POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

# DISSERTATIONES MATHEMATICAE

## (ROZPRAWY MATEMATYCZNE)



CCLXXXI

ZOLTÁN SASVÁRI

# Definisierbare Funktionen auf Gruppen

WARSZAWA 1989

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND



ISBN 83-01-08946-6 ISSN 0012-3862

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

# INHALTSVERZEICHNIS

# Einleitung

(0.1) Positiv definite Funktionen und ihre Verallgemeinerungen werden seit Anfang des Jahrhunderts intensiv untersucht. Die Theorie dieser Funktionen findet zahlreiche Anwendungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik, wie zum Beispiel Wahrscheinlichkeitstheorie, harmonische Analyse, Operatorentheorie, Theorie der komplexen Funktionen, Momentenprobleme, Integralgleichungen, Informationstheorie. Eine komplexwertige Funktion $f$ auf einer Gruppe $G$ heißt positiv definit, wenn für beliebige $g_1, \ldots, g_n \in G$ und für beliebige komplexe Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(g_j^{-1} g_i) c_i \overline{c_j} \geqslant 0. \tag{1}$$

Wir bemerken, daß eine positiv definite Funktion $f$ hermitesch (das heißt, $f(-g) = \overline{f(g)}$ für $g \in G$) und beschränkt ist. Fordert man für eine hermitesche Funktion $f$ die Ungleichung (1) nur für komplexe Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ mit $c_1 + \ldots + c_n = 0$, so erhält man den Begriff einer bedingt positiv definiten Funktion. Dieser Begriff wurde von I. J. Schoenberg eingeführt [50], [51]. Bedingt positiv definite Funktionen sind im allgemeinen nicht beschränkt.

Die bedingt positiv definiten Funktionen einer Veränderlichen hat im Zusammenhang mit unbegrenzt teilbaren Zufallsgrößen B. W. Gnedenko [11] untersucht. Solche Zufallsgrößen spielen in der Theorie der zentralen Grenzwertsätze eine wichtige Rolle. Eine Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion $g$ ist genau dann unbegrenzt teilbar, wenn $g = e^f$ gilt, wobei $f$ eine stetige, bedingt positiv definite Funktion mit $f(0) = 0$ ist. Somit läßt sich die Lévy–Khinchin–Formel für charakteristische Funktionen unbegrenzt teilbarer Zufallsgrößen herleiten, indem man eine Integraldarstellung für bedingt positiv definite Funktionen angibt [5], [19], [26], [27]. Bezeichne $F(G)$ die Menge aller komplexen Maße auf $G$, die einen endlichen Träger besitzen. Die Bedingung, daß eine hermitesche Funktion $f$ bedingt positiv definit ist, kann auch folgendermaßen formuliert werden: Die Funktion $w * f * \tilde{w}$ ist für alle $w \in F(G)$

---

1980 *Mathematics Subject Classification*: Primary *43A35*, *22D12*

*Key words*: definitizable function, function with $k$ negative squares, unitary representation in Pontrjagin space.

mit $\hat{w}(1) = 0$ positiv definit. Hierbei bezeichnet $1$ den konstanten Charakter von $G$ (bezüglich der in der Einleitung benutzten Bezeichnungen verweisen wir auf das „Verzeichnis einiger benutzter Symbole").

In der vorliegenden Arbeit wird die folgende Funktionenklasse eingeführt und untersucht: Es seien $G$ eine lokalkompakte kommutative Gruppe, $k_i$ positive ganze Zahlen und $\gamma_i \in \Gamma'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Bezeichne $P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ die Menge aller stetigen, hermiteschen Funktionen $f$ auf $G$ mit der folgenden Eigenschaft: Die Funktion $f * w * \tilde{w}$ ist positiv definit für alle $w \in F(G)$ der Gestalt

$$w = w_1^{(1)} * \ldots * w_{k_1}^{(1)} * w_1^{(2)} * \ldots * w_{k_2}^{(2)} * \ldots * w_1^{(n)} * \ldots * w_{k_n}^{(n)}$$

mit $\left(w_l^{(i)} * (w_l^{(i)})^{\sim}\right)^{\wedge}(\gamma_i) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n, \quad l = 1, \ldots, k_i)$.
Die Funktionen der Klasse $P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ heißen definisierbare Funktionen.

Im Falle der Gruppe $R^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wurde die funktionenklasse $P^c(1, k)$ im Zusammenhang mit der Theorie der stochastischen Prozesse mit stationären Zuwächsen $k$-ter Ordnung betrachtet [10], [25], [41]. Man sagt, daß ein Prozeß $X(t)$, $t \in R^n$, mit Werten in einem Hilbertraum, stationäre Zuwächse $k$-ter Ordnung besitzt, wenn der Erwartungswert

$$E\left(X * w_1^{*k}(t+s), X * w_2^{*k}(s)\right), \quad t, s \in R^n,$$

im Falle $\hat{w}_1(1) = \hat{w}_2(1) = 0$ von $s$ unabhängig ist. Das Studium solcher Prozesse führt zur Untersuchung der Funktionenklasse $P^c(1, k)$. Wir bemerken, daß in [10] die Klasse $P^c(1, k)$ für verallgemeinerte Funktionen auf $R^n$ eingeführt wurde. In ihrer Definition benutzten die Autoren Differenzialoperatoren anstelle der Differenzoperatoren $w(f) = f * w$. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen definisierbaren Funktionen und Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten. Wir sagen, die auf einer Gruppe $G$ definierte hermitesche Funktion $f$ besitze $k$ negative Quadrate, $k = 0, 1, 2, \ldots$, wenn die hermitesche Matrix

$$A = \left(f(g_j^{-1} g_i)\right)_{i,j=1}^n$$

für beliebiges $n$ und $g_1, \ldots, g_n \in G$ höchstens $k$ negative Eigenwerte und für eine gewisse Wahl von $n$, $g_1, \ldots, g_n$ genau $k$ negative Eigenwerte besitzt. Die Gesamtheit aller Funktionen auf $G$ mit $k$ negativen Quadraten bezeichnen wir mit $P_k(G)$.(1) Diese Funktionenklasse wurde zuerst von M. G. Krein betrachtet. In der Arbeit [28] gibt er Integraldarstellungen für Funktionen aus $P_1^c(R)$ und $P_1(Z)$ an (ohne Beweis). In [22] bewiesen die Autoren Integraldarstellungen für Funktionen aus $P_k(Z)$ und $P_1^c(R)$. Sie zeigten auch, daß jede Funktion aus $P_k(Z)$ definisierbar ist. Es gilt auch die Umkehrung: Ist $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ und $f \notin P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ für $i = 1, \ldots, n$, so gilt: $f \in P_k(Z)$ mit $k = k_1 + \ldots + k_n$.

---

(1) $P_0(G)$ ist also die Menge der positiv definiten Funktionen auf $G$.

Wir bemerken, daß unsere Terminologie sich etwas von der in [22] verwendeten unterscheidet. Der Fall $f \in P_k^c(R)$ wurde in [30] untersucht. W. I. Gorbachuk bewies eine Intergraldarstellung für Funktionen aus $P_k^c(R^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ ([12]).

In den Artikeln [52], [53] stellte J. Stewart das Problem, eine Integraldarstellung für Funktionen aus $P_k^c(G)$ zu finden, wobei $G$ eine beliebige lokalkompakte Gruppe ist. Nach unserem Wissen wurden bis jetzt in dieser Richtung keine Ergebnisse veröffentlicht.

**(0.2)** Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit geben wir eine Charakterisierung der beschränkten Funktionen aus $P_k^c(G)$, wenn $G$ eine lokalkompakte kommutative Gruppe ist (Satz (2.2.)). Diese Funktionen sind die Fourier-Transformierten von Maßen $\mu \in M(\Gamma)$ mit der folgenden Eigerschaft: Es gibt $k$ Punkte mit negativem $\mu$ -Maß und außerhalb dieser $k$ Punkte ist $\mu$ nichtnegativ. Im Falle $G = Z$ und $G = R$ wurde dieses Resultat in [22] bzw. in [54] erhalten. Unser wichtigstes Hilfsmittel beim Beweis ist ein Satz über lineare Funktionale (Satz (1.3)). In den Abschnitten 6 und 11 geben wir zwei weitere Beweise für diese Charakterisierung. Alle drei Beweismethoden sind auch in den Fällen $G = Z$ und $G = R$ von den in [22] und [54] verschieden.

In Kapitel II werden definisierbare Funktionen auf lokalkompakten kommutativen Gruppen untersucht. Eine der wichtigsten Sätze in diesem Kapitel ist Satz (3.3), der besagt, daß jede Funktion aus $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ sich in der Form

$$f = f_1 + \ldots + f_n \quad \text{mit} f_i \in P(\gamma_i, k_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

darstellen läßt. Durch diesen Satz läßt sich die weitere Untersuchung definisierbarer Funktionen auf die Untersuchung von Funktionen der Klassen $P(\gamma, k)$ zurückführen.

Im Abschnitt 4 geben wir eine Integraldarstellung für Funktionen aus $P^c(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma$, im Abschnitt 5 werden Funktionen aus $P^c(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma_u$ charakterisiert.

