MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

ПОНЯТИЕ ПОЛНОГО РАСШИРЕНИЯ ФУНКЦИИ ЧАСТИЧНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ДИАГНОСТИКЕ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ

А. Б. ФРОЛОВ

Московский энергетический институт, СССР

Полное расширение функции частично определённой логической сети это функция, принимающая на данном наборе значений входов сети определённое значение, если это же значение принимают на том же наборе функции всех логических сетей, полученных из данной путём всевозможных полных доопределений функций её элементов. Построение полного расширения функции сети по данному определению предполагает многократное моделирование вариантов полностью определённых логических сетей для каждого входного набора. На основе макроподхода — последовательного выделения выходных подсетей, не содержащих внутренних узлов разветвления, и замены их элементами, реализующими полные расширения функций подсетей, оказывается возможным адекватное (относительно структуры логической сети и полного расширения её функции) представление сети набором формул, описывающих указанные выходные подсети.

Рассматриваемый аналитический метод построении полного расширения функции сети основан на введённых понятиях интервальной функции и полной интервальной функции и не требует имитационного моделирования работы логической сети.

Рассмотрено применение понятия полного расширения функции логической сети при построении математических моделей для диагностирования логических сетей. Эти модели являются совокупностями частично определённых логических сетей, отличающихся от диагностируемой эталонной сети тем, что функции элементов заменены сужениями или инверсиями функций или их сужений, возможные наборы заменяющих функций образуют полурешётку, лежащую в основе используемого для построения моделей векторного исчисления.

1. Схемы и логические сети. Функции и полные расширения функций логических сетей

Рассматриваемые в настоящей работе схемы образуются из элементов F_n, имеющих один выход и n ($n \geqslant 1$) входов. *Схема* как формальный объект удовлетворяет следующему определению:

а) элемент F_n есть схема, выходом и входами которой являются выход и входы элемента,

б) отождествление выхода любой одновыходной схемы S_1 со входом a другой схемы S_2 приводит к схеме с выходами схемы S_2 и со входами схем S_1 и S_2 (за исключением входа a),

в) отождествление двух или более входов схемы даёт схему с теми же входами и выходами, за исключением объединенных входов, последним соответствует новый вход,

г) объединение двух схем приводит к схеме со входами и выходами объединяемых схем.

Если в случае в) отождествляются входы, связанные путями с общим выходом, то образуется *узел разветвления*. Если узел разветвления непосредственно связан со входом схемы, то он называется *входным*, в противном случае — *внутренним*.

Интерпретация I схемы S как формального объекта заключается в нумерации ε входов схемы, нумерациях $\bar{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_s)$ входов всех её элементов и приписывании последним функций $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_s)$: $I = (\varepsilon, \bar{\delta}, \bar{g})$. Интерпретированная таким образом схема есть *логическая сеть* S_I: $S_I = (S, I) = (S, (\varepsilon, \bar{\delta}, \bar{g}))$. Далее будем считать нумерации ε и $\bar{\delta}$ известными и обозначать интерпретацию схемы и логические сети сокращённо — $(\bar{g})$ и $(S, \bar{g})$ соответственно. *Частично определёнными*, или *частичными логическими сетями* (ч.л.с.) называются логические сети, функции элементов которых могут быть частичными. Будем считать, что функции g_i, $i = 1, \ldots, s$ элементов сети являются функциями конечно- или счётнозначной логики: g_i: $A^{n_i} \to A$, $|A| \leqslant N_0$. Предполагается, что области определения этих функций, как и множества $\{\bar{a}$: $\varphi(\bar{a}) = b\}$ определённых их значений рекурсивны.

При вычислении значений функций ч.л.с. состояние выхода некоторого элемента полагают неопределённым, если не определено состояние хотя бы одного из его входов. Значение $f_{s_I}(\bar{a})$ функции $f_{s_I}(\bar{x})$ ч.л.с. S_I или факт её неопределённости при данном наборе $\bar{a}$ значений входных сигналов (входном наборе) ч.л.с. определяют по состоянию выхода ч.л.с., получающемуся в результате последовательных присвоений состояний входам и выходам элементов. При этом начинают с присвоений состояниям входов ч.л.с. значений элементов входного набора (таким образом, состояние выхода ч.л.с. получают путём моделирования работы логической сети при данном входном наборе).

Практическое значение, например, при анализе влияния неисправностей имеет интерпретация ч.л.с. S_I как множества $P(S_I) = \{S_{I'} = (S, \bar{g}'), g'_i \supseteq g_i, g_i \in P_k$ (или $g_i \in P_{N_0}$)$\}$ всех полностью определённых логических сетей $(S, \bar{g}')$, элементам которых приписаны полностью определённые функции g'_i, $i = 1, \ldots, s$ — расширения функций элементов исходной ч.л.с. S_I.

Определение 1. *Полным расширением функции* $f_{S_I}(\bar{x})$ ч.л.с. S_I называется функция $f'_{S_I}(\bar{x})$ такая, что для всех $\bar{a}$

$$f'_{S_I}(\bar{a}) = \begin{cases} b, \text{ если } \forall S_{I'} \in P(S_I) f_{S_{I'}}(\bar{a}) = b, \\ \text{не определено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Полное расширение функции логической сети S_I будем сокращённо обозначать ПРФС(S_I).

