

**ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ
В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ**

Г. Г. ЕЛЕНИН, С. П. КУРДЮМОВ

Институт Прикладной Математики АН СССР, Москва, СССР

Введение

Среди большого разнообразия проявлений законов нелинейного мира, одним из самых удивительных феноменов является образование упорядоченных структур из флюктуаций в однородной среде. К настоящему времени накопилось много примеров из различных областей естествознания, в которых из хаотических состояний возникают упорядоченные пространственно-временные структуры. Несмотря на различную природу систем, при переходе от неупорядоченного состояния к упорядоченному они ведут себя аналогичным образом, что свидетельствует о существовании некоторых фундаментальных принципов их функционирования. Изучением таких принципов занимается быстро развивающаяся наука — синергетика [1]. На важность проблемы возникновения структур и интерес к этим вопросам указывает растущее число монографий [1]–[4] и международных симпозиумов [5].

Вполне естественно, что один из самых мощных методов современного естествознания — математический метод широко используется при изучении структур в нелинейных средах. В настоящее время существует новый эффективный способ анализа нелинейных систем — вычислительный эксперимент. Традиционные методы математической физики и современные численные методы позволяют анализировать рассматриваемое явление, накапливать о нем информацию, что служит мощным стимулом для создания новых понятий и математических методов, адекватных качественным особенностям нелинейных явлений [6], [7].

Предлагаемая работа посвящена изучению диссипативных структур режимов с обострением, которые образуются в теплопроводной нелинейной среде.

1. Постановка задачи

Математической моделью целинейной среды является квазилинейное уравнение параболического типа:

$$(1) \quad T_t = (K(T)T_x)_x + Q(T),$$

$$K(T) > 0, \quad K(0) = 0; \quad Q(T) > 0, \quad Q(0) = 0,$$

для которого ставится задача Коши с симметричным, непрерывным, ограниченным распределением температуры:

$$T(x, 0) = T_0(x) = T_0(-x) \geq 0, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

Сформированная задача, вообще говоря, имеет решение в некотором обобщенном смысле [8]. Решение может не обладать вытекающей из уравнения гладкостью там, где $T(x, t) = 0$. В связи с этим будем различать два случая.

(а) Начальное распределение отлично от нуля на ограниченном участке среды

$$(2) \quad T(x, 0) = \begin{cases} T_0(x) > 0, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

(б) Начальное распределение отлично от нуля во всем пространстве

$$(3) \quad T(x, 0) = T_0(x) > 0, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad \text{причем } \lim_{x \rightarrow \infty} T_0(x) = 0.$$

В первом случае задача заключается в определении температуры на отрезке переменной длины $[0, x_\varphi(t)]$ и закона движения его правой границы $x = x_\varphi(t)$ (фронт тепловой волны). Возможность существования конечной скорости движения фронта указана в работе [9]. В работах [10], [11] установлено, что выполнение условия:

$$(4) \quad \int_0^\varepsilon (K(x)x^{-1}) dx < +\infty, \quad \varepsilon > 0$$

обеспечивает существование конечной скорости распространения возмущений. В случае расходимости интеграла (4) для любого $\varepsilon > 0$ происходит мгновенное распространение тепла и $T(x, t) > 0$ для любого $x \in [0, +\infty)$. Границные условия в центре симметрии и на фронте имеют вид

$$(5) \quad T_x(0, t) = 0,$$

$$(6) \quad T(x_\varphi(t), t) = 0, \quad K(T(x_\varphi(t), t))T_x(x_\varphi(t), t) = 0,$$

$$(7) \quad x_\varphi(0) = a.$$

Во втором случае задача заключается в определении температурного поля на всей полуправой $0 \leq x < +\infty$. Границные условия имеют вид:

$$(8) \quad T_x(0, t) = 0,$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = 0.$$

В дальнейшем задачу (1), (2), (5), (6), (7) при выполнении условия (4) будем называть задачей А; задачу (1), (3), (8), (9) — задачей Б.

Поставленные задачи могут быть решены в полной мере с помощью численных методов интегрирования уравнения (1) [12]. Однако прежде мы рассмотрим ряд частных решений уравнения (1) с фиксированными функциями $K(T)$, $Q(T)$. Эти решения с одной стороны сохраняют интересующие нас свойства задач, с другой стороны, допускают использование сравнительно простых методов традиционного математического анализа. Такой подход (в духе современного численного эксперимента [6]) позволяет более рельефно выделить основные черты процесса нагрева в рассматриваемой среде, ввести ряд основных понятий, наметить пути дальнейшего исследования, затем расширить класс коэффициентов $K(T)$, $Q(T)$, сохраняющих интересующие нас свойства решений.