Im Abschnitt 7 zeigen wir, daß jede meßbare definisierbare Funktion $f$ sich in der Form

$$f = f_c + f_s$$

mit einer stetigen definisierbaren Funktion $f_c$ und einer fast überall verschwindenden, positiv definiten Funktion $f_s$ darstellen läßt.

Im Kapitel III werden Funktionen aus $P_k(G)$ untersucht. Es stellt sich heraus, daß Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten definisierbar sind, während die umgekehrte Aussage im allgemeinen nicht gilt. Dem Zerlegungssatz (3.3) entspricht Satz (8.2) (siehe auch Folgerung (11.7)).

Es ist bekannt, daß für jede positiv definite Funktion $f$ auf einer beliebigen Gruppe $G$ eine unitäre Darstellung $(U_x)$ von $G$ in einem Hilbertraum $H$ derart existiert, daß

$$f(x) = (v, U_x v), \qquad x \in G,$$

mit einem gewissen $v \in G$ gilt. Der Hilbertraum $H$ kann auch so gewählt werden, daß er aus Funktionen auf $G$ besteht, und die Operatoren $U_x$ Verschiebungsoperatoren sind [6], [29]. Die entsprechenden Aussagen für Funktionen aus $P_k(G)$ werden im Abschnitt 9 bewiesen. Anstelle des Hilbertraumes tritt dabei ein $\pi_k$-Raum. Die hier enthaltenen Resultate werden bei den weiteren Untersuchungen öfters angewendet.

Im Abschnitt 10 untersuchen wir mehrere Fragen bezüglich meßbarer Funktionen aus $P_k(G)$ (Zerlegung, lokale Meßbarkeit, Fortsetzung). Satz (10.8) stellt eine Lösung eines Problems von H. Langer dar.

Im Abschnitt 11 werden unitäre $\pi_k$-Darstellungen von kommutativen Gruppen betrachtet. Mit Hilfe der erhaltenen Resultate geben wir eine Beschreibung der Funktionen aus $P_k^c(G)$ mit einer Singularität $\gamma \in \Gamma_u$, sowie einen neuen Beweis für Satz (2.2).

In [38] äußerte M. A. Naimark die Vermutung, daß sich die Integraldarstellung für Funktionen aus $P_k(Z)$ und $P_k^c(R)$ aus der von ihm angegebenen Spektraldarstellung für unitäre $\pi_k$-Darstellungen herleiten lasse. Diese Vermutung wird im Abschnitt 12 im Falle der Funktionenklasse $P_1^c(G)$ für eine beliebige lokalkompakte kommutative Gruppe $G$ mit abzählbarer Basis bestätigt. Wie erhalten somit einen neuen Beweis für die Lévy–Khinchin–Formel.

Im Abschnitt 14 wird die Lévy–Khinchin–Formel mit Hilfe der Extremalpunkt-Methode für den Fall $G = R$ hergeleitet. Diese Methode wurde bereits von S. Johansen [26] angewendet. Wir geben hier einen einfacheren Beweis.

Im Anhang haben wir die für uns wichtigsten Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie der $\pi_k$-Räume und der Polynome auf Gruppen zusammengefaßt. Was die harmonische Analyse auf lokalkompakten Gruppen betrifft, halten wir uns im wesentlichen an die Terminologie und Bezeichnungen der Monographie [18]. Während der ganzen Arbeit bezeichnet das Symbol $\Gamma$ die Charaktergruppe einer lokalkompakten kommutativen Gruppe $G$. Die einzige Ausnahme ist Abschnitt 1, wo mit $\Gamma$ eine beliebige kompakte Gruppe bezeichnet wird. Einige Standardbezeichnungen, wie zum Beispiel $M(G)$, $L_1(G)$ werden im Text nicht eingeführt, sie sind aber im „Verzeichnis einiger benutzter Symbole" zu finden.

Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit ist in den Artikeln [43–47] enthalten. Der Einheitlichkeit und Vollständigkeit halber werden auch diese Ergebnisse bewiesen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Langer recht herzlich für zahlreiche Gespräche und Hinweise danken. Auch danke ich sehr Herrn Prof. Dr. Ch. Berg, der einige meiner Manuskripte durchlas und mir mehrere wertvolle Hinweise gab.

Kapitel I

# Beschränkte Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten auf kommutativen Gruppen

## 1. Hilfsresultate aus der harmonischen Analyse

Für eine kompakte Gruppe $\Gamma$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}(\Gamma)$ die Menge aller Funktionen aus $L_1(\Gamma)$, die eine absolut konvergente Fourier-Reihe besitzen. Das Symbol $\mathfrak{R}^+(\Gamma)$ bezeichnet die Gesamtheit der nichtnegativen Funktionen aus $\mathfrak{R}(\Gamma)$. In $\mathfrak{R}(\Gamma)$ wird die Norm $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ durch

$$\|f\|_{\varphi_1} = \|\hat{f}\|_1, \quad f \in \mathfrak{R}(\Gamma),$$

eingeführt [18], (34.4).

(1.1) Lemma. *Es seien $\Gamma$ eine kompakte Gruppe und $F \subset \Gamma$ eine abgeschlossene Menge mit $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$, wobei die Mengen $V_i$ offen sind. Dann existieren Funktionen $h_j \in \mathfrak{R}^+(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, r$ $(r \geqslant m)$, mit den Eigenschaften*

(a) $\sum_{j=1}^{r} h_j(\gamma) = 1$ *für* $\gamma \in F$;

(b) *für jedes* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *gibt es ein* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *mit* $\operatorname{supp} h_j \subset V_i$.

Beweis. Es sei $\gamma_0 \in \Gamma$ und $U$ bezeichne eine beliebige Umgebung von $\gamma_0$. Nach [18], (34.23), existieren eine offene Menge $U' \subset U$ und eine Funktion $g \in \mathfrak{R}^+(\Gamma)$ so, daß gilt: $g(\gamma) = 1$ für $\gamma \in U'$, $g(\gamma) = 0$ für $\gamma \notin U$ und $0 \leqslant g \leqslant 1$.

Da $F$ kompakt ist, gibt es offene Mengen $U_i$, $U_i'$ und Funktionen $g_i \in K^+(\Gamma)$, i = 1, ..., r, mit den Eigenschaften:

(i) $F \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_i'$, $U_i' \subset U_i$;

(ii) jede Menge $U_i$ ist in einer Menge $V_j$ enthalten;

(iii) $g_i(\gamma) = 1$ für $\gamma \in U_i'$;

(iv) $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$;

(v) $0 \leqslant g_i \leqslant 1$;

für alle $i = 1, \ldots, r$.

Dann ist

$$\begin{aligned} 1 &= g_1 + (1-g_1) = g_1 + (1-g_1)g_2 + (1-g_1)(1-g_2) \\ &= g_1 + (1-g_1)g_2 + (1-g_1)(1-g_2)g_3 + (1-g_1)(1-g_2)(1-g_3) + \ldots \\ &\quad \ldots + (1-g_1)\ldots(1-g_{r-1})g_r + (1-g_1)\ldots(1-g_{r-1})(1-g_r). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$h_1 = g_1, \, h_2 = (1-g_1)g_2, \quad h_3 = (1-g_1)(1-g_2)g_3, \dots,$$
$$h_r = (1-g_1)\dots(1-g_{r-1})g_r, \quad h_{r+1} = (1-g_1)\dots(1-g_{r-1})(1-g_r).$$

Aus (i) und (iii) folgt, daß die Funktion $h_{r+1}$ auf der Menge $F$ verschwindet. Man sieht nun ohne Schwierigkeiten, daß die Funktionen $h_1, \dots, h_r$ die Eigenschaften (a) und (b) besitzen. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Das folgende Lemma ist eine Folgerung von [18], (34.25), und dessen Beweis.

**(1.2)** Lemma. *Es seien $\Gamma$ eine kompakte Gruppe, $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ paarweise verschiedene Elemente von $\Gamma$ und $h \in \mathfrak{R}^+(\Gamma)$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ und paarweise disjunkte Umgebungen $U_i$ von $\gamma_i (i = 1, \dots, l)$ existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{R}^+(\Gamma)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $0 \leqslant g \leqslant 1$;
(ii) $\operatorname{supp} g \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i$;
(iii) $g \equiv 1$ *auf einer Umgebung von* $\gamma_i (i = 1, \dots, l)$;
(iv) $\|g\|_{\varphi_1} < 2l$;
(v) $\|hg\|_{\varphi_1} < 2(h(\gamma_1) + \dots + h(\gamma_l)) + \varepsilon$.

