

**HERISSONS ET MULTHERISSONS  
(ENVELOPPES PARAMETRÉES PAR LEUR APPLICATION DE  
GAUSS)**

RÉMI LANGEVIN,

*Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, Université de Dijon,  
Dijon, France*

GILBERT LEVITT et HAROLD ROSENBERG

*Département de Mathématiques, Université Paris VII,  
Paris, France*

**0. Introduction**

A un corps convexe  $K \subset \mathbf{R}^n$  est associée une fonction de support  $h: S^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$h(z) = \sup_{x \in K} \langle x, z \rangle.$$

Réciproquement, si  $h$  est de classe  $C^1$ , le bord de  $K$  est l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation  $\langle x, z \rangle = h(z)$ ,  $z \in S^{n-1}$ . Les fonctions de support satisfont à

$$(1) \quad h_{K+K'} = h_K + h_{K'}$$

où  $K + K' = \{x + x'; x \in K, x' \in K'\}$  est la somme de Minkowski des convexes  $K$  et  $K'$ .

Une fonction  $h$  quelconque n'est pas nécessairement la fonction de support d'un convexe. Cependant nous pouvons toujours étudier l'enveloppe d'une famille d'hyperplans d'équation

$$(2) \quad \langle x, z \rangle = h(z)$$

c'est-à-dire résoudre pour tout  $z \in S^{n-1}$  le système

$$\begin{aligned} \langle x, z \rangle &= h(z), \\ \langle x, dz \rangle &= dh(z). \end{aligned}$$

Ce système a une solution unique  $x = x_h(z)$  et définit une hypersurface  $H_h = x_h(S^{n-1}) \subset \mathbf{R}^n$ . Les parties lisses de  $H_h$  acquièrent naturellement une orientation transverse, pour laquelle le vecteur normal en un point  $x_h(z)$  n'est autre que  $z$ . On peut ainsi interpréter l'application  $x_h$  comme l'inverse de l'application de Gauss de  $H_h$ .

En particulier un vecteur unitaire  $z$  donné est le vecteur normal à  $H_h$  en au plus un point (en fait en exactement un point si  $H_h$  n'est pas trop singulier). Pour cette raison les enveloppes ci-dessus seront appelées *hérissons*, par analogie avec la disposition des piquants de l'animal du même nom. La somme de Minkowski s'étend naturellement aux hérissons à l'aide de la formule (1).

Notre but ici sera d'étudier la géométrie intégrale des hérissons, de regarder des classes particulières de hérissons stables pour la somme (surfaces minimales dans  $\mathbf{R}^3$ , hypersurfaces algébriques dans  $\mathbf{C}^n$ , etc.), et en dimensions 2 et 3 de décrire les singularités génériques des hérissons (rebroussements, queues d'aronde) et d'en étudier la topologie algébrique. Enfin nous annoncerons des résultats de [LLR] concernant des surfaces quelconques dans  $\mathbf{R}^3$  dont les singularités sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde ("A-mersions").

### 1. Géométrie intégrale des hérissons

Alexandrov [ $A_1, A_2, A_3, A_4$ ] a utilisé les fonctions de support pour étudier les convexes, en particulier polyédriques. Par exemple le volume d'un convexe  $K$  de  $\mathbf{R}^n$  s'écrit en fonction de  $h$  sous la forme

$$v(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h \cdot \det(\text{Hess}(h) + h \cdot \text{Id}_{n-1}) dz.$$

Cette formule peut servir à définir le volume d'un hérisson  $v(H_h)$ , ou simplement  $v(h)$ . Géométriquement,  $v(H_h)$  est l'intégrale sur  $\mathbf{R}^n - H_h$  de l'indice  $i_h(x)$  défini comme le nombre algébrique d'intersection d'une demi-droite orientée d'origine  $x$  avec l'hypersurface  $H_h$  munie de son orientation transverse (ce nombre ne dépend pas de la demi-droite, pourvu qu'on se restreigne à un ouvert dense de directions).

On peut également définir des volumes mixtes de hérissons en considérant les coefficients du polynôme  $v(\sum \lambda_i h_i)$ . En particulier, comme pour un convexe, les coefficients de  $v(\lambda H_h + \mu B)$ , où  $B$  est la boule unité de  $\mathbf{R}^n$ , s'interprètent géométriquement comme des quermassintégrales, en regardant les lieux critiques des projections du hérisson sur des sous-espaces linéaires.

