}\Big): \lambda\in\Phi(L/n)\Big\}\subset K^{d-m+1}\times K^*$$

et

$$\mathcal{E}=\Big\{\Big(0,\lambda_{s+1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{s+1,k},\dots,\lambda_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{n-1,k}\Big): \lambda\in\Phi(L/n)\Big\}\subset K^{d-m+1}$$

et, dans le cas $d=n+m-1$,

$$\Sigma=\Big\{\Big(0,\lambda_1+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{1,k},\dots,\lambda_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{n-1,k},\alpha_1^{p^\kappa\lambda_1},\dots,\alpha_{n+m-1}^{p^\kappa\lambda_{n+m-1}}\Big): \lambda\in\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)\Big\}\subset K^n\times K^*$$

et

$$\mathcal{E}=\Big\{\Big(0,\lambda_1+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{1k},\ldots,\lambda_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_{n+k-1}\beta_{n-1,k}\Big):\\ \lambda\in\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)\Big\}\subset K^n.$$

On remarque que $\theta_1,\ldots,\theta_{n+m-1}$ appartiennent à K^{d-m+1}, $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+m-1}$ à K^* et le polynôme Q à $K[X_0,X_{s+1},\ldots,X_{n-1},Y]$. La proposition 4.1 nous assure l'existence d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de K^{d-m+1}, de dimension ν, qui satisfait l'une au moins des trois propriétés suivantes :

1) $T\operatorname{Card}p_{\mathcal{W}}(\Sigma)\le(d-m+2)^2S^{d-m+1-\nu}H$.

2) $0\le\nu\le d-m$, $\mathcal{W}$ ne contient pas $(1,0,\ldots,0)$, et

$$T\operatorname{Card}s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})\le\frac{(d-m+2)^2}{\nu+1}S^{d-m+1-\nu}.$$

3) $1\le\nu\le d-m$, $\mathcal{W}$ contient $(1,0,\ldots,0)$, et

$$\operatorname{Card}s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E})\le\frac{d-m+2}{\nu+1}S^{d-m+1-\nu}.$$

Nous allons éliminer ces trois possibilités successivement, pour obtenir la contradiction désirée.

Le cas $m\le d<n+m-1$

Elimination de la possibilité 1). Grâce à l'indépendance multiplicative de $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+m-1}$, on a

$$\operatorname{Card}p_{\mathcal{W}}(\Sigma)=\operatorname{Card}\{\alpha_1^{p^\kappa\lambda_1}\ldots\alpha_{n+m-1}^{p^\kappa\lambda_{n+m-1}},\lambda\in\Phi(L/n)\}=\operatorname{Card}\Phi(L/n);$$

ensuite, d'après le lemme 3.7 et l'inégalité (7.3), on a

$$\begin{aligned}T\operatorname{Card}p_{\mathcal{W}}(\Sigma)\Big(\frac{n+1}{d-m+2}\Big)^2&S^{n+m-d-1}\\ &\ge T\operatorname{Card}\Phi(L/n)\operatorname{Card}s_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n))\\ &\ge T\operatorname{Card}\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)>(n+1)^2S^nH,\\ T\operatorname{Card}p_{\mathcal{W}}(\Sigma)>(d-m+2)^2&S^{d-m+1}H\ge(d-m+2)^2S^{d-m+1-\nu}H.\end{aligned}$$

Soient $\pi:K^{d-m+1}\to K^{d-m}$ la projection sur les $d-m$ dernières composantes, $\psi:K^d\to K^{d-m}$ la surjection définie par

$$\psi(z)=\Big(z_{s+1}+\sum_{k=1}^{m}z_{n+k-1}\beta_{s+1,k},\ldots,z_{n-1}+\sum_{k=1}^{m}z_{n+k-1}\beta_{n-1,k}\Big),\\ z=(z_{s+1},\ldots,z_{n+m-1})\in K^d,$$

et $\iota : K^d \to \mathcal{V}$ l'application donnée par le système (6.1), qui définit $\mathcal{V}$:

$$\iota(z) = \Big(\sum_{i=s+1}^{n+m-1} u_i^{(1)} z_i, \dots, \sum_{i=s+1}^{n+m-1} u_i^{(s)} z_i, z \Big), \qquad z = (z_{s+1}, \dots, z_{n+m-1}) \in K^d.$$

Posons $\mathcal{W}' = \pi(\mathcal{W}) \subset K^{d-m}$, $\mathcal{E}' = \pi(\mathcal{E})$ et $\mathcal{W}'' = \psi^{-1}(\mathcal{W}') \subset K^d$, $\mathcal{E}'' = \{(\lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{n+m-1}) : \lambda \in \Phi(L/n)\} \subset K^d$; on voit que l'on a $\mathcal{E}' = \psi(\mathcal{E}'')$. Les vecteurs

$$(b_{s+1,k}, \dots, b_{n-1,k}, 0, \dots, \overset{n+k-1}{b_{n,k}}, \dots, 0) \qquad (k = 1, \dots, m)$$

engendrent $\ker \psi$, donc $\mathcal{W}''$ contient ces m vecteurs, et le sous-espace vectoriel $\mathcal{V}' = \iota(\mathcal{W}'')$ de $\mathcal{V}$ contient leurs images $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$ par ι.

On vérifie facilement

$$\text{(7.5)} \qquad \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \geq \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}') = \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}''}(\mathcal{E}'') = \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\Phi(L/n)),$$

puis on applique le lemme 3.7 :

$$\text{(7.6)} \qquad \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \Big(\frac{n+1}{d-m+2} \Big)^2 S^{n+m-d-1} \geq \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\Phi(L/n)) \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) \geq \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)).$$

Elimination de la possibilité 2). On utilise l'inégalité (7.1) pour exclure le cas $\nu = d - m$:

$$T > \frac{(n+1)^2}{n} S \geq \frac{(d-m+2)^2}{d-m+1} S.$$

On suppose $0 \leq \nu \leq d-m-1$. Comme $\mathcal{W}$ ne contient pas $(1, 0, \dots, 0)$, $\mathcal{V}'$ est de dimension $\nu + m$, qui est inférieure à d, et $\mathcal{V}'$ contient $b^{(1)}, \dots, b^{(m)}$. Il découle de la minimalité de $\mathcal{V}$ que l'on a

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \Big(\frac{n+1}{\nu+2} \Big)^2 S^{n-\nu-1},$$

donc

$$S \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \Big(\frac{n+1}{\nu+2} \Big)^2 S^{n-\nu}.$$

D'après (7.1) et (7.6), on trouve

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \Big(\frac{n+1}{d-m+2} \Big)^2 S^{n+m-d-1} > \frac{(n+1)^2}{n} S \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \frac{(n+1)^2}{n} \Big(\frac{n+1}{\nu+2} \Big)^2 S^{n-\nu},$$

et

$$T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) > \frac{(n+1)^2}{n(\nu+2)^2} (d-m+2)^2 S^{d-m+1-\nu} > \frac{(d-m+2)^2}{\nu+1} S^{d-m+1-\nu}.$$

Elimination de la possibilité 3). Comme $\mathcal{W}$ contient $(1, 0, \ldots, 0)$, $\mathcal{V}'$ est de dimension $\nu + m - 1$, qui est inférieure à d, et $\mathcal{V}'$ contient $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$. De la minimalité de $\mathcal{V}$, on déduit

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \left(\frac{n+1}{\nu+1}\right)^2 S^{n-\nu};$$

d'après (7.6), on conclut

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) &\geq \left(\frac{d-m+2}{n+1}\right)^2 S^{-n-m+d+1} \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) \\ &> \left(\frac{d-m+2}{\nu+1}\right)^2 S^{d-m+1-\nu} > \frac{d-m+2}{\nu+1} S^{d-m+1-\nu}.\end{aligned}$$

Le cas $d = n + m - 1$

Elimination de la possibilité 1). Grâce à l'indépendance multiplicative de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m-1}$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma) &= \operatorname{Card}\{\alpha_1^{p^\kappa \lambda_1} \ldots \alpha_{n+m-1}^{p^\kappa \lambda_{n+m-1}},\ \lambda \in \mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)\} \\ &= \operatorname{Card} \mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)\end{aligned}$$

et l'inégalité (7.3) donne

$$T \operatorname{Card} p_{\mathcal{W}}(\Sigma) = T \operatorname{Card} \mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n) > (n+1)^2 S^n H \geq (n+1)^2 S^{n-\nu} H.$$

Soient $\pi : K^n \to K^{n-1}$ la projection sur les $n-1$ dernières composantes et $\psi : K^{n+m-1} \to K^{n-1}$ la surjection définie par

$$\psi(z) = \Big(z_1 + \sum_{k=1}^m z_{n+k-1}\beta_{1,k}, \ldots, z_{n-1} + \sum_{k=1}^m z_{n+k-1}\beta_{n-1,k}\Big),$$
$$z = (z_1, \ldots, z_{n+m-1}) \in K^{n+m-1}.$$

Posons $\mathcal{W}' = \pi(\mathcal{W}) \subset K^{n-1}, \mathcal{E}' = \pi(\mathcal{E})$ et $\mathcal{V}' = \psi^{-1}(\mathcal{W}') \subset K^{n+m-1}$; on voit que l'on a $\mathcal{E}' = \psi(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n))$. Les vecteurs $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$ engendrent $\ker\psi$, donc $\mathcal{V}'$ contient ces m vecteurs, on vérifie facilement

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \geq \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}'}(\mathcal{E}') = \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)). \tag{7.7}$$

Elimination de la possibilité 2). Pour la même raison que dans le cas précédent, on peut exclure $\nu = n-1$ et supposer $0 \leq \nu \leq n-2$. Comme $\mathcal{W}$ ne contient pas $(1, 0, \ldots, 0)$, $\mathcal{V}'$ est de dimension $\nu + m$, qui est inférieure à $n + m - 1$, et $\mathcal{V}'$ contient $b^{(1)}, \ldots, b^{(m)}$. Il découle de la minimalité de $\mathcal{V} = K^{n+m-1}$ que l'on a

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \left(\frac{n+1}{\nu+2}\right)^2 S^{n-\nu-1},$$

donc

$$S \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \left(\frac{n+1}{\nu+2}\right)^2 S^{n-\nu}.$$

D'après (7.1) et (7.7), on trouve

$$\begin{aligned} T \operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) &> \frac{(n+1)^2}{n} S \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) \\ &> \frac{(n+1)^2}{n}\left(\frac{n+1}{\nu+2}\right)^2 S^{n-\nu} > \frac{(n+1)^2}{\nu+1} S^{n-\nu}. \end{aligned}$$

Elimination de la possibilité 3). Comme $\mathcal{W}$ contient $(1,0,\ldots,0)$, $\mathcal{V}'$ est de dimension $\nu+m-1$, qui est inférieure à $n+m-1$, et $\mathcal{V}'$ contient $b^{(1)},\ldots,b^{(m)}$. De la minimalité de $\mathcal{V} = K^{n+m-1}$, on déduit

$$\operatorname{Card} s_{\mathcal{W}}(\mathcal{E}) \geq \operatorname{Card} s_{\mathcal{V}'}(\mathbb{Z}^{n+m-1}(L/2n)) > \left(\frac{n+1}{\nu+1}\right)^2 S^{n-\nu} > \frac{n+1}{\nu+1} S^{n-\nu}. \ \blacksquare$$

8. Démonstration des corollaires 2.2, 2.3 et des corollaires 1.1 à 1.5

D é m o n s t r a t i o n d u c o r o l l a i r e 2.2. Les valeurs de λ exhibées dans le tableau I vérifient les inégalités suivantes :

$$(8.1)\qquad \begin{aligned} &\lambda\left\{1 - \frac{n+1}{\lambda n}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2 c_7^n}}\right\}^{(n+m-1)/m} \geq 1 \qquad \text{si } pe = 2, \\ &\lambda\left\{1 - \frac{n+1}{2\lambda n}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2 c_7^n}}\right\}^{(n+m-1)/m} \geq 1 \qquad \text{si } pe > 2, \end{aligned}$$

avec

$$c_7 = 8\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)(n+2.02) + \frac{107}{2060\log p}\right];$$

de plus, le tableau I est conçu de telle sorte qu'il existe, pour les valeurs de γ, γ_0, γ_1, N qu'il fournit, des réels τ et ε, tels que

$$(8.2)\qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{e^2 N(1+1/t)\log p} + \frac{1}{20n},$$

$$(8.3)\qquad p^{20n\varepsilon} \geq 20n \cdot \min(e,p)^{e/\tau},$$

$$(8.4)\qquad \varepsilon\tau \log\left(\frac{p^{20n\varepsilon}}{20n}\right) \geq \log\left[\frac{\tau p^{20n\varepsilon}}{20n \cdot \min(1,\log p)} \log\left(\frac{p^{20n\varepsilon}}{20n}\right)\right],$$

$$(8.5)\qquad \gamma \geq \frac{107}{2060(n+m)},$$

$$(8.6)\qquad \gamma_0 \geq 1.00004\left\{2.02 + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}\frac{8n((1+\varepsilon)n+m)}{[8(n+m)]^{t+2}}}\right\} + 0.00008,$$

$$(8.7)\qquad \gamma_0 - \frac{1}{2} \geq \gamma_1 \geq 1.51 - \frac{1}{26000} + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}\frac{8n((1+\varepsilon)n+m)}{[8(n+m)]^{t+2}}},$$

et

$$\frac{80n}{n-1}\left[1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right]\le\left(1-\frac{1}{13000n}\right)N, \tag{8.8}$$

avec

$$\gamma_2=\frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left\{\frac{8((1+\varepsilon)n+m)}{[8(n+m)]^{t+2}}+\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\frac{1}{160e(n+m)n\log p}\right\}.$$