Уравнение (1) рассматривалось в большом числе работ. При этом предполагалось, что источник имеет настолько ограниченный рост, что решение задачи существует в целом. В отличие от этих работ будем интересоваться неограниченными решениями поставленных задач — режимами с обострением.

Определение 1. Решение задачи называется *неограниченным*, если существуют $\tau > 0$ и хотя бы одно значение $x = x_0 \geq 0$ такие, что $|T(x, t)| < \infty$ при любом $t \in [0, \tau]$ и $\lim_{t \rightarrow \tau} |T(x_0, t)| = \infty$. Величину τ называют *временем существования решения* или *моментом обострения* [13], [14].

Интерес к режимам с обострением вызван рядом их необычных свойств. В работах [13]–[18] было показано, что развитие режимов с обострением приводит к локализации тепла, образованию и взаимодействию тепловых структур.

Определение 2. Будем говорить, что в задаче А имеет место *явление локализации тепла, вызванное режимом с обострением*, если для некоторого значения момента обострения $\tau > 0$ существует такое значение $x = x_0 \geq a$, что $\lim_{t \rightarrow \tau} x_\varphi(t) \leq x_0$ и при $x > x_0$ $T(x, t) = 0$ для любого $t \in [0, \tau]$. Минимально возможную величину x_0 называют *глубиной локализации*.

В отличие от эффекта конечной скорости распространения фронта тепловой волны локализация тепла определяется не локальным, а глобальным характером входных данных задачи. Очевидно, локализация невозможна при бесконечной скорости распространения фронта тепловой волны, то есть при нарушении условия (4). Естественно, что явление локализации определенное выше, не имеет места в задаче Б.

Однако, в задаче Б может иметь явление эффективной локализации тепла.

Определение 3. Будем говорить, что в задаче Б имеет место *эффективная локализация тепла, вызванная режимом с обострением*, если существуют такие $T_0 > 0$ и $x_0 > 0$, что для любых $t \in [0, \tau)$ и $x > x_0$ выполняется неравенство $T(x, t) < T_0$. Минимальное значение x_0 называют *глубиной эффективной локализации тепла* (см. также [25]).

Продемонстрируем особенности режимов с обострением на достаточно широком классе степенных функций:

$$(10) \quad K(T) = T^\sigma, \quad Q(T) = T^\beta, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1.$$

Условие (4) в этом случае удовлетворяется.

Степенные функции $K(T)$, $Q(T)$ допускают существование автомодельных решений, изучению которых посвящен следующий параграф. Заметим, что в работе [19] (настоящий сборник, стр. 113–123) приведены все классы функций $K(T)$, $Q(T)$ допускающие существование так называемых инвариантных решений [20]. Частным случаем этих решений являются автомодельные решения.

2. Автомодельные решения

1. Частные решения уравнения (1) при $K(T) = T^\sigma$, $Q(T) = T^\beta$ вида

$$(1) \quad T(x, t) = g(t)\Theta(\xi), \quad \xi = x\varphi^{-1}(t)$$

существуют тогда и только тогда,

$$(2) \quad \begin{aligned} g(t) &= (1 - t\tau^{-1})^{-\gamma}, \\ \varphi(t) &= (1 - t\tau^{-1})^{\alpha}, \\ \gamma &= (\beta - 1)^{-1}, \quad \alpha = 0,5(\beta - \sigma - 1)(\beta - 1)^{-1}, \\ \varphi(t) &= f(g(t)), \quad f(z) = z^{-0,5(\beta - (\sigma + 1))}, \end{aligned}$$

а функция $\Theta(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$(3) \quad (\Theta^\sigma \Theta'_\xi)' - \frac{a}{\tau} \xi \Theta'_\xi + \Theta^\beta - \frac{\gamma}{\tau} \Theta = 0.$$

Границные условия для уравнения (3) в случае задачи А имеют вид:

$$(4) \quad \Theta'_\xi(0) = 0, \quad \Theta(a) = 0, \quad \Theta^\sigma(a) \Theta'_\xi(a) = 0;$$

в случае задачи Б:

$$(5) \quad \Theta'_\xi(0) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Theta(\xi) = 0.$$

2. Краевые задачи (3), (4) и (5) являются задачами на собственные значения τ и определяют собственные функции $\Theta_\tau(\xi)$.

Задача (3), (5) имеет решение $\Theta_\tau(\xi) \not\equiv 0$ при любом τ , если существует решение $\Theta_{\tau_1}(\xi)$ для некоторого τ_1 такого, что $\tau\tau_1 > 0$ при этом

$$(6) \quad \Theta_\tau(\xi) = (\tau\tau_1^{-1})^{-\nu} \Theta((\tau\tau_1^{-1})^{-a} \xi).$$

Если задача (3), (4) имеет решение $\Theta_{\tau_1}(\xi)$ на отрезке $\xi \in [0, a_1]$, то существует решение на любом другом отрезке $\xi \in [0, a]$, $\beta \neq \sigma+1$, при этом

$$(7) \quad \tau = \tau_1(a a_1^{-1})^{1/a}.$$

Величины $\tau = 0$, $\tau = \infty$ не являются собственными числами. В справедливости этих утверждений можно убедиться непосредственной проверкой.