Заметим, что если $S_I = (S, \bar{g})$, где S — схема, состоящая из одного элемента (см. п. а) определения схемы), то ПРФС$(S_I) = f_{S_I}(\bar{x})$.

Рассматриваемые ч.л.с. являются моделями реальных устройств аналогичной структуры, в которых, например, вследствие неисправностей функции элементов могут изменяться в известных областях. Эти области и есть области неопределённости функций элементов ч.л.с. Область определения ПРФС(S_I) есть область правильного функционирования такого реального устройства, то есть область, где любые неисправности указанного вида не сказываются на функции устройства.

ПРФС(S_I) можно построить в соответствии с определением 1 путём π-кратного моделирования сетей из множества $P(S_I)$,

$$\pi = \pi(P(S_I)) = k^{n+r},$$

где n — число входов сети, r — суммарное число входных наборов, на которых не определены функции элементов.

Заметим, что при $|A| = N_0$ построение ПРФС(S_I) путём моделирования работы сетей невозможно в силу бесконечности множества входных наборов и, может быть, областей неопределённостей элементов.

В настоящей работе рассматриваются более эффективные методы построения ПРФС(S_I).

2. Макроподход к построению ПРФС

Пусть схема S^1 отличается от схемы S тем, что выходная подсхема S_1 схемы S заменена одним элементом D с тем же числом входов (см. рис. 1). Пусть интерпретацией $I = (\bar{g}) = (\bar{g}_2, \bar{g}_1)$ схемы S получена логическая сеть $S_I = (S, (\bar{g}_2, \bar{g}_1))$, где $\bar{g}_2(\bar{g}_1)$ — функции элементов входной подсети $(S_2, \bar{g}_2)$ (выходной подсети $(S_1, \bar{g}_1)$). Образуем логическую сеть $(S^1, (\bar{g}_2, \varphi_1))$, где φ_1 функция элемента D, равная ПРФС$(S_1, \bar{g}_1)$, то есть $f'_{(S_1, \bar{g}_1)}$.

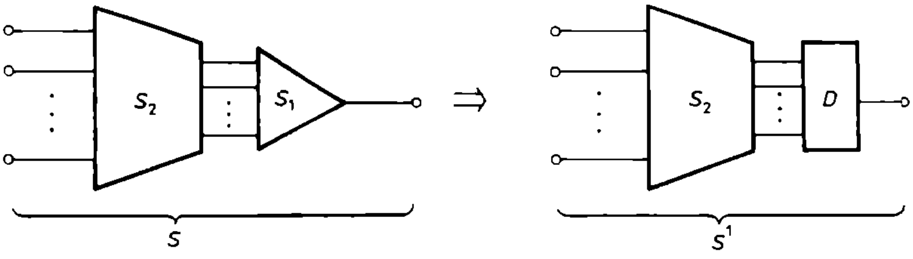

Рис. 1

Лемма 1. *Полные расширения функций логических сетей* $(S, (\bar g_2, \bar g_1))$ *и* $(S^1, (\bar g_2, \varphi_1))$ *одинаковы*:

$$f'_{(S,(\bar g_2,\bar g_1))} = f'_{(S^1,(\bar g_2,\varphi_1))}.$$

Доказательство. Входная подсеть $(S_2, \bar g_2)$ имеет m $(m \geqslant 1)$ выходов, ей соответствует множество $P((S_2, \bar g_2))$ полностью определённых логических сетей с теми же входами и выходами. Обозначим $T(\bar a)$ множество наборов значений выходных сигналов сетей из $P(S_2, \bar g_2)$, соответствующих данному входному набору $\bar a$ из области определения ПРФС(S_l). Выходная подсеть имеет m входов, ей соответствует множество $P((S_1, \bar g_1))$ полностью определённых сетей с теми же входами и выходом. На каждом наборе $\bar t \in T(\bar a)$ каждая из сетей множества $P((S_1, \bar g_1))$ имеет значение выхода f'_{S_l} (иначе $\bar a$ не принадлежало бы области определения ПРФС(S_l)). Таким образом, $f'_{S_l} \subseteq f'_{(S^1,(\bar g_2,\varphi_1))}$. Пусть набор $\bar a$ не принадлежит области определения ПРФС$(S^1, (\bar g_2, \varphi_1))$, тогда найдутся две сети из $P((S_1, \bar g_1))$, функции которых имеют различные значения на двух (не обязательно различных) наборах из $T(\bar a)$. Отсюда и $P(S_l)$ содержит две сети, функции которых имеют разные значения на наборе $\bar a$, то есть $\bar a$ не принадлежит области определения ПРФС(S_l). Таким образом, $f'_{S_l} \supseteq f'_{(S^1,(\bar g_2,\varphi_1))}$. Лемма 1 доказана.