Remarquons aussi que le volume des hérissons parallèles à un convexe donné (de fonction de support  $h+r$ ,  $r \in \mathbf{R}$ ) vérifie encore la formule de Steiner [ $S_a$ ], même dans le cas où le hérisson parallèle a des singularités (voir Fig. 1)

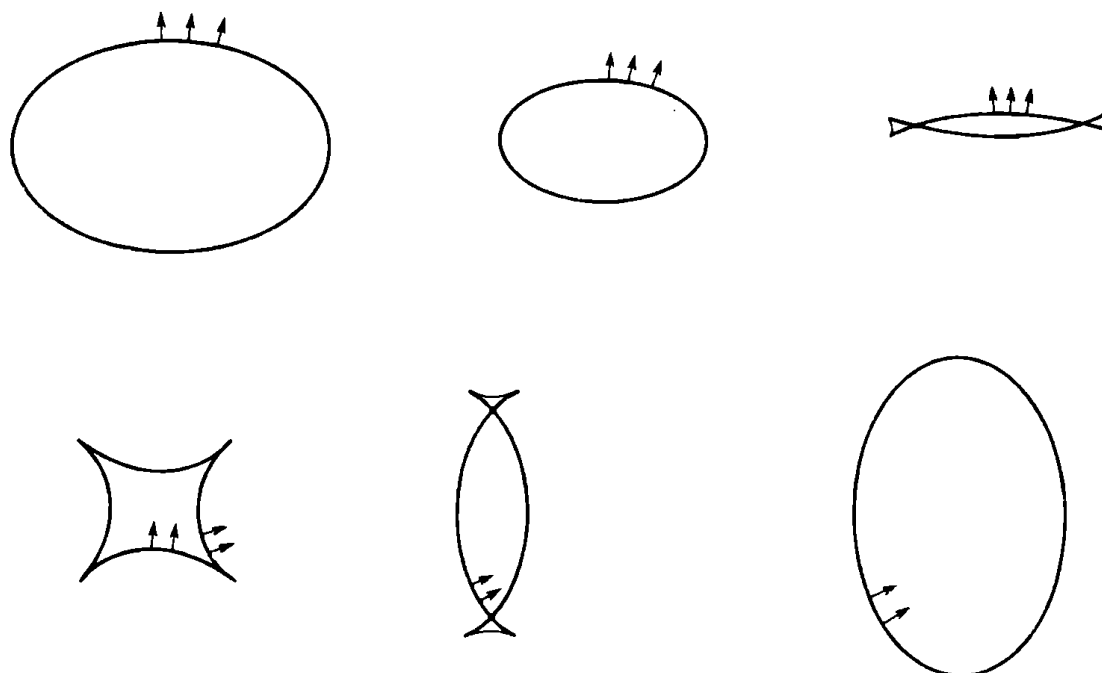


Fig. 1

$h+r$ ,  $r$  négatif décroissant.

On observera que dans la famille ci-dessus n'ont été dessinées que des singularités génériques de famille à un paramètre de fronts d'onde (voir aussi parties 4 et 5).

Dans le plan, le volume mixte  $v(H_h, B)$  définit la *longueur algébrique* de  $H_h$ , donnée simplement par

$$l(h) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} h_s(\theta) d\theta, \text{ où } h_s(\theta) = \frac{1}{2}(h(\theta) + h(\theta + \pi))$$

s'interprète géométriquement (au signe près) comme la distance entre les deux valeurs critiques de la projection orthogonale de  $H_h$  sur la droite d'angle  $\theta$ . La longueur absolue

$$|l|(h) = \int_0^{2\pi} |h_s(\theta)| d\theta$$

intervient dans l'étude de la courbure totale de certains feuilletages du disque.

Signalons enfin que ces considérations peuvent s'adapter à des situations plus générales. Par exemple le polygone de Newton associé à une singularité isolée de champ de vecteurs sur  $C^2$  peut être vu comme un hérisson (projectif au sens de la partie 5). Ceci permet de redémontrer l'inégalité entre multiplicités mixtes voir [Ar<sub>3</sub>] (J. P. Rolin).