Положительное собственное значение τ и соответствующая ему собственная функция определяет автомодельное решение режима с обострением. Отрицательное собственное значение τ вместе с собственной функцией определяет автомодельное решение обычного режима, существующего в целом для любого $t \in [0, +\infty)$.

3. Автомодельные решения задачи А могут существовать при $1 < \beta < \sigma+1$ и при $\beta > \sigma+3$. В первом случае имеют место режимы с обострением. Во втором — обычные режимы.

Действительно, пусть задача (3), (4) имеет решение на отрезке $[0, a]$, тогда главный член асимптотики решения при $\xi \rightarrow a - 0$ имеет вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \Theta(\xi) &\sim A_0(a - \xi)^{1/\alpha}, \quad \beta > 1, \quad \sigma > 0, \\ A_0 &= (-a\tau/\sigma)^{1/\alpha}, \quad \alpha = 0,5(\beta - \sigma - 1)(\beta - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Выражение (8) имеет смысл при выполнении неравенства:

$$(9) \quad \tau(\beta - \sigma - 1) < 0.$$

Проинтегрировав (3) на отрезке $[0, a]$ с учетом граничных условий (4) получаем

$$(10) \quad \int_0^a \Theta^\beta(\xi) d\xi \left(\int_0^a \Theta(\xi) d\xi \right)^{-1} = -0,5(\beta-\sigma-3)(\beta-1)^{-1}\tau^{-1} > 0.$$

Из (9), (10) следует, что для существования автомодельных решений задачи А в режиме с обострением необходимо выполнение условия:

$$(11) \quad 1 < \beta < \sigma+1$$

в обычном режиме — условия:

$$(12) \quad \beta > \sigma+3.$$

Задача А не имеет автомодельных решений при $\sigma+3 > \beta > \sigma+1$.

При $\beta = \sigma+1$ автомодельное решение задачи А легко находится интегрированием уравнения (3). Обобщенное монотонное решение имеет вид:

$$(13) \quad \Theta(\xi) = \begin{cases} R_1 \cos^{2/\sigma} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\sigma+1}} \xi \right), & 0 \leq \xi < 0,5L_s, \\ 0, & \xi \geq 0,5L_s \end{cases}$$

и существует лишь на отрезках $\xi = x \in [0, a]$, $a \geq 0,5L_s$

$$(14) \quad L_s = 2\pi\sigma^{-1}\sqrt{\sigma+1}, \quad R_1 = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\tau\sigma(\sigma+2)} \right)^{1/\sigma}.$$

Решение (13) было найдено в работе [13], величина L_s — названа фундаментальной длиной S-режима с обострением.

4. Задача Б не имеет автомодельных решений при $1 < \beta < \sigma+1$. Автомодельные решения задачи Б в режиме с обострением для начальных автомодельных данных $T(x, 0) = \Theta(x)$ с ограниченным количеством тепла $\int_0^\infty \Theta(x) dx < +\infty$ могут существовать при $\sigma+3 > \beta > \sigma+1$.

Действительно, асимптотика решений задачи Б при $\xi \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$(15) \quad \Theta(\xi) = C\xi^{-2(\beta-\sigma-1)^{-1}}, \quad C = \text{const},$$

следовательно, $\beta > \sigma+1$.

Интегрируя (3) от 0 до ξ_0 с использованием левого граничного

условия (5) и, переходя к пределу $\xi_0 \rightarrow +\infty$, получаем при $\beta < \sigma + 3$:

$$(16) \quad \int_0^\infty \Theta^\beta(\xi) d\xi \left(\int_0^\infty \Theta(\xi) d\xi \right)^{-1} = -(\beta - \sigma - 3) 0,5 (\beta - 1)^{-1} \tau^{-1} > 0$$

откуда следует положительность собственного значения τ .

5. В таблице 1 проведена классификация решений не только по характеру изменения температуры в $x = 0$ во времени (обычные режимы и режимы с обострением), но и по увеличению и уменьшению полуширины решения.

Определение 4. Пусть $\Theta'_\xi(\xi) < 0$, $\xi > 0$; $\Theta'_\xi(0) = 0$, тогда полушириной решения $\Theta(\xi)$ называют величину $x_h(t)$ определяемую из условия $T(x_h(t), t) = 0,5 T(0, t)$.