Pour démontrer (2.17) on commence par choisir des paramètres η, q réels >0, c_0 réel ≥ 100, c_1 réel >0, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 réels ≥ 4 introduits au début de la section 2 en fonction de n, m, p et de e, f de telle manière que tous ces paramètres, joints aux quantités Z, G et U définies dans l'énoncé du corollaire, vérifient les hypothèses (2.1) à (2.13); on majore ensuite v par $c'(n,m,p,\mathrm{f})$; on déduira enfin (2.18) de (2.17).

a) *Choix des paramètres.* Nous posons

$$c_0=N\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{g}\right),$$

$$c_1=\frac{\mathrm{e}n^2}{4p^\kappa(n+m)(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}})},\qquad c_2=50,$$

$$c_3=\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}c_8^{t+1}\qquad\text{avec } c_8=2nc_4,$$

$$c_4=4\left[1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right]\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)^{-1},$$

$$c_5=20,\qquad c_6=6500,$$

$$\eta=\varepsilon n+\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\log c_8^t\cdot\frac{n+m}{n\log p},\qquad q=w\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right).$$

On voit facilement que les paramètres ainsi choisis joints aux quantités Z, G et U définies dans (2.14), (2.15), et (2.16) vérifient bien les hypothèses (2.1) à (2.5), (2.11) et (2.13); il nous reste à vérifier les hypothèses (2.6) à (2.10) et (2.12).

b) *Vérification de* (2.6) *et* (2.7). En s'aidant de (8.8), on vérifie

$$\begin{aligned}\frac{nc_4c_5}{(n-1)\mathrm{e}}&\le\frac{80n}{n-1}\left[1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right]\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{n^2}{g}\right)\left(1-\frac{1}{13000n}\right)^{-1}\\&\le N\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{g}\right)=c_0,\end{aligned}$$

$$c_4-\frac{1}{c_2\mathrm{f}}\left(1+\frac{1}{t}\right)\ge4\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{100n}\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)$$

$$\geq 4\Big(1+\frac{1}{t}\Big)\Big(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\Big) = \frac{4(n+m)}{n}\Big(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\Big),$$

et

$$\frac{\mathrm{e}n}{p^{\kappa}\big[c_4 - \frac{1}{c_2\mathrm{f}}\big(1+\frac{1}{t}\big)\big]} \leq c_1.$$

c) *Vérification de* (2.8). L'inégalité (2.8) résultera de

$$\varepsilon \mathrm{e} U \geq D \log_p(\mathrm{e}U), \tag{8.9}$$

$$\mathcal{A} < c_8^{t(1+1/(n(t+1)))(n+m)}, \tag{8.10}$$

et de

$$U \geq DG \geq 20nD. \tag{8.11}$$

Nous démontrons maintenant (8.9) et (8.10).

Commençons par vérifier

$$\mathrm{e}U \geq \tau D \log_p D. \tag{8.12}$$

Si $E \geq D^{\tau}$, on a $\mathrm{e}U \geq D^2 \log_p A \geq D \log_p E \geq \tau D \log_p D$; si $E < D^{\tau}$, on a, en vertu de (8.2),

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}U &\geq 20nDZ \geq 20nD \log_p \frac{ec_0 D}{\log_p E} \geq 20nD \log_p \left[eN\Big(1+\frac{1}{t}\Big)\frac{D}{\log_p E}\right] \\
&> 20nD \log_p \left[\frac{eN}{\tau}\Big(1+\frac{1}{t}\Big)\frac{D}{\log_p D}\right] \\
&\geq 20nD \log_p \left[\frac{e^2 N\big(1+\frac{1}{t}\big)\log p}{\tau}\Big(1-\frac{\tau}{20n}\Big)D^{\tau/(20n)}\right] \\
&= 20nD \log_p D^{\tau/(20n)} = \tau D \log_p D.
\end{aligned}$$

Si $D \leq p^{20n\varepsilon}/(20n)$, on a $\varepsilon 20nD \geq D \log_p(20nD)$, et alors (8.9) en découle et de (8.11). Supposons maintenant

$$D \geq \frac{p^{20n\varepsilon}}{20n} \geq \min(e,p)^{e/\tau},$$

où nous avons utilisé (8.3). Les inégalités (8.12) et (8.4) donnent d'une part

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}U \max(1,\log p) &\geq \frac{\tau D \log D}{\min(1,\log p)} \\
&\geq \frac{e\min(e,p)^{e/\tau}\log\min(e,p)}{\min(1,\log p)} = e\min(e,p)^{e/\tau} \geq e,
\end{aligned}$$

puis

$$\frac{\varepsilon \mathrm{e} U}{\log_p(\mathrm{e}U)} = \frac{\varepsilon \mathrm{e} U \log p}{\log(\mathrm{e}U)} \geq \frac{\varepsilon \mathrm{e} U \max(1, \log p) \min(1, \log p)}{\log[\mathrm{e}U \max(1, \log p)]}$$

$$\geq \frac{\varepsilon \tau D \log D}{\log\left[\frac{\tau D \log D}{\min(1, \log p)}\right]} \geq \frac{\varepsilon \tau \log \frac{p^{20n\varepsilon}}{20n}}{\log\left[\frac{\tau p^{20n\varepsilon}}{20n \min(1, \log p)} \log \frac{p^{20n\varepsilon}}{20n}\right]} D \geq D,$$

enfin

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\leq 40n\left(\frac{c_3}{20n}\right)^n \left[c_4 + \frac{1}{50\mathrm{f}}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] \\ &< 21\left[\frac{1}{8n}\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}} c_8^{(n+m)/m}\right]^n c_8 \qquad \text{(on majore } \lambda \text{ brutalement par 2.5)} \\ &\leq c_8^{t(n+m)+1} = c_8^{t(1+1/(n(t+1)))(n+m)}.\end{aligned}$$

d) *Vérification de* (2.9) *et de* (2.10). On a

$$c_4 \geq 4\left(1 + \frac{2.02}{n} + \frac{\gamma}{\log p}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right) \geq \frac{c_7}{2n} \geq 4\left(1 + \frac{1}{t}\right), \tag{8.13}$$

et

$$\begin{aligned} c_4 &= 4\Bigg[1 + \left(2.02 + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}} \frac{8n((1+\varepsilon)n+m)}{[8(n+m)]^{t+2}}\right)\frac{1}{n} \\ &\quad + \frac{\gamma}{\log p} + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left(1 + \frac{1}{n(t+1)}\right) \\ &\quad \times \frac{1}{160e(n+m)n\log p}\Bigg]\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{n^2}{\mathrm{f}}\right) \\ &\leq 4\left\{1 + \left(2.02 + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}} \frac{8n((1+\varepsilon)n+m)}{[8(n+m)]^{t+2}}\right)\frac{1}{n}\right\} \\ &\quad \times \left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\gamma}{\log p}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{n^2}{\mathrm{f}}\right) \\ &\leq 4\left(1 + \frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\log p}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right)\left(1 + \frac{n^2}{\mathrm{f}}\right), \end{aligned} \tag{8.14}$$

où on a utilisé les inégalités

$$\frac{1}{160e\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left(1 + \frac{1}{n(t+1)}\right) < \frac{107}{2060} \quad \text{et} \tag{8.15}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right)^{-1} \leq 1 + \frac{0.00008}{n},$$

$$(n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)c_3 = (n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}c_8^{t+1}$$

(8.15) [cont.]
$$\geq (n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}\left[8(n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^{t+1}$$
$$\geq c_6 n$$

$$q = w\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right) \geq (n+m)\left(1+\frac{2.02}{n}\right)c_3\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}$$
$$\geq (n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)c_3\left(1+\frac{1}{80c_6n^2}\right)\frac{1}{\mathrm{f}} \geq \left(c_6n+\frac{1}{80n}\right)\frac{1}{\mathrm{f}},$$

$$c_3 = \lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}c_8^{t+1} \geq \lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}ec_8\log c_8^t$$

et $c_8 \geq 8(n+m)$. On vérifie ensuite

(8.16)
$$\frac{n+m+\eta}{c_3}$$
$$= \frac{1}{c_3}\left\{1+\frac{\varepsilon n}{n+m}+\frac{1}{20}\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\log c_8^t\cdot\frac{1}{n\log p}\right\}(n+m)$$
$$\leq \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left\{\frac{(1+\varepsilon)n+m}{(n+m)c_8^{t+1}}+\frac{1}{20ec_8}\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\frac{1}{n\log p}\right\}(n+m)$$
$$\leq \gamma_2(n+m),$$

puis

(8.17)
$$w \leq \left\{1+\frac{2.02}{n}+\frac{107}{2060(n+m)\log p}+\frac{n+m+\eta}{(n+m)c_3}\right\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}$$
$$\leq \left\{1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}$$

et enfin

$$4nw \leq 4\left\{1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right\}\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)c_3$$
$$= c_3c_4\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right);$$

d'où (2.10).

e) *Vérification de* (2.12). On vérifie

$$\frac{\mathrm{e}^2}{p^\kappa} = \frac{1}{2} \quad \text{si } \mathrm{e}p = 2, \qquad \frac{\mathrm{e}^2}{p^\kappa} \geq 1 \quad \text{si } \mathrm{e}p > 2.$$

On a, en tenant compte de (8.13),

$$\frac{\mathrm{e}^2c_3}{p^\kappa(n+1)c_4}=\frac{2n\mathrm{e}^2\lambda}{p^\kappa(n+1)}\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}(2nc_4)^{n/m}\ge\frac{2n\mathrm{e}^2\lambda}{p^\kappa(n+1)}\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2c_7^n}{2n}};$$

les inégalités (8.1) montrent alors que l'on a

$$\lambda\biggl(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\biggr)^{(n+m-1)/m}\ge 1$$

et

$$\begin{aligned}c_3\biggl(1-\frac{p^\kappa(n+1)c_4}{\mathrm{e}^2c_3}\biggr)^{(n+m-1)/m}&\ge\biggl[\frac{(n+1)^2}{2n}\biggr]^{1/m}c_8^{t+1}\\&\ge(n+1)^{2/m}(2n)^{(n+m-1)/m}c_4^{(n+m)/m},\end{aligned}$$

d'où (2.12).

f) *Majoration de v.* D'après (8.17), (8.16), (8.15) et (8.14), on a

$$\begin{aligned}q=w\biggl(1-\frac{1}{2c_6n}\biggr)&\le\biggl\{1+\biggl(2.02-\frac{1}{13000}\biggr)\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\biggr\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}},\\v\le q&+\biggl[1+\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\frac{n+m+\eta}{(n+m)c_3}\biggr]\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}\\&\le 2\biggl[1+\frac{1}{2}\biggl(3.02-\frac{1}{13000}\biggr)\frac{1}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\biggr]\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}\\&\le 2\biggl\{1+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\biggl(1+\frac{1}{n(t+1)}\biggr)\frac{1}{160e(n+m)n\log p}\biggr\}\\&\qquad\times\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}\\&\le 2\biggl(1+\frac{\gamma_1}{n}\biggr)\biggl(1+\frac{\gamma}{\log p}\biggr)\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}\le c'(n,m,p,\mathrm{f}).\end{aligned}$$

g) *Démonstration de* (2.18). On peut supposer sans perte de généralité que le maximum de $|\Theta_k|/(p^\kappa|b_{nk}|)$ est atteint à $k=1$. En tenant compte du fait que b_{n1} divise b, on trouve

$$|\Theta_1|=\frac{|\Theta_1|}{p^\kappa|b_{n1}|}\left|\frac{b_{n1}}{p^\kappa}\right|;$$

on utilise la minoration (2.17) :

$$\log_p|\Theta_1|=\log_p\frac{|\Theta_1|}{p^\kappa|b_{n1}|}+\log_p\left|\frac{b_{n1}}{p^\kappa}\right|>-c'U+\log_p\left|\frac{b}{p^\kappa}\right|\ge -c'U-\log_p(b/p^\kappa);$$

il suffit alors de montrer

$$\log_p(b/p^\kappa)\le(c-c')U. \tag{8.18}$$

On vérifie, en tenant compte de (8.7),

$$(8.19)\quad c-c' = 2\lambda \sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}\left\{8(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\right\}^{t+1}\frac{(n+m)(\gamma_0-\gamma_1)}{\mathrm{f}n} \times\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)^{t+1}\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)^{t+2} \geq \left\{8(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\right\}^{t+1}\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}.$$

Quand $b \leq p^\kappa$, (8.18) est triviale; nous supposons maintenant $b > p^\kappa$.

Notons $A_0 = \min_{1\leq i\leq n-1} A_i$. Nous distinguons deux cas pour montrer (8.18).

Le cas

$$\frac{n^2\log_p E}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})D} \geq (b/p^\kappa)^{-1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}}\log_p A_0.$$

D'après (1.3) on a

$$M \geq \frac{b}{\log_p A_0} \geq \frac{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})D}{n^2\log_p E} b(b/p^\kappa)^{-1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}},$$

et (2.15) nous permet de minorer G :

$$G \geq \log_p\left(\frac{n^2\log_p E}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})D}\frac{M}{p^\kappa}\right) \geq \log_p((b/p^\kappa)^{1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}}) = \frac{1}{2}\log_p(b/p^\kappa) - \frac{n+m-1}{n-1} \geq \frac{1}{2}(\log_p(b/p^\kappa) - 4(1+1/t))$$

et $G \geq 20n$; donc

$$(c-c')U \geq (c-c')DG \geq \begin{cases} 20G \geq 10(\log_p(b/p^\kappa) - 4(1+1/t)) \\ 20n(1+1/t) \geq 40(1+1/t), \end{cases}$$

d'où $(c-c')U \geq 5\log_p(b/p^\kappa)$.