Beweis. Setzt man $h^{(i)} = h - h(\gamma_i)$, $i = 1, \dots, l$, so ist $h^{(i)}(\gamma_i) = 0$. Nach [18,], (34.25), existieren Funktionen $g_i \in \mathfrak{R}^+(\Gamma)$, $i = 1, \dots, l$, mit den Eigenschaften: $\|h^{(i)} g_i\|_{\varphi_1} < \varepsilon/l$, $\|g_i\|_{\varphi_1} < 2$, $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $g_i \equiv 1$ auf einer Umgebung von $\gamma_i$ und $0 \leqslant g_i \leqslant 1$ $(i = 1, \dots, l)$.
Es gilt

$$\|hg_i - h(\gamma_i) g_i\|_{\varphi_1} = \|h^{(i)} g_i\|_{\varphi_1} < \frac{\varepsilon}{l}$$

und folglich ist

$$\|hg_i\|_{\varphi_1} < h(\gamma_i)\|g_i\|_{\varphi_1} + \frac{\varepsilon}{l} < 2h(\gamma_i) + \frac{\varepsilon}{l}.$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen $g_i$ folgt nun

$$0 \leqslant g = \sum_{i=1}^{l} g_i \leqslant 1, \qquad \|g\|_{\varphi_1} < 2l,$$

$$\|hg\|_{\varphi_1} < \sum_{i=1}^{l} \|hg_i\|_{\varphi_1} < 2(h(\gamma_1) + \dots h(\gamma_l)) + \varepsilon.$$

Die Funktion $g$ besitzt also die Eigenschaften (i), (iv) und (v) Die Gültigkeit von (ii) und (iii) ist einfach nachzuprüfen. ∎

Der nächste Satz spielt eine wichtige Rolle im Beweis von Satz (2.2).

**(1.3)** SATZ. *Es seien $\Gamma$ eine kompakte Gruppe, $\gamma_1, \ldots, \gamma_l \in \Gamma$ und $L$ ein bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ beschränktes lineares Funktional auf $\mathfrak{K}(\Gamma)$. Weiterhin besitze jedes $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ eine Umgebung $U_\gamma$ mit der Eigenschaft*

$$L(|h|^2) \geqslant 0 \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{K}(\Gamma) \text{ mit } \operatorname{supp} h \subset U_\gamma.$$

*Dann existieren Maße $\mu_+ \in M^+(\Gamma)$ und $\mu_c \in M(\Gamma)$, für die gilt:*

$$L(h) = \int_\Gamma h \, d(\mu_+ + \mu_c), \qquad h \in \mathfrak{K}(\Gamma),$$

$$\mu_+(\{\gamma_i\}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, l) \text{ und } \operatorname{supp} \mu_c \subset \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß jedes $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ eine Umgebung $V_\gamma$ besitzt für die gilt:

$$L(h) \geqslant 0 \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma) \text{ mit } \operatorname{supp} h \subset V_\gamma.$$

Es sei $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ beliebig und $U_\gamma$ habe die im Satz genannte Eigenschaft. Aus Lemma (1.2) folgt die Existenz einer Funktion $g \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ mit den Eigenschaften

(i) $0 \leqslant g \leqslant 1$;
(ii) $\operatorname{supp} g \subset U_\gamma$;
(iii) $g \equiv 1$ auf einer Umgebung $V_\gamma$ von $\gamma$.

Sei $L_g$ das lineare Funktional

$$L_g(h) = L(hg^2), \qquad h \in \mathfrak{K}(\Gamma).$$

Aus den Eigenschaften von $L$ und $g$ folgt

$$L_g(|h|^2) \geqslant 0 \quad \text{für } h \in \mathfrak{K}(\Gamma).$$

Daher ist $L_g(h) \geqslant 0$ für $h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ [18], (30.2). Gilt für eine Funktion $h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ die Beziehung $\operatorname{supp} h \subset V_\gamma$, so ist $h = hg^2$ und damit $L(h) = L_g(h) \geqslant 0$.

Wir zeigen jetzt, daß $L(h) \geqslant 0$ gilt für alle $h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ mit

$$\operatorname{supp} h \subset \Gamma \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{l} U_i \right) = F, \tag{1}$$

wobei $U_i$ eine beliebige Umgebung von $\gamma_i$ ist. Es sei $\gamma \in F$ und $V_\gamma$ habe die im Satz genannte Eigenschaft. Dann ist $F \subset \bigcup_{\gamma \in F} V_\gamma$. Da $F$ kompakt ist, erhalten wir

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j \quad \text{mit} \quad \{V_j\}_1^m \subset \{V_\gamma\}_{\gamma \in F}.$$

Seien $h_1, \ldots, h_r$ die Funktionen aus Lemma (1.1). Wenn (1) erfüllt ist, dann gilt

$$h = h_1 h + \ldots + h_r h,$$

wobei $h_i h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ und $\operatorname{supp} h_i h \subset V_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$. Daher ist

$$L(h) = L(h_1 h) + \ldots + L(h_r h) \geqslant 0.$$

Als nächstes zeigen wir, daß $L$ bezüglich der Supremum-Norm auf $\mathfrak{K}(\Gamma)$ beschränkt ist. Dafür genügt es zu zeigen, daß ein $c > 0$ derart existiert, daß $|L(h)| \leqslant c$ gilt für alle $h \in \mathfrak{K}^+(\Gamma)$ mit $h \leqslant 1$. Sei nun $h$ eine solche Funktion. Wir wählen die Funktion $g$ mit den Eigenschaften (i)–(v) aus Lemma (1.2), wobei die Mengen $U_i$ beliebige, paarweise disjunkte Umgebungen von $\gamma_i (i = 1, \ldots, l)$ sind. Weiterhin setzen wir $\varepsilon = 1$. Dann ist $\|hg\|_{\varphi_1} < 3l$. Aus den Ungleichungen

$$\|g\|_{\varphi_1} < 2l \qquad \text{und} \qquad L(1-g) \geqslant 0$$

erhalten wir

$$0 \leqslant L(1-g) \leqslant |L(1)| + |L(g)| \leqslant K(\|1\|_{\varphi_1} + \|g\|_{\varphi_1}) < (2l+1)K.$$

Ferner gilt:

$$|L(h)| \leqslant |L(gh)| + |L(h(1-g))| \leqslant K\|gh\|_{\varphi_1} + |L(h(1-g))|.$$

Wegen $0 \leqslant h(1-g) \leqslant 1-g$ ist

$$0 \leqslant L(h(1-g)) \leqslant L(1-g) < (2l+1)K$$

und damit $|L(h)| < K(5l+1)$. Das lineare Funktional $L$ ist also bezüglich der Supremum-Norm auf $\mathfrak{K}(\Gamma)$ beschränkt. Daher läßt sich $L$ zu einem beschränkten linearen Funktional $L'$ auf $C(\Gamma)$ fortsetzen. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz [18], (14.4), existiert ein Maß $\mu \in M(\Gamma)$ mit

$$L'(h) = \int_\Gamma h\, d\mu, \qquad h \in C(\Gamma).$$

Bezeichne $\mu_+$ die Einschränkung von $\mu$ auf die Menge $\Gamma \backslash \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ und $\mu_c$ die Einschränkung von $\mu$ auf die Menge $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$. Dann ist $\mu = \mu_+ + \mu_c$. Verschwindet die Funktion $h \in C^+(\Gamma)$ in einer Umgebung von $\gamma_i (i = 1, \ldots, l)$, so ist $L'(h) \geqslant 0$. Es folgt $\mu_+ \in M^+(\Gamma)$ und damit ist der Satz bewiesen. ∎

## 2. Charakterisierung der beschränkten Funktionen aus $P_k^c(G)$

Wir beginnen mit dem folgenden Lemma:

**(2.1)** LEMMA. *Es seien $G$ eine kommutative Gruppe und $p$ eine positiv definite Funktion auf $G$. Weiter sei $f$ eine Funktion mit*

$$f = p + \sum_{l=1}^{k} a_l \gamma_l,$$

*wobei $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ und $a_1, \ldots, a_k \in R$. Dann hat $f$ höchstens $k$ negative Quadrate.*

Beweis. Es ist

$$(1)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i-x_j)\,c_i\bar{c}_j = \sum_{i,j=1}^{n} p(x_i-x_j)\,c_i\bar{c}_j + \sum_{i=1}^{k} a_i\left|\sum_{l=1}^{n}\gamma_i(x_l)\,c_l\right|^2$$

für alle $x_1,\ldots,x_n\in G$ und $c_1,\ldots,c_n\in C$. Der erste Term auf der rechten Seite von (1) ist nichtnegativ, da $p$ positiv definit ist. Der zweite Term ist Null für alle $c_1,\ldots,c_n$, für die der Vektor $(c_1,\ldots,c_n)\in C^n$ im orthogonalen Komplement $H$ der Menge

$$(\gamma_1(x_1),\ldots,\gamma_1(x_n)),\qquad (\gamma_k(x_1),\ldots,\gamma_k(x_n))$$

liegt. Die Dimension von $H$ ist mindestens $(n-k)$ und die Form (1) ist nichtnegativ für alle $c_1,\ldots,c_n\in C$ mit $(c_1,\ldots,c_n)\in H$. Dies zeigt, daß die Matrix $((f(x_i-x_j))_{i,j=1}^n$ höchstens $k$ negative Eigenwerte hat. ∎

Nun können wir den Hauptsatz dieses Kapitels beweisen.