## 2. Hérissons et multihérissons minimaux dans $\mathbf{R}^3$

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des surfaces minimales complètes orientées  $i: M \rightarrow \mathbf{R}^3$  telles que:

- $i$  est continue, et est une immersion en dehors d'un nombre fini de points;
- la courbure totale  $K(M)$  de  $i(M)$  est finie.

La théorie classique d'Osserman [O] s'étend aux surfaces de  $\mathcal{M}$ . Tout d'abord la représentation de Weierstrass  $(g, \omega)$  se prolonge méromorphiquement aux singularités; si  $g$  n'a pas de pôle aux singularités (ce qu'on peut toujours obtenir en effectuant une rotation),  $\omega$  est en fait holomorphe aux singularités et s'y annule. Nous appellerons ces singularités *points de branchement géométrique*.

De plus la surface  $M$  est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte  $\bar{M}$  privée d'un nombre fini de points, et la représentation de Weierstrass se prolonge méromorphiquement à  $\bar{M}$ .

En particulier l'application de Gauss  $\bar{g}: \bar{M} \rightarrow S^2$  est un revêtement ramifié à  $n$  feuillets ( $n = K(M)/(4\pi)$ ), et pour cette raison nous appelons  $M$  un *multihérisson minimal* (d'ordre  $n$ ); si  $n = 1$ , nous parlons bien sûr de *hérisson minimal*.

On peut montrer que le nombre de points de  $S^2$  qui ne sont pas dans l'image  $g(M)$  est au plus égal à  $\frac{4n+b}{n+1}$  où  $b$  est le nombre de points de branchement géométrique (comptés avec multiplicité), et  $n$  est le degré de l'application de Gauss. Ce résultat est dû à Osserman [O] si  $M$  est non singulière.

Il serait intéressant de savoir si l'application de Gauss a encore une image dense lorsqu'on ne suppose plus que  $K(M)$  est fini. Osserman a montré que c'est vrai si  $M$  est simplement connexe [O]. C'est encore vrai si  $M$  n'est pas simplement connexe mais admet un nombre fini de points de branchement.

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont dans  $\mathcal{M}$  (éventuellement  $M_1 = M_2$ ), on définit  $M_1 + M_2$  en associant à tout  $z \in S^2$  qui n'est pas l'image par l'application de Gauss d'un bout de  $M_1$  ou  $M_2$ , la somme dans  $\mathbf{R}^3$  de tous les points de  $M_1$  et  $M_2$  en lesquels le vecteur normal est  $z$  (comptés avec multiplicité le cas échéant). On peut montrer que  $M_1 + M_2$  est toujours soit une surface réduite à un point, soit un hérisson minimal (à condition éventuellement de compléter  $M_1 + M_2$  par un nombre fini de points).

En particulier cette somme et les homothéties de  $\mathbf{R}^3$  donnent à l'ensemble formé des hérissons minimaux et des points une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  (de dimension infinie).

Cette construction donne un chemin canonique  $M_t = (1-t)M_0 + tM_1$  joignant deux hérissons minimaux  $M_0 + M_1$ . Il serait intéressant de dessiner

les surfaces  $M_i$  lorsque  $M_0$  est un caténoïde et  $M_1$  la surface de Enneper.

Weierstrass utilisait déjà des combinaisons linéaires (au moins locales) de surfaces minimales pour relier une surface minimale et sa conjuguée (déformation de Weierstrass).

Terminons cette partie par la remarque suivante: étant donné  $p$  points  $z_1, \dots, z_p \in S^2$ , il existe un multihérisson minimal admettant exactement  $p$  bouts de type caténoïde de directions normales  $z_1, \dots, z_p$  si et seulement si il existe des réels positifs  $a_1, \dots, a_p$  tels que  $\sum_{i=1}^p a_i z_i = 0$ .

### 3. Multihérissons

Nous appelons *multihérissons* les hypersurfaces pour lesquelles le nombre de points où l'hyperplan tangent est parallèle à un hyperplan donné est fini et constant (au moins pour un ouvert dense de directions d'hyperplan). Les considérations de géométrie intégrale de la partie 1 peuvent bien sûr se généraliser aux multihérissons.

En plus des multihérissons minimaux (voir partie 2), notons comme exemples les plongements tendus de surfaces dans  $R^3$  [Ku] et les hypersurfaces algébriques dans  $C^n$ .