Le cas

$$\frac{n^2\log_p E}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})D} \leq (b/p^\kappa)^{-1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}}\log_p A_0.$$

Dans ce cas on a d'une part

$$\left(\frac{D\log_p A_0}{\log_p E}\right)^{n-1} \geq \left(\frac{n}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})}\right)^{n-1} p^{n+m-1}(b/p^\kappa)^{(n-1)/2},$$

ensuite

$$\frac{DZ}{\mathrm{e}\log_p E} \geq \frac{n}{n+m} \quad \text{et} \quad p^{\kappa+1} > 2\mathrm{e},$$

ce qui donne

$$U \geq \frac{DG}{\mathrm{e}}\left\{\frac{\mu^{n+m-1}n}{n+m}\left(\frac{D\log_p A_0}{\log_p E}\right)^{n-1}\right\}^{1/m}$$

$$\geq \mathrm{f}G\left\{\left(\frac{p^{\kappa+1}}{2\mathrm{e}}\right)^{n+m-1}\left(\frac{n}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})}\right)^{n}(b/p^{\kappa})^{(n-1)/2}\right\}^{1/m}$$
$$\geq 20n\mathrm{f}\left(\frac{n}{4(n+m)(1+n^2/\mathrm{f})}\right)^{t}(b/p^{\kappa})^{t/4},$$

donc

$$(c-c')U \geq 80(n+m)^2(b/p^{\kappa})^{t/4} \geq 5\log_p(b/p^{\kappa}).$$

Démonstration du corollaire 2.3. Il suffit de faire quelques modifications dans la démonstration du corollaire 2.2, que nous citons sous la forme Dém. 2.2.

Les valeurs de λ exhibées dans le tableau II vérifient les inéquations (8.1), avec la nouvelle définition suivante de c_7 :

$$c_7 = 8\left[(n+m)n(n+2.02)+\frac{107n^2}{2060\log p}\right];$$

de plus, le tableau II est conçu de telle sorte qu'il existe, pour les valeurs de γ, γ_0, γ_1, N qu'il fournit, des réels τ et ε, vérifiant (8.3), (8.4). (8.5), ainsi que toutes les conditions suivantes :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{e^2Nn(n+m)\log p}+\frac{1}{20n}, \tag{8.20}$$

$$\gamma_0 \geq 1.00001\left\{2.02+\frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}\,\frac{n((1+\varepsilon)n+m)}{(n+m)[8n(n+2.02)(n+m)]^{t+1}}}\right\} + 0.00002, \tag{8.21}$$

$$\gamma_0-\frac{1}{2} \geq \gamma_1 \geq 1.51-\frac{1}{169200} + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}\,\frac{n((1+\varepsilon)n+m)}{(n+m)[8n(n+2.02)(n+m)]^{t+1}}} \tag{8.22}$$

et enfin

$$\frac{80n}{n-1}\left(1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right) \leq \left(1-\frac{1}{84600n}\right)N, \tag{8.23}$$

avec

$$\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}\left\{\frac{(1+\varepsilon)n+m}{(n+m)[8n(n+2.02)(n+m)]^{t+1}} + \left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\frac{1}{160en^2(n+2.02)(n+m)\log p}\right\}}.$$

On procède à la démonstration de la même manière que dans Dém. 2.2.

a) *Choix des paramètres*. Nous posons

$$c_0 = Nn(n+m), \qquad c_1 = \frac{\mathrm{e}}{4p^{\kappa}(n+m)}, \qquad c_2 = 50,$$

$$c_3 = \lambda \sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}} c_8^{t+1}, \qquad \text{avec } c_8 = 2nc_4,$$
$$c_4 = 4\left(1 + \frac{2.02}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \gamma_2\right) n(n+m)\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right)^{-1},$$
$$c_5 = 20, \qquad c_6 = 42300,$$

et

$$\eta = \varepsilon n + \frac{1}{20}\left(1 + \frac{1}{n(t+1)}\right) \log c_8^t \frac{n+m}{n \log p}, \qquad q = w\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right).$$

On voit facilement que les paramètres ainsi choisis, avec les quantités Z, G et U définies dans (2.19), (2.20) et (2.21) vérifient bien les hypothèses (2.1) à (2.5), (2.11) et (2.13), il nous reste à vérifier les hypothèses (2.6) à (2.10) et (2.12).

b) *Vérification de* (2.6) *et* (2.7). On a

$$\begin{aligned} \frac{nc_4c_5}{(n-1)\mathrm{e}} &\leq \frac{80n}{n-1}\left(1 + \frac{2.02}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \gamma_2\right) n(n+m)\left(1 - \frac{1}{84600n}\right)^{-1} \\ &\leq Nn(n+m) = c_0, \end{aligned}$$

et

$$c_4 - \frac{1}{c_2\mathrm{f}}\left(1 + \frac{1}{t}\right) \geq 4\left(1 + \frac{2}{n}\right) n(n+m) - \frac{1}{50n}(n+m) \geq 4n(n+m),$$

donc

$$\frac{\mathrm{e}n}{p^\kappa\left[c_4 - \frac{1}{c_2\mathrm{f}}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]} \leq c_1.$$

c) *Vérification de* (2.8). La vérification est même que celle dans Dém. 2.2, sauf la vérification de (8.12) dans le cas où $E < D^\tau$. Dans ce cas, on a, en vertu de (8.20),

$$\begin{aligned} \mathrm{e}U &\geq 20nDZ \geq 20nD \log_p\left(\frac{ec_0 D}{\log_p E}\right) = 20nD \log_p\left(eNn(n+m)\frac{D}{\log_p E}\right) \\ &> 20nD \log_p\left(\frac{eNn(n+m)}{\tau} \frac{D}{\log_p D}\right) \\ &\geq 20nD \log_p\left(\frac{e^2 Nn(n+m) \log p}{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{20n}\right) D^{\tau/20n}\right) \\ &= 20nD \log_p D^{\tau/20n} = \tau D \log_p D. \end{aligned}$$

d) *Vérification de* (2.9) *et de* (2.10). On vérifie les estimations

$$c_4 \geq 4\left(1 + \frac{2.02}{n} + \frac{\gamma}{\log p}\right) n(n+m) \geq \frac{c_7}{2n} \geq 4(n+2.02)(n+m) \tag{8.24}$$

et

$$c_4 = 4\left\{1 + \left[2.02 + \frac{1}{\lambda} \sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2} \frac{n((1+\varepsilon)n+m)}{(n+m)[8n(n+2.02)(n+m)]^{t+1}}}\right] \frac{1}{n}\right. \tag{8.25}$$

$$+\frac{\gamma}{\log p}+\frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)\frac{1}{160en^2(n+2.02)(n+m)\log p}\Bigg\}$$

$$\times\, n(n+m)\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)^{-1}$$

$$\le 4\left\{1+\left[2.02+\frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\frac{n((1+\varepsilon)n+m)}{(n+m)[8n(n+2.02)(n+m)]^{t+1}}\right]\frac{1}{n}\right\}$$

$$\times\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)^{-1}\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)n(n+m)\le 4\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)n(n+m),$$

où on a utilisé la majoration

$$\frac{1}{160e\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left(1+\frac{1}{n(t+1)}\right)<\frac{107}{2060} \tag{8.26}$$

ainsi que les inégalités

$$\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)^{-1}\le 1+\frac{0.00002}{n},$$

puis

$$(n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)c_3=(n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}c_8^{t+1}$$

$$\ge (n+m)(1+\frac{2}{n})\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}[8n(n+2)(n+m)]^{t+1}\ge c_6n,$$

et

$$q=w\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)\ge (n+m)\left(1+\frac{2.02}{n}\right)c_3\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}$$

$$\ge (n+m)\left(1+\frac{2}{n}\right)c_3\left(1+\frac{1}{80c_6n^2}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}\ge\left(c_6n+\frac{1}{80n}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}$$

avec l'estimation

$$c_3=\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}c_8^{t+1}\ge\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}ec_8\log c_8^t$$

et

$$c_8\ge 8n(n+2.02)(n+m).$$

On en déduit d'abord les majorations (8.16), (8.17), ensuite

$$4nw\le 4\left(1+\frac{2.02}{n}+\frac{\gamma}{\log p}+\gamma_2\right)n(n+m)c_3=c_3c_4\left(1-\frac{1}{2c_6n}\right),$$

d'où (2.10).

e) *Vérification de* (2.12). En tenant compte de (8.24), la vérification est même que e) dans Dém. 2.2.

f) *Majoration de* v. D'après (8.17), (8.16) et (8.26) on a

$$q = w\left(1 - \frac{1}{2c_6 n}\right) \le \left\{1 + \left(2.02 - \frac{1}{84600}\right)\frac{1}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \gamma_2\right\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}}$$

et

$$\begin{aligned} v &\le q + \left\{1 + \frac{1}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \frac{n+m+\eta}{(n+m)c_3}\right\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}} \\ &\le 2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(3.02 - \frac{1}{84600}\right)\frac{1}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \gamma_2\right\}\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}} \\ &\le 2\left\{1 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma}{\log p} + \frac{1}{\lambda}\sqrt[m]{\frac{2n}{(n+1)^2}}\left(1 + \frac{1}{n(t+1)}\right)\frac{1}{160e(n+m)n\log p}\right\} \\ &\quad \times \frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}} \\ &\le 2\left(1 + \frac{\gamma_1}{n}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\log p}\right)\frac{(n+m)c_3}{\mathrm{f}} \le c'(n,m,p,\mathrm{f}). \end{aligned}$$

g) *Démonstration de* (2.23). Pour la même raison que dans la partie g) de Dém. 2.2, il suffit de montrer (8.18).

On vérifie en tenant compte de (8.22),

$$\begin{aligned} (8.27)\qquad c - c' &= 2\lambda\sqrt[m]{\frac{(n+1)^2}{2n}}[8n^2(n+m)]^{t+1}\frac{(n+m)(\gamma_0-\gamma_1)}{\mathrm{f}n} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{\gamma_0}{n}\right)^{t+1}\left(1 + \frac{\gamma}{\log p}\right)^{t+2} \ge [8n^2(n+m)]^{t+1}\left(1 + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{\mathrm{f}}. \end{aligned}$$

Nous supposons, comme dans la partie g) de Dém. 2.2, $b > p^\kappa$. Notons $A_0 = \min_{1\le i\le n-1} A_i$; nous distinguons deux cas pour montrer (8.18).

L e c a s

$$\frac{\log_p E}{4(n+m)D} \ge (b/p^\kappa)^{-1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}}\log_p A_0.$$

D'après (1.3), on a

$$M \ge \frac{b}{\log_p A_0} \ge \frac{4(n+m)D}{\log_p E}b(b/p^\kappa)^{-1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}};$$

ainsi (2.20) nous permet de minorer G :

$$\begin{aligned} G &\ge \log_p\left(\frac{\log_p E}{4(n+m)D}\frac{M}{p^\kappa}\right) \ge \log_p((b/p^\kappa)^{1/2}p^{-\frac{n+m-1}{n-1}}) \\ &= \frac{1}{2}\log_p(b/p^\kappa) - \frac{n+m-1}{n-1} \ge \frac{1}{2}(\log_p(b/p^\kappa) - 4(1+1/t)) \end{aligned}$$

et $G \ge 20n$, donc

$$(c-c')U \ge (c-c')DG \ge \begin{cases} 20G \ge 10(\log_p(b/p^\kappa) - 4(1+1/t)) \\ 20n(1+1/t) \ge 40(1+1/t), \end{cases}$$

d'où $(c-c')U \ge 5\log_p(b/p^\kappa)$.

Le cas
$$\frac{\log_p E}{4(n+m)D} \le (b/p^\kappa)^{-1/2} p^{-\frac{n+m-1}{n-1}} \log_p A_0.$$

Dans ce cas on utilise les minorations
$$\left(\frac{D\log_p A_0}{\log_p E}\right)^{n-1} \ge (4(n+m))^{-(n-1)} p^{n+m-1} (b/p^\kappa)^{(n-1)/2}$$
et
$$\frac{DZ}{\mathrm{e}\log_p E} > \frac{1}{n+m} \quad \text{et} \quad p^{\kappa+1} > 2\mathrm{e},$$
qui donnent
$$\begin{aligned} U &\ge \frac{DG}{\mathrm{e}} \left\{ \frac{\mu^{n+m-1}}{n+m} \left(\frac{D\log_p A_0}{\log_p E}\right)^{n-1} \right\}^{1/m} \\ &\ge \mathrm{f} G \left\{ \left(\frac{p^{\kappa+1}}{2\mathrm{e}}\right)^{n+m-1} (4(n+m))^{-n} (b/p^\kappa)^{(n-1)/2} \right\}^{1/m} \\ &\ge \frac{20n\mathrm{f}}{(4(n+m))^t} (b/p^\kappa)^{t/4}, \end{aligned}$$
donc
$$(c-c')U \ge 80(n+m)^2 (b/p^\kappa)^{t/4} \ge 5\log_p(b/p^\kappa). \quad \blacksquare$$

Démonstration du corollaire 1.1. On applique l'inégalité (2.18) du corollaire 2.2 avec $\gamma = 107/(2060(n+m))$ (voir la remarque dans la section 2) en prenant
$$Z = c_9 Z_0, \quad G = \frac{416}{415} G_0 \quad \text{et} \quad U = c_9^{1/m} \frac{416}{415} U_0,$$
avec
$$c_9 = \begin{cases} 1.0374 & \text{(resp. } 1.07) \quad \text{si } m = 1, \\ 1.04236 & \text{(resp. } 1.1) \quad \text{si } 2 \le m \le 9, \\ 1.1594 & \text{(resp. } 1.2) \quad \text{si } m \ge 10, \end{cases}$$
$$\text{(pour } p = 2) \quad \text{(resp. pour } p \ge 3)$$
et on vérifie toutes les conditions (2.14), (2.15) et (2.16), ainsi que la restriction (2.11); on majore ensuite la quantité cU.