Из (2) следует, что по различию в характере изменения полуширины во времени существуют три режима [14]: *HS*-режим, *S*-режим, *LS*-режим. При *HS*-режиме полуширина монотонно увеличивается до бесконечности, при *S*-режиме неизменна, при *LS*-режиме монотонно уменьшается.

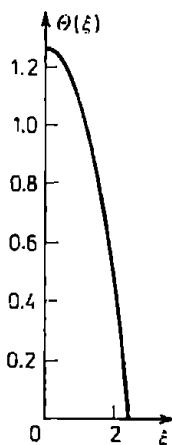


Рис. 1

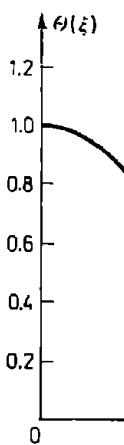


Рис. 2

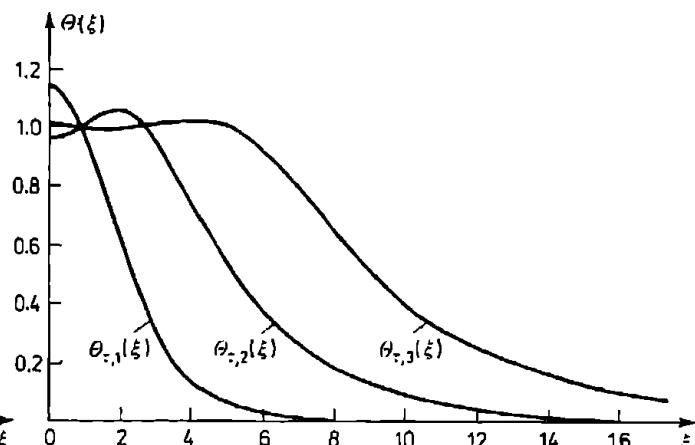


Рис. 3

6. При $\sigma + 1 > \beta > 1$, как показано в работе [15], решение задачи (3), (4) существует при любом $a > 0$ и представляет собой монотонно убывающую функцию (рис. 1). Время существования решения однозначно определяется величиной a . Собственная функция $\Theta_\tau(\xi)$ определяет автомодельное решение задачи А в виде тепловой волны *HS*-режима с обострением. Фронт тепловой волны $x_\varphi(t) = a(1 - t/\tau)^a$ распространяется с конечной скоростью, однако за конечное время уходит на бесконечность.

7. При $\beta > \sigma + 3$ для каждого $a > 0$ краевая задача (4), (3) имеет единственное нетривиальное решение $\Theta_\tau(\xi)$ с определенным значением $\tau < 0$. Собственная функция $\Theta_\tau(\xi)$ является монотонно убывающей

(рис. 2) и определяет автомодельную тепловую волну обычного HS -режима с убывающей амплитудой. Абсолютная величина собственного числа определяет время, в течение которого амплитуда волны уменьшается в 2^{σ} раз. Парадоксальность автомодельной тепловой волны обычного HS -режима заключается в следующем. В каждой точке пространства, начиная с некоторого момента времени происходит монотонное уменьшение температуры до нуля. В пределе при $t \rightarrow \infty$ температура в каждой точке равна нулю, однако количество выделившегося тепла $\int_0^\infty T(x, t) dx$ во всей среде бесконечно велико.

8. Автомодельное решение задачи А при $\beta = \sigma + 1$ определяется собственной функцией (13), не является тепловой волной и представляет собой локализованную в пространстве тепловую структуру S -режима с обострением. На фундаментальной длине $x \in [0, 0,5 L_s]$ за ограниченный промежуток времени температура неограниченно возрастает, вне области локализации $x \geq 0,5 L_s$ она равна нулю. Согласно определению 2 в S -режиме с обострением имеет место эффект локализации тепла.

9. При $\sigma + 3 > \beta > \sigma + 1$ задача Б в отличие задачи А для каждого $\tau > 0$ имеет определенное число N собственных функций $\Theta_{\tau,i}(\xi)$, $i = 1, \dots, N$. Число нетривиальных решений N (см. [15]) равно числу нулей в решении $y(x)$ следующей линейной задачи:

$$(17) \quad \begin{aligned} y'' - 0,5(\beta - \sigma - 1)xy' + (\beta - 1)y &= 0, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (17) имеет вид:

$$(18) \quad y(x) = \tau \Phi(-(\beta - \sigma)(\beta - \sigma - 1)^{-1}, 0,5, 0,25(\beta - \sigma - 1)x^2),$$

где $\Phi(a, b, \xi)$ вырожденная гипергеометрическая функция [21], τ — произвольная постоянная. Число нулей решения (18) с помощью функции $[\omega]$ (целая часть числа ω) определяется по формуле:

$$(19) \quad N = [\omega - [[\omega]\omega^{-1}]] + 1, \quad \omega = (\beta - 1)(\beta - \sigma - 1)^{-1}.$$

Первые три собственные функции для случая $\beta = 3,67$, $\sigma = 2,00$ $\tau = 1,0$ приведены на рис. 3.

