NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. АКОПЯН

Факультет прикладной математики,
Ереванский государственный университет,
Ереван, СССР

В настоящей работе обсуждаются вопросы построения предельных по порядку в смысле поперечников вариационно-разностных схем (ВРС) для двумерных линейных параболических уравнений с правой частью из пространства L_2.

§ 1. Постановка начально-краевых задач

1. Рассмотрим в цилиндрической области $Q = \Omega \times (0, T)$, где Ω — ограниченная односвязная область с границей S в плоскости $\boldsymbol{R}_2$ точек $x = (x_1, x_2)$, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au = f \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega \tag{2}$$

и краевым условием одного из двух типов:

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S \times (0, T) \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u = 0, \quad (x, t) \in S \times (0, T), \tag{4}$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i);$$

здесь ν — внешняя нормаль к кривой S.

Относительно уравнения (1) предполагается, что $a_{ij} = a_{ij}$, $i, j = 1,2$, и существует такая положительная постоянная γ, что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_i \geqslant \gamma \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2$$

выполняется для всех $(x,t)\in Q$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2)\in \boldsymbol{R}_2$.

Задача (1), (2), (3), — первая начально-краевая задача.

Задача (1), (2), (4), — третья начально-краевая задача.

2. В работе приняты следующие обозначения для норм в функциональных пространствах:

$\|\cdot\|_{0,\Omega}$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$;

$\|\cdot\|_{k,\Omega}$ — норма в пространстве Соболева $W_2^k(\Omega)$;

$\|\cdot\|_{0,Q}$ — норма в пространстве $L_2(Q)$;

$\|\cdot\|_{k,m,Q}$ — норма в пространстве Соболева–Слободецкого $W_2^{k,m}(Q)$.

$V_2^{1,0}(Q)$ — банахово пространство функций с нормой

$$|u|_Q \equiv \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_{0,\Omega} + \||\nabla u|\|_{0,Q},$$

где

$$|\nabla u| \equiv \left(\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

3. Предположим, что граница S есть гладкая кривая класса C^2, а правая часть f уравнения (1) принадлежит пространству $L_2(Q)$. При определенных условиях, накладываемых на гладкость коэффициентов уравнения (1) и функцию σ из (4), существует единственное решение как первой, так и третьей начально-краевой задачи из пространства $W_2^{2,1}(Q)$ и справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,1,Q} \leqslant C_1 \|f\|_{0,Q} \text{ (1)}$$

(см., напр., работы [1], [2]).

§ 2. Неявная ВРС для третьей начально-краевой задачи

1. Наложим на область Ω квадратную сетку шага h, образованную линиями, параллельными осям координат. Каждую ячейку квадратной сетки разобьем диагональю под углом 45° к оси x_1 на два треугольника. Наименьшее объединение треугольников, содержащее Ω, обозначим через Ω_{ex}^h и назовем сеточной областью. Совокупность вершин и сторон

(1) В дальнейшем буквой C с индексами внизу обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от рядом стоящих множителей и шага сетки.

трегугольников, из которых состоит сеточная область Ω^h_{ex}, образует регулярную сетку. Вершины треугольников назовем узлами сетки. Множество всех узлов обозначим через $\overline{R^h}$.

Будем считать, что все узлы сетки перенумерованы в некотором порядке и $x^k = (x^k_1, x^k_2)$ есть k-й узел сетки. Для произвольной сеточной функции

$$v = \{v_k \equiv v(x^k) \mid x^k \in \overline{R^h}\}$$

определим ее кусочно-линейное восполнение

$$\tilde{v}(x) = \sum_{x^k \in \overline{R^h}} v_k \varphi_k(x), \tag{5}$$

где $\varphi_k(x)$ есть базисная функция кусочно-линейного восполнения, соответствующая узлу x^k. Конечномерное пространство функций вида (5) обозначим через H_h. Ясно, что $H_h \subset W^1_2(\Omega^h_{ex})$.

Теперь перейдем к восполнениям в трехмерном пространстве. Возьмем на отрезке $[0, T]$ равноотстоящие точки $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots, N$, с шагом τ; $t_N = T$. Определим базисные функции

$$\varphi^n_k(x,t) = \begin{cases} \varphi_k(x), & \text{если } t \in (t_{n-1}, t_n], \\ 0, & \text{если } t \notin (t_{n-1}, t_n], \end{cases}$$

для $n = 1, 2, \ldots, N$.

