COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVIII 1973 FASC. 1

EINE WEITERE BEMERKUNG ÜBER MULTIPLIKATIVE FUNKTIONEN

VON

WOLFGANG SCHWARZ (FRANKFURT AM MAIN)

1. Einleitung. Es bezeichne $\mathcal{M}$ die Menge aller komplexwertigen, multiplikativen zahlentheoretischen Funktionen und $\mathcal{M}_0$ die Untermenge derjenigen Funktionen f aus $\mathcal{M}$, die $|f| \leqslant 1$ erfüllen. Der Grenzwert

$$M(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)$$

wird — falls er existiert — *Mittelwert* von f genannt.

Für Funktionen $f \in \mathcal{M}_0$ wurde die Frage nach der Existenz eines *von Null verschiedenen* Mittelwertes durch Delange ([1], [2]), und allgemeiner die Frage nach der Existenz eines (nicht notwendig von Null verschiedenen) Mittelwertes durch Halász [4] gelöst(¹).

In dieser Note beschäftigen wir uns mit der Frage nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß für „nah verwandte" Funktionen $f, g \in \mathcal{M}$ die Existenz von $M(f)$ die Existenz von $M(g)$ nach sich zieht. Delange [1] gab zu diesem Problem folgenden

SATZ A. *Es seien $f, g \in \mathcal{M}_0$, $M(g)$ existiere, und es gelte*

$$\sum_p \frac{1}{p} |f(p) - g(p)| < \infty \tag{1.1}$$

und

(1.2) *Ist $g(2^r) = -(-1)^r (g(2))^r$ für alle $r \geqslant 2$ und $|g(2)| = 1$, so ist $f(2^r) = g(2^r)$ für alle $r \geqslant 1$.*

Dann existiert der Mittelwert $M(f)$ und es ist

$$M(f) = M(g) \prod_p \Big\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} p^{-r} f(p^r)\Big\} \Big\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} p^{-r} g(p^r)\Big\}^{-1}. \tag{1.3}$$

(¹) Man vgl. hierzu auch die Arbeiten [10] und [11] von Wirsing.

Wir werden in dieser Note einen Satz beweisen, der etwas allgemeiner als Satz A ist; die Beweismethode wird von der von Delange etwas verschieden sein — wir benützen einige einfache Ergebnisse aus der elementaren Theorie der Banachalgebren. Als Folgerung geben wir ein Ergebnis über

$$M_k(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\leqslant x \\ n\equiv 0 \bmod k}} f(n). \tag{1.4}$$

Im letzten Abschnitt werden Fragen über die Invertierbarkeit absolut-konvergenter Dirichletreihen behandelt, die schon beim Beweis von Satz 1 eine gewisse Rolle spielten.

2. Ergebnisse. Wir zeigen zunächst

Satz 1. *Seien $f, g \in \mathscr{M}$, $M(g)$ existiere und es gelte* (1.1). *Mit positiven Konstanten c_1 und $c_2 < 2$ gelte für alle $r \geqslant 2$ die Abschätzung*

$$\max\{|f(p^r)|, |g(p^r)|\} \leqslant c_1 c_2^r \quad (c_2 < 2), \tag{2.1}$$

und es sei für alle $x \geqslant 1$

$$\max\Big\{\sum_{p\leqslant x} |f(p)|, \sum_{p\leqslant x} |g(p)|\Big\} \leqslant c_3 x. \tag{2.2}$$

Weiterhin sei für alle Primzahlen p

$$\max\{|f(p)|, |g(p)|\} \leqslant c_1 p^{1/2-\delta} \tag{2.3}$$

mit einer Konstanten $\delta > 0$. Schließlich sei für alle p

$$1+\gamma_{p,1}(s) := 1+\frac{g(p)}{p^s}+\frac{g(p^2)}{p^{2s}}+\ldots \neq 0 \tag{2.4}$$

in der Halbebene $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$.

Dann existiert der Mittelwert $M(f)$ und es gilt die Beziehung (1.3)(²).