(2.2) Satz. *Es seien $G$ eine lokalkompakte, kommutative Gruppe und $f$ eine beschränkte, hermitesche Funktion auf $G$. Die Beziehung $f\in P_k^c(G)$ gilt genau dann, wenn Maße $\mu_+$, $\mu_-\in M^+(\Gamma)$ und paarweise verschiedene Elemente $\gamma_1,\ldots,\gamma_k\in\Gamma$ existieren, für die gilt:*

$$f=\check{\mu}_+-\check{\mu}_-,$$

$$\mu_+(\{\gamma_i\})=0\qquad (i=1,\ldots,k)\ \text{und}\ \operatorname{supp}\mu_-=\{\gamma_1,\ldots,\gamma_k\}.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß aus $f\in P_k^c(G)$ die Darstellung (1) folgt. Wir dürfen annehmen, daß $G$ eine diskrete Gruppe ist. Es sei nämlich $f\in P_k^c(G)$. Dann ist offensichtlich $f\in P_k^c(G_d)$. Gelte für $f$ die Darstellung (1), wobei die Maße $\mu_+$ und $\mu_-$ auf der Charaktergruppe von $G_d$ definiert sind. Aus der Stetigkeit von $f$ folgt, daß die Maße $\mu_+$ und $\mu_-$ als Maße auf $\Gamma$ betrachtet werden können [13, Th. 1.8.3, Th. 1.8.5]. Sei also $G$ eine diskrete Gruppe und bezeichne $L$ das lineare Funktional

$$L(h)=\int_G f\check{h}\,dm_G,\qquad h\in\mathfrak{K}(\Gamma).$$

Wegen der Beschränktheit von $f$ ist $L$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ beschränkt. Wir zeigen, daß $L$ Bedingungen von Satz (1.3) erfüllt.

Bezeichne $N$ die Menge aller $\gamma\in\Gamma$ mit der folgenden Eigenschaft: für eine beliebige Umgebung $U$ von $\gamma$ existiert eine Funktion $h\in\mathfrak{K}(\Gamma)$ so, daß $\operatorname{supp}h\subset U$ und $L(|h|^2)<0$. Nehmen wir jetzt an, daß $N$ mehr als $k$ Elemente hat. Dann gibt es Elemente $\gamma_i\in\Gamma$, paarweise disjunkte Umgebungen $U_i$ von $\gamma_i$ und Funktionen $h_i\in\mathfrak{K}(\Gamma)$, $i=1,\ldots,k+1$, mit

$$\operatorname{supp}h_i\subset U_i,\qquad L(|h_i|^2)<0\qquad \text{für}\ i=1,\ldots,k+1.$$

Wir setzen $\psi_i = \check{h}_i \quad (i = 1, \ldots, k+1)$. Dann ist $\psi_i \in L_1(G)$ und

$$(2)\qquad \begin{aligned} L(|h_i|^2) &= \int_G f(h_i \bar{h}_i)^\wedge \, dm_G \\ &= \int_G \int_G f(x-y)\,\psi_i(x)\,\overline{\psi_i(y)}\, dm_G(x)\, dm_G(y) < 0. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $i \neq j$

$$(3)\qquad 0 = L(h_i \bar{h}_j) = \int_G \int_G f(x-y)\,\psi_i(x)\,\overline{\psi_j(y)}\, dm_G(x)\, dm_G(y).$$

Wegen $\psi_i \in L_1(G)$ ist die Menge $S = \bigcup_{i=1}^{k+1} \operatorname{supp} \psi_i$ abzählbar: $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Sei die Funktion $\psi_i^{(n)} (i = 1, \ldots, k+1,\ n = 1, 2, \ldots)$ durch

$$\psi_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} \psi_i(x_j), & j \leqslant n, \\ 0, & j > n, \end{cases}$$

definiert. Ist $n$ groß genug, so folgt aus (2) die Beziehung

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\int_G \int_G f(x-y)\,\psi_i^{(n)}(x)\,\overline{\psi_i^{(n)}(y)}\, dm_G(x)\, dm_G(y) \\ &\qquad = \sum_{q,r=1}^{n} f(x_q - x_r)\,\psi_i^{(n)}(x_q)\,\overline{\psi_i^{(n)}(x_r)} < 0, \qquad i = 1, \ldots, k+1. \end{aligned}$$

Wegen (3) ist

$$(5)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{q,r=1}^{n} f(x_q - x_r)\,\psi_i^{(n)}(x_q)\,\overline{\psi_j^{(n)}(x_r)} = 0, \qquad i \neq j.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß (4) und (5) der Tatsache widersprechen, daß $f$ $k$ negative Quadrate hat. Damit haben wir gezeigt, daß $N$ höchstens $k$ Elemente hat: $N = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$, $0 \leqslant l \leqslant k$. Das lineare Funktional $L$ erfüllt also die Bedingungen von Satz (1.3). Seien $\mu_+$ und $\mu_c$ die Maße aus Satz (1.3). Aus der Definition von $N$ folgt $\mu_-(\{\gamma_i\}) > 0 \quad (i = 1, \ldots, l)$ mit $\mu_- = -\mu_c$. Für $h \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ ist

$$L(h) = \int_G f\check{h}\, dm_G = \int_\Gamma h\, d(\mu_+ - \mu_-) = \int_G \check{h}(\check{\mu}_+ - \check{\mu}_-)\, dm_G$$

und folglich $f = \check{\mu}_+ - \check{\mu}_-$. Da die Funktion $\check{\mu}_+$ positiv definit ist, folgen aus Lemma (2.1) die Beziehungen $l = k$ und $\operatorname{supp} \mu_- = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$.

Die Behauptung, daß jede Funktion der Form (1) $k$ negative Quadrate hat, folgt nun sofort aus Lemma (2.1).

Aus Satz (2.2) erhalten wir die nachstehenden Folgerungen.

(2.3) FOLGERUNG. *Die Funktion*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \gamma_i \quad \left(a_i \in R,\, \gamma_i \in \Gamma,\, \gamma_i \neq \gamma_j \text{ für } i \neq j,\, \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty\right)$$

*hat dann und nur dann $k$ negative Quadrate, wenn es unter den Zahlen $a_i$ genau $k$ negative gibt.*

(2.4) FOLGERUNG. *Eine stetige, bedingt positiv definite Funktion $f$ ist genau dann beschränkt, wenn sie die Form $f = p + m$ hat, wobei $p$ eine stetige, positiv definite Funktion und $m \in R$ ist.*

(2.5) Bemerkungen. (a) Für die Gruppe $Z$ der ganzen Zahlen wurde Satz (2.2) von I. S. Iohvidov und M. G. Krein bewiesen [22, Satz 5.4]. In ihrem Beweis sind die Autoren von der allgemeinen Integraldarstellung einer Funktion $f \in P_k(Z)$ ausgegangen. Mit Hilfe der Ergebnisse in [22] bewies V. A. Strauß das gleiche Resultat für die Gruppe der reellen Zahlen [54].

(b) Folgerung (2.4) wurde von K. Harzallah bewiesen [16].

Kapitel II

# Über eine Klasse definisierbarer Funktionen

In diesem Kapitel bezeichnet $G$ stets eine lokalkompakte, kommutative Gruppe.

## 3. Definition und einige Eigenschaften der Funktionenklasse $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$

**(3.1)** Es bezeichne $\Gamma_u$ die Menge der unbeschränkten, stetigen Charaktere der Gruppe $G$. Die Menge $\Gamma_u$ besteht also aus allen stetigen, unbeschränkten Funktionen $\gamma\colon G \to C$, mit

$$\gamma(0) = 1, \quad \gamma(x+y) = \gamma(x)\,\gamma(y), \quad x, y \in G.$$

Wie setzen $\Gamma' = \Gamma \cup \Gamma_u$. Wegen $\gamma(x)\,\gamma(-x) = 1$ ist $\gamma(x) \neq 0$ für alle $x \in G$ und $\gamma \in \Gamma'$. Bezüglich der Multiplikation ist $\Gamma'$ eine kommutative Gruppe.

Bezeichne $F(G)$ die Menge aller Maße aus $M(G)$, die einen endlichen Träger besitzen. Die Elemente von $F(G)$ werden wir wahlweise als Maße oder als Funktionen betrachten. Für unsere Ziele ist es zweckmäßig, die Fourier-Transformierte $\hat{w}$ von $w \in F(G)$ durch die Formel

$$\hat{w}(\gamma) = \int_G \gamma^{-1}\,dw = \sum_{x \in G} \gamma(-x)\,w(x), \quad \gamma \in \Gamma',$$

zu definieren. Es gilt:

$$\begin{aligned}(w * \tilde{w})^\wedge(\gamma) &= \sum_{x \in G} \gamma(-x)\,(w * \tilde{w})(x) = \sum_{x \in G} \gamma(-x) \sum_{y \in G} w(x+y)\,\overline{w(y)} \\ &= \sum_{x, y \in G} \gamma(-x)\,w(x+y)\,\overline{w(y)} = \sum_{x, y \in G} \gamma(y-x)\,w(x)\,\overline{w(y)} \\ &= \sum_{x, y \in G} \gamma(-x)\,w(x)\,\gamma(y)\,\overline{w(y)} = \hat{w}(\gamma)\,\overline{\hat{w}(\overline{\gamma^{-1}})}.\end{aligned}$$

Wir erhalten also die Formel

$$(w * \hat{w})^\wedge(\gamma) = \hat{w}(\gamma)\,\overline{\hat{w}(\overline{\gamma^{-1}})}, \tag{1}$$

Im Falle $\gamma \in \Gamma$ ist $\overline{\gamma^{-1}} = \gamma$ und damit

$$(w * \tilde{w})^\wedge (\gamma) = |\hat{w}(\gamma)|^2.$$

Wegen (1) ist $(w * \tilde{w})^\wedge (\gamma) = 0$ genau dann, wenn entweder $\hat{w}(\gamma)$ oder $\hat{w}(\overline{\gamma^{-1}})$ gleich Null ist. Für $\gamma \in \Gamma$ sind die Beziehungen $(w * \tilde{w})^\wedge (\gamma) = 0$ und $\hat{w}(\gamma) = 0$ äquivalent.