Численные расчеты показали, что при $\beta > \sigma + 3$, $\tau > 0$ существуют решения задачи (3), (5). Качественное отличие этих решений об аналогичных решений при $\sigma + 3 > \beta > \sigma + 1$ заключается в том, что занесенная в них тепловая энергия бесконечна (см. асимптотику (15)). Бесконечный запас энергии содержится в „хвосте” решения.

10. Определение 5. Предельным распределением температуры при режимах с обострением назовем функцию

$$(20) \quad T_l(x) = \lim_{t \rightarrow \tau} T(x, t).$$

При LS -режиме с обострением для любого фиксированного $x \neq 0$, $\xi = x(1-t/\tau)^{\alpha} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \tau$. Используя асимптотику (15) получаем

$$(21) \quad T_l(x) = c_i x^{-2(\beta-\sigma-1)-1},$$

c_i — постоянная, зависящая от τ и i -номера собственной функции. Существование предельного распределения указывает на эффективную локализацию в автомодельных решениях LS -режима с обострением.

В случае S -режима с обострением предельное распределение представляет собой разрывную функцию:

$$(22) \quad T_l(x) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leq x < 0,5 L_s, \\ 0, & x \geq 0,5 L_s. \end{cases}$$

11. При задании автомодельных начальных данных

$$T_i(x, 0) = \Theta_{\tau,i}(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad \beta > \sigma + 1$$

существуют N автомодельных решений LS -режима с обострением, имеющих качественно различную пространственную структуру и существующих в течение времени τ . Автомодельное решение, соответствующее $\Theta_{\tau,1}(\xi)$, имеет максимум при $\xi = 0$. Полуширина такого решения при $t \rightarrow \tau$ монотонно стремится к нулю. Автомодельные решения, соответствующие $\Theta_{\tau,i}(\xi)$, $i \geq 2$, имеют определенное число нецентральных максимумов. В таких решениях все локальные максимумы движутся к центру симметрии и в момент обострения $t = \tau$ фокусируются в нем, оставляя в пространстве „след” — предельное распределение температуры.

Определение 6. Автомодельное решение, соответствующее первой собственной функции, мы называем *простой тепловой структурой*; решения, соответствующие остальным собственным функциям — *сложными структурами*.

При заданном времени обострения имеется N изохронических структур, содержащих в начальный момент времени определенное количество энергии $\Theta_i = \int_0^\infty \Theta_{\tau,i}(\xi) d\xi$, $Q_i > Q_{i-1}$, $i = 1, \dots, N$. С другой стороны любое заданное в начальный момент времени количество энергии благодаря профилированию начальной температуры по пространству может существовать в виде конечного числа изоэнергети-

ческих структур, определяющихся собственными функциями $\Theta_{\tau_i,i}(\xi)$, $i = 1, \dots, N$. Времена существования таких структур различны. Максимальное — у самой сложной, определяющейся $\Theta_{\tau_N,N}(\xi)$.

3. Устойчивость автомодельных решений

Автомодельные решения неустойчивы по начальным данным. Малые возмущения начального распределения приводят к малому изменению времени обострения. Это в свою очередь приводит к сколь угодно большому различию между решениями, начиная с некоторого момента времени, близкого к моменту обострения. Такого рода неустойчивость не означает, что всегда при неавтомодельных начальных данных пространственная структура решений задачи на асимптотической стадии отличается от пространственной структуры автомодельного решения.

Определение 7. Пусть $T(x, t)$ — решение исходной задачи. Преобразование решения по формуле

$$(1) \quad \bar{\Theta}(\xi, t) = T_m^{-1}(t) T(\xi f(T_m(t)), t),$$

где

$$T_m(t) = \begin{cases} \text{или} & T(0, t), \\ \text{или} & \max_{0 \leq x < +\infty} (T(x, t)), \end{cases}$$

$f(z) = z^{-0.5(\beta-\sigma-1)}$ (см. (8) § 2) назовем *автомодельной обработкой*, а $\bar{\Theta}(\xi, t)$ — *автомодельным представлением решения* (см. [15]).

Применяя преобразование (1) к автомодельному решению (1) § 2 получим нормированные собственные функции:

$$(2) \quad \bar{\Theta}(\xi) = \begin{cases} \text{или} & \Theta_{(0)}^{-1} \Theta(\xi), \\ \text{или} & (\max_{0 \leq \xi < +\infty} \Theta(\xi))^{-1} \Theta(\xi). \end{cases}$$

Нормированная собственная функция является стационаром автомодельной обработки (1).