Bemerkung. Die Bedingung (2.4) ist offenbar erfüllt, wenn

$$\Gamma_p(1) := \frac{|g(p)|}{p}+\frac{|g(p^2)|}{p^2}+\ldots < 1$$

ist. Im Falle $\Gamma_p(1) = 1$ ist $1+\gamma_{p,1}(\sigma+it) = 0$ mit $\sigma \geqslant 1$ dann und nur dann möglich, wenn $\sigma = 1$ und $g(p^r) = -|g(p^r)|p^{rit}$ für alle $r = 1, 2, \ldots$ ist.

Beschränkt man sich auf Funktionen $f, g \in \mathscr{M}_0$, so sind (2.1), (2.2) und (2.3) von selbst erfüllt. Man erhält somit leicht das

Korollar 2.1. *Es gilt der Satz A von Delange.*

(²) Satz 1 bleibt richtig, wenn die Bedingung (2.4) für endlich viele Primzahlen $q_1, \ldots, q_k$ verletzt ist, für die dann aber zusätzlich $f(q_\varkappa^r) = g(q_\varkappa^r)$ für alle $r = 1, 2, \ldots$ und $\varkappa = 1, \ldots, k$ erfüllt ist.

Ordnet man jeder Funktion $f \in \mathcal{M}_0$ eine vollständig multiplikative ([3]) Funktion $f^* \in \mathcal{M}_0$ durch die Vorschrift

$$f^*(p_1^{\nu_1} \dots p_r^{\nu_r}) = \big(f(p_1)\big)^{\nu_1} \dots \big(f(p_r)\big)^{\nu_r} \tag{2.5}$$

zu, so könnte man vermuten, daß $M(f^*)$ genau dann existiert, wenn $M(f)$ existiert. Diese Vermutung ist jedoch falsch, wie folgendes, von Delange stammendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei $f(n) = -(-1)^n n^{ia}$, $a \neq 0$ reell; dann ist $M(f) = 0$. Aber es ist $f^*(n) = n^{ia}$, wenn n ungerade ist, und $f^*(2^r) = (-1)^r 2^{ria}$, und $M(f^*)$ existiert nicht.

Aus Satz 1 (oder aus Delange's Satz A) folgt unmittelbar

KOROLLAR 2.2. *Sei $f \in \mathcal{M}_0$ und f^* die zugeordnete, vollständig multiplikative Funktion. Dann gilt:*

(1) *Die Existenz von $M(f^*)$ hat die Existenz von $M(f)$ zur Folge* (Halász [4]).

(2) *Existiert $M(f)$, und gibt es zu jedem reellen a eine natürliche Zahl r, für die $f(2^r) \neq -2^{ira}$ gilt, so existiert $M(f^*)$.*

3. Eine Anwendung von Korollar 2.2. Sei $f \in \mathcal{M}_0$. Auf Grund der Arbeit [4] kann man Aussagen über $\sum_{n \leqslant x} f(n)$ und $\sum_{n \leqslant x} f(n)\chi(n)$ machen, wobei χ einen Dirichlet-Charakter bezeichnet. Somit hat man Aussagen über

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \bmod k}} f(n), \qquad \text{falls } (l, k) = 1$$

ist (dies ist in Delange [2], Theorem 6, und in [9], § 4 ausgeführt).

Wir betrachten hier die Summe $\sum_{n \leqslant x, n \equiv 0 \bmod k} f(n)$ und beweisen

SATZ 2. *Sei $f \in \mathcal{M}_0$. Es werde vorausgesetzt, daß der Mittelwert $M(f)$ existiert und daß es zu jedem reellen a ein $r \geqslant 1$ gibt, für das $f(2^r) \neq -2^{iar}$ gilt. Dann existiert*

$$M_k(f) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x, n \equiv 0 \bmod k} f(n). \tag{3.1}$$

Bemerkung. Dieser Satz findet sich in allgemeinerer Fassung bei Delange [1], Theorem 5, wenn zusätzlich noch die Konvergenz von $\sum_p p^{-1}\big(1 - f(p)\big)$ vorausgesetzt wird (was auf die Bedingung $M(f) \neq 0$ hinausläuft) ([4]).