Приближенное решение третьей начально-караевой задачи будем искать в конечномерном пространстве H^τ_h функций вида

$$\tilde{\tilde{v}}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{x^k \in \overline{R^h}} v^n_k \varphi^n_k(x, t).$$

Функции из H^τ_h являются кусочно-линейными по пространственным переменным и кусочно-постоянными по времени. Для каждого $t \in (t_{n-1}, t_n]$

$$\tilde{\tilde{v}}(x,t) \equiv \tilde{\tilde{v}}(x, t_n) \equiv \tilde{v}^n(x),$$

где

$$\tilde{v}^n(x) = \sum_{x^k \in \overline{R^h}} v^n_k \varphi_k(x) \in H_h.$$

2. Приближенным решением третьей начально-краевой задачи назовем функцию $\tilde{\tilde{v}} \in H^\tau_h$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (\tilde{v}^n - \tilde{v}^{n-1}) \tilde{\varphi}^n dx + B(\tilde{\tilde{v}}, \tilde{\tilde{\varphi}}) = \int_0^T \int_\Omega f \tilde{\tilde{\varphi}} dx dt \tag{6}$$

при произвольной $\tilde{\tilde{\varphi}} \in H^\tau_h$, где билинейная форма B определяется следующим образом:

$$B(u,v) \equiv \int_0^T \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + auv \right] dx dt + \int_0^T \int_S \sigma uv ds dt.$$

В силу произвольности функции $\tilde{\tilde{\varphi}}$ из (6) следует, что для любого $n = 1, 2, \ldots, N$

$$\int_{\Omega} (\tilde{v}^n - \tilde{v}^{n-1}) \tilde{\varphi}\, dx + B_n(\tilde{v}^n, \tilde{\varphi}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} f \tilde{\varphi}\, dx\, dt, \tag{7}$$

где $\tilde{\varphi}$ есть произвольная функция из H_h, а

$$B_n(\tilde{v}^n, \tilde{\varphi}) \equiv \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial \tilde{v}^n}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i} + a \tilde{v}^n \tilde{\varphi} \right] dx\, dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{S} \sigma \tilde{v}^n \tilde{\varphi}\, ds\, dt.$$

Таким образом, из (7) получим, что для нахождения приближенного решения на каждом слое $n = 1, 2, \ldots, N$ следует решать систему сеточных уравнений

$$(P + L_n) v^n = P v^{n-1} + r^n, \tag{8}$$

где матрицы P, L_n и вектор r^n таковы, что

$$\int_{\Omega} \tilde{w} \tilde{\varphi}\, dx = (Pw, \varphi), \qquad B_n(\tilde{w}, \tilde{\varphi}) = (L_n w, \varphi)$$

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} f \tilde{\varphi}\, dx\, dt = (r^n, \varphi)$$

при произвольных $\tilde{w}$ и $\tilde{\varphi}$ из H_h.

При достаточно малом τ системы (8) однозначно разрешимы.

3. В дальнейшем предполагается, что $\tau = O(h^2)$. Ниже, в § 4, будет обоснован такой выбор соотношения между шагами сетки.

В работах [3], [4], [5] получены следующие оценки скорости сходимости построенной ВРС:

$$|u - \tilde{\tilde{v}}|_Q \leqslant C_2 h \|f\|_{0,Q}, \tag{9}$$

$$\|u - \tilde{\tilde{v}}\|_{0,Q} \leqslant C_3 h^2 \|f\|_{0,Q}. \tag{10}$$

Эти оценки, как будет показано в § 4, можно трактовать в некотором смысле как предельные.

Вопросам исследования скорости сходимости неявных ВРС для параболических уравнений с правой частью из пространства L_2 посвящены также работы [6], [7].

4. Будем решать системы сеточных уравнений (8) на n-ом слое итерационным методом

$$D \frac{v^n(k+1) - v^n(k)}{\lambda} = -(P + L_n) v^n(k) + P v^{n-1}(q) + r^n, \tag{11}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots; \qquad v^n(0) = v^{n-1}(q),$$

где λ — положительный параметр, а $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_M\}$ диагональная матрица (M — число узлов в множестве $\overline{R^h}$). Диагональные элементы матрицы D выбираются следующим образом [8]. Как уже отмечалось выше, триангуляция плоскости осуществляется путем разбиения ячеек квадратной сетки диагональю на два треугольника. Обозначим через $\Delta_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \ldots, 6$, треугольники, имеющие узел $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ своей общей вершиной. При этом треугольники занумерованы в направлении против часовой стрелки, начиная с треугольника $\Delta_1^{(k)}$ с вершинами (x_1^k, x_2^k), $(x_1^k + h, x_2^k)$ и $(x_1^k + h, x_2^k + h)$. Тогда

$$d_k = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{6} \operatorname{mes}(\delta_j^{(k)}) + \frac{1}{4}\operatorname{mes}(\delta_3^{(k)} \cup \delta_6^{(k)}),$$