Notons
$$S_1 = e\left[c_0 \max\left(\frac{D}{\log_p E}, \frac{Z}{\mathrm{e}\log_p A}\right) + 2\right]$$
et
$$S_2 = e\left[\frac{\mathrm{e}n^2 M \log_p E}{4p^\kappa (n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)D} + 1\right] \le e\left[\frac{gM\log_p E}{4p^\kappa(n+m)D} + 1\right].$$

La vérification de toutes les conditions est triviale sauf

$$Z \geq \log_p S_1, \tag{8.28}$$
$$G \geq \log_p S_2, \tag{8.29}$$

et

$$U \geq 20nDZ. \tag{8.30}$$

Appliquons le lemme 3.8, premièrement avec $\alpha = \gamma_0$, $\beta = 2m$; on a $\alpha = \gamma_0 < 3 < 4m = 2\beta$ et

$$\Big(1 + \frac{\gamma_0}{n}\Big)^{n+2m} \leq \Big(1 + \frac{\gamma_0}{2}\Big)^{2(m+1)},$$

deuxièmement avec $\alpha = 107/(2060 \log p)$, $\beta = m$; on a $\alpha < 1 < 2m = 2\beta$ et

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{\gamma}{\log p}\Big)^{n+2m} &= \Big(1 + \frac{107}{2060(n+m)\log p}\Big)^{n+2m} \\ &\leq \Big(1 + \frac{107}{2060(m+2)\log p}\Big)^{2(m+1)},\end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\Big[\Big(1 + \frac{\gamma_0}{n}\Big)\Big(1 + \frac{\gamma}{\log p}\Big)\Big]^{t+2} \leq \Big[\Big(1 + \frac{\gamma_0}{2}\Big)\Big(1 + \frac{107}{2060(m+2)\log p}\Big)\Big]^{2(m+1)/m}.$$

Posons

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 8\Big(\frac{(n+1)^2}{2n}\Big)^{1/n} \leq 12, \\ \pi_1 &= 2\Big[\Big(1 + \frac{\gamma_0}{n}\Big)\Big(1 + \frac{\gamma}{\log p}\Big)\Big]^{t+2}\Big(\frac{2n}{(n+1)^2}\Big)^{1/n},\end{aligned} \tag{8.31}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned}\pi_0\pi_1 &= 16\Big[\Big(1 + \frac{\gamma_0}{n}\Big)\Big(1 + \frac{\gamma}{\log p}\Big)\Big]^{t+2} \\ &\leq 16\Big[\Big(1 + \frac{\gamma_0}{2}\Big)\Big(1 + \frac{107}{2060(m+2)\log p}\Big)\Big]^{2(m+1)/m}\end{aligned} \tag{8.32}$$

et

$$c = \lambda\pi_1\Big[\pi_0(n+m)\Big(1 + \frac{n^2}{\mathrm{f}}\Big)\Big]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}. \tag{8.33}$$

On vérifie à l'aide des majorations de N et de λ, γ_0 fournies par le tableau I les inégalités suivantes :

$$e\Big[N\Big(1 + \frac{1}{t}\Big)(n^2+1)c_9 + \frac{2(p-1)}{p+1}\Big] \tag{8.34}$$

$$\leq \begin{cases} \left[643\left(1+\frac{1}{n}\right)(n^2+1)\right]^{c_9}\left(\dfrac{p+1}{p-1}\mathrm{e}\right)^{c_9-1}, & m=1, \\ \left[608\left(1+\frac{1}{t}\right)(n^2+1)\right]^{c_9}\left(\dfrac{p+1}{p-1}\mathrm{e}\right)^{c_9-1}, & 2\leq m\leq 9, \\ \left[212\left(1+\frac{1}{t}\right)(n^2+1)\right]^{c_9}\left(\dfrac{p+1}{p-1}\mathrm{e}\right)^{c_9-1}, & m\geq 10, \end{cases}$$

et

$$c_9^{1/m}\frac{416}{415}\lambda\pi_0\pi_1 \leq 12c_{10},$$

avec $c_{10}=25$ pour $m=1$; $c_{10}=12$ pour $2\leq m\leq 9$; $c_{10}=16$ pour $m\geq 10$; cette dernière condition implique

$$c_9^{1/m}\frac{416}{415}\lambda\pi_1 \leq c_{10}\left(\frac{12}{\pi_0}\right)^{t+1}. \tag{8.35}$$

a) *Vérification de* (8.28). On a

$$c_0 \leq N\left(1+\frac{1}{t}\right)(n^2+1), \qquad \frac{DZ_0}{\log_p E} \geq \frac{p+1}{p-1}\mathrm{e}$$

et

$$S_1 \leq e\left(c_0\frac{DZ}{\log_p E}+2\right) \leq e\left[N\left(1+\frac{1}{t}\right)(n^2+1)c_9+\frac{2(p-1)}{p+1}\right]\frac{DZ_0}{\log_p E};$$

alors (8.34) montre que l'on a $\log_p S_1 \leq c_9 Z_0 = Z$.

b) *Vérification de* (8.29). Il n'y a pas de restriction à supposer $gM\log_p E \geq 2000p^\kappa(n+m)D$, car sinon, on a

$$S_2 \leq e\left(\frac{2000}{4}+1\right) = 501e$$

et

$$\log_p S_2 \leq \log_p(501e) \leq 25nZ_0 \leq G_0 < G.$$

Sous cette hypothèse, on obtient

$$S_2 \leq e\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2000}\right)\frac{gM\log_p E}{p^\kappa(n+m)D} = 0.2505e\frac{gM\log_p E}{p^\kappa(n+m)D}. \tag{8.36}$$

Il faut encore distinguer deux cas.

L e c a s 1. $\left(0.2505e\frac{g\log_p E}{D}\right)^{415} \leq M/(p^\kappa(n+m))$. Alors

$$\log_p S_2 \leq \log_p\left(\frac{M}{p^\kappa(n+m)}\right)^{416/415} = \frac{416}{415}\log_p\left(\frac{M}{p^\kappa(n+m)}\right) \leq \frac{416}{415}G_0 = G.$$

L e c a s 2. $\big(0.2505e^{\frac{g\log_p E}{D}}\big)^{415} \geq M/(p^\kappa(n+m))$. On trouve

$$\log_p S_2 \leq \log_p \left(0.2505e\frac{g\log_p E}{D}\right)^{416} \leq \frac{416\cdot 0.2505}{\log p}\frac{g\log_p E}{D}$$
$$\leq \frac{416}{415}\cdot 50\frac{p+1}{p-1}\frac{g\log_p E}{D} \leq \frac{416}{415}\cdot 25nZ_0 \leq \frac{416}{415}G_0 = G.$$

c) *Vérification de* (8.30). D'après (1.2) et (1.4), on a $p\log_p E > 1$, et

$$U > U_0 \geq DG_0 \geq 25nDZ_0 \geq 20nDc_9Z_0 = 20nDZ$$

car $5 > 2c_9$.

d) *Majoration de* cU. On utilise (8.33) et (8.35) :

$$cU = c_9^{1/m}\frac{416}{415}\lambda\pi_1\left[\pi_0(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\right]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0$$
$$\leq c_{10}\left[12(n+m)\left(1+\frac{n^2}{\mathrm{f}}\right)\right]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0. \ \blacksquare$$

Dans les démonstrations des corollaires suivants, on va appliquer l'inégalité (2.23) du corollaire 2.3 avec $\gamma = 107/(2060(n+m))$ (voir la remarque dans la section 2), les valeurs de λ, γ_0 et de N sont alors données par le tableau II, on conserve les notations pour π_0, π_1 et S_1 (avec $c_0 = Nn(n+m)$) et (8.32); enfin on modifie la définition de S_2 :

$$S_2 = e\left[\frac{\mathrm{e}M\log_p E}{4p^\kappa(n+m)D} + 1\right].$$

On procède aux démonstrations : on choisit les quantités Z, G et U, on vérifie ensuite les conditions (2.19), (2.20), (2.21) ainsi que la restriction (2.11), et on majore enfin la quantité cU.

D é m o n s t r a t i o n d u c o r o l l a i r e 1.2. On prend dans le corollaire 2.3

$$Z = c_{11}c_{12}Z_0, \quad G = G_0 \quad \text{et} \quad U = c_{12}U_0$$

avec $c_{11} = 1$ $(1 \leq m \leq 9)$; $c_{11} = 1.1$ $(m \geq 10)$ et $c_{12} = 1.04$ $(1 \leq m \leq 9,\ n = 2)$; $c_{12} = 1.019$ $(m \geq 10,\ n = 2)$; $c_{12} = 1.3$ $(n \geq 3)$.

a) *Vérification de* (2.19). On a

$$Z \geq \chi = \begin{cases} 2c_{12}\log_p(40(n+1)pD) & \text{pour } m = 1, \\ 2c_{12}\log_p(35(n+m)pD) & \text{pour } 2 \leq m \leq 9, \\ 2.2c_{12}\log_p(14(n+m)pD) & \text{pour } m \geq 10; \end{cases}$$

alors $p^\chi/\chi \leq p^Z/Z$; on vérifie facilement, à l'aide de la majoration de N fournie par le tableau II, les inégalités

$$S_1 \leq e\left(c_0\frac{DZ}{\log_p E} + 2\right) \leq e[Nn(n+m)(p-1)+2]DZ \leq \frac{p^\chi}{\chi}Z \leq p^Z;$$

on voit dans tous les cas que l'on a

$$Z_0 \geq 2\log_p(14p) > \frac{p+1}{p-1};$$

d'autre part on a

$$Z_0 \geq \frac{2p}{p-1}\frac{g}{D}\log_p E > \frac{p+1}{p-1}\frac{g}{D}\log_p E$$

et $Z > Z_0$.

b) *Vérification de* (2.20) *et de* (2.11). Il n'y a pas de restriction à supposer

$$\mathrm{e}M\log_p E \geq 2000 p^{\kappa}(n+m)D; \tag{8.37}$$

sinon, on aurait

$$S_2 \leq e\left(\frac{2000}{4}+1\right) = 501e,$$
$$\log_p S_2 \leq \log_p(501e) \leq 10nZ_0 \leq G_0 = G.$$

Grâce à cette hypothèse on déduit de (1.6) :

$$\begin{aligned} S_2 &\leq e\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2000}\right)\frac{\mathrm{e}M\log_p E}{p^{\kappa}(n+m)D} \\ &< \frac{7\mathrm{e}b\log_p E}{10(n+m)D}\max_{1\leq i\leq n-1}\left(\frac{1}{\log_p A_i}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\|b_{ik}/b_{nk}\|}{\log_p A_{n+k-1}}\right) \\ &\leq \frac{7\mathrm{e}b}{10(n+m)}\max_{1\leq i\leq n-1}\left(1+\sum_{k=1}^{m}\|b_{ik}/b_{nk}\|\right) \leq \mathrm{e}B; \end{aligned}$$

d'où (8.29).

On a vu dans a) :

$$\begin{aligned} Z_0 &\geq \frac{2p}{p-1}\frac{g}{D}\max(\log_p E, 1), \\ G = G_0 \geq 10nZ_0 &\geq \frac{20p}{p-1}\frac{gn}{D}\max(\log_p E, 1) \\ &\geq \frac{60p}{p-1}\frac{gn}{D(n+m)}\max(\log_p E, 1) \quad \text{et} \quad G \geq 20n, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$G \geq 10c_{11}nZ_0 = \frac{10nZ}{c_{12}} \geq \frac{(n+1)^2}{n}Z.$$

c) *Vérification de* (2.21). Compte tenu de l'inégalité $c_{12}^{m-1} \geq c_{11}$, on a

$$U = c_{12}U_0 \geq DG_0\Big(\frac{\mu^{n+m-1}Dc_{12}^m Z_0}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\Big)^{1/m}$$
$$\geq DG\Big(\frac{\mu^{n+m-1}DZ}{\mathrm{e}^{m+1}\log_p E}\prod_{i=1}^{n+m-1}\frac{D\log_p A_i}{\log_p E}\Big)^{1/m}$$

et

$$U_0 \geq pD^2G_0\log_p A \geq \max\Big\{D^2\log_p A, \frac{D^2G\log_p A}{\log_p E}\Big\},$$
$$U \geq 2c_{12}DG_0 \geq 20c_{11}c_{12}nDZ_0 = 20nDZ.$$

d) *Majoration de cU.* Compte tenu de (8.32), et de

$$\pi_0\pi_1 \leq 16\Big[\Big(1+\frac{\gamma_0}{3}\Big)\Big(1+\frac{107}{2060(m+2)\log 2}\Big)\Big]^{(2m+3)/m} \qquad (n \geq 3),$$

on vérifie à l'aide des majorations de λ et γ_0 fournies par le tableau II l'inégalité $c_{12}\lambda\pi_0\pi_1 \leq 12c_{10}$; ceci implique

$$c_{12}\lambda\pi_1 \leq c_{10}(12/\pi_0)^{t+1};$$

en posant

$$c = \lambda\pi_1[\pi_0 n^2(n+m)]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}} \tag{8.39}$$

on a

$$cU = c_{12}\lambda\pi_1[\pi_0 n^2(n+m)]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0 \leq c_{10}[12n^2(n+m)]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0. \ \blacksquare$$

D é m o n s t r a t i o n d u c o r o l l a i r e 1.3. On prend dans le corollaire 2.3

$$Z = \frac{c_{13}}{2}Z_0, \quad G = G_0, \quad U = c_{13}^{1/m}U_0 \quad \text{et} \quad \log_p E = \mu,$$

avec c_{13} défini dans les trois cas $1^\circ : m = 1$; $2^\circ : 2 \leq m \leq 9$ et $3^\circ : m \geq 10$;

$$1^\circ\ c_{13} = \begin{cases} 1.040621 & \text{si } n = p = 2, \\ 1.07 & \text{sinon;} \end{cases}$$
$$2^\circ\ c_{13} = \begin{cases} 1.08611 & \text{si } m = n = p = 2, \\ 1.1 & \text{sinon;} \end{cases}$$
$$3^\circ\ c_{13} = \begin{cases} 1.20755 & \text{si } m = 10,\ n = p = 2, \\ 1.37 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) *Vérification de* (2.19). On a

$$Z = \begin{cases} c_{13}\log_p[4665n(n+1)pD] & (m = 1), \\ c_{13}\log_p[2949n(n+m)pD] & (2 \leq m \leq 9), \\ c_{13}\log_p[892n(n+m)pD] & (m \geq 10). \end{cases} \tag{8.40}$$

Puisque $Z \geq 16$, si $p = 2$, on majore S_1 par

$$S_1 \leq e\left(c_0 \frac{DZ}{\log_p E} + 2\right) \leq \begin{cases} e\left[Nn(n+m) + \frac{1}{8}\right]DZ & (p = 2), \\ e[Nn(n+m)(p-1) + 2]DZ & (p \geq 2); \end{cases}$$

on vérifie facilement à l'aide des majorations de N fournies par le tableau II et de (8.40) que ces majorants sont inférieurs à p^Z.