([3]) d.h. es ist $f(nm) = f(n)f(m)$ für alle natürlichen Zahlen n, m.

([4]) H. Delange hat in seinem Vortrag auf der Zahlentheorietagung in Oberwolfach im Juli 1972 allgemeine Sätze über das Verhalten der Summe $\sum_{n \leqslant x, n \equiv l \bmod k} f(n)$ für multiplikative Funktionen $f \in \mathcal{M}_0$ gegeben.

Beweis von Satz 2. Auf Grund der Voraussetzungen von Satz 2 existiert (nach Korollar 2.2) der Mittelwert $M(f^*)$ für die zugeordnete vollständig multiplikative Funktion f^*. Sei $H(s) = F(s)/F^*(s)$ der Quotient der erzeugenden Dirichletreihen $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ bzw. $F^*(s) = \sum f^*(n)n^{-s}$. Nach [4], S. 369 (oder nach § 5), ist

$$H(s) = \sum h(n)n^{-s}$$

als Dirichletreihe darstellbar, die in $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ absolut konvergiert. Wegen $F(s) = H(s)F^*(s)$ ist

$$f(n) = \sum_{d/n} h(d)f^*\left(\frac{n}{d}\right); \tag{3.2}$$

hieraus folgt

$$M_k(f; x) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 0 \bmod k}} f(n) = \sum_{d\leqslant x} h(d) \sum_{\substack{m\leqslant x/k\\ km\equiv o(d)}} f^*\left(\frac{km}{d}\right). \tag{3.3}$$

Da die Bedingung $km \equiv o(d)$ mit $m \equiv 0 \bmod \big(d/(d, k)\big)$ äquivalent ist und da f^* vollständig multiplikativ ist, erhält man

$$\begin{aligned} M_k(f; x) &= \sum_{d\leqslant x} h(d)f^*\left(\frac{k}{(d, k)}\right) \sum_{r\leqslant \frac{x}{kd}(k,d)} f^*(r) \\ &= \sum_{d\leqslant x} h(d)f^*\left(\frac{k}{(d, k)}\right)\left\{M(f^*)\frac{x}{kd}(k, d) + o\left(\frac{x}{kd}(k, d)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Wohlbekannte Schlüsse führen zu

$$M_k(f; x) = M(f^*)C(k)\frac{x}{k} + o(x) \tag{3.4}$$

mit der Konstanten(5)

$$C(k) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{d} f^*\left(\frac{k}{(d, k)}\right)(k, d). \tag{3.5}$$

Zusatz zu Satz 2. *Sei $k = p_1^{\varkappa_1} \ldots p_r^{\varkappa_r}$ gegeben; unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt*

$$\begin{aligned} M_k(f) = \frac{1}{k} M(f) \prod_{p^\varkappa \| k} \Big\{ & f(p)^\varkappa + \sum_{2\leqslant j\leqslant \varkappa} \{f(p^j) - f(p)f(p^{j-1})\}\{f(p)\}^{\varkappa-j} + \\ & + \sum_{j>\varkappa} p^{\varkappa-j}\{f(p^j) - f(p)f(p^{j-1})\}\Big\} \prod_{p^\varkappa \| k} \Big\{1 + \sum_{j\geqslant 2} \{f(p^j) - f(p)f(p^{j-1})\}p^{-j}\Big\}^{-1}. \end{aligned}$$

(5) Ist $f^*(k) \neq 0$, so kann eine Produktdarstellung für $C(k)$ gegeben werden.

Beweis. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $f(p_\varrho) \neq 0$ für $\varrho = 1, \ldots, r$ kann (3.6) durch Rechnung nachgeprüft werden, wobei die Produktdarstellung für die Konstante $C(k)$ (vgl. (3.5)) verwendet wird.