где $\delta_j^{(k)} = \Delta_j^{(k)} \cap \Omega$. Заметим, что для „внутренних" узлов (т.е. для которых $\delta_j^{(k)}$ совпадают с $\Delta_j^{(k)}$ при всех $j = 1, 2, \ldots, 6$) $d_k = h^2$.

В работе [5] сформулирована и доказана теорема о сходимости итерационного метода (II). Утверждается, что параметр $\lambda = \text{const}$ можно выбрать так, что совершая на каждом слое $q = O(\ln h^{-1})$ итераций, можно получить приближенное решение с точностью, даваемой оценками (9) и (10). Отметим при этом, что

$$\operatorname{cond}\left(D^{-1/2}(P + L_n)D^{-1/2}\right) = O(1).$$

§ 3. Явная ВРС для первой начально-краевой задачи

1. Построим для области Ω сеточную область $\Omega_{in}^h \subset \Omega$, ограниченную ломаной S^h и удовлетворяющую следующим свойствам:

(а) между точками S^h и S с помощью нормалей к S устанавливается взаимно-однозначное соответствие;

(б) расстояния точек S^h до S не превосходят величины $\delta_1 h^2$, где $\delta_2 > 0$ не зависит от h;

(в) область Ω_{in}^h триангулирована таким образом, что треугольники триангуляции имеют длины сторон, лежащие в пределах $[\delta_2 h; \delta_3 h]$, а площади треугольников лежат в пределах $[\delta_4 h^2; \delta_5 h^2]$, где постоянные $\delta_3 \geqslant \delta_2 > 0$, $\delta_5 \geqslant \delta_4 > 0$ не зависят от h.

(г) на расстоянии порядка h от границы области триангуляция регулярная.

Существуют алгоритмы автоматического построения нерегулярной сетки, удовлетворяющие перечисленным свойствам [9].

Обозначим через R^h множество внутренних (т.е. не принадлежащих S^h) узлов сетки. Для произвольной сеточной функции

$$v = \{v_k \equiv v(x^k) \mid x^k \in R^h\}$$

определим кусочно-линейное восполнение

$$\hat{v}(x) = \sum_{x^k \in R^h} v_k \varphi_k(x). \tag{12}$$

Базисные функции $\varphi_k(x)$ считаются продолженными нулем на полосу $\Omega \backslash \Omega^h_{in}$. Конечномерное пространство функций вида (12) обозначим через $\mathring{H}_h$. При этом $\mathring{H}_h \subset \mathring{W}_2^1(\Omega)$.

Пусть $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$; $t_N = T$.

Определим билинейную форму

$$B_n(u, v) \equiv \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + auv \right] dx\, dt$$

для $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Для решения задачи запишем следующую схему

$$h^2(v^{n+1} - v^n) + L_n v^n = g^n, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1; \; v^0 = 0, \tag{13}$$

где матрица L_n и вектор g^n таковы, что

$$B_n(\hat{v}, \hat{w}) = (L_n v, w), \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega} f \hat{w}\, dx\, dt = (g^n, w)$$

для произвольных $\hat{w}$ и $\hat{\varphi}$ из $\mathring{H}_h$.

Схема (13) позволяет вычислять на каждом слое сеточную функцию v^n и ее кусочно-линейное восполнение $\hat{v}^n(x)$. Далее, определяется функция

$$\hat{\hat{v}}(x\, t) = \begin{cases} \hat{v}^n(x) & \text{если } t \in [t_n, t_{n+1}),\ n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ \hat{v}^N(x), & \text{если } t = t_N \end{cases},$$

которую будем считать приближенным решением первой начально-краевой задачи.