La relation (8.40) montre aussi

$$Z > \log_p(800p) > \frac{p(p+1)}{(p-1)^2} \geq \frac{p+1}{p-1}\mu'.$$

b) *Vérification de* (2.20) *et de* (2.11). On peut supposer pour la même raison que dans la démonstration du corollaire 1.2 que l'inégalité (8.37) est satisfaite; on en déduit, grâce à (1.8),

$$\begin{aligned} S_2 &\leq e\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\frac{\mathrm{e}M\mu}{p^\kappa(n+m)D} = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\frac{M}{(n+m)D} \\ &< \frac{7b}{20(n+m)D} \max_{1 \leq i \leq n-1}\left(\frac{1}{\log_p A_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\|b_{ik}/b_{nk}\|}{\log_p A_{n+k-1}}\right) \\ &\leq \frac{7b}{20(n+m)} \max_{1 \leq i \leq n-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{b_{ik}}{b_{nk}}\right\|\right) \leq B, \end{aligned}$$

d'où (8.29).

Ensuite on a

$$G = G_0 \geq 10nZ_0 \geq 20n\log_p(800p) \geq 20n$$

et

$$4G \geq 50\frac{n}{n+m}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \geq 50\frac{p}{p-1}\frac{n\mu'}{n+m},$$

donc

$$G \geq \frac{10}{c_{13}}nZ \geq \frac{(n+1)^2}{n}Z.$$

c) *Vérification de* (2.21). D'après la définition de μ on a

$$2\mathrm{e}\mu = p^\kappa \geq 1; \tag{8.41}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} U &= c_{13}^{1/m}U_0 \geq \frac{DG_0}{\mathrm{e}}\left(D^{n+m}c_{13}Z_0 \prod_{i=1}^{n+m-1} \log_p A_i\right)^{1/m} \\ &\geq DG_0\left(\frac{D^{n+m}c_{13}Z_0}{2\mathrm{e}^{m+1}\mu} \prod_{i=1}^{n+m-1} \log_p A_i\right)^{1/m} = DG\left(\frac{D^{n+m}Z}{\mathrm{e}^{m+1}\mu} \prod_{i=1}^{n+m-1} \log_p A_i\right)^{1/m} \end{aligned}$$

et

$$U > U_0 \geq pD^2G_0\log_p A \geq D^2\log_p A, \qquad U \geq \frac{D^2G\log_p A}{\mu}$$

ainsi que

$$U \geq 2DG_0 \geq 20nDZ_0 = \frac{40nDZ}{c_{13}} \geq 20nDZ.$$

d) *Majoration de* cU. Compte tenu de l'égalité (8.32), on vérifie à l'aide des majorations de λ et γ_0 fournies par le tableau II l'inégalité $c_{13}^{1/m}\lambda\pi_0\pi_1 \leq 12c_{10}$; ceci implique

$$c_{13}^{1/m}\lambda\pi_1 \leq c_{10}(12/\pi_0)^{t+1};$$

cette inégalité, jointe à (8.39), nous conduit à la majoration

$$cU = c_{13}^{1/m}\lambda\pi_1[\pi_0 n^2(n+m)]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0 \leq c_{10}[12n^2(n+m)]^{t+1}\frac{n+m}{\mathrm{f}}U_0. \ \blacksquare$$

Démonstration du corollaire 1.4. On prend dans le corollaire 2.3 :

$$Z = 2c_{14}Z_0, \quad G = G_0, \quad U = 4c_{14}U_0 \quad \text{et} \quad \log_p E = \mu,$$

avec $c_{14} = 1.0059$ pour $n = 2$ et $c_{14} = 1.2$ pour $n \geq 3$.

a) *Vérification de* (2.19). On a

$$Z = \begin{cases} 2c_{14}\log_2(143nD) & (p = 2), \\ 2c_{14}\log_p(54npD) & (p \geq 3); \end{cases} \tag{8.42}$$

on vérifie facilement à l'aide des majorations de N fournies par le tableau II que l'on a

$$e[Nn(n+1)(p-1)+2]D \leq \frac{p^Z}{Z},$$

d'où

$$S_1 \leq e\left(c_0\frac{DZ}{\log_p E} + 2\right) \leq e[Nn(n+1)(p-1)+2]DZ \leq p^Z.$$

De (8.42) on déduit aussi

$$Z > 2\log_p(100p) \geq \frac{p(p+1)}{(p-1)^2} \geq \frac{p+1}{p-1}\mu'.$$

b) *Vérification de* (2.20) *et de* (2.11). On peut supposer, pour la même raison que dans la démonstration du corollaire 1.2, que (8.37) est satisfaite; on en déduit, grâce à (1.9),

$$\begin{aligned} S_2 &\leq e\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\frac{\mathrm{e}M\mu}{p^\kappa(n+1)D} = \frac{e}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\frac{M}{(n+1)D} \\ &< \frac{7}{20(n+1)D}\max_{1\leq i\leq n-1}\left(\frac{b_n}{\log_p A_i} + \frac{\|b_i\|}{\log_p A_n}\right) \\ &\leq \frac{7}{10(n+1)}\max_{1\leq i\leq n}\|b_i\| \leq B; \end{aligned}$$

d'où (8.29).

D'autre part on vérifie

$$G = G_0 \geq 20nZ_0 \geq 20n\log_p(100p) \geq 20n$$

et
$$G \geq 50\frac{n}{n+1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \geq 50\frac{p}{p-1}\frac{n\mu'}{n+1},$$
donc
$$G \geq 20nZ_0 = \frac{10}{c_{14}}nZ \geq \frac{(n+1)^2}{n}Z.$$

c) *Vérification de* (2.21). Compte tenu de (8.41), on a
$$\begin{aligned} U = 4c_{14}U_0 = 2D^{n+2}ZG\prod_{i=1}^{n}\log_p A_i \\ \geq \frac{D^{n+2}ZG}{\mathrm{e}\mu}\prod_{i=1}^{n}\log_p A_i \geq \frac{D^2G\log_p A}{\mu}; \end{aligned}$$
ensuite on a $U \geq 20nZ$ et $U \geq D^2\log_p A$.

d) *Majoration de* cU. On a l'inégalité
$$c \leq \lambda\pi_2 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4} \tag{8.43}$$
avec
$$\pi_2 = 8\left[\left(1+\frac{\gamma_0}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\log p}\right)\right]^{n+2}$$
et
$$cU = 4c_{14}cU_0 \leq 4c_{14}\lambda\pi_2\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0;$$
on vérifie à l'aide des majorations de λ et γ_0 fournies par le tableau II que le facteur $4c_{14}\lambda\pi_2$ est majoré par 580 pour $p=2$ et par 560 pour $p \geq 3$. ∎

Nous avons besoin de quelques lemmes préliminaires pour la démonstration du corollaire 1.5.

Lemme 8.1. *Soient* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}_p$ *avec* $v(\alpha-1) > 1/(p-1)$, $v(\beta-1) > 1/(p-1)$, *et* $v(\gamma) \geq 0$. *On a*
$$|\log\alpha - \log\beta| = |\alpha-\beta| \tag{8.44}$$
et
$$|\alpha^\gamma - \beta^\gamma| = |\gamma||\alpha-\beta|. \tag{8.45}$$

Démonstration. On sait
$$\log\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\alpha-1)^n}{n}, \qquad \log\beta = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\beta-1)^n}{n},$$
donc
$$\log\alpha - \log\beta = (\alpha-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{i+j=n-1}(\alpha-1)^i(\beta-1)^j.$$

Pour $n \geq 2$ et $i + j = n - 1$, on a

$$v\biggl(\frac{1}{n}(\alpha-1)^i(\beta-1)^j\biggr) = iv(\alpha-1) + jv(\beta-1) - v(n)$$
$$> \frac{n-1}{p-1} - v(n) \geq \frac{n-1}{p-1} - v(n!) \geq 0$$

et alors

$$v\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{i+j=n-1}(\alpha-1)^i(\beta-1)^j\biggr) = 0,$$

d'où (8.44).

Comme $\log\alpha^\gamma = \gamma\log\alpha$, $\log\beta^\gamma = \gamma\log\beta$, en appliquant (8.44), on trouve

$$|\alpha^\gamma - \beta^\gamma| = |\log\alpha^\gamma - \log\beta^\gamma| = |\gamma||\log\alpha - \log\beta| = |\gamma||\alpha-\beta|. \ \blacksquare$$

LEMME 8.2. *Soient b un entier rationnel, α un nombre algébrique dans $\mathbb{C}_p$, vérifiant $v(\alpha-1) > 0$, et soit K un corps de nombres tel que $\alpha \in K \subset \mathbb{C}_p$. On désigne par D et g le degré et le degré résiduel du corps K sur $\mathbb{Q}$ respectivement et par A un réel vérifiant*

$$\log_p A \geq \max(1/D, h_p(\alpha)).$$

Si le nombre $\Theta = \alpha^b - 1$ n'est pas nul, il est minoré par

$$\log_p|\Theta| \geq -\frac{3p-1}{p-1}\frac{D^2}{g}\log_p(p\|b\|)\log_p A.$$

Démonstration. On désigne par e l'indice de ramification de K sur $\mathbb{Q}$, et par κ l'entier satisfaisant (1.4). On a

$$v(\alpha^{p^\kappa} - 1) > \frac{1}{p-1} \quad \text{et} \quad p^\kappa \leq \frac{2pe}{p-1} \leq \frac{2pD}{p-1}.$$

Si $v(\Theta) \leq 1/(p-1)$, $\log_p|\Theta| = -v(\Theta) \geq -1/(p-1) \geq -1$, la minoration est triviale. On admet désormais $v(\Theta) > 1/(p-1)$.

D'après le lemme 8.1, on a

$$p^{-\kappa}|\Theta| = |\alpha^{bp^\kappa} - 1| = |b||\alpha^{p^\kappa} - 1|;$$

on utilise le corollaire 3.5 (inégalité de Liouville) pour le nombre non nul $\alpha^{p^\kappa} - 1$:

$$\log_p|\Theta| \geq \log_p|b| + \log_p|\alpha^{p^\kappa} - 1| \geq -\log_p\|b\| - \frac{D}{g}(\log_p 2 + p^\kappa\log_p A)$$
$$\geq -\frac{D}{g}\biggl\{\log_p(p\|b\|) + \frac{2pD}{p-1}\log_p A\biggr\} \geq -\frac{3p-1}{p-1}\frac{D^2}{g}\log_p(p\|b\|)\log_p A. \ \blacksquare$$

Remarque. Dans le lemme 8.2, si $\alpha = a$ est un entier rationnel et $K = \mathbb{Q}$, on peut montrer, si $\Theta \neq 0$,

$$\log_p|\Theta| \geq -3\log_p(p\|b\|)\log_p A.$$

Lemme 8.3. *Soient* $a_1, \ldots, a_n$ *des entiers rationnels non nuls multiplicativement dépendants et* $A_1, \ldots, A_n$ *des nombres réels vérifiant*

$$A_i \geq \max(\|a_i\|, 2) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Alors, il existe des entiers rationnels $t_1, \ldots, t_n$ *non tous nuls, majorés par*

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|t_k\| \log_2 A_k \leq 2(n-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \log_2 A_i,$$

tels que $a_1^{t_1} \ldots a_n^{t_n} = 1$. *Si* $a_1, \ldots, a_n$ *sont tous positifs, le facteur* 2 *dans le majorant est superflu.* (*On prend ici par convention* $0^0 = 1$.)

Démonstration. La démonstration est essentiellement la même que celle du lemme 7.2 de M. Waldschmidt [19]. ∎

Démonstration du corollaire 1.5. Si $n = 1$, la conclusion est une conséquence directe du lemme 8.2; on supposera désormais $n \geq 2$.