Andernfalls läßt sich der Beweis dadurch führen, daß man f durch multiplikative Funktionen $\tilde{f}$ approximiert, die $\tilde{f}(p_\varrho) \neq 0$ für $\varrho = 1, \ldots, r$ erfüllen. Man kann zum Beispiel $\tilde{f}(p^\nu) = f(p^\nu)$ nehmen, wenn $p \nmid k$ oder p/k und $\nu \geqslant 2$ gilt, und

$$\tilde{f}(p) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{wenn } f(p) = 0 \text{ und } p/k, \\ f(p), & \text{wenn } f(p) \neq 0 \text{ und } p \mid k. \end{cases}$$

Man benützt dann $|\tilde{f}(n) - f(n)| \leqslant \varepsilon\omega\big((n, k)\big) \leqslant \varepsilon\omega(k)$ und erhält

$$\Big|\sum_{n \leqslant x, n \equiv o(k)} f(n) - M_k(\tilde{f})x\Big| \leqslant \varepsilon\omega(k)x + o(x),$$

und die Behauptung (3.6) folgt für $\varepsilon \to 0$.

4. Hilfssätze. Für den Beweis von Satz 1 benützen wir einen Hilfssatz, der eine wohlbekannte Folgerung aus Gelfand's Theorie der kommutativen Banachalgebren ist.

Lemma 4.1. *Ist $B(z)$ holomorph in der offenen Kreisscheibe $|z| < 1$ mit der Taylorentwicklung $B(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$, wobei $\sum_0^\infty |b_n| < \infty$ ist, und gilt $B(z) \neq 0$ in $|z| \leqslant 1$, so ist die Taylorreihe $\sum \beta_n z^n$ für $1/B(z)$ in $|z| \leqslant 1$ absolut konvergent* (Loomis [7], 23 C).

Mit der Transformation $z = p^{-s}$ erhält man das

Korollar 4.1. *Es bezeichne $A(s) = a_0 + a_1 p^{-s} + a_2 p^{-2s} + \ldots$ eine (sehr spezielle) Dirichletreihe, für die $\sum_0^\infty |a_n| < \infty$ ist. Ist $A(s) \neq 0$ in* $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *(insbesondere also auch $a_0 \neq 0$), dann konvergiert die Dirichletreihe*

$$\frac{1}{A(s)} = \alpha_0 + \alpha_1 p^{-s} + \alpha_2 p^{-2s} + \ldots$$

für $1/A(s)$ absolut in $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. *Dabei ist*

$$\alpha_0 = a_0^{-1}, \quad \alpha_1 = -a_0^{-2} a_1.$$

Lemma 4.2. *Bezeichnet $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement e, ist $a \in \mathscr{A}$ und $\|a\| < 1$, so ist $(e+a)^{-1} = e + a' = e - a + a'' \in \mathscr{A}$ und*

$$\|a'\| \leqslant \frac{\|a\|}{1 - \|a\|}, \quad \|a''\| \leqslant \frac{\|a\|^2}{1 - \|a\|}.$$

5. Beweis von Satz 1. Die erzeugende Dirichletreihe

$$F(s) = \sum_{n=1}^\infty f(n) n^{-s} \tag{5.1}$$

und ihr Eulerprodukt konvergieren in $\mathrm{Re}\, s > 1$ wegen (2.1) und (2.2) absolut. Eine entsprechende Aussage gilt für $G(s) = \sum g(n) n^{-s}$. Wir bilden für $\mathrm{Re}\, s > 1$ den Quotienten

$$(5.2) \quad H(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \prod_p \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} f(p^r) p^{-rs}\Big)\Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} g(p^r) p^{-rs}\Big)^{-1}.$$

Nun sollen die einzelnen Faktoren der zunächst in $\mathrm{Re}\, s > 1$ gültigen Produktdarstellung für $H(s)$ untersucht werden. Setzt man zur Abkürzung

$$\gamma_{p,m}(s) = \sum_{r \geqslant m} g(p^r) p^{-rs} \qquad (m = 1, 2),$$

so ist wegen (2.4)

$$(5.3) \quad \{1 + \gamma_{p,1}(s)\}^{-1} = 1 + \tilde{g}(p) p^{-s} + \tilde{g}(p^2) p^{-2s} + \ldots, \qquad \tilde{g}(p) = -g(p),$$

nach Korollar 4.1 in eine in $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$ absolut-konvergente Dirichletreihe entwickelbar. Mit der Abkürzung