DEFINITION. Es seien $k_i$ positive ganze Zahlen und $\gamma_i \in \Gamma'$ $(i = 1, \ldots, n)$. Bezeichne $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ die Menge aller hermiteschen Funktionen $f\colon G \to C$ mit der folgenden Eigenschaft: $f * w * \tilde{w} \in P_0(G)$ für alle $w \in F(G)$ der Gestalt

$$w = w_1^{(1)} * \ldots * w_{k_1}^{(1)} * w_1^{(2)} * \ldots * w_{k_2}^{(2)} * \ldots * w_1^{(n)} * \ldots * w_{k_n}^{(n)} \tag{2}$$

mit $\left(w_l^{(i)} * (w_l^{(i)})^\sim\right)^\wedge (\gamma_i) = 0$ $\quad (i = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, k_l)$. Mit $P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ und $P^m(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ bezeichnen wir die Menge der Funktionen aus $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$, die stetig bzw. $m_G$-meßbar sind.

(3.2) Bemerkungen. (a) Die Beziehung $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ kann auch auf folgende Weise formuliert werden:

$$\sum_{x,y \in G} f(x-y)\, c(x)\, \overline{c(y)} \geqslant 0$$

für alle $c \in F(G)$ mit $c = w * w'$. Hierbei ist $w' \in F(G)$ beliebig und $w$ besitzt die Gestalt (2) in (3.1). Daher stimmt die Menge $P(1, 1)$, wobei die erste $1$ den konstanten Charakter bezeichnet, mit der Menge der bedingt positiv definiten Funktionen überein.

(b) Es ist leicht zu sehen, daß

$$P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i; \gamma_i, k_i'; \ldots; \gamma_n, k_n) = P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i + k_i'; \ldots; \gamma_n, k_n),$$

$$P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i; \ldots; \gamma_n, k_n) = P(\gamma_1, k_1; \ldots; \overline{\gamma_i^{-1}}, k_i; \ldots; \gamma_n, k_n).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also $\gamma_i \neq \gamma_j$ und $\gamma_i \neq \overline{\gamma_j^{-1}}$ $(i \neq j)$ voraussetzen.

(c) Sei $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Aus der Beziehung $(\gamma w) * (\gamma w)^\sim = \gamma (w * \tilde{w})$ folgt, daß $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ genau dann gilt, wenn

$$\gamma f \in P(\gamma\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma\gamma_n, k_n)$$

ist. Deshalb ist $f \in P(\gamma, k)$ zu $\bar{\gamma} f \in P(1, k)$ äquivalent.

(d) Es ist leicht zu sehen, daß die Menge $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ ein konvexer Kegel ist, der bezüglich der punktweisen Konvergenz abgeschlossen ist. Weiter gilt für beliebiges $w \in F(G)$ und $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$:

$$f * w * \tilde{w} \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n).$$

Ist dabei $(w * \tilde{w})^{\wedge}(\gamma_i) = 0$, so gilt:

$$f * w * \tilde{w} \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots \gamma_n, k_n).$$

Im Falle $k_i - 1 = 0$ lassen wir $\gamma_i$ und $k_i - 1$ in der Aufzählung weg.

(e) Hat die beschränkte, stetige Funktion $f k$ negative Quadrate, so ist nach Satz (2.2)

$$f = p - a_1 \gamma_1 - \ldots - a_k \gamma_k$$

mit $a_i > 0$, $\gamma_i \in \Gamma$ $(i = 1, \ldots, k)$. Man sieht sofort, daß für diese Funktion gilt:

$$f \in P^c(\gamma_1, 1; \ldots; \gamma_k, 1).$$

Der nächste Satz wird im weiteren eine wichtige Rolle spielen. Er ermöglicht es, die Untersuchung der Funktionen aus $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ auf die Untersuchung der Funktionen aus $P(\gamma_i, k_i)$ zurückzuführen.

(3.3) SATZ. *Jede Funktion $f$ aus $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ läßt sich in der Form*

$$f = f_1 + \ldots + f_n$$

*mit $f_i \in P(\gamma_i, k_i)$, $i = 1, \ldots, n$, darstellen. Ist $f$ stetig ($m_G$-meßbar), so können die Funktionen $f_i$ als stetig ($m_G$-meßbar) gewählt werden.*

Für den Beweis des Satzes (3.3) benötigen wir das folgende Lemma.

(3.4) LEMMA. *Es seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma'$ mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und $\gamma_1 \neq \overline{\gamma_2^{-1}}$. Dann existieren $w_1, w_2 \in F(G)$ mit*

(i) $w_1 * \tilde{w}_1 + w_2 * \tilde{w}_2 = 1_{\{0\}}$ *(das Dirac'sche Maß)*;

(ii) $(w_j * \tilde{w}_j)^{\wedge}(\gamma_j) = 0 \quad (j = 1, 2)$.

Beweis. Wegen $\gamma_1 \neq \gamma_2$ und $\gamma_1 \neq \overline{\gamma_2^{-1}}$ gibt es $x_1, x_2 \in G$ mit $\gamma_1(x_1) \neq \gamma_2(x_1)$ und $\gamma_1(x_2) \neq \overline{\gamma_2^{-1}(x_2)}$. Wir setzen

$$x = \begin{cases} x_1 & \text{wenn } \gamma_1(x_1) \neq \overline{\gamma_2^{-1}(x_1)}, \\ x_2 & \text{wenn } \gamma_1(x_1) = \overline{\gamma_2^{-1}(x_1)}, \quad \gamma_1(x_2) \neq \gamma_2(x_2), \\ x_1 + x_2 & \text{wenn } \gamma_1(x_1) = \overline{\gamma_2^{-1}(x_1)}, \quad \gamma_1(x_2) = \gamma_2(x_2). \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß gilt: $\gamma_1(x) \neq \gamma_2(x)$ und $\gamma_1'(x) \neq \overline{\gamma_2^{-1}(x)}$.

Bezeichne $H$ die Untergruppe, die durch $x$ erzeugt wird. Dann ist $H$ entweder eine endliche Gruppe oder algebraisch isomorph zu der Gruppe der ganzen Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $G = H$ ist. Bezeichne nämlich $\gamma_j'$ die Einschränkung von $\gamma_j$ auf $H$, dann sind $\gamma_1'$ und $\gamma_2'$ Charaktere der Gruppe $H$ mit $\gamma_1' \neq \gamma_2'$ und $\gamma_1' \neq \overline{\gamma_2'^{-1}}$. Findet man Maße $w_1, w_2 \in F(H)$ mit $w_1 * \tilde{w}_1 + w_2 * \tilde{w}_2 = 1_{\{0\}}$ und $(w_j * \tilde{w}_j)^{\wedge}(\gamma_j') = 0$ $(j = 1, 2)$, so kann man $w_1$ und $w_2$ als Elemente von $F(G)$ betrachten. Es gelten dann offensichtlich die Beziehungen (i) und (ii). Das Lemma brauchen wir also nur für endliche Gruppen und für die Gruppe der ganzen Zahlen zu beweisen. Nehmen wir zuerst an, daß $G$ eine endliche Gruppe ist, und sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_N$ ein vollständiges System von beschränkten Charakteren von $G$. Dann gilt:

$$\frac{1}{N}(\gamma_1 + \ldots + \gamma_N) = 1_{\{0\}}.$$

Wir setzen

$$w_1 = \frac{1}{N}(\gamma_2 + \ldots + \gamma_N), \qquad w_2 = \frac{\gamma_1}{N}.$$

Aus den Orthogonalitätsbeziehungen erhalten wir

$$\hat{w}_j(\gamma_j) = 0, \qquad w_j * \tilde{w}_j = w_j (j = 1, 2).$$

Aus (1) folgt nun

$$w_1 * \tilde{w}_1 + w_2 * \tilde{w}_2 = 1_{\{0\}}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß $G$ die Gruppe der ganzen Zahlen ist. Die Elemente von $\Gamma'$ sind dann die Funktionen $\gamma(n) = c^n (n \in G, c \in C, c \neq 0)$. Die Gruppe $\Gamma'$ kann also mit der multiplikativen Gruppe $C \setminus \{0\}$ identifiziert werden. Für ein beliebiges Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m \qquad (z \in C \setminus \{0\}, a_i \in C)$$

gilt: $p = \hat{w}$ mit $w(-i) = a_i \quad (i = 0, \ldots, m)$. Weiterhin ist

$$(w * \tilde{w})\hat{}\,(z) = p(z)\overline{p\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \qquad z \in C \setminus \{0\}.$$