Traitons d'abord le cas où $a_1, \ldots, a_n$ sont multiplicativement indépendants.

Quitte à réordonner les $a_i^{b_i}$, on peut supposer que $b_n > 0$. On va appliquer l'inégalité (2.23) du corollaire 2.3 avec $m = 1$, $\alpha_{i1} = \alpha_i$, $b_{i1} = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ et $K = \mathbb{Q}$.

On remarque que $\kappa = 1$ pour $p = 2$, $\kappa = 0$ pour $p \geq 3$ et que $\mu = 2^{\kappa-1} \leq 1$; les A_i vérifient bien la condition (1.1).

On prend ensuite

$$Z = 2c_{14}Z_0, \quad G = G_0, \quad U = 2^{2-\kappa}c_{14}U_0 \quad \text{et} \quad \log_p E = \mu = 2^{\kappa-1}.$$

a) *Vérification de* (2.19). On a

$$Z = \begin{cases} 2c_{14}\log_2(143n) & (p = 2), \\ 2c_{14}\log_p(37np) & (p \geq 3). \end{cases} \tag{8.44}$$

On vérifie à l'aide des majorations de N fournies par le tableau II,

$$e[Nn(n+1) + 2] \leq p^Z/Z,$$

d'où

$$S_1 \leq e[c_0 \max(2^{1-\kappa}, Z) + 2] \leq e[Nn(n+1) + 2]Z \leq p^Z.$$

Enfin (8.44) montre aussi que l'on a $Z > 2\log_p(60p) \geq (p+1)/(p-1)$.

b) *Vérification de* (2.20) *et de* (2.11). On peut supposer pour la même raison que dans la démonstration du corollaire 1.2 que (8.37) est vérifiée; on en déduit, en utilisant (1.11),

$$\begin{aligned} S_2 &\leq e\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\frac{M\mu}{p^\kappa(n+1)} \leq \frac{e}{n+1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2000}\right)\max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\| \\ &\leq \frac{7}{10(n+1)} \max_{1 \leq i \leq n} \|b_i\| \leq B, \end{aligned}$$

d'où (8.29).

Si $p = 2$ on écrit

$$G \geq 5nZ_0 \geq 5n\log_2(286) \geq 20n \quad \text{et} \quad \geq 100\frac{n}{n+1}.$$

Si $p \geq 3$ on a

$$G \geq 20nZ_0 \geq 20n\log_p(60p) \geq 20n \quad \text{et} \quad \geq 50\frac{p}{p-1}\frac{n}{n+1}.$$

D'où, pour tout $p \geq 2$,

$$G \geq 5nZ_0 \geq \frac{5}{2c_{14}}nZ \geq \frac{(n+1)^2}{n}Z.$$

c) *Vérification de* (8.21). Puisque $Z \geq 2$ et $U \geq G(\log_p A)/\mu \geq \log_p A$, on a

$$U = 2^{2-\kappa}c_{14}U_0 = \frac{ZG}{\mu}\prod_{i=1}^{n}\log_p A_i \geq 20nZ.$$

d) *Majoration de cU.* On utilise (8.43) :

$$cU = 2^{2-\kappa}c_{14}cU_0 \leq 2^{-\kappa}\cdot 4c_{14}\lambda\pi_2\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}U_0.$$

La majoration obtenue à la fin de la démonstration du corollaire 1.4 pour le facteur $4c_{14}\lambda\pi_2$ nous amène immédiatement aux majorants pour cU à la droite de (1.12).

Nous continuons la démonstration dans le cas général par récurrence sur n.

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont multiplicativement indépendants, le résultat est déjà démontré. On suppose maintenant que $a_1, \ldots, a_n$ sont multiplicativement dépendants.

On peut réordonner les $a_i^{b_i}$ par ordre croissant des nombres A_i. Le lemme 8.3 permet d'écrire une relation de dépendance multiplicative

$$a_1^{t_1}\ldots a_r^{t_r} = 1$$

avec $t_r \neq 0$ et $1 \leq r \leq n$, les entiers t_i étant majorés par

$$\max_{1\leq i\leq r}\|t_i\| \leq T \quad \text{avec} \quad T = 2(r\log_2 A_r)^r;$$

on se contentera de la borne plus faible

$$\log(2T) \leq 2r^2\log A_r,$$

obtenue en majorant d'abord 4 par 4^r et ensuite $\log(4x)$ par $2x\log 2$ pour $x = r\log_2 A_r$.

On a

$$\Theta' = (a_1^{b_1}\ldots a_n^{b_n})^{t_r} - 1 = \prod_{i=1}^{r-1}a_i^{t_rb_i - t_ib_r}\prod_{i=r+1}^{n}a_i^{t_rb_i} - 1.$$

On peut admettre dans un premier temps que $v(\Theta) > 1/(p-1)$; le lemme 8.1 montre que l'on a $|\Theta'| = |t_r||\Theta|$; cela montre d'abord $\Theta' \neq 0$ et ensuite $|\Theta| \geq |\Theta'|$. On va utiliser l'hypothèse de récurrence pour le nombre Θ'.

On choisit $B' = 2pTB$ qui satisfait

$$7\max\{\|t_r b_i - t_i b_r\|,\ i = 1,\dots,r-1,\ \|t_r b_i\|,\ i = r+1,\dots,n\} \le 10nB'.$$

Les nombres

$$Z_0' = \begin{cases} \log_2(143(n-1)), & p = 2,\\ \log_p(37(n-1)p), & p \ge 3,\end{cases}$$

et

$$G_0' = \begin{cases} \max\{\log_2 B', 5(n-1)Z_0'\}, & p = 2,\\ \max\{\log_p B', 20(n-1)Z_0'\}, & p \ge 3,\end{cases}$$

satisfont $Z_0' \le Z_0$ et $G_0' \le 2(1+\log_p(2T))G_0 \le 6n^2 G_0 \log_p A_r$, car

$$\log_p B' \le \log_p(pB)(1+\log_p(2T)) \le 2(1+\log_p(2T))\max(1, \log_p B).$$

Si $p = 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\log_p|\Theta| &\ge \log_p|\Theta'|\\ &\ge -290\cdot 8^{n-1}(n-1)^{2n-1}n^{n+3}Z_0'G_0'(\log_2 A_r)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\log_2 A_i\\ &\ge -290\cdot 8^n n^{2n+1}(n+1)^{n+4}Z_0G_0\prod_{i=1}^{n}\log_2 A_i;\end{aligned}$$

si $p \ge 3$, on déduit de même façon la minoration (1.12). ∎

9. Les tableaux

Tableau I pour le corollaire 2.2

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p=2$	e $=1$	$n=2$		
1	1.0006	0.01732	2.02023	1.51003	326
2	1.0231	0.01299	2.02153	1.51134	325
3	1.0808	0.01039	2.02337	1.51317	325
4	1.1533	0.00866	2.02464	1.51444	325
5	1.2271	0.00743	2.02533	1.51513	324
6	1.2971	0.00650	2.02563	1.51543	324
7	1.3615	0.00578	2.02570	1.51550	324
8	1.4201	0.00520	2.02565	1.51545	324
9	1.4732	0.00473	2.02552	1.51532	324
≥ 10	2.5001	0.00433	2.02333	1.51313	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p=2$	e $=1$	$n=3$		
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	204
2	1.0030	0.01039	2.02035	1.51016	203
3	1.0198	0.00866	2.02113	1.51094	203
4	1.0513	0.00743	2.02221	1.51201	203
5	1.0915	0.00650	2.02320	1.51300	203
6	1.1351	0.00578	2.02398	1.51378	202
7	1.1792	0.00520	2.02453	1.51433	202
8	1.2221	0.00473	2.02491	1.51471	202
9	1.2631	0.00433	2.02515	1.51495	202
≥ 10	2.3334	0.00400	2.02302	1.51282	202

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p = 2$	e = 1	$n = 4$		
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	163
2	1.0004	0.00866	2.02018	1.50998	162
3	1.0046	0.00743	2.02040	1.51020	162
4	1.0170	0.00650	2.02092	1.51072	162
5	1.0371	0.00578	2.02161	1.51141	162
6	1.0628	0.00520	2.02233	1.51213	162
7	1.0916	0.00473	2.02299	1.51279	162
8	1.1219	0.00433	2.02355	1.51335	162
9	1.1525	0.00400	2.02400	1.51380	162
≥ 10	2.2501	0.00372	2.02236	1.51216	162

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p = 2$	e = 1	$n = 5$		
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	142
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	142
3	1.0011	0.00650	2.02021	1.51001	142
4	1.0054	0.00578	2.02041	1.51021	141
5	1.0148	0.00520	2.02078	1.51058	141
6	1.0289	0.00473	2.02127	1.51107	141
7	1.0468	0.00433	2.02180	1.51160	141
8	1.0672	0.00400	2.02233	1.51213	141
9	1.0892	0.00372	2.02282	1.51262	141
≥ 10	2.2001	0.00347	2.02172	1.51152	141

	$p = 2$	e = 1	$n = 6$		
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	130
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	130
3	1.0003	0.00578	2.02017	1.50997	130
4	1.0017	0.00520	2.02024	1.51004	130
5	1.0058	0.00473	2.02041	1.51021	129
6	1.0131	0.00433	2.02069	1.51049	129
7	1.0237	0.00400	2.02105	1.51085	129
8	1.0368	0.00372	2.02146	1.51126	129
9	1.0520	0.00347	2.02188	1.51168	129
≥ 10	2.1667	0.00325	2.02121	1.51101	129

	$p = 2$	e = 1	$n = 7$		
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	122
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	122
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0005	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0022	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0059	0.00400	2.02040	1.51020	121
7	1.0118	0.00372	2.02062	1.51042	121
8	1.0200	0.00347	2.02090	1.51070	121
9	1.0301	0.00325	2.02122	1.51102	121
≥ 10	2.1429	0.00306	2.02084	1.51064	121

	$p = 2$	e = 1	$n = 8$		
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	116
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	116
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	116
4	1.0002	0.00433	2.02017	1.50997	116
5	1.0009	0.00400	2.02019	1.51000	116
6	1.0026	0.00372	2.02026	1.51007	116
7	1.0058	0.00347	2.02039	1.51019	115
8	1.0107	0.00325	2.02057	1.51037	115
9	1.0173	0.00306	2.02079	1.51059	115
≥ 10	2.1251	0.00289	2.02059	1.51039	115

	$p = 2$	e = 1	$n = 9$		
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0003	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0011	0.00347	2.02020	1.51001	111
7	1.0028	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0057	0.00306	2.02038	1.51018	111
9	1.0098	0.00289	2.02052	1.51033	111
≥ 10	2.1112	0.00274	2.02042	1.51022	111

	$p = 2$	e = 1	$n \geq 10$		
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	108
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	108
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	108
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	108
5	1.0002	0.00347	2.02016	1.50997	108
6	1.0005	0.00325	2.02018	1.50998	108
7	1.0014	0.00306	2.02021	1.51001	108
8	1.0030	0.00289	2.02027	1.51008	108
9	1.0055	0.00274	2.02037	1.51017	108
≥ 10	2.1001	0.00260	2.02032	1.51012	108

	$p = 2$	e = 2	$n = 2$		
1	1.0003	0.01732	2.02023	1.51003	326
2	1.0116	0.01299	2.02155	1.51135	325
3	1.0406	0.01039	2.02349	1.51330	325
4	1.0772	0.00866	2.02496	1.51476	325
5	1.1145	0.00743	2.02585	1.51565	324
6	1.1498	0.00650	2.02633	1.51613	324
7	1.1822	0.00578	2.02654	1.51634	324
8	1.2118	0.00520	2.02659	1.51639	324
9	1.2385	0.00473	2.02654	1.51634	324
≥ 10	1.7501	0.00433	2.02468	1.51448	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p=2$ e $=2$ $n=3$				
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	204
2	1.0015	0.01039	2.02035	1.51016	203
3	1.0099	0.00866	2.02114	1.51095	203
4	1.0258	0.00743	2.02226	1.51206	203
5	1.0461	0.00650	2.02333	1.51313	203
6	1.0681	0.00578	2.02422	1.51402	202
7	1.0904	0.00520	2.02489	1.51469	202
8	1.1121	0.00473	2.02538	1.51518	202
9	1.1328	0.00433	2.02572	1.51552	202
≥ 10	1.6667	0.00400	2.02416	1.51396	202

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
	$p=2$ e $=2$ $n=4$				
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	163
2	1.0002	0.00866	2.02018	1.50998	162
3	1.0023	0.00743	2.02040	1.51020	162
4	1.0085	0.00650	2.02092	1.51072	162
5	1.0187	0.00578	2.02164	1.51144	162
6	1.0316	0.00520	2.02240	1.51220	162
7	1.0461	0.00473	2.02312	1.51292	162
8	1.0614	0.00433	2.02374	1.51354	162
9	1.0769	0.00400	2.02427	1.51407	162
≥ 10	1.6251	0.00372	2.02321	1.51301	162

	$p=2$ e $=2$ $n=5$				
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	142
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	142
3	1.0006	0.00650	2.02021	1.51001	142
4	1.0027	0.00578	2.02041	1.51021	141
5	1.0074	0.00520	2.02078	1.51059	141
6	1.0145	0.00473	2.02128	1.51108	141
7	1.0235	0.00433	2.02184	1.51164	141
8	1.0338	0.00400	2.02240	1.51220	141
9	1.0449	0.00372	2.02293	1.51273	141
≥ 10	1.6001	0.00347	2.02231	1.51211	141