$$\varphi_{p,m}(s) = \sum_{r \geqslant m} f(p^r) p^{-rs} \qquad (m = 1, 2)$$

ist demnach auch

$$(5.4) \qquad \{1 + \varphi_{p,1}(s)\}\{1 + \gamma_{p,1}(s)\}^{-1} = 1 + h(p) p^{-s} + h(p^2) p^{-2s} + \ldots$$

in eine in $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$ absolut-konvergente Dirichletreihe entwickelbar; dabei ist

$$h(p) = f(p) - g(p).$$

In der Banachalgebra $\mathscr{A}$ der in $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$ absolut-konvergenten Dirichletreihen $A(s) = \sum a_n n^{-s}$ mit der Norm

$$(5.5) \qquad \|A\| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} |a_n|$$

besteht, wenn man noch die Abkürzung

$$\tilde{\gamma}_{p,m}(s) = \sum_{r \geqslant m} \tilde{g}(p^r) p^{-rs} \qquad (m = 1, 2)$$

einführt, nach (5.3) und (5.4) die Abschätzung

$$\frac{|h(p)|}{p} + \frac{|h(p^2)|}{p^2} + \ldots = \left\| \left\{1 + \frac{f(p)}{p^s} + \varphi_{p,2}(s)\right\}\left\{1 + \frac{\tilde{g}(p)}{p^s} + \tilde{\gamma}_{p,2}(s)\right\} - 1 \right\|$$
$$\leqslant \frac{|f(p) - g(p)|}{p} + \|\varphi_{p,1}(s)\|\, \|\tilde{\gamma}_{p,1}(s)\| + \|\varphi_{p,2}(s)\| + \|\tilde{\gamma}_{p,2}(s)\|.$$

Wegen (2.1) und (2.3) erhält man die Abschätzungen

$$\max\{\|\gamma_{p,m}(s)\|, \|\varphi_{p,m}(s)\|\} \leqslant \begin{cases} c_1 c_2^2 \dfrac{1}{p(p-c_2)} & \text{für } m = 2, \\ c_1 c_2^2 \dfrac{1}{p(p-c_2)} + c_1 p^{-(1/2+\delta)} & \text{für } m = 1. \end{cases}$$

Hieraus folgt nach Lemma 4.2 für $m = 1$ oder 2 und genügend großes p (etwa $p \geqslant p_0$)

$$\|\tilde{\gamma}_{p,m}(s)\| \leqslant \frac{\|\gamma_{p,1}(s)\|^m}{1 - \|\gamma_{p,1}(s)\|} \leqslant c_3\{p^{-m(1/2+\delta)} + p^{-2}\}.$$

Auf Grund dieser Abschätzungen und der Voraussetzung (1.1) konvergiert

$$\prod_{p_0 \leqslant p \leqslant N} \left(1 + \frac{h(p)}{p^s} + \frac{h(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

für $N \to \infty$ gegen ein Element aus $\mathscr{A}$, d.h. gegen eine für $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ absolutkonvergente Dirichletreihe. Nimmt man noch die endlich vielen Faktoren mit $p < p_0$ hinzu, so schließt man, daß die in (5.2) definierte Funktion $H(s)$ in eine Dirichletreihe

$$\text{(5.6)} \qquad H(s) = \sum_1^\infty h(n) n^{-s}, \qquad \sum_1^\infty \frac{|h(n)|}{n} < \infty,$$

entwickelbar ist, die in $\operatorname{Re} s \geqslant 1$ absolut konvergiert. Aus (5.2) und (5.6) folgt nun

$$f(n) = \sum_{d/n} h(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Bekannte elementare Schlüsse (man vgl. etwa Halász [4], S. 370, oder Delange [1], Lemma 4) geben nun

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{d \leqslant x} h(d) \sum_{m \leqslant x/d} g(m) = H(1) M(g) x + o(x),$$

d.h. der Mittelwert $M(f) = H(1)M(g)$ existiert und es gilt (1.3).

Die Bemerkung nach Satz 1 folgt aus den bekannten Bedingungen für das Bestehen des Gleichheitszeichens in der Dreiecksungleichung.