Setzen wir $c_1 = \gamma_1(1)$ und $c_2 = \gamma_2(1)$. Wir werden eine Funktion $q_1$ mit den folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$q_1(z) = p_1(z)\overline{p_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad \text{wobei } p_1 \text{ ein komlexes Polynom ist;}$$

$$q_1(c_1) = 0;$$

$$q_1(c_2) = 1;$$

$$0 \leqslant q_1(z) \leqslant 1 \qquad \text{für } |z| = 1.$$

Definiert man $w_1$ durch $\hat{w}_1 = p_1$, so gilt:

$$q_1 = (w * \tilde{w}_1)^\wedge, \qquad (w_1 * \tilde{w}_1)^\wedge (c_1) = 0.$$

Die Funktion $q_2 = 1 - q_1$ hat dann die Eigenschaften

$$q_2(c_1) = 1; \qquad q_2(c_2) = 0;$$

$$0 \leqslant q_2(z) \leqslant 1 \qquad \text{für } |z| = 1.$$

Da $q_2(z)$ für $|z| = 1$ nichtnegativ ist, folgt aus einem Satz von L. Fejér und F. Riesz [9] die Existenz eines Polynoms $p_2$ mit $q_2(z) = p_2(z)\,\overline{p_2(1/\bar{z})}$. Sei $w_2$ durch $\hat{w}_2 = p_2$ definiert, dann ist $q_2 = (w_2 * \tilde{w}_2)^\wedge$ und $(w_2 * \tilde{w}_2)^\wedge(c_2) = 0$. Wegen $q_1 + q_2 = 1$ erhalten wir

$$(w_1 * \tilde{w}_1)^\wedge + (w_2 * \tilde{w}_2)^\wedge = 1_{\{0\}}.$$

Um den Beweis des Lemmas zu beenden, brauchen wir also nur noch die Funktion $q_1$ zu konstruieren. Betrachten wir zuerst den Fall $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$. Wir können voraussetzen, daß $0 < c_1 < c_2 \leqslant 1 \leqslant 1/c_1 < 1/c_2$ ist. Wenn wir am Anfang des Beweises das Element $x$ durch $x^n\,(n = 1, 2, \ldots)$ ersetzen, dann können wir erreichen, daß $c_1$ beliebig klein wird.

Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4$ die paarweise verschiedenen komplexen Zahlen mit $|z_i| = 1$ und $|\mathrm{Re}\, z_i| = c_1$. Wir setzen

$$p_1^{(0)}(z) = (z - z_1)\ldots(z - z_4)(z - c_1)(z + c_1).$$

Mit Hilfe einer geometrischen Interpretation ist es nicht schwer zu sehen, daß für ein hinreichend kleines $c_1$ die Beziehung

$$\sup_{|z|=1} |p_1^{(0)}(z)| = |p_1^{(0)}(1)| = |p_1^{(0)}(-1)| \tag{2}$$

gilt. Mit

$$g(z) = \left(\frac{1}{2}(1+z)\right)\overline{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+1\right)\right)}, \qquad q_1^{(n)}(z) = p_1^{(0)}(z)\,\overline{p_1^{(0)}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}\,(g(z))^n$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ erhalten wir:

$$q_1^{(n)}(z) = |p_1^{(0)}(z)|^2\,(g(z))^n > 0 \qquad \text{für } |z| = 1.$$

Aus (2) folgt

$$0 \leqslant \sup_{|z|=1} q_1^{(n)}(z) = q_1^{(n)}(1), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

und wegen $0 < c_1 < c_2$ haben wir $q_1^{(n)}(c_2) > 0$. Weiterhin ist $1 = g(1) < g(c_2)$ und somit

$$q_1^{(n_0)}(c_2) \geqslant q_1^{(n_0)}(1) \tag{4}$$

für hinreichend großes $n_0$. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$0 \leqslant \sup_{|z|=1} q_1^{(n_0)}(z) \leqslant q_1^{(n_0)}(1) \leqslant q_1^{(n_0)}(c_2).$$

Die Funktion

$$q_1 = \frac{q^{(n_0)}}{q^{(n_0)}(c_2)}$$

besitzt dann die gewünschten Eigenschaften.

Betrachten wir jetzt den Fall $c_2 < 0$ und $c_1 \not> 0 \, (c_1, c_2 \in C \backslash \{0\})$. Wenn wir am Anfang des Beweises $x$ durch $x^n$ ersetzen, dann können wir erreichen, daß $\operatorname{Re} c_2 \leqslant 0$ ist. Wir führen die Funktion

$$q_1(z) = \frac{(z-c_1)(z-\bar{c}_1)\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}-c_1\right)}\,\overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}-\bar{c}_1\right)}}{(c_2-c_1)(c_2-\bar{c}_1)\left(\frac{1}{c_2}-c_1\right)\left(\frac{1}{c_2}-\bar{c}_1\right)}$$

ein. Eine leichte Rechnung zeigt, daß

$$0 \leqslant \sup_{|z|=1} q_1(z) = q_1(1), \qquad \inf_{z>0} q_1(z) = q_1(1)$$

ist. Aus diesen Ungleichungen folgt

$$0 \leqslant \sup_{|z|=1} q_1(z) \leqslant q_1(c_2) = 1.$$

Da $q_1(c_1) = 0$ ist, hat die Funktion $q_1$ die gewünschten Eigenschaften.

Multipliziert man die Zahlen $c_1$ und $c_2$ mit $c_2/|c_2|$, so kann man den Fall $c_1 \not> 0$, $c_2 \not> 0$ auf einen der beiden betrachteten Fälle zurückführen. Damit ist Lemma (3.4) bewiesen. ∎

B e w e i s  v o n  S a t z (3.3). Es sei $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ mit $k_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nach Bemerkung (3.2) (b) können wir voraussetzen, daß $\gamma_i \neq \gamma_j$ und $\gamma_i \neq \gamma_j^{-1}$ für $i \neq j$. Seien $w_1$, $w_2$ die Maße aus Lemma (3.4), dann ist

$$f = f * 1_{\{0\}} = f * w_1 * \tilde{w}_1 + f * w_2 * \tilde{w}_2 .$$

Aus $w_j * \tilde{w}_j(\gamma_j) = 0$ $(j = 1, 2)$ folgt

$$f * w_1 * \tilde{w}_1 \in P(\gamma_1, k_1 - 1; \gamma_2 k_2; \ldots; \gamma_n, k_n),$$
$$f * w_2 * \tilde{w}_2 \in P(\gamma_1, k_1; \gamma_2, k_2 - 1; \ldots; \gamma_n, k_n).$$

Wiederholt man mehrmals diese Überlegungen unter Beachtung der Beziehung

$$P(\gamma, k) + P(\gamma, l) = P(\gamma, \max(k, l)),$$

so erhält man die Darstellung

$$f = f_1 + \ldots + f_n \qquad \text{mit} f_i \in P(\gamma_i, k_i).$$

Ist $f$ stetig ($m_G$-meßbar), so ist $f * w$ für beliebiges $w \in F(G)$ stetig ($m_G$-meßbar). Somit sind auch die Funktionen $f_i$ stetig ($m_G$-meßbar).

**(3.5)** Es sei $f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$. Dann ist offensichtlich

$$f \in P(\gamma_1, l_1; \ldots; \gamma_n, l_n; \gamma_{n+1}; l_{n+1}; \ldots; \gamma_{n+m}, l_{n+m})$$

für $l_i \geqslant k_i (i = 1, \ldots, n)$ und beliebige $\gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{n+m}, l_{n+1}, \ldots, l_{n+m}$. Im Falle

$$f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_j, k_j; \ldots; \gamma_n, k_n),$$
$$f \notin P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_j, k_j - 1; \ldots; \gamma_n, k_n),$$

$j = 1, \ldots, n$, sagen wir, daß $f$ bei $\gamma_j$ eine Singularität $k_j$-ter Ordnung besitzt. Der folgende Satz und seine Folgerungen zeigen, daß diese Definition sinnvoll ist, d.h., daß die Singularitäten und deren Ordnungen eindeutig bestimmt sind. Hierzu bemerken wir, daß wegen der Beziehung

$$P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i; \ldots; \gamma_n, k_n) = P(\gamma_1, k_1; \ldots; \overline{\gamma_i^{-1}}, k_i; \ldots; \gamma_n, k_n)$$

die Singularitäten bei unbeschränkten Charakteren immer paarweise auftreten. Wenn wir jedoch die Singularitäten einer Funktion zählen, werden wir nur einen der Charaktere $\gamma_i$ und $\overline{\gamma_i^{-1}}$ hinschreiben, da der andere dadurch schon eindeutig bestimmt ist.

(3.6) Satz. *Es seien $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_m \in \Gamma'$ mit $\gamma_i \neq \gamma'_j$ und $\gamma_i \neq \overline{\gamma_j'^{-1}}$ $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$. Dann gilt:*

$$P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n) \cap P(\gamma'_1, k'_1; \ldots; \gamma'_m, k'_m) = P_0(G).$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion bezüglich $n+m$. Es sei

(1) $$f \in P(\gamma_1, k_1) \cap P(\gamma'_1, k'_1),$$

wobei $\gamma_1 \neq \gamma'_1$ und $\gamma_1 \neq \overline{\gamma_1'^{-1}}$. Nach Lemma (3.4) existieren Maße $w_1, w_2 \in F(G)$, so daß

$$w_1 * \tilde{w}_1 + w_2 * \tilde{w}_2 = 1_{\{0\}}, \qquad (w_i * \tilde{w}_i)^\wedge(\gamma_i) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Deshalb gilt:

(2) $$f = f * 1_{\{0\}} = f * (w_1 * \tilde{w}_1 + w_2 * \tilde{w}_2)^{*k}$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} f * (w_1 * \tilde{w}_1)^{*j} * (w_2 * \tilde{w}_2)^{*(k-j)}$$

für beliebiges $k = 1, 2, \ldots$ Ist $k \geqslant k_1 + k'_1$, so ist entweder $j \geqslant k_1$ oder $k - j \geqslant k'_1$. Aus (1) und (2) folgt nun, daß $f$ positiv definit ist.