Рассмотренное преобразование логической сети $(S, (\bar g_2, \bar g_1))$ в сеть $(S^1, (\bar g_2, \varphi_1))$ в общем случае можно выполнять многократно: полученная после $(i-1)$-го преобразования логическая сеть $(S^{i-1}, (\bar g_2^{i-2}, \varphi_{i-1}))$ может быть разделена на входную $(S_2^{i-1}, \bar g_2^{i-1})$ и выходную $(S_1^{i-1}, \bar g_1^{i-1})$ подсети $(\varphi_{i-1} = f'_{(S_1^{i-2},\bar g_1^{i-2})})$. Последняя может быть заменена элементом D^{i-1} с функцией $\varphi_i = f'_{(S_1^{i-1},\bar g_1^{i-1})}$. В итоге будет получена логическая сеть $(S^i, (\bar g_2^{i-1}, \varphi_i))$. Процесс последовательных преобразований логической сети соответствует следующей схеме:

$$
(1)\quad
\begin{array}{ccccccccc}
(S, (\bar g_2, \bar g_1)) & \approx & (S^1, (\bar g_2^1, \bar g_1^1)) & \approx \ldots \approx & (S^{i-1}, (g_2^{i-1}, g_1^{i-1})) & \approx \ldots \approx & (S^{p-1}, (\bar g_1^{p-1})) & \\
\downarrow & \nearrow_{\varphi_1} & \downarrow & \nearrow_{\varphi_2} & \downarrow & \nearrow_{\varphi_i} & \downarrow & \nearrow_{\varphi_p} \\
(S_1, (\bar g_1)) & & (S_1^1, (\bar g_1^1)) & & (S_1^{i-1}, (g_1^{i-1})) & & (S_1^{p-1}, (g_1^{p-1})) &
\end{array}
$$

На последнем этапе $S^{p-1} = S_1^{p-1}$ (не производится разделения схемы

S^{p-1}). По лемме 1 ПРФС$(S^i, (g_2^i, g_1^i))$, $i=0, 1, \ldots, p-1$ одинаковы и равны f'_{S_I}, что обозначено на приведённой схеме (1) значками $\approx$.

Рассмотренный макроподход по-прежнему предполагает многократное моделирование работы в данном случае логических подсетей и упрощает вычисления лишь в тех случаях, когда $\forall i(n_i+r_i) < n+r$, где n_i — числа входов, r_i — суммарные числа наборов в областях неопределённостей функций $\bar{g}_1^i$ элементов подсетей.

3. Представление логических сетей последовательностями формул. Полные расширения суперпозиций

Общепринятое описание логических сетей формулами позволяет адекватно представлять лишь сети без внутренних узлов разветвления. Представление формулами логических сетей общего вида сохраняет лишь функцию сети, но не отражает особенности её структуры. Ниже будет показано, что в этом случае по формуле не всегда можно восстановить и полное расширение функции сети.

Под *формулами* мы понимаем интерпретированные формулы-термы как формальные конструкции, которые содержат функциональные символы, интерпретируемые как логические функции. При этом структура терма соответствует однозначно структуре схемы без внутренних узлов разветвления, интерпретация функциональных символов — интерпретации $I=(\bar{g})$ схемы. Соответствующая логическая сеть $S_I(\Phi)$ вычисляет функцию, реализуемую интерпетированной формулой Φ (суперпозицию, определяемую этой формулой).

Определение 2. *Полным расширением суперпозиции,* определяемой формулой Φ (обозначается сокращённо ПРС(Φ)), называется полное расширение $f'_{S_I(\Phi)}$ функции сети $S_I(\Phi)$, то есть ПРС$(\Phi)=$ПРФС$(S_I(\Phi))$.

Определение 3. *Оператором* $S_{\text{ПРС}}$ полного расширения суперпозиции называется функциональный оператор, который сопоставляет n-местной функции f и n m-местным функциям φ_i, $i=1, \ldots, n$ полное расширение суперпозиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$:

$$S_{\text{ПРС}}(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \text{ПРС}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)),$$

Оператор S суперпозиции сопоставляет указанным функциям саму суперпозицию: $S(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

Заметим, что

$$S_{\text{ПРС}}(f, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}),$$

если $\forall_{j,k}\, j \neq k \rightarrow x_{ij} \neq x_{ik}$.

ПРС$(f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n))$ можно построить, очевидно, как ПРФС$(S_l(\Phi))$ путём многократного моделирования сети $S_l(\Phi)$, где Φ — формула $f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$.

Если в формуле $f(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ множество переменных $x_1,\ldots,x_r$ функций таково, что каждая переменная этого множества является существенной лишь для единственной из указанных функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, то этой формуле соответствует бесповторная подстановка функций.

ПРС(Φ) можно получить в результате однократного или многократного применения оператора $S_{\text{ПРС}}$ в том же порядке, в каком применяются операции бесповторной подстановки функций и отождествления переменных при индуктивном построении формулы Φ.