On peut faire la somme de deux hypersurfaces algébriques  $H_1$  et  $H_2$ : pour chaque direction d'hyperplan, on considère la somme dans  $C^n$  de tous les points de  $H_1$  et  $H_2$  en lesquels l'espace tangent est parallèle à l'hyperplan donné.

On montre que l'on obtient ainsi une hypersurface algébrique (qui est bien sûr un hérisson). Par exemple, dans  $C^2$ , la somme du multihérisson  $x^p + y^{p+1} = \lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) avec lui-même est, à une homothétie près, le hérisson  $x^p + y^{p+1} = 0$ .

### 4. Hérissons dans $R^2$

Nous considérons ici les hérissons plans  $H_h$  définis par une fonction de support  $h: S^1 \rightarrow R$  de classe  $C^\infty$ . Les singularités de  $H_h$  (i.e., les points où  $x_h$  n'est pas une immersion) sont précisément les points où  $h + h''$  (qui s'identifie au rayon de courbure) s'annule. Les hérissons sans singularités sont simplement les courbes convexes. Génériquement,  $h' + h'''$  ne s'annule pas en même temps que  $h + h''$ , et la singularité correspondante est un *rebroussement* (de première espèce:  $y^2 = x^3$ ).

Les exemples les plus simples sont donnés par les hérissons "harmoniques"  $h_n(\theta) = \sin n\theta$  ( $n$  entier  $\geq 2$ ), qui sont géométriquement des hypercycloïdes (parcourues deux fois si  $n$  est impair). On peut en fait montrer qu'un hérisson plan à singularités génériques en nombre  $\geq 4$  est

*régulièrement homotope à un  $h_n$*  (par homotopie régulière, nous entendons un chemin dans l'espace des hérissons à singularités génériques;  $n$  est égal à la moitié du nombre de singularités).

Considérons le flot géodésique (ou jeu de billard) dans le domaine bordé par un hérisson plongé. Ce billard est dispersant au sens de Bunimovitch et Sinaï [Bu-Si], c'est-à-dire qu'il existe un scindement invariant du fibré tangent en sous-espaces contractant et dilatant, défini presque partout (système Anosov presque partout). Ce système est-il ergodique? Les points périodiques sont-ils denses?

### 5. Hérissons dans $\mathbf{R}^3$

Pour la topologie  $C^4$  sur les fonctions de support  $h$ , les singularités d'un hérisson dans  $\mathbf{R}^3$  sont équivalentes à l'un des deux types suivants (cf. les résultats d'Arnold sur les fonts d'onde [Ar<sub>1</sub>]):

– *arête de rebroussement*

$$(x_1, x_2, x_3) = (u^2, u^3 + v^2, v),$$

c'est-à-dire  $(x_2^2 = x_1^3) \times \mathbf{R}$  rendu hérisson par le terme  $v^2$ ;

– *queue d'aronde*

$$(x_1, x_2, x_3) = (u, uv + \varepsilon v^3, u^2 - 2uv^2 - 3\varepsilon v^4).$$

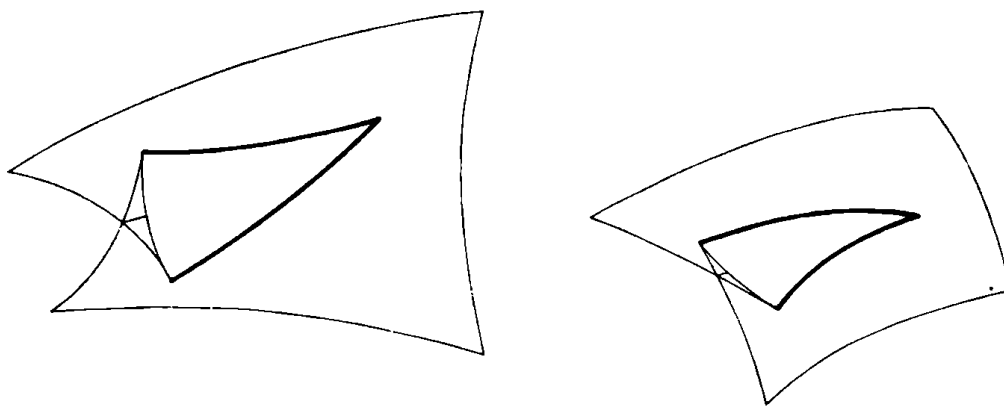


Fig. 2

Les deux modèles de queue d'aronde (*positif* ou *négatif* selon le signe de  $\varepsilon = \pm 1$ ) sont difféomorphes, mais distingués géométriquement par le signe de la courbure de Gauss dans la partie en forme de queue. Les queues d'aronde sont en nombre pair (sur  $S^2$ ) car de chaque queue d'aronde part une courbe de points doubles (Fig. 2).