2. В работах [10], [11], в предположении, что $\tau = O(h^2)$, получены следующие оценки скорости сходимости

$$|u - \hat{\hat{v}}|_Q \leqslant C_4 h \|f\|_{0,Q}, \tag{14}$$

$$\|u - \hat{\hat{v}}\|_{0,Q} \leqslant C_5 h^2 \|f\|_{0,Q}. \tag{15}$$

§ 4. О точности полученных оценок

Полученные нами выше оценки скорости сходимости ВРС (9), (10), (14) и (15), при условии, что $\tau = O(h^2)$, имеют вид

$$|u - v|_Q \leqslant C_6 h \|f\|_{0,Q}, \tag{16}$$

$$\|u - v\|_{0,Q} \leqslant C_7 h^2 \|f\|_{0,Q}, \tag{17}$$

(u — точное решение, v — приближенное решение).

Запишем эти оценки в несколько ином виде. Обозначим через M число узлов сетки, построенной для области Ω; очевидно, что $M = O(h^{-2})$. Приближенное решение мы искали как элемент конечномерного пространства функций, порожденного MN базисными функциями, где $N = O(\tau^{-1})$. Пусть $R = MN$. Тогда оценки (16) и (17) примут вид:

$$|u-v|_Q \leqslant C_8 R^{-1/4} \|f\|_{0,Q}, \tag{18}$$

$$\|u-v\|_{0,Q} \leqslant C_9 R^{-1/2} \|f\|_{0,Q}. \tag{19}$$

Зададимся вопросом: точны ли по порядку наши оценки и нельзя ли их улучшить за счет иного выбора того же, или меньшего, числа базисных функций. Для этого воспользуемся понятием поперечника по А. Н. Колмогорову.

Будем рассматривать приближенные методы, состоящие в том, что приближенное решение начально-краевой задачи при правой части f из $L_2(Q)$ ищется как элемент R-мерного подпространства L_R.

Пусть K — множество решений начально-краевой задачи, соответствующих всевозможным правым частям f уравнения (1) из шара $\|f\|_{0,Q} \leqslant 1$. Определим R-поперечник

$$d_R(K) = \inf_{L_R \subset V_2^{1,0}(Q)} \sup_{u \in K} \inf_{v \in L_R} |u-v|_{0,Q},$$

$$d_R^*(K) = \inf_{L_R \subset L_2(Q)} \sup_{u \in K} \inf_{v \in L_R} \|u-v\|_{0,Q}.$$

Оценки сверху для обоих поперечников

$$d_R(K) \leqslant C_8 R^{-1/4}, \qquad d_R^*(K) \leqslant C_9 R^{-1/2}$$

фактически следуют из оценок (18) и (19). С другой стороны, в работе [3] доказывается, что

$$d_R(K) \leqslant C_{10} R^{-1/4}, \qquad d_R^*(K) \leqslant C_{11} R^{-1/2}.$$

Поэтому полученные оценки скорости сходимости ВРС являются точными по порядку в смысле поперечников.

Литература

[1] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва 1967.

[2] А. М. Ильин, А. С. Калашников и О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Успехи математических наук 17 вып. 3 (105) 1962, 3–146.

[3] Ю. Р. Акопян и Л. А. Оганесян, *Вариационно-разностный метод решения двумерных линейных параболических уравнений*, Журнал вычислит. матем. и матем. физики 17 (1) 1977, 109–118.

[4] —, *Скорость сходимости вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений*, В сб.: Вариационно-разностные методы решения задач математической физики, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск 1976, 27–36.

[5] Ю. Р. Акопян, *Скорость сходимости в L_2 вариационно-разностных схем для двумерных линейных параболических уравнений. Итерационное решение разностных уравнений*, Доклады АН Арм. ССР 62 (4) 1976, 193–198.

[6] А. А. Злотник, *Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений*, Журнал вычислит. матем. и матем. физики 18, (6) 1978, 1454–1465.

[7] —, *О скорости сходимости проекционно-разностных схем для параболических уравнений*, В сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике, часть I, М., ОВМ АН СССР 72–80.

[8] Л. А. Оганесян и Л. А. Руховец, *Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений*, Ереван 1979.

[9] А. М. Мацокин, *Автоматизация триангуляции областей с гладкой границей при решении уравнений эллиптического типа*, Препринт № 15 семинара Вычислительные методы прикладной математики, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск 1975.

[10] Ю. Р. Акопян, *Явная вариационно-разностная схема для параболических уравнений с правой частью из L_2*, В сб.: Прикладная математика, вып. 2, Ереван 1983, 5–19.

[11] —, *Оценка скорости сходимости в L_2 явной вариационно-разностной схемы для параболических уравнений*, В сб.: Вариационно-разностные методы в математической физике, часть I, М., ОВМ АН СССР 1984, 12–25.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987