Рассмотренная выше последовательность (1) преобразований логической сети может быть выбрана так, что выходные подсети $(S_1,(\bar{g}_1))$, $(S_1^i,(g_1^i))$, $i=1,\ldots,p-1$, не будут содержать внутренних узлов разветвления. Каждая из них однозначно представляется формулой. Тем самым и исходная сеть $(S,(\bar{g}))$ представляется последовательностью формул

$$\Phi_1,\ \Phi_1^1,\ \ldots,\ \Phi_1^i,\ \ldots,\ \Phi_1^{p-1}. \tag{2}$$

В этом случае ПРС(Φ_1^{p-1}) получается в результате вычисления последовательности полных расширений суперпозиций

$$\text{ПРС}(\Phi_1),\ \text{ПРС}(\Phi_1^1),\ \ldots,\ \text{ПРС}(\Phi_1^i),\ \ldots,\ \text{ПРС}(\Phi_1^{p-1}).$$

Каждому вычислению при этом соответствует один или несколько операторов $S_{\text{ПРС}}$, как отмечено выше.

Заметим, что ПРС(Φ_1^{p-1}) = ПРФС(S_l).

Таким образом, полное расширение функции сети S_l – ПРФС(S_l) может быть получено по последовательности (2) формул, представляющей S_l однозначно, применением оператора $S_{\text{ПРС}}$ в соответствии со строением формул этой последовательности.

Недостатком рассмотренного метода вычисления ПРФС(S_l) является необходимость использования моделирования при реализации операторов $S_{\text{ПРС}}$.

Пример. Логическая сеть S_l на рис. 2 представляется формулами ($g(x)$ — полностью неопределённая функция) Φ_1 и Φ_1^1

$$\Phi_1\colon\ (z_1\equiv z_1)\xrightarrow{\text{ПРС}} S_{\text{ПРС}}(z_1\equiv z_1)=\varphi_1(z_1)=1,$$

$$\Phi_1^1\colon\ \varphi_1(g(x))\xrightarrow{\text{ПРС}} S_{\text{ПРС}}(\varphi_1(g(x)))=\varphi_2(x)=1.$$

Здесь $p=2$ и $\varphi_2(x)$ = ПРФС$(S_l)=1$.

Заметим, что ПРС$(g_1(x)\equiv g_1(x))$ полностью неопределено.

Этот пример подтверждает утверждение о непредставимости полного расширения функции сети, содержащей внутренние узлы разветвления, единственной формулой.

4. Интервальные функции и их суперпозиции

Пусть φ — логическая функция (ЛФ): $\varphi\colon A^n \to A$, $|A| \leqslant N_0$. Обозначим $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.

Определение 4. *Интервальной функцией* (ИФ), представляющей функцию φ, называется функция

$$F_\varphi\colon P(A)^n \to P(A)$$

такая, что

(а) $$F_\varphi(\{\bar a\}) = \begin{cases} \{\varphi(\bar a)\}, & \text{если } \varphi \text{ определена на наборе } \bar a, \\ A & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

(б) $$X^1 \leqslant X^2 \to F_\varphi(X^1) \subseteq F_\varphi(X^2).$$

Интервальная функция F_φ называется *полной* ИФ (сокращённо — ПИФ), если

$$F_\varphi(X) = \begin{cases} \{b\}, & \text{если } \forall \bar a \in X \ \ \varphi(\bar a) = b, \\ A & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь под $\bar a \in X$ понимается, что $\forall_i a_i \in X_i$, $\bar a = (a_1, \ldots, a_n)$, $X = (X_1, \ldots, X_n) \in P(A)^n$, $X^1 \leqslant X^2$, если $\forall_i X_i^1 \subseteq X_i^2$.

Лемма 2. *Пусть $F_f, F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}$ — интервальные функции, представляющие логические функции $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ соответственно, тогда суперпозиция $F_f\,(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n})$ этих* ИФ *есть* ИФ *F_ψ, представляющая* ЛФ *ψ, которая является расширением суперпозиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ представляемых* ЛФ:

$$\psi \supseteq f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Доказательство. Тот факт, что суперпозиция интервальных функций является ИФ доказывается подобно тому, как доказывается замкнутость класса монотонных функций. Не трудно заметить также, что если на наборе $\bar a \in A^n$, где суперпозиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ определена и принимает значение b, суперпозиция интервальных функций $F_f(F_{\varphi_1}, \ldots F_{\varphi_n})$ принимает значение $\{b\}$ на наборе $(\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\})$ (имеется в виду, что $\bar a = (a_1, \ldots, a_n)$). Это доказывает, что представляемая этой суперпозицией логическая функция ψ является расширением суперпозиции $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Теорема. *Пусть F_1 — полная интервальная функция, представляющая логическую функцию f, F_{φ_i}, $i = 1, \ldots, n$ — любые интервальные функции, представляющие* ЛФ *$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ соответственно. Тогда суперпозиция*

$$F_f\,(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n})$$

есть интервальная функция F_ψ, *представляющая полное расширение* ψ *суперпозиции* $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$:

$$\psi = S_{\text{ПРС}}(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \text{ПРС}(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Доказательство. Пусть $\bar{a} \in X$ — набор значений переменных, на котором $\text{ПРС}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = b \in A$. Пусть на этом наборе функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ определены и принимают значения $c_1, \ldots, c_i$, а функции $\varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n$ не определены. Тогда множество $T(\bar{a})$ всевозможных образов набора $\bar{a}$ в сечениях схем из $P(S_\Phi)$, отделяющих выходной елемент, будет соответствовать интервалу

$$(\{c_1\}, \{c_2\}, \ldots, \{c_i\}, A, \ldots, A) \subseteq P(A)^n. \tag{3}$$

Этот же интервал образуют значения на наборе $(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\})$ интервальных функций $F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}$.