Определение 8. Будем говорить, что автомодельное решение (1) § 2 имеет *устойчивую пространственную структуру* (структурно устойчивы, несмотря на развитие режима с обострением [15]), если нормированная собственная функция, определяющая это решение, является устойчивым стационарным решением среди автомодельных представлений $\bar{\Theta}(\xi, t)$ решения $T(x, t)$ исходной задачи.

1. Аналитические методы и численный эксперимент показали [15], что в диапазоне $1 < \beta < \sigma + 1$ автомодельное решение *HS*-режима

устойчиво при любых начальных данных в смысле определения 8. На рис. 4 а, б приведены результаты численного расчета с автомодельной обработкой. Таким образом нагрев среды осуществляется автомодельной тепловой волной $H\dot{S}$ -режима с обострением.

2. При $\beta = \sigma + 1$ автомодельное решение S -режима устойчиво. На фундаментальной длине образуется устойчивая тепловая структура. За конечный промежуток времени нагревается не все пространство, а участок среды конечных размеров. Имеет место эффект локализации тепла на фундаментальной длине.

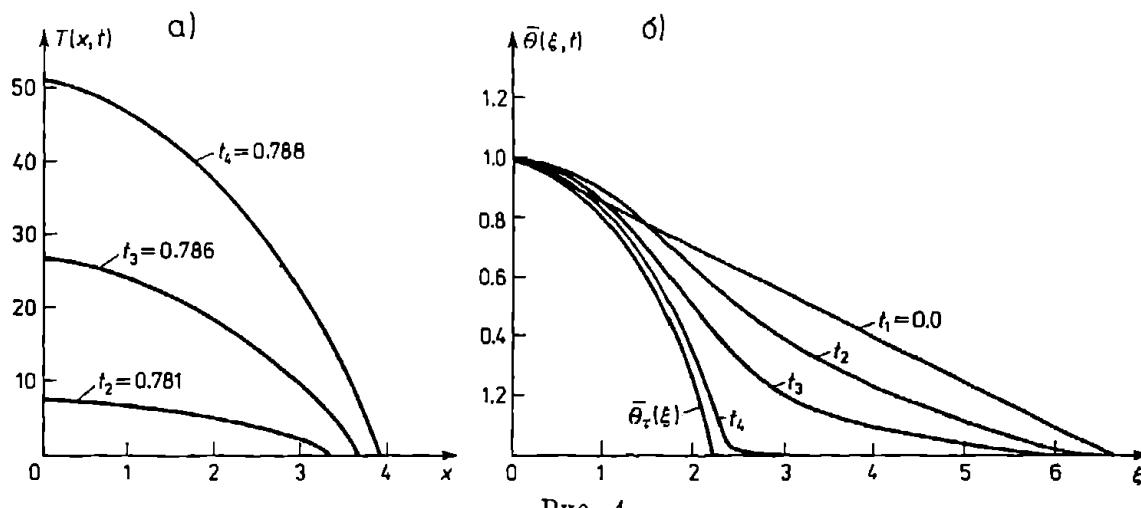


Рис. 4

3. В диапазоне параметров среды $\sigma + 3 > \beta > \sigma + 1$ простая тепловая структура, определяющаяся собственной функцией $\Theta_{\tau,1}(\xi)$, устойчива. Сложные тепловые структуры сохраняются в течение почти всего времени обострения. В течение достаточно короткого промежутка времени непосредственно перед моментом обострения происходит вырождение сложной структуры в простую (см. рис. 5, 6). Результаты