Nehmen wir jetzt an, daß die Aussage des Satzes für $n+m \leqslant l$ richtig ist und sei

(3) $$f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n) \cap P(\gamma'_1, k'_1; \ldots; \gamma'_m, k'_m)$$

wobei $n+m = l+1$. Wir wählen $w_1$, $w_2$ und $k$ wie oben.

Wegen (2) und (3) ist $f$ die Summe von Funktionen, die entweder in $P(\gamma_2, k_2; \ldots; \gamma_n, k_n) \cap P(\gamma'_1, k_1; \ldots; \gamma'_m, k'_m)$ oder in $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n) \cap$ $\cap P(\gamma'_2, k'_2; \ldots; \gamma'_m, k'_m)$ enthalten sind. Aus unserer Annahme folgt nun, daß $f$ positiv definit ist.

(3.7) FOLGERUNG. *Es seien* $0 \leqslant n \leqslant m$, $0 \leqslant n \leqslant m'$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_m, \gamma'_{n+1}, \ldots, \gamma'_{m'} \in \Gamma'$ *und* $\gamma_i \neq \gamma'_j$, $\gamma_i \neq \overline{\gamma'^{-1}_j}$ *für* $i = 1, \ldots, m$, $j = n+1, \ldots, m'$. *Dann gilt:*

$$(1) \quad P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n; \gamma_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \gamma_m, k_m) \cap \cap P(\gamma_1, k'_1; \ldots; \gamma_n, k'_n; \gamma_{n+1}, k'_{n+1}; \ldots; \gamma'_{m'}, k'_{m'}) = P(\gamma_1, k''_1; \ldots; \gamma_n, k''_n),$$

*wobei* $k''_i = \min\{k_i, k'_i\}$, $\quad i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Bezeichne $Q$ den Durchschnitt auf der linken Seite der Gleichung (1) und sei $f \in Q$. Für ein beliebiges $w \in F(G)$ mit

$$w = w_1^{*k''_1} * \ldots * w_n^{*k''_n} \quad \text{und} \quad (w_i * \tilde{w}_i)^\wedge (\gamma_i) = 0 \quad i = 1, \ldots, n,$$

gilt

$$f * w * \tilde{w} \in P(\gamma_1, l_1; \ldots; \gamma_n, l_n; \gamma_{n+1}, k_{n+1}; \ldots; \gamma_m, k_m) \cap \cap P(\gamma_1, l'_1; \ldots; \gamma_n, l'_n; \gamma'_{n+1}, k'_{n+1}; \ldots; \gamma'_{m'}, k'_{m'}).$$

Hierbei ist $l_i = k_i - k''_i$ und $l'_i = k'_i - k''_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Da wegen der Definition von $k''_i$ entweder $l_i$ oder $l'_i$ gleich Null ist, folgt aus Satz (3.6), daß

$$f * w * \tilde{w} \in P_0(G).$$

Somit haben wir gezeigt, daß

$$f \in P(\gamma_1, k''_1; \ldots; \gamma_n, k''_n), \text{ d.h.,} \qquad Q \subset P(\gamma_1, k''_1; \ldots; \gamma_n, k''_n).$$

Es gilt offensichtlich die Beziehung $P(\gamma_1, k''_1; \ldots; \gamma_n, k''_n) \subset Q$, und damit ist die Behauptung bewiesen. ∎

Aus Folgerung (3.7) ergibt sich sofort:

**(3.8)** FOLGERUNG. *Es sei $f$ eine Funktion mit*

$$f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n),$$
$$f \notin P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots; \gamma_n, k_n) \quad \text{für } i = 1, \ldots, n,$$
$$f \in P(\gamma'_1, k'_1; \ldots; \gamma'_m, k'_m),$$
$$f \notin P(\gamma'_1, k'_1; \ldots; \gamma'_i, k'_i - 1; \ldots; \gamma'_m, k'_m) \quad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

*Dann sind $n = m$ und (nach eventueller Umnumerierung der $\gamma'_i$ und $k'_i$) $\gamma_i = \gamma'_i$, $k_i = k'_i (i = 1, \ldots, n)$.*

*Mit anderen Worten, die Singularitäten von $f$ und deren Ordnungen sind eindeutig bestimmt.*

## 4. Integraldarstellung für Funktionen aus $P^c(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma$

(4.1) Bezeichnungen. Im Falle $\gamma \in \Gamma'$, $x \in G$, $x \neq 0$ setzen wir

$$w_x^{(\gamma)}(y) = w_x(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+|\gamma(x)|^2}}, & y = 0, \\ \dfrac{-\gamma(x)}{\sqrt{1+|\gamma(x)|^2}}, & y = x, \\ 0, & \text{const.} \end{cases} \tag{1}$$

Dann ist $\hat{w}_x(\gamma) = 0$ und

$$w * \tilde{w}_x(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ \dfrac{-1}{\overline{\gamma(x)} + \gamma(-x)}, & y = x, \\ \dfrac{-1}{\gamma(x) + \overline{\gamma(-x)}}, & y = -x, \\ 0, & \text{const.} \end{cases} \tag{2}$$

Von den Maßen $w_x^{(\gamma)}$ werden wir im späteren oft Gebrauch machen. Es seien $k \geqslant 1$ und $\gamma \in \Gamma'$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$F(\gamma, k) = \{w\colon\ w = w_1 * \ldots * w_{2k},\ \hat{w}_i(\gamma) = 0,\ i = 1, \ldots, 2k\};$$

$$F^+(\gamma, k) = w\colon\ w = w_1 * \tilde{w}_1 * \ldots * w_k * \tilde{w}_k,\ (w_i * \tilde{w}_i)^\wedge(\gamma) = 0,\ i = 1, \ldots, k\}.$$

In diesem Abschnitt bezeichnet $G$ im weiteren eine lokalkompakte kommutative Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie.

(4.2) Lemma. *Es gibt eine Funktion $l\colon G \times \Gamma \to R$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *$l$ ist stetig auf $G \times \Gamma$;*

(ii) $\sup_{\gamma \in \Gamma} \sup_{x \in K} |l(x, \gamma)| < \infty$ *für jede kompakte Menge $K \subset G$;*

(iii) *$l(x+y, \gamma) = l(x, \gamma) + l(y, \gamma)$ und $l(x, \bar{\gamma}) = -l(x, \gamma)$, $x, y \in G$, $\gamma \in \Gamma$;*

(iv) *für jede kompakte Menge $K \subset G$ existiert eine Umgebung $U_K$ von $1 \in \Gamma$, so daß gilt:*

$$\gamma(x) = \exp(il(x, \gamma)), \qquad \gamma \in U_K,\ x \in K;$$

(v) $\lim_{\gamma \to 1} l(x, \gamma) = 0$, *$x \in G$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $G$;*

(vi) *für jede kompakte Menge $K \subset G$ existieren eine Konstante $M(K)$ und eine Umgebung $U_K$ von $1 \in \Gamma$, so daß gilt:*

$$\left|\gamma(x) - \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(il(x, \gamma))^n}{n!}\right| \leqslant M(K)\,(1 - \operatorname{Re}\gamma(x))^k, \qquad \gamma \in U_K,\ x \in K.$$

Beweis. Die Aussagen (i)–(v) stimmen mit den Aussagen (1)–(5) in [39, Lemma 5.3] überein, wenn man dort die Rolle der Gruppe und ihrer Charaktergruppe vertauscht. Die Behauptung (vi) folgt aus der Existenz einer Umgebung $U_K$ von $1 \in \Gamma$ mit

$$(1-\operatorname{Re}\gamma(x)) \geqslant M_1(K)(l(x,\gamma))^2 \qquad \text{für } \gamma \in U_K,\, x \in K$$

(siehe dazu [39, Seite 94]), aus der bekannten Ungleichung

$$\left| e^{it} - \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(it)^n}{n!} \right| \leqslant M_2 t^{2k}, \qquad t \in R,$$

und aus (iv). ∎

**(4.3) Beispiel.** [39] Im Falle $G = R^n$ ist $\Gamma = R^n$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ und $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \Gamma$ ist

$$l(x, y) = x_1 h_1(y_1) + \ldots + x_n h_n(y_n),$$

wobei die Funktionen $h_i$: $R \to R$ $(i = 1, \ldots, n)$ die folgenden Eigenschaften besitzen:

(i) $h_i$ ist stetig und beschränkt;
(ii) $h_i(t) = t$ in einer Nullumgebung;
(iii) $h_i(-t) = -h_i(t)$.
Siehe [39] für weitere Beispiele.