На каждом наборе $(c_1, \ldots, c_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$ значение функции f равно b (поскольку $\text{ПРС}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$ определено на $\bar{a}$). Значение полной интервальной функции F_f на интервале (3) равно $\{b\}$.

Если же на наборе $\bar{a}$ значение $\text{ПРС}(f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n))$ не определено, то найдутся два набора

$$\bar{t} = (c_1, c_2, \ldots, c_i, b_{i+1}, \ldots, b_n), \qquad \bar{t}' = (c_1, c_2, \ldots, c_i, b'_{i+1}, \ldots, b'_n),$$

соответствующие интервалу (3) такие, что

$$f(\bar{t}) \neq f(\bar{t}'),$$

но в этом случае $F_f(\{c_1\}, \ldots, \{c_i\}, A, \ldots, A) = A$.

Введём оператор $S_{\text{ПИФ}}$, который сопоставляет интервальной функции F_ψ полную интервальную функцию, представляющую ту же логическую функцию ψ:

$$S_{\text{ПИФ}}(F_\psi) = F'_\psi,$$

где F'_ψ — полная интервальная функция, представляющая ψ.

Для реализации оператора $S_{\text{ПИФ}}$ применяется техника минимизации покрытий подмножеств булевых структур: используются операции „склеивания" и „поглощения" интервалов булевой структуры $P(A)^n$.

Заметим, что если суперпозиция $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ соответствует бесповторной подстановке функций, то

$$F_f(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n}) = S_{\text{ПИФ}}(F_f(F_{\varphi_1}, \ldots, F_{\varphi_n})).$$

Если же подстановка не является бесповторной или (частный случай) осуществляется отождествление переменных ($\exists_{i,j} \varphi_i = \varphi_j = x_k$), то подобное равенство в общем случае не выполняется.

5. Аналитический метод построения ПРС и ПРФС

Пусть Φ — формула над системой логических функций. Последовательность формул (2), образуемая по этой формуле, как описано выше, на основе макроподхода, может быть устроена так, что Φ_1^i $(i \leqslant k \leqslant p-1)$ являются формулами бесповоротной суперпозиции, а Φ_1^j $(k < j \leqslant p-1)$ — формулами отождествления переменных. Если $k = p-1$, то формул последнего вида нет.

Рассмотренной последовательности формул (2) соответствует последовательность формул F_{Φ^i} над системой интервальных функций. Соответствующие друг другу формулы Φ^i и F_{Φ^i} этих последовательностей имеют одинаковое строение. Полные расширения функций, реализуемых формулами первой последовательности обозначены выше φ_i. Они являются функциями, представляемыми суперпозициями интервальных функций, реализуемых формулами второй последовательности, если „выходные" функции в этих формулах — полные интервальные функции. Последнее будет соблюдаться, если F_{φ_i} будет вычисляться как суперпозиция, соответствующая формуле F_{Φ^i} $(i \leqslant k)$, а F_{φ_j} $(j > k)$ — как суперпозиция с последующим применением оператора $S_{\text{ПИФ}}$. Таким образом, рассмотренные операторы суперпозиции S и пополнения $S_{\text{ПИФ}}$ достаточны для вычисления ПРС(Φ) для любой формулы Φ.

Эти операторы достаточны и для вычисления ПРФС(S_I), поскольку сеть S_I можно представить последовательностью формул. Вычисляя ПРС(Φ) указанным выше способом по каждой из этих формул путем последовательного применения операторов S и $S_{\text{ПИФ}}$, получим в итоге интервальную функцию, представляющую искомое ПРФС(S_I).

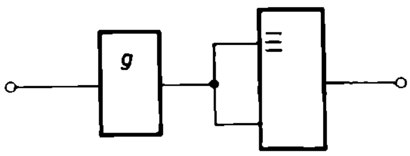

Рис. 2

Пример. Рассмотрим логическую сеть на рис. 2, где g — полностью неопределённая функция. Интервальными функциями, представляющими $g_1(z_1, z_2)$ и $g_2(x)$ являются $F_{g_1}(\alpha_1, \alpha_2) = \{((\{0\}, \{0\}), \{1\}), ((\{1\}, \{1\}), \{1\}), ((\{0\}, \{1\}), \{0\}), ((\{1\}, \{0\}), \{0\}), ((A, \{0\}), A), ((A, \{1\}), A), ((\{0\}, A), A), ((\{1\}, A), A), ((A, A), A)\}$; $F_{g_2}(\alpha) = \{(X, A) | \ X \subseteq A\}$.