Un hérisson est *projectif* s'il est défini par une fonction  $h$  telle que  $h(-z) = -h(z)$  (où  $-z$  est l'antipode de  $z$ ); par exemple, dans  $\mathbf{R}^2$ ,  $h_n$  est projectif si

et seulement si  $n$  est impair. Pour un hérisson projectif, il existe au plus un point de  $H_h$  où le plan tangent est parallèle à un plan (non orienté) donné. Il est clair qu'il n'existe pas de hérisson projectif immergé dans  $R^3$ .

**PROBLÈME.** Existe-t-il un hérisson projectif dont toutes les singularités sont des arêtes de rebroussement (sans queue d'aronde)?

Revenons au cas général. Le lieu singulier d'un hérisson générique se compose (à la source  $S^2$ ) d'un nombre fini de courbes simples disjointes contenant des points isolés correspondant aux queues d'aronde.

Dans chacune des composantes du complémentaire de ces courbes la courbure de Gauss de la surface a un signe constant, et nous notons  $r^+$  (resp.  $r^-$ ) le nombre de régions de courbure positive (resp. négative). Soit d'autre part  $q^+$  (resp.  $q^-$ ) le nombre de queues d'aronde positives (resp. négatives). On a alors la formule

$$(3) \quad r^+ - r^- - \frac{q^+ - q^-}{2} = 1.$$

Une façon possible de montrer cette formule consiste à remarquer que, si on ajoute une constante  $c$  assez grande à la fonction  $h$ , le hérisson  $h+c$  est convexe non singulier et donc vérifie la formule ( $r^+ = 1, r^- = q^+ = q^- = 0$ ).

Le chemin de surfaces parallèles  $h_t = h+tc$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) peut être rendu générique, de sorte que lorsque  $t$  varie les modifications qualitatives des singularités de  $h_t$  soient de l'un des 5 types décrits par Arnold [Ar<sub>2</sub>] comme métamorphoses génériques des fronts d'onde (voir Fig. 3\*). On vérifie alors que ces modifications ne changent pas le membre de gauche de (3).

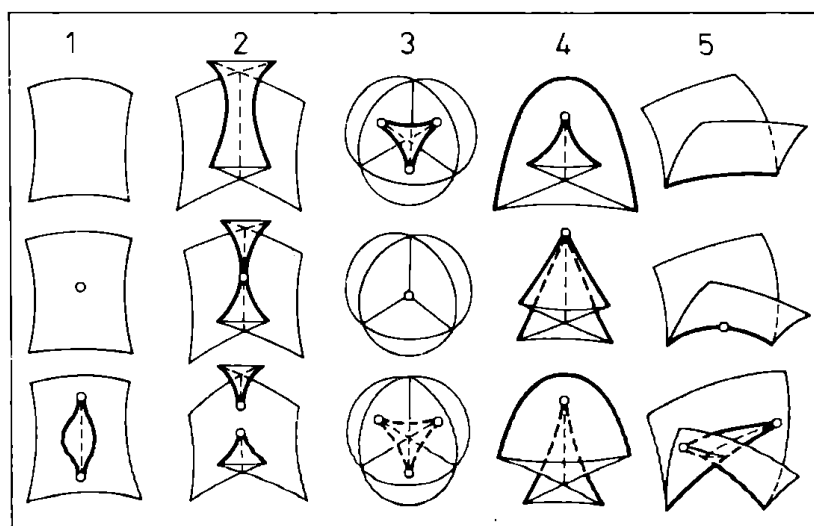


Fig. 3

\* Figure extraite de [Ar<sub>2</sub>]

Plus généralement, nous considérons dans [LLR], sous le nom d'*A-mersions*, les applications d'une surface  $M$ , compacte orientable sans bord, dans  $\mathbb{R}^3$  dont les singularités sont des arêtes de rebroussement et des queues d'aronde.