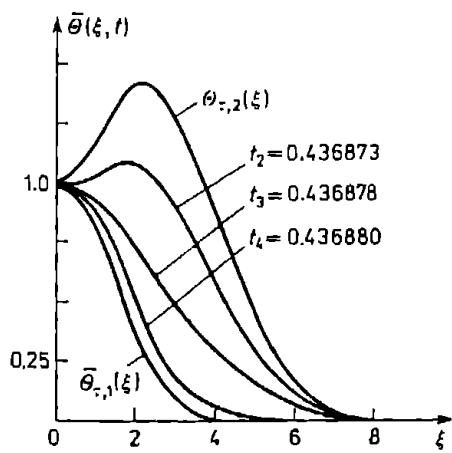


Рис. 5

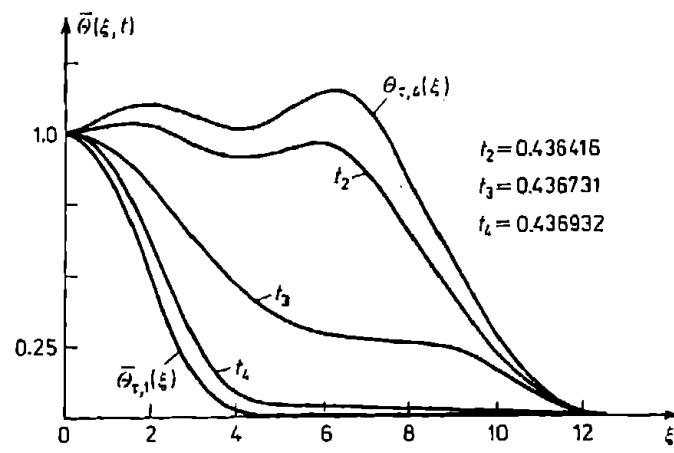


Рис. 6

исследования устойчивости (см. также [15]) сложных структур, позволяют утверждать, что сложные структуры представляют собой в определенном смысле суперпозицию простых структур. Сложные структуры возникают при определенном (резонансном) объединении простых структур с различными временами обострения. При нерезонансном возбуждении сложные структуры вырождаются в одну простую с минимальным временем обострения.

4. При $\beta > \sigma + 3$ существуют два типа решений (см. § 2, 7, 9) — решения обычного *HS*-режима и *LS*-режима с обострением. Автомодельное решение обычного *HS*-режима неустойчиво относительно малых

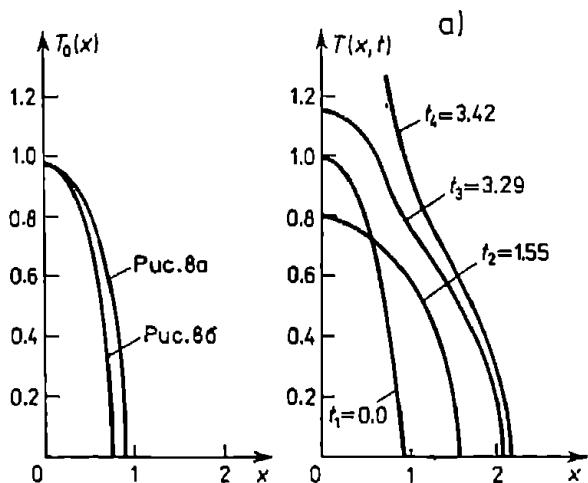


Рис. 7

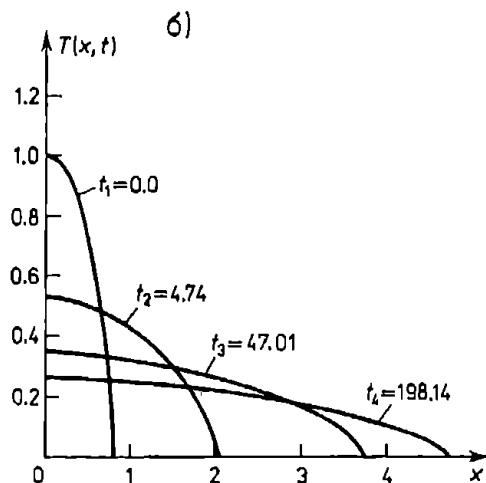


Рис. 8

возмущений и является границей двух классов начальных данных: если начальное распределение игнорируется распределением температуры автомодельного решения обычного *HS*-режима, то имеет место *LS*-режим с обострением, если мажорируется при совпадении значений максимальных температур, то образуется затухающая волна (см. рис. 7, 8 а, б). Волна существует в течение достаточно большого промежутка времени.

5. В § 2 было показано, что задача А не имеет автомодельных решений режимов с обострением в диапазоне параметров среды $\beta > \sigma + 1$. Однако, численный эксперимент показал, что и в этом случае, несмотря на отсутствие автомодельных решений, имеет место эффект локализации тепла. Существуют локализованные тепловые структуры на фундаментальной длине *LS*-режима с обострением [13]—[15]. Распределение температуры в таких структурах внутри области локализации описывается собственными функциями задачи с „обрезанными хвостами”.

4. Некоторые обобщения

Подробный анализ автомодельных решений и их устойчивости на частном классе степенных зависимостей $K(T)$ и $Q(T)$ позволил сформулировать ряд понятий (см. определения 1–8) характерных для рассматриваемой задачи. Прежде всего это понятие обострения и локализации.

Для доказательства существования обострения и локализации в случае более общих зависимостей $K(T)$ и $Q(T)$ важную роль играют методы сравнения решений параболических уравнений, в том числе вырождающихся. В этом направлении наиболее интересные с нашей точки зрения результаты содержатся в работах [22]–[25]. Для успешного применения методов сравнения необходим достаточный запас точных решений. Работа по определению классов зависимостей $K(T)$ и $Q(T)$, допускающих существование инвариантных решений, проведена в [26] (см. также [19]).