Отождествляя переменные функции g_1 (соответственно и интервальной функции F_{g_1}) получим суперпозицию

$$F_{g_1}(\alpha, \alpha) = \{((\{0\}), \{1\}), ((\{1\}), \{1\}), (A, A)\} = F_{\varphi_1}(\alpha).$$

Применяя оператор $S_{\text{ПИФ}}$, получим („склеиванием" $(\{0\})$ и $(\{1\})$ получаем $(A, \{1\})$, что влечёт удаление (A, A))

$$F'_{\varphi_1}(\alpha) = \{(A, \{1\}), ((\{0\}), \{1\}), ((\{1\}), \{1\})\}$$

или (в сокращённой записи)

$$F'_{\varphi_1}(\alpha) = \{(A, \{1\})\}.$$

Рассматривая далее суперпозицию $F'_{\varphi_1}(F_{g_2})$

$$F'_{\varphi_1}(F_{g_2}) = F'_{\varphi_2} = \{(A, \{1\})\}$$

получим интервальную функцию, представляющую ПРФС$\varphi(x) = 1$ логической сети на рис. 2.

Таким образом, представление функций интервальными функциями, а логических сетей — последовательностями формул позволяет находить полные расширения функций логических сетей, не прибегая к моделированию при возможных вариантах входных наборов и доопределений функций.

6. Математические модели для диагностирования логических сетей

Множества возможных изменений логических сетей. Далее будем рассматривать логические сети, входы которых являются входами одновходовых элементов и в которых отождествляются входы только одновходовых элементов (в реальных устройствах роль таких одновходовых элементов могут выполнять имеющиеся соединения, эти элементы вводятся для удобства последующего моделирования возможных изменений сетей при неисправностях).

Будем считать, что неисправности логических сетей выражаются в изменениях функций их элементов.

В этом случае множество всех возможных изменений логической сети — это множество

$$\mathfrak{M}_S = \{S_I | \ \bar{g}\}$$

всех её интерпретаций, каждая из которых определяется приписыванием функций g_i вектора $\bar{g}$ элементам схемы S. По-прежнему будем считать функции g_i частичными. Тогда каждую интерпретацию S_I можно рассматривать как множество сетей (изменений)

$$\mathfrak{M}_{S_I} = \mathfrak{M}_{(S, \bar{g})} = \{S_{(\bar{g}')} | \ \bar{g}' \supseteq \bar{g}\}$$

отличающихся тем, что элементам схемы приписаны расширения функций элементов логической сети $(S, \bar{g})$.

При данном подходе схема или ч.л.с. выступают как *функциональные* *операторы*: сопоставляют наборам функций функции или полные расширения функций логической сети.

Эксперименты с логическими сетями, диагнозы и задачи диагностирования. С целью упрощения изложения далее будем рассматривать сети с двузначними частичными функциями элементов, имеющие один выход и n выходов.

Пара $(\bar{a}, b)$, где $\bar{a} \in \{0, 1\}^n$, $b \in \{0, 1\}$ называется *элементарным контрольным экспериментом* (э.к.э.). Ч.л.с. S_I *удовлетворяет* э.к.э. $(\bar{a}, b)$, если $f'_{S_I}(\bar{a}) = b$ (то есть ПРФС(S_I) имеет значение b на наборе $\bar{a}$).

Пара (α, b), где $\alpha \subseteq \{0, 1\}^n$ называется *контрольным экспериментом* (к.э.). Ч.л.с. S_I *удовлетворяет* к.э. (α, b), если она удовлетворяет хотя бы одному э.к.э. $(\bar{a}, b)$, $\bar{a} \in \alpha$ (то есть $\exists \bar{a} \in \alpha$, $f'_{S_I}(\bar{a}) = b$).

Набор

$$\left((\alpha^1, b^1), \ldots, (\alpha^p, b^p)\right) \tag{4}$$

контрольных экспериментов называется *кратным контрольным экспериментом* (к.к.э.). Ч.л.с. S_I *удовлетворяет* к.к.э. (4), если она удовлетворяет каждому входящему в него к.э.:

$$\forall_i \exists \bar{a} \in \alpha^i f_{S_I}(\bar{a}) = b^i.$$

К.к.э. (4) будем сокращённо обозначать $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Рассморенным экспериментам соответствуют *диагнозы*:

— множества изменений логических сетей, каждое из которых удовлетворяет соответствующему эксперименту:

$$\mathfrak{N}_S^b(\bar{a}) = \{S_I |\ f'_{S_I(\bar{a})} = b\},$$

— диагноз для э.к.э. $(\bar{a}, b)$,

$$\mathfrak{N}_S^b(\alpha) = \{S_I |\ \exists \bar{a} \in \alpha,\ f_{S_I}(\bar{a}) = b\},$$

— диагноз для к.э. (α, b),

$$\mathfrak{N}_S^{\tilde{\beta}}(\tilde{\alpha}) = \{S_I |\ \forall_i \exists \bar{a} \in \alpha^i f_{S_I}(\bar{a}) = b^i\},$$

— диагноз дла к.к.э. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Используя введённые обозначения, сформулируем две основные задачи диагностирования логической сети.

Прямая задача: дан к.к.э. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, найти диагноз $\mathfrak{N}_S^{\tilde{\beta}}(\tilde{\alpha})$.