	$p=2$ e $=2$ $n=6$				
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	130
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	130
3	1.0002	0.00578	2.02017	1.50997	130
4	1.0009	0.00520	2.02024	1.51004	130
5	1.0029	0.00473	2.02041	1.51021	129
6	1.0066	0.00433	2.02069	1.51049	129
7	1.0119	0.00400	2.02106	1.51086	129
8	1.0185	0.00372	2.02148	1.51128	129
9	1.0262	0.00347	2.02192	1.51172	129
≥ 10	1.5834	0.00325	2.02160	1.51140	129

	$p=2$ e $=2$ $n=7$				
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	122
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	122
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0003	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0011	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0030	0.00400	2.02040	1.51020	121
7	1.0059	0.00372	2.02062	1.51042	121
8	1.0100	0.00347	2.02090	1.51071	121
9	1.0151	0.00325	2.02123	1.51103	121
≥ 10	1.5715	0.00306	2.02109	1.51089	121

	$p=2$ e $=2$ $n=8$				
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	116
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	116
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	116
4	1.0001	0.00433	2.02017	1.50997	116
5	1.0005	0.00400	2.02019	1.51000	116
6	1.0013	0.00372	2.02026	1.51007	116
7	1.0029	0.00347	2.02039	1.51019	115
8	1.0054	0.00325	2.02057	1.51037	115
9	1.0087	0.00306	2.02079	1.51060	115
≥ 10	1.5626	0.00289	2.02074	1.51054	115

	$p=2$ e $=2$ $n=9$				
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0002	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0006	0.00347	2.02020	1.51001	111
7	1.0014	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0029	0.00306	2.02038	1.51018	111
9	1.0049	0.00289	2.02053	1.51033	111
≥ 10	1.5556	0.00274	2.02052	1.51032	111

	$p=2$ e $=2$ $n\geq 10$				
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	108
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	108
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	108
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	108
5	1.0001	0.00347	2.02016	1.50997	108
6	1.0003	0.00325	2.02018	1.50998	108
7	1.0007	0.00306	2.02021	1.51001	108
8	1.0015	0.00289	2.02027	1.51008	108
9	1.0028	0.00274	2.02037	1.51017	108
≥ 10	1.5501	0.00260	2.02038	1.51018	108

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=3$	$n=2$		
1	1.0003	0.01732	2.02023	1.51003	325
2	1.0116	0.01299	2.02152	1.51132	324
3	1.0407	0.01039	2.02343	1.51323	324
4	1.0773	0.00866	2.02489	1.51469	324
5	1.1146	0.00743	2.02578	1.51558	324
6	1.1499	0.00650	2.02626	1.51606	324
7	1.1823	0.00578	2.02648	1.51628	323
8	1.2118	0.00520	2.02653	1.51633	323
9	1.2386	0.00473	2.02648	1.51629	323
≥ 10	1.7501	0.00433	2.02465	1.51445	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=3$	$n=3$		
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	203
2	1.0015	0.01039	2.02035	1.51015	202
3	1.0100	0.00866	2.02113	1.51093	202
4	1.0258	0.00743	2.02223	1.51203	202
5	1.0461	0.00650	2.02329	1.51309	202
6	1.0682	0.00578	2.02417	1.51397	202
7	1.0904	0.00520	2.02484	1.51464	202
8	1.1121	0.00473	2.02533	1.51513	202
9	1.1329	0.00433	2.02567	1.51547	202
≥ 10	1.6667	0.00400	2.02413	1.51393	202

		$p=3$	$n=4$		
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	162
2	1.0002	0.00866	2.02018	1.50998	162
3	1.0023	0.00743	2.02040	1.51020	162
4	1.0085	0.00650	2.02091	1.51071	162
5	1.0187	0.00578	2.02162	1.51142	162
6	1.0316	0.00520	2.02237	1.51218	162
7	1.0462	0.00473	2.02308	1.51289	162
8	1.0615	0.00433	2.02371	1.51351	162
9	1.0770	0.00400	2.02423	1.51403	162
≥ 10	1.6251	0.00372	2.02318	1.51299	161

		$p=3$	$n=5$		
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	141
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	141
3	1.0006	0.00650	2.02021	1.51001	141
4	1.0028	0.00578	2.02041	1.51021	141
5	1.0075	0.00520	2.02078	1.51058	141
6	1.0146	0.00473	2.02127	1.51107	141
7	1.0236	0.00433	2.02182	1.51162	141
8	1.0338	0.00400	2.02238	1.51218	141
9	1.0449	0.00372	2.02291	1.51271	141
≥ 10	1.6001	0.00347	2.02229	1.51209	141

		$p=3$	$n=6$		
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	129
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	129
3	1.0002	0.00578	2.02017	1.50997	129
4	1.0009	0.00520	2.02024	1.51004	129
5	1.0029	0.00473	2.02040	1.51021	129
6	1.0066	0.00433	2.02068	1.51048	129
7	1.0119	0.00400	2.02105	1.51085	129
8	1.0185	0.00372	2.02147	1.51127	129
9	1.0262	0.00347	2.02190	1.51171	129
≥ 10	1.5834	0.00325	2.02158	1.51138	129

		$p=3$	$n=7$		
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	121
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	121
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0003	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0011	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0030	0.00400	2.02040	1.51020	121
7	1.0059	0.00372	2.02062	1.51042	121
8	1.0101	0.00347	2.02090	1.51070	121
9	1.0151	0.00325	2.02122	1.51102	121
≥ 10	1.5715	0.00306	2.02108	1.51088	121

		$p=3$	$n=8$		
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	115
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	115
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	115
4	1.0001	0.00433	2.02017	1.50997	115
5	1.0005	0.00400	2.02019	1.51000	115
6	1.0013	0.00372	2.02026	1.51006	115
7	1.0029	0.00347	2.02039	1.51019	115
8	1.0054	0.00325	2.02056	1.51037	115
9	1.0087	0.00306	2.02079	1.51059	115
≥ 10	1.5626	0.00289	2.02074	1.51054	115

		$p=3$	$n=9$		
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0002	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0006	0.00347	2.02020	1.51001	111
7	1.0014	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0029	0.00306	2.02038	1.51018	111
9	1.0050	0.00289	2.02052	1.51032	111
≥ 10	1.5556	0.00274	2.02051	1.51032	111

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=3$	$n \geq 10$		
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	108
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	108
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	108
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	108
5	1.0001	0.00347	2.02016	1.50997	108
6	1.0003	0.00325	2.02018	1.50998	108
7	1.0007	0.00306	2.02021	1.51001	107
8	1.0015	0.00289	2.02027	1.51007	107
9	1.0028	0.00274	2.02037	1.51017	107
≥ 10	1.5501	0.00260	2.02037	1.51018	107
		$p=5$	$n=3$		
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	202
2	1.0015	0.01039	2.02035	1.51015	202
3	1.0100	0.00866	2.02112	1.51092	202
4	1.0259	0.00743	2.02221	1.51201	202
5	1.0461	0.00650	2.02327	1.51307	202
6	1.0682	0.00578	2.02414	1.51394	202
7	1.0905	0.00520	2.02481	1.51462	202
8	1.1122	0.00473	2.02530	1.51510	202
9	1.1329	0.00433	2.02565	1.51545	202
≥ 10	1.6667	0.00400	2.02411	1.51391	202
		$p=5$	$n=5$		
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	141
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	141
3	1.0006	0.00650	2.02021	1.51001	141
4	1.0028	0.00578	2.02041	1.51021	141
5	1.0075	0.00520	2.02077	1.51057	141
6	1.0146	0.00473	2.02126	1.51107	141
7	1.0236	0.00433	2.02181	1.51161	141
8	1.0339	0.00400	2.02237	1.51217	141
9	1.0450	0.00372	2.02289	1.51269	141
≥ 10	1.6001	0.00347	2.02228	1.51208	141
		$p=5$	$n=7$		
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	121
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	121
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0003	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0011	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0030	0.00400	2.02040	1.51020	121
7	1.0059	0.00372	2.02061	1.51041	121
8	1.0101	0.00347	2.02090	1.51070	121
9	1.0152	0.00325	2.02122	1.51102	121
≥ 10	1.5715	0.00306	2.02108	1.51088	121

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=5$	$n=2$		
1	1.0003	0.01732	2.02023	1.51003	324
2	1.0116	0.01299	2.02150	1.51130	324
3	1.0407	0.01039	2.02340	1.51320	323
4	1.0773	0.00866	2.02485	1.51465	323
5	1.1146	0.00743	2.02574	1.51554	323
6	1.1499	0.00650	2.02622	1.51602	323
7	1.1824	0.00578	2.02644	1.51624	323
8	1.2119	0.00520	2.02650	1.51630	323
9	1.2386	0.00473	2.02646	1.51626	323
≥ 10	1.7501	0.00433	2.02463	1.51443	323
		$p=5$	$n=4$		
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	162
2	1.0002	0.00866	2.02018	1.50998	162
3	1.0024	0.00743	2.02039	1.51020	162
4	1.0086	0.00650	2.02091	1.51071	161
5	1.0187	0.00578	2.02161	1.51141	161
6	1.0316	0.00520	2.02236	1.51216	161
7	1.0462	0.00473	2.02307	1.51287	161
8	1.0615	0.00433	2.02369	1.51349	161
9	1.0770	0.00400	2.02421	1.51401	161
≥ 10	1.6251	0.00372	2.02317	1.51297	161
		$p=5$	$n=6$		
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	129
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	129
3	1.0002	0.00578	2.02017	1.50997	129
4	1.0009	0.00520	2.02024	1.51004	129
5	1.0029	0.00473	2.02040	1.51020	129
6	1.0066	0.00433	2.02068	1.51048	129
7	1.0119	0.00400	2.02105	1.51085	129
8	1.0185	0.00372	2.02146	1.51126	129
9	1.0262	0.00347	2.02190	1.51170	129
≥ 10	1.5834	0.00325	2.02158	1.51138	129
		$p=5$	$n=8$		
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	115
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	115
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	115
4	1.0001	0.00433	2.02017	1.50997	115
5	1.0005	0.00400	2.02019	1.51000	115
6	1.0013	0.00372	2.02026	1.51006	115
7	1.0029	0.00347	2.02039	1.51019	115
8	1.0054	0.00325	2.02056	1.51036	115
9	1.0087	0.00306	2.02079	1.51059	115
≥ 10	1.5626	0.00289	2.02073	1.51054	115

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=5$	$n=9$		
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0002	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0006	0.00347	2.02020	1.51001	111
7	1.0014	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0029	0.00306	2.02038	1.51018	111
9	1.0050	0.00289	2.02052	1.51032	111
≥ 10	1.5556	0.00274	2.02051	1.51031	111

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=5$	$n\geq 10$		
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	108
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	107
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	107
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	107
5	1.0001	0.00347	2.02016	1.50997	107
6	1.0003	0.00325	2.02018	1.50998	107
7	1.0007	0.00306	2.02021	1.51001	107
8	1.0015	0.00289	2.02027	1.51007	107
9	1.0028	0.00274	2.02037	1.51017	107
≥ 10	1.5501	0.00260	2.02037	1.51017	107

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=2$		
1	1.0003	0.01732	2.02023	1.51003	324
2	1.0116	0.01299	2.02150	1.51130	323
3	1.0407	0.01039	2.02339	1.51319	323
4	1.0773	0.00866	2.02483	1.51464	323
5	1.1146	0.00743	2.02572	1.51552	323
6	1.1499	0.00650	2.02621	1.51601	323
7	1.1824	0.00578	2.02643	1.51623	323
8	1.2119	0.00520	2.02649	1.51629	323
9	1.2386	0.00473	2.02645	1.51625	323
≥ 10	1.7501	0.00433	2.02462	1.51442	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=3$		
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	202
2	1.0015	0.01039	2.02035	1.51015	202
3	1.0100	0.00866	2.02112	1.51092	202
4	1.0259	0.00743	2.02220	1.51200	202
5	1.0461	0.00650	2.02326	1.51306	202
6	1.0682	0.00578	2.02413	1.51394	202
7	1.0905	0.00520	2.02481	1.51461	202
8	1.1122	0.00473	2.02529	1.51509	202
9	1.1329	0.00433	2.02564	1.51544	202
≥ 10	1.6667	0.00400	2.02410	1.51391	202

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=4$		
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	162
2	1.0002	0.00866	2.02018	1.50998	161
3	1.0024	0.00743	2.02039	1.51019	161
4	1.0086	0.00650	2.02090	1.51071	161
5	1.0187	0.00578	2.02161	1.51141	161
6	1.0316	0.00520	2.02236	1.51216	161
7	1.0462	0.00473	2.02306	1.51286	161
8	1.0615	0.00433	2.02368	1.51348	161
9	1.0770	0.00400	2.02421	1.51401	161
≥ 10	1.6251	0.00372	2.02317	1.51297	161

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=5$		
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	141
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	141
3	1.0006	0.00650	2.02021	1.51001	141
4	1.0028	0.00578	2.02041	1.51021	141
5	1.0075	0.00520	2.02077	1.51057	141
6	1.0146	0.00473	2.02126	1.51106	141
7	1.0236	0.00433	2.02181	1.51161	141
8	1.0339	0.00400	2.02236	1.51217	141
9	1.0450	0.00372	2.02289	1.51269	141
≥ 10	1.6001	0.00347	2.02228	1.51208	141