Zum Nachweis von Korollar 2.1 beachtet man, daß für $f, g \in \mathscr{M}_0$ die Bedingung (2.4) für $p \geqslant 3$ stets erfüllt ist und für $p = 2$ nach der Bemerkung genau dann verletzt ist, wenn $|g(2^r)| = 1$ für alle $r \geqslant 1$ und $g(2^r) = -(-1)^r g^r(2)$ für $r \geqslant 2$ ist. Mit der in diesem Falle bestehenden Zusatzvoraussetzung (vgl. (1.2)) $f(2^r) = g(2^r)$ für alle $r \geqslant 1$ reduziert sich der $p = 2$ entsprechende Faktor

$$1+\frac{h(2)}{2^s}+\frac{h(2^2)}{2^{2s}}+\dots$$

von $H(s)$ (vgl. (5.2)) auf 1 und die Aussage (5.6) und damit der ganze Beweis bleiben erhalten. Entsprechend wird Fußnote (2) gezeigt.

6. Über die Inversen absolut-konvergenter Dirichletreihen. In § 5 spielte die Entwickelbarkeit der Inversen einer Dirichletreihe in eine absolut-konvergente Dirichletreihe eine Rolle. Auf Grund des Wienerschen Satzes über die Inversen absolut-konvergenter Fourierreihen (vgl. Loomis [7], 23 C, oder Rudin [8], 18.21) vermutet man einen entsprechend allgemeinen Satz für Dirichletreihen.

Es ist nicht allzu schwer, aus Gelfand's Theorie der kommutativen Banachalgebren unter Benutzung des Kroneckerschen Approximationssatzes ([5], Theorem 444) folgenden Satz herzuleiten:

SATZ 3. *Ist*

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \sum_{1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

eine in $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *absolut-konvergente Dirichletreihe, deren Koeffizienten* a_n *multiplikative Funktionen von* n *sind, so ist die Voraussetzung*

$$A(s) \neq 0 \quad \text{in } \operatorname{Re} s \geqslant 0$$

hinreichend dafür, daß $1/A(s)$ *in* $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *durch eine Dirichletreihe*

$$\frac{1}{A(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad \text{mit} \quad \sum_{1}^{\infty} |a_n| < \infty \tag{6.1}$$

darstellbar ist.

Es gibt jedoch in der Literatur schon allgemeinere Sätze; in der Arbeit [6] (6) wird aus Gelfand's Theorie folgendes Ergebnis (Theorem 1, S. 865-866) hergeleitet:

Die Dirichletreihe $\sum a_n n^{-s}$ *mit* $\sum |a_n| < \infty$ *hat dann und nur dann eine Inverse* $\sum \alpha_n n^{-s}$ *mit* $\sum |\alpha_n| < \infty$, *wenn eine Konstante* $\delta > 0$ *existiert, so daß*

$$\left|\sum a_n n^{-s}\right| \geqslant \delta \tag{6.2}$$

für alle s *mit* $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ *gilt.*

(6) Auf diese Arbeit hat mich freundlicherweise Herr Professor Dr. G. Maltese (Maryland) hingewiesen.

LITERATURNACHWEIS

[1] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 78 (1961), S. 273-304.

[2] — *On a class of multiplicative arithmetical functions*, Scripta Mathematica 26 (1963), S. 121-141.

[3] — *A remark on multiplicative functions*, Bulletin of the London Mathematical Society 2 (1970), S. 183-185.

[4] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 19 (1968), S. 365-403.

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 3-rd edition, Oxford 1954.

[6] E. Hewitt and J. H. Williamson, *Note on absolutely convergent Dirichlet series*, Proceedings of the American Mathematical Society 8 (1957), S. 863-868.

[7] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, Princeton 1953.

[8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, New York 1966.

[9] W. Schwarz, *A remark on multiplicative functions*, Bulletin of the London Mathematical Society 4 (1972), S. 136-140.

[10] E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen*, Mathematische Annalen 143 (1961), S. 75-102.

[11] — *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, II*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 18 (1967), S. 411-467.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1971;
en version modifiée le 8. 9. 1972