Deux *A-mersions*  $f_0$  et  $f_1$  sont *A-homotopes* si on peut les joindre par un chemin  $f_t$ , où les  $f_t$  sont des *A-mersions* sauf pour un nombre fini de valeurs de  $t$  en lesquelles  $f_t$  se modifie de l'une des cinq façons considérées plus haut.

Dans [LLR] nous classifions les classes de *A-homotopie* par des invariants algébriques. Par exemple, quand  $M = S^2$ , les classes de *A-homotopie* sont classifiées par un entier  $d \geq 0$ , qui s'interprète géométriquement comme la valeur absolue du degré de l'application de Gauss.

Si  $M$  est de genre plus grand, il faut faire intervenir un autre invariant  $k \geq 0$ , qui est intuitivement le "nombre de zigzags" de la surface. Nous nous bornons ici à donner un exemple avec  $k > 0$ ; c'est une surface de révolution sans queue d'aronde ( $M = T^2$ ).

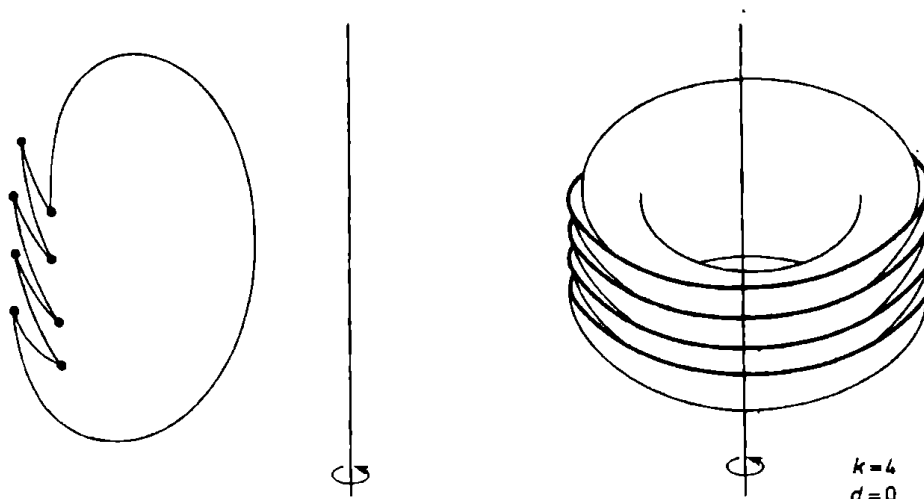


Fig. 4

La connaissance de  $d$  et  $k$  détermine l'*A-mersion* modulo *A-homotopie* et composition avec un difféomorphisme de  $M$ .

Nous généralisons également aux *A-mersions* la formule (3) ci-dessus, et nous donnons en fonction de  $d$  et  $k$  des minoration pour le nombre d'arêtes de rebroussement et de queues d'aronde.

### Références

- [A<sub>1</sub>], [A<sub>2</sub>], [A<sub>3</sub>], [A<sub>4</sub>] A. D. Alexandrov, *Sur la théorie des volumes mixtes des corps convexes* I, II, III, IV, Mat. Sb. 2 (44), 947–971; 2 (44), 1204–1238; 3 (45), 27–46; 3 (45), 227–251 (1937 et 1938).



- [Ar<sub>1</sub>] V. I. Arnold, *Critical points of smooth functions and their normal forms*, Uspekhi Mat. Nauk 30 (1975), 3–65.
- [Ar<sub>2</sub>] –, *Catastrophe Theory*, Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [Ar<sub>3</sub>] –, *Chapitres supplémentaires de la théorie d'équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscow 1980 (traduction du Russe).
- [Be] D. Bennequin, *Caustique Mystique* (d'après Arnold et al), exposé séminaire Bourbaki n° 634, novembre 1984.
- [Bu–Si] L. Bunimovitch et J. Sinaï, Mat. Sb. (N.S.) 90 (1973), 416 et suivantes.
- [Ga] G. Gallarotti, *Lecture on the billiard*, Springer-Verlag (Physics).
- [LLR] R. Langevin, G. Levitt et H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans  $R^3$* .
- [O] R. Osserman, *A Survey on Minimal Surfaces*, Van Nostrand–Reinhold, New York 1969.

*Presented to the semester  
Singularities  
15 February–15 June, 1985*

---