Обратная задача: найти к.к.э. $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, такой, что

$$\mathfrak{N}_S^{\tilde{\beta}}(\tilde{\alpha}) = S_I,$$

где S_I — „эталонная" логическая сеть.

Математические модели для диагностирования логических сетей в классе $\mathfrak{M}_S$ возможных изменений. В диагностике дискретных устройств различают *явные* и *неявные* модели. Первые представляют собой совокупность функций логических сетей рассматриваемого класса изменений. Их применение затруднительно (вследствие возрастания объёмов вычислений) при большом числе изменений с различными функциями. Преимуществом явных моделей является их универсальность, то есть возможность учитывать любые изменения функций элементов. Неявные модели позволяют в одной аналитической записи или в виде соответствующей ей совокупности векторов представить функцию сети с возможными изменениями (определённого вида) функций её элементов (возможность изменений представляется в модели соответствующими переменными). Неявные модели позволяют описывать более мощные классы изменений, но как правило ограничивают характер изменений функций каждого элемента. Заметим, что модели на основе частично определённых сетей в литературе не рассматривались. В настоящей работе предлагается в качестве неявных моделей ч.л.с. определённые совокупности их изменений, представляющие собой диагнозы для экспериментов определённого вида.

Определение 5. *Прямой диагностической моделью* ч.л.с. S_I называется подмножество множества $\mathscr{P}_S^1$, равное диагнозу $\mathfrak{N}_S^1(\{0, 1\}^n)$. *Обратной диагностической* моделью — подмножество $\mathscr{P}_S^0$, равное диагнозу $\mathfrak{N}_S^0(\{0, 1\}^n)$.

Таким образом, прямая (обратная) модель включает логические сети, ПРФС которых имеют значение 1 (0) хотя бы при одном входном наборе. Определяемые ниже двойственные прямая и обратная модели включают логические сети, ПРФС которых принимают значение 1 или 0 соответственно на каждом входном наборе.

Двойственной прямой (обратной) диагностической моделью ч.л.с. называется множество $\mathscr{P}_S^{*1}$ ($\mathscr{P}_S^{*0}$), равное диагнозу $\mathfrak{N}_S^{\tilde{\beta}}(\tilde{\alpha})$ для кратного эксперимента $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \big(((0, \ldots, 0), 1), \ldots, ((1, \ldots, 1), 1)\big)$ или $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \big(((0, \ldots, 0), 0), \ldots, ((1, \ldots, 1), 0)\big)$ соответственно.

Пусть $\alpha \subseteq \{0, 1\}^n$.

α-компонентой основной $\mathscr{P}_S^b$ или *двойственной* $\mathscr{P}_S^{*b}$ модели называется диагноз $\mathfrak{N}_S^b(\alpha)$ или $\mathfrak{N}_S^{\tilde{\beta}}(\tilde{\alpha})$ соответственно. (Последний — для кратного эксперимента $\{((a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}), b) \mid (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in \alpha\}$.)

Рассматриваемые модели и их α-компоненты отвечают включениям:

$$\mathscr{P}_S^b \supseteq \mathscr{P}_S^b(\alpha) \supseteq \mathscr{P}_S^b(\bar{a}) = \mathscr{P}_S^{*b}(\bar{a}) \supseteq \mathscr{P}_S^{*b}(\alpha) \supseteq \mathscr{P}_S^{*b}.$$

Диагнозы представляются посредством рассмотренных моделей следующим образом:

Для представления рассмотренных моделей можно использовать минимальные (по степени определённости) представители соответствующих множеств, имея в виду представимость сетями множеств более определённых сетей при образовании соответствующих покрытий.

Использование подобных моделей в полном классе изменений практически невозможно. Поэтому в соответствии с традициями использования неявных моделей ограничим область рассматриваемых изменений. Введём обозначения для изменений отдельных функций и совокупностей таких изменений:

(1) 0 — замена функции константой 0,

(2) 1 — замена функции константой 1,

(3) g — сохранение функции,

(4) $\bar{g}$ — замена функции инверсной функцией,

(5) 0^0 — замена функции частичной функцией, принимающей определённые (нулевые) значения только на области нулевых значений исходной функции,

(6) 0^1 — замена функции частичной функцией, принимающей определённые (нулевые) значения только на области единичных значений исходной функции,

(7) 1^1 — замена, аналогичная замене (5),

(8) 1^0 — замена, аналогичная замене (6),

(9) z — обобщённое обозначение замен (3) и (4),

(10) 0^Φ — обобщённое обозначение совокупности замен (5) и (6),

(11) 1^Φ — обобщённое обозначение совокупности замен (7) и (8),

(12) Φ — обобщённое обозначение объединения 0^Φ и 1^Φ.

Реально возникающие в устройствах ситуации соответствуют случаям (1)–(8), прочие обозначения соответствуют совокупностям таких ситуаций.