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=6$		
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	129
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	129
3	1.0002	0.00578	2.02017	1.50997	129
4	1.0009	0.00520	2.02024	1.51004	129
5	1.0029	0.00473	2.02040	1.51020	129
6	1.0066	0.00433	2.02068	1.51048	129
7	1.0119	0.00400	2.02104	1.51084	129
8	1.0185	0.00372	2.02146	1.51126	129
9	1.0262	0.00347	2.02189	1.51170	129
≥ 10	1.5834	0.00325	2.02158	1.51138	129

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=7$		
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	121
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	121
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0003	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0011	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0030	0.00400	2.02040	1.51020	121
7	1.0060	0.00372	2.02061	1.51041	121
8	1.0101	0.00347	2.02089	1.51069	121
9	1.0152	0.00325	2.02122	1.51102	121
≥ 10	1.5715	0.00306	2.02107	1.51087	121

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=8$		
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	115
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	115
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	115
4	1.0001	0.00433	2.02017	1.50997	115
5	1.0005	0.00400	2.02019	1.51000	115
6	1.0013	0.00372	2.02026	1.51006	115
7	1.0029	0.00347	2.02039	1.51019	115
8	1.0054	0.00325	2.02056	1.51036	115
9	1.0087	0.00306	2.02079	1.51059	115
≥ 10	1.5626	0.00289	2.02073	1.51053	115

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n=9$		
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0002	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0006	0.00347	2.02020	1.51000	111
7	1.0014	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0029	0.00306	2.02038	1.51018	111
9	1.0050	0.00289	2.02052	1.51032	111
≥ 10	1.5556	0.00274	2.02051	1.51031	111

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$	$n\geq 10$		
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	107
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	107
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	107
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	107
5	1.0001	0.00347	2.02016	1.50997	107
6	1.0003	0.00325	2.02018	1.50998	107
7	1.0007	0.00306	2.02021	1.51001	107
8	1.0015	0.00289	2.02027	1.51007	107
9	1.0028	0.00274	2.02037	1.51017	107
≥ 10	1.5501	0.00260	2.02037	1.51017	107

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p\geq 11$	$n=2$		
1	1.0003	0.01732	2.02023	1.51003	323
2	1.0117	0.01299	2.02149	1.51129	323
3	1.0408	0.01039	2.02338	1.51318	323
4	1.0774	0.00866	2.02482	1.51462	323
5	1.1147	0.00743	2.02571	1.51551	323
6	1.1500	0.00650	2.02620	1.51600	323
7	1.1824	0.00578	2.02642	1.51622	323
8	1.2119	0.00520	2.02648	1.51628	323
9	1.2387	0.00473	2.02644	1.51624	323
≥ 10	1.7501	0.00433	2.02462	1.51442	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p\geq 11$	$n=3$		
1	1.0001	0.01299	2.02016	1.50996	202
2	1.0015	0.01039	2.02035	1.51015	202
3	1.0100	0.00866	2.02111	1.51091	202
4	1.0259	0.00743	2.02220	1.51200	202
5	1.0462	0.00650	2.02325	1.51305	202
6	1.0683	0.00578	2.02413	1.51393	202
7	1.0905	0.00520	2.02480	1.51460	202
8	1.1123	0.00473	2.02528	1.51509	202
9	1.1330	0.00433	2.02563	1.51543	202
≥ 10	1.6667	0.00400	2.02410	1.51390	202

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p\geq 11$	$n=4$		
1	1.0001	0.01039	2.02016	1.50996	161
2	1.0002	0.00866	2.02018	1.50998	161
3	1.0024	0.00743	2.02039	1.51019	161
4	1.0086	0.00650	2.02090	1.51070	161
5	1.0187	0.00578	2.02160	1.51140	161
6	1.0317	0.00520	2.02235	1.51215	161
7	1.0462	0.00473	2.02306	1.51286	161
8	1.0616	0.00433	2.02368	1.51348	161
9	1.0770	0.00400	2.02420	1.51400	161
≥ 10	1.6251	0.00372	2.02316	1.51296	161

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p\geq 11$	$n=5$		
1	1.0001	0.00866	2.02016	1.50996	141
2	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	141
3	1.0006	0.00650	2.02021	1.51001	141
4	1.0028	0.00578	2.02040	1.51021	141
5	1.0075	0.00520	2.02077	1.51057	141
6	1.0146	0.00473	2.02126	1.51106	141
7	1.0236	0.00433	2.02181	1.51161	141
8	1.0339	0.00400	2.02236	1.51216	141
9	1.0450	0.00372	2.02288	1.51269	141
≥ 10	1.6001	0.00347	2.02227	1.51207	141

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p\geq 11$	$n=6$		
1	1.0001	0.00743	2.02016	1.50996	129
2	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	129
3	1.0002	0.00578	2.02017	1.50997	129
4	1.0009	0.00520	2.02024	1.51004	129
5	1.0029	0.00473	2.02040	1.51020	129
6	1.0066	0.00433	2.02068	1.51048	129
7	1.0119	0.00400	2.02104	1.51084	129
8	1.0186	0.00372	2.02146	1.51126	129
9	1.0262	0.00347	2.02189	1.51169	129
≥ 10	1.5834	0.00325	2.02157	1.51137	129

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p \geq 11$	$n = 7$		
1	1.0001	0.00650	2.02016	1.50996	121
2	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	121
3	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	121
4	1.0003	0.00473	2.02018	1.50998	121
5	1.0011	0.00433	2.02025	1.51005	121
6	1.0030	0.00400	2.02039	1.51020	121
7	1.0060	0.00372	2.02061	1.51041	121
8	1.0101	0.00347	2.02089	1.51069	121
9	1.0152	0.00325	2.02122	1.51102	121
≥ 10	1.5715	0.00306	2.02107	1.51087	121

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p \geq 11$	$n = 8$		
1	1.0001	0.00578	2.02016	1.50996	115
2	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	115
3	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	115
4	1.0001	0.00433	2.02017	1.50997	115
5	1.0005	0.00400	2.02019	1.50999	115
6	1.0013	0.00372	2.02026	1.51006	115
7	1.0029	0.00347	2.02038	1.51019	115
8	1.0054	0.00325	2.02056	1.51036	115
9	1.0087	0.00306	2.02078	1.51059	115
≥ 10	1.5626	0.00289	2.02073	1.51053	115

		$p \geq 11$	$n = 9$		
1	1.0001	0.00520	2.02016	1.50996	111
2	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	111
3	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	111
4	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	111
5	1.0002	0.00372	2.02017	1.50997	111
6	1.0006	0.00347	2.02020	1.51000	111
7	1.0015	0.00325	2.02027	1.51007	111
8	1.0029	0.00306	2.02037	1.51018	111
9	1.0050	0.00289	2.02052	1.51032	111
≥ 10	1.5556	0.00274	2.02051	1.51031	111

		$p \geq 11$	$n \geq 10$		
1	1.0001	0.00473	2.02016	1.50996	107
2	1.0001	0.00433	2.02016	1.50996	107
3	1.0001	0.00400	2.02016	1.50996	107
4	1.0001	0.00372	2.02016	1.50996	107
5	1.0001	0.00347	2.02016	1.50997	107
6	1.0003	0.00325	2.02018	1.50998	107
7	1.0007	0.00306	2.02021	1.51001	107
8	1.0015	0.00289	2.02027	1.51007	107
9	1.0028	0.00274	2.02036	1.51017	107
≥ 10	1.5501	0.00260	2.02037	1.51017	107

Tableau II pour le corollaire 2.3

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p = 2$	e = 1		
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	326
2	1.0058	0.01299	2.02007	1.51002	325
3	1.0323	0.01039	2.02015	1.51010	325
4	1.0772	0.00866	2.02026	1.51021	324
5	1.1313	0.00743	2.02035	1.51030	324
6	1.1883	0.00650	2.02042	1.51037	324
7	1.2445	0.00578	2.02046	1.51041	323
8	1.2984	0.00520	2.02049	1.51044	323
9	1.3491	0.00473	2.02050	1.51045	323
≥ 10	2.5000	0.00433	2.02030	1.51025	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p = 2$	e = 2		
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	326
2	1.0029	0.01299	2.02007	1.51002	325
3	1.0162	0.01039	2.02015	1.51010	325
4	1.0387	0.00866	2.02026	1.51021	324
5	1.0660	0.00743	2.02037	1.51032	324
6	1.0947	0.00650	2.02045	1.51040	324
7	1.1230	0.00578	2.02051	1.51046	323
8	1.1502	0.00520	2.02055	1.51050	323
9	1.1757	0.00473	2.02057	1.51052	323
≥ 10	1.7500	0.00433	2.02042	1.51037	323

		$p = 3$			
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	325
2	1.0029	0.01299	2.02007	1.51002	324
3	1.0162	0.01039	2.02015	1.51010	324
4	1.0388	0.00866	2.02026	1.51021	323
5	1.0661	0.00743	2.02036	1.51031	323
6	1.0947	0.00650	2.02044	1.51039	323
7	1.1231	0.00578	2.02050	1.51045	323
8	1.1502	0.00520	2.02054	1.51049	323
9	1.1758	0.00473	2.02057	1.51052	323
≥ 10	1.7500	0.00433	2.02041	1.51036	323

		$p = 5$			
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	324
2	1.0030	0.01299	2.02007	1.51002	323
3	1.0162	0.01039	2.02015	1.51010	323
4	1.0388	0.00866	2.02026	1.51021	323
5	1.0661	0.00743	2.02036	1.51031	323
6	1.0948	0.00650	2.02044	1.51039	323
7	1.1231	0.00578	2.02050	1.51045	323
8	1.1502	0.00520	2.02054	1.51049	323
9	1.1758	0.00473	2.02056	1.51051	323
≥ 10	1.7500	0.00433	2.02041	1.51036	323

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p=7$			
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	324
2	1.0030	0.01299	2.02007	1.51002	323
3	1.0162	0.01039	2.02015	1.51010	323
4	1.0388	0.00866	2.02026	1.51021	323
5	1.0661	0.00743	2.02036	1.51031	323
6	1.0948	0.00650	2.02044	1.51039	323
7	1.1231	0.00578	2.02050	1.51045	323
8	1.1502	0.00520	2.02054	1.51049	323
9	1.1758	0.00473	2.02056	1.51051	323
≥ 10	1.7500	0.00433	2.02041	1.51036	322

m	λ	γ	γ_0	γ_1	N
		$p \geq 11$			
1	1.0001	0.01732	2.02005	1.51000	323
2	1.0030	0.01299	2.02007	1.51002	323
3	1.0163	0.01039	2.02015	1.51010	323
4	1.0389	0.00866	2.02026	1.51021	323
5	1.0661	0.00743	2.02036	1.51031	323
6	1.0948	0.00650	2.02044	1.51039	323
7	1.1232	0.00578	2.02050	1.51045	323
8	1.1503	0.00520	2.02054	1.51049	322
9	1.1758	0.00473	2.02056	1.51051	322
≥ 10	1.7500	0.00433	2.02041	1.51036	322

Références

[1] A. Baker, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms*, *II*, Acta Arith. 24 (1973), 33–36.

[2] —, *The theory of linear forms in logarithms*, in: Transcendence Theory: Advances and Applications, A. Baker and D. W. Masser (eds.), Academic Press, London, 1977, 1–27.

[3] A. O. Gel'fond, *Sur le septième problème de Hilbert*, Izv. Akad. Nauk SSSR 7 (1934), 623–630; Dokl. Akad. Nauk SSSR 2 (1934), 1–6.

[4] —, *Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier*, Mat. Sb. 7 (49) (1940), 7–26.

[5] J. H. Loxton, *Some problems involving powers of integers*, Acta Arith. 46 (1986), 113–123.

[6] J. H. Loxton, M. Mignotte, A. J. van der Poorten and M. Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, C. R. Math. Acad. Sci. Canada 9 (1987), 119–124.

[7] K. Mahler, *Über transzendente P-adische Zahlen*, Compositio Math. 2 (1935), 259–275.

[8] Y. Morita, *A lower bound of $L_p(1,\chi)$ for a Dirichlet character χ*, in: Algebraic Number Theory, Advanced Stud. Pure Math. 17, Academic Press, 1989, 331–346.

[9] A. J. van der Poorten, *Linear forms in logarithms in the p-adic case*, in: Transcendence Theory: Advances and Applications, A. Baker and D. W. Masser (eds.), Academic Press, London, 1977, 29–57.

[10] P. Philippon et M. Waldschmidt, *Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs*, Séminaire de Théorie des Nombres. Paris 1986–87, Progr. Math. 75, Birkhäuser, 1989, 313–347.

[11] —, *Lemme de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France 114 (1986), 355–383 et 115 (1987), 397–398.

[12] K. Ramachandra, *A note on Baker's method*, J. Austral. Math. Soc. 10 (1969), 197–203.

[13] A. Schinzel, *On two theorems of Gel'fond and some of their applications*, Acta Arith. 13 (1967), 177–236.

[14] T. Schneider, *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen*, *I*: *Transzendenz von Potenzen*; *II*: *Transzendenzeigenschaften elliptischer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 65–74.

[15] M. Waldschmidt, *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables*, Invent. Math. 63 (1981), 97-127.

[16] —, *Fonctions auxiliaires et fonctionnelles analytiques*, J. Analyse Math. 56 (1991), 231–279.

[17] M. Waldschmidt, *Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Sém. Théorie Nombres Bordeaux 3 (1991), 129–185.

[18] —, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Canad. J. Math. 45 (1993), 176–224.

[19] —, *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*, Matscience Lecture Notes, Madras, 1992.

[20] K. Yu, *Linear forms in p-adic logarithms*, Acta Arith. 53 (1989), 107–186.

[21] —, *Linear forms in p-adic logarithms II*, Compositio Math. 74 (1990), 15–113.