Детальное исследование взаимодействия диссипативных структур в многомерном случае было проведено с помощью численного эксперимента в [27]. В этих исследованиях полезным оказался предложенный в [28] метод осреднения. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами рассмотрены в [29].

Большой интерес представляет анализ режимов с обострением на классическом объекте изучения диссипативных структур — системах параболических уравнений. Исследование начатое в [29] требует продолжения в следующих направлениях:

- (а) определение класса зависимостей $K_i(T_1, \dots, T_m)$, $Q_i(T_1, \dots, T_m)$ допускающих существование инвариантных решений;
- (б) определение условий существования режимов с обострением;
- (в) определение условий локализации и эффективной локализации;
- (г) анализ структурной устойчивости инвариантных решений.

Ответы на эти вопросы позволят построить качественную теорию диссипативных структур режимов с обострением для систем параболических уравнений.

Литература

- [1] Г. Хакен, *Синегетика*, „Мир”, Москва 1980.
- [2] П. Гленсдорф, И. Пригожин, *Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флюктуаций*, „Мир”, Москва 1973.
- [3] Г. Николис, И. Пригожин, *Самоорганизация в неравновесных системах*, „Мир”, Москва 1979.
- [4] Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский, *Математические модели в биологии*, „Наука”, Москва 1975.

- [5] *Dynamics of Synergetic Systems* (Ed. Haken), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1980.
- [6] А. А. Самарский, *Математическое моделирование и вычислительный эксперимент*, Вестник АН СССР 5 (1979), 38–49.
- [7] С. П. Курдюмов, *Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации*, Препринт ИПМ АН СССР, № 29, 1979.
- [8] О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу-Юй-Линь, *Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации*, Изв. АН СССР, сер. матем., 22.5 (1958), 667–704.
- [9] Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец, *Сборник, посвященный 70-летию академика Иоффе*, Изв. АН СССР, Москва 1950, 61.
- [10] А. С. Калашников, *Об уравнениях типа нестандартной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений*, Вестник МГУ, сер. мат. мех., 6 (1972), 45–49.
- [11] —, *О влиянии поглощения на распространение тепла в среде с теплопроводностью, зависящей от температуры*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 16.3 (1976), 689–697.
- [12] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, „Наука”, Москва 1977.
- [13] А. А. Самарский, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемным источником тепла*, Докл. АН СССР 227.2 (1976), 321–324.
- [14] Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, *N- и S-режимы сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением*, Прикл. мех. техн. физ. 1 (1977), 3–18.
- [15] Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, *Условия устойчивости организации нелинейной диссипативной среды*, Препринт ИПМ АН СССР 106 (1977).
- [16] А. А. Самарский, Г. Г. Еленин, Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Горение нелинейной среды в виде сложных структур*, Докл. АН СССР 237.6 (1977), 1330–1333.
- [17] С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, Ю. А. Понещенко, Ю. П. Попов, А. А. Самарский, *Взаимодействие тепловых структур*, Препринт ИПМ АН СССР 77 (1978).
- [18] В. А. Галактионов, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Влияние выгорания на локализацию горения и образование структур в нелинейной среде*, Препринт ИПМ АН СССР 27 (1979).
- [19] В. А. Дородницын, Г. Г. Елепин, С. П. Курдюмов, *Точные решения задач для квазилинейного уравнения параболического типа*, Настоящий сборник, стр. 113–123.
- [20] Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности*, Докл. АН СССР 125.3 (1959), 492–495.
- [21] Г. Бейтман, Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лемсандра*, „Наука”, Москва 1965.
- [22] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский, *Сравнение решений параболических уравнений на основе априорных поточечных оценок старшей производной*, Препринт ИПМ АН СССР 21 (1979).
- [23] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский, *Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений*, Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 19.6 (1976), 1349–1359.
- [24] В. А. Галактионов, *Условия Ψ -критичности и методы сравнения решений параболических уравнений*, Препринт ИПМ АН СССР 151 (1979).

- [25] В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский, *О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений*, Препринт ИПМ АН СССР 161 (1979).
- [26] В. А. Дородницын, *Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком*, Препринт ИПМ АН СССР 57 (1979).
- [27] С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, Ю. А. Повещенко, Ю. П. Попов, А. А. Самарский, *Взаимодействие тепловых структур*, Препринт ИПМ АН СССР 77 (1978).
- [28] Г. Г. Еленин, К. Э. Плотников, *Об одном способе качественного исследования одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности с нелинейным источником тепла*, Препринт ИПМ АН СССР 91 (1977).
- [29] С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, Г. Г. Малинецкий, *Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами*, Препринт ИПМ АН СССР 16 (1979).
- [30] В. А. Галактионов, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Влияние выгорания на локализацию и образование структур в нелинейной среде*, Препринт ИПМ АН СССР 27 (1979).

*Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 – May 30, 1980*