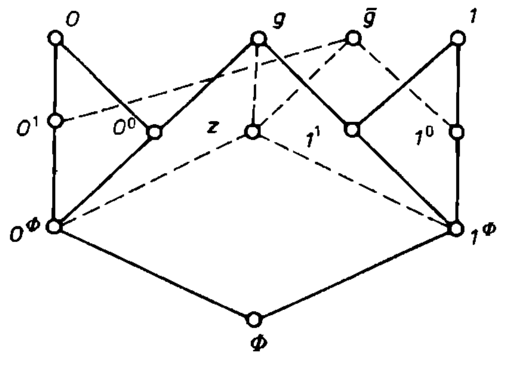

Рис. 3

Рассмотренные варианты изменений функций отдельных элементов образуют полурешётку с инфимумами (см. рис. 3, где сплошными линиями выделена полурешётка, соответствующая ещё более ограниченному классу (отсутствует вариант $\bar{g}$). Рассмотренные ограничения выделяют в основном классе $\mathfrak{M}_S$ подклассы $\mathfrak{L}_S^1$ (не включает изменений вида $\bar{g}$) и $\mathfrak{L}_S^2$. Для различных элементов сети могут допускаться изменения из различных классов этого вида. Элементы указанных классов и их совокупности можно представлять векторами $v \in \{0, 1, g, \bar{g}, z, 0^0, 0^1, 1^1, 1^0,$

0^{Φ}, 1^{Φ}, $\Phi\}^S$ или совокупностями таких векторов. В этих классах прямая P_S^1 и обратная P_S^0 модели (как основные, так и двойственные P_S^{*1} и P_S^{*0}) и их α — компоненты являются подмножествами рассмотренных выше общих моделей и α — компонент и представляются совокупностями векторов указанного вида, являющимися минимальными элементами этих подмножеств (по отношению порядка, порождаемому полурешёткой на рис. 3). Ещё одна возможность упрощения представления моделей состоит в том, что можно удалять векторы, которые могут быть восстановлены по остающимся. В зависимости от степени упрощения получаются модели различной сложности. При построении диагнозов с помощью рассматриваемых моделей используются операции векторного пересечения и сопряжения („склеивания”), аналогичные используемые в технике минимизации подмножеств булевых структур. Имеется взаимно-однозначное соответствие между представлениями прямых, двойственных моделей и их α — компонент. Их векторные представления переводятся формальными преобразованиями векторов, поэтому их представления имеют одинаковую сложность. Эти, а также ряд других свойств, лежащих, в частности в основе алгоритмов построения моделей, являются следствиями свойств полных расширений функций логических сетей, рассмотренных в настоящей работе.

Пример. Векторным пересечением прямой P_S^1 и обратной P_S^0 моделей логической сети на рис. 4 получим описание множества изменений, при которых возможны появления как значения 1, так и значения 0 на выходе сети (имеется в виду, что изменения $\bar{g}$ возможны лишь для входного элемента, 1, 4 выход и вход сети, 2, 3 – выходы узла разветвления).

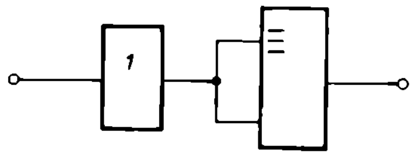

Рис. 4

	1	2	3	4
	1^1	1^1	1^1	1^{Φ}
	1^1	0^0	0^0	0^{Φ}
$\cap$				
	0^0	0^1	1^1	1^{Φ}
	0^0	0^0	1^0	0^{Φ}
	0^0	1^1	0^1	1^{Φ}
	0^0	1^1	0^0	0^{Φ}
	g	g	1	z
	g	1	g	z
	g	g	0	z
	g	0	g	z

7. Заключение

Индуктивный подход к построению схемы и ее интерпретации при образовании логической сети, а также рассмотрение ч.л.с. как функционального оператора заимствованы из [2]. Понятие интервальной функции применительно к случаю, соответствующему $A = \{0, 1\}$ было предложено и исследовано автором совместно с В. П. Ващенко и А. В. Князевым [1], см. также [4]. Функциональные (явные) диагностические модели введены и исследованы А. Ч. Чегис и С. В. Яблонским [5]. Алгебра неявных моделей (двойственных в нашей классификации) исследована П. П. Пархоменко [3]. Модели в классе $\mathfrak{L}_5^2$ изменений исследовались автором совместно с Л. И. Ляшенко. Большая помощь в работе была оказана автору д.ф.-м.н. профессором В. Б. Кудрявцевым.

Литература

[1] В. П. Ващенко, А. Б. Фролов, *Логические основы дискретных устройств*, Изд-во Моск. энерг. ин-та, Москва 1978.

[2] В. Б. Кудрявцев, *Функциональные системы*, Изд-во Моск. гос. ун-та, Москва 1982.

[3] П. П. Пархоменко, *Диагноз технического состояния дискретных устройств методом выделения подозреваемых неисправностей*, Автоматика и телемеханика 6 (1971), 126–137.

[4] А. Б. Фролов, *Модели общей теории построения тестов относительно константных неисправностей*, Кибернетика 6 (1983), 57–61.

[5] А. И. Чегис, С. В. Яблонский, *Логические способы контроля работы электрических схем*, Труды МИАН СССР 51 (1958), 270–360.

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computation Theory
September 16–December 14, 1985