**(4.4) Lemma.** *Für jede Funktion $f \in P^c(1, k)$ existiert ein Maß $\mu \in M(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *die Faltung $f * \mu$ existiert und $f * \mu$ ist eine positiv definite Funktion;*
(ii) *für jede Umgebung $U$ von $1 \in \Gamma$ existiert ein $\varepsilon_U > 0$ so daß gilt:*

$$\hat{\mu}(\gamma) > \varepsilon_U, \qquad \gamma \notin U;$$

(iii) *ist $G$ diskret (und damit abzählbar), so kann in der Form*

(1) $$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n (w_{g_n} * \tilde{w}_{g_n})^{*k}$$

*gewählt weden. Hierbei sind $p_n > 0$, $\{g_1, g_2, \ldots\} = G$ und $w_{g_n}$ das Maß (1) aus (4.1) mit $x = g_n$ und $\gamma = 1$.*

Beweis. Es sei $\{V_n\}_1^\infty$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen des Charakters $1 \in \Gamma$. Wegen Lemma (18.1) in [5] existiert für jedes $n$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $v_n$ mit kompaktem Träger für welches die Ungleichung $\hat{v}_n(\gamma) \leqslant 1/2$ $(\gamma \notin V_n)$ erfüllt ist. Setzt man $\mu_n = I_{\{0\}} - v_n$ so ist $\hat{\mu}_n(1) = 0$ und

(2) $$\hat{\mu}_n(\gamma) \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad \text{für } \gamma \notin V_n.$$

Wir zeigen jetzt, daß $f*(\mu_n*\tilde{\mu}_n)^{*k}$ positiv definit ist. Da $v_n$ einen kompakten Träger besitzt gibt es bekanntlich eine Folge $\{\sigma_j\}_1^\infty$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit endlichem Träger, die schwach gegen $v_n$ konvergiert. Setzt man $w_j = 1_{\{0\}} - \sigma_j$ so ist $\hat{w}_j(1) = 0$ und die Folge $\{(w_j * \tilde{w}_j)^{*k}\}_1^\infty$ konvergiert schwach gegen $(\mu_n * \tilde{\mu}_n)^{*k}$. Aus die schwachen Konvergenz folgt die Beziehung

$$f*(\mu_n*\tilde{\mu}_n)^{*k}(x) = \lim_{j\to\infty} f*(w_j*\tilde{w}_j)^{*k}(x), \qquad x\in G.$$

Wegen $\hat{w}_j(1) = 0$ und $f\in P^c(1, k)$ sind die Funktionen $f*(w_j*w_j)^{*k}$ positiv definit, und so muß auch $f*(\mu_n*\tilde{\mu}_n)^{*k}$ positiv definit sein. Da eine positiv definite Funktion beschränkt ist, gibt es eine Zahl $r_n > 0$ mit

$$(3) \qquad |f*(\mu_n*\tilde{\mu}_n)^{*k}(x)| < r_n, \qquad x\in G.$$

Wir setzen

$$(4) \qquad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n r_n} (\mu_n * \tilde{\mu}_n)^{*k}.$$

Dann ist $\mu\in M(G)$ und aus (3) folgt, daß die Faltung $f*\mu$ existiert. Die Funktion $f*\mu$ ist offenbar positiv definit. Es sei nun $U$ eine beliebige Umgebung von $1\in\Gamma$. Dann gibt es ein $n_0$ mit $V_{n_0}\subset U$. Wegen (2) und (4) gilt die Ungleichung

$$\hat{\mu}(\gamma) \geqslant \frac{1}{2^{n_0} r_{n_0}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

für alle $\gamma\notin V_0$ und damit auch für alle $\gamma\notin U$. Somit haben wir die Beziehung (ii) bewiesen.

Nehmen wir jetzt an, daß $G$ eine diskrete Gruppe ist. Wir betrachten das Maß $\mu$ aus (1) mit $p_n = 1/(2^n r_n)$, wobei die Zahlen $r_n$ ganz analog wie in (3) bestimmt werden. Ähnlich wie oben zeigt man, daß dieses Maß $\mu$ die Eigenschaft (i) besitzt. Wegen $\{g_1, g_2, \ldots\} = G$ ist $\hat{\mu}(\gamma) > 0$ für $\gamma \neq 1$. Die Eigenschaft (ii) folgt nun sofort aus der Kompaktheit von $\Gamma$. ∎

(4.5) Lemma. *Es seien $f\in P^c(\gamma, k)$, $\gamma\in\Gamma$ und $w\in F(\gamma, k)$. Dann ist die Funktion $f*w$ die Fourier-Transformierte eines Maßes $\sigma_w\in M(\Gamma)$:*

$$f*w = \check{\sigma}_w.$$

*Ist $w\in F^+(\gamma, k)$, so ist $\sigma_w\in M^+(\Gamma)$.*

Beweis: Die zweite Aussage des Lemmas folgt aus der Definition der Klasse $P^c(\gamma, k)$ und aus dem Satz von Bochner [18, II, Th. 33.3]. Die erste Aussage beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich $k$.

Es seien erst $k = 1$ und $w\in F(\gamma, 1)$. Dann ist $w = w_1 * w_2$ mit $\hat{w}_1(\gamma) = \hat{w}_2(\gamma) = 0$. Es ist leicht zu überprüfen, daß

(1) $$w_1 * w_2 = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l (w_1 + i^l \tilde{w}_2) * (w_1 + i^l \tilde{w}_2)^{\sim}$$

Folglich gilt:

$$f * w = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} i^l f * (w_1 + i^l \tilde{w}_2) * (w_1 + i^l \tilde{w}_2)^{\sim}$$

Wegen $(w_1 + i^l \tilde{w}_2)^{\wedge}(\gamma) = 0$ $(l = 0, 1, 2, 3)$ und $f \in P^c(\gamma, 1)$, ist somit die Funktion $f * w$ eine lineare Kombination von 4 positiv definiten Funktionen, woraus die Behauptung des Lemmas folgt.

Nehmen wir jetzt an, daß das Lemma für $k$ gilt und betrachten wir die Funktion $f * w$ mit $w \in F(\gamma, k+1)$, $f \in P^c(\gamma, k+1)$. Das Maß $w$ kann auch in der Form $w = w_1 * w_2 * w'$ geschrieben werden, wobei $\hat{w}_1(\gamma) = \hat{w}_2(\gamma) = 0$ und $w' \in F(\gamma, k)$. Wegen (1) erhalten wir:

$$f * w = \frac{1}{4}\left(\sum_{l=0}^{3} i^l f * (w_1 + i^l \tilde{w}_2) * (w_1 + i^l \tilde{w}_2)^{\sim}\right) * w'$$

Hierbei ist

$$f * (w_1 + i^l \tilde{w}_2) * (w_1 + i^l \tilde{w}_2)^{\sim} \in P(1, k), \qquad l = 0, 1, 2, 3.$$

Aus unserer Annahme folgt nun die Aussage des Lemmas. ■

Wir geben jetzt eine Integraldarstellung für Funktionen aus $P(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma$. Wegen Bemerkung (3.2) (c) genügt es den Fall $\gamma = 1$ zu betrachten.

**(4.6)** SATZ. *Eine stetige, hermitesche Funktion $f$ auf $G$ ist aus $P^c(1, k)$ genau dann, wenn gilt:*

(1) $$f(x) = p(x) + \int_{\Gamma}\left(\gamma(x) - \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{(il(x, \gamma))^n}{n!}\right) d\sigma(\gamma), \qquad x \in G.$$

*Hierbei sind:*

1. *$\sigma$ ein nichtnegatives Borel-Maß auf $\Gamma$ mit den folgenden Eigenschaften:*
   1.1. *$\sigma(\{1\}) = 0$ und $\sigma(\Gamma \setminus U) < \infty$ für jede Umgebung $U$ von $1 \in \Gamma$;*
   1.2. *$\int_{\Gamma} |\hat{w}(\gamma)| \, d\sigma(\gamma) < \infty$ für $w \in F(1, k)$;*
2. *$l$ die Funktion aus Lemma (4.2);*
3. *$p$ ein hermitesches, verallgemeinertes Polynom höchstens $(2k)$-ten Grades mit der Eigenschaft, daß für jedes $w \in F^+(1, k)$ die Funktion $p * w$ eine nichtnegative Konstante ist.*

Beweis. Es seien $f \in P^c(1, k)$, $w \in F(1, k)$ und $\mu$ wie im Lemma (4.4). Wegen Lemma (4.5) ist

$$f * w = \check{\sigma}_w \qquad \text{mit } \sigma_w \in M(\Gamma).$$

Da $f * \mu$ positiv definit ist, erhalten wir:

$$f * \mu = \check{\sigma}_\mu \qquad \text{mit } \sigma_\mu \in M^+(\Gamma).$$

Aus der Gleichung

$$(f * w) * \mu = (f * \mu) * w$$

folgt die Beziehung

$$\check{\sigma}_w * \mu = \check{\sigma}_\mu * w.$$

Also gilt:

$$\hat{\mu}(\gamma)\, d\sigma_w(\gamma) = \hat{w}(\gamma)\, d\sigma_\mu(\gamma). \tag{2}$$

Wir setzen

$$d\sigma(\gamma) = \frac{d\sigma_\mu(\gamma)}{\hat{\mu}(\gamma)} \text{ für } \gamma \neq \mathit{1} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\{\mathit{1}\}) = 0.$$

Das Maß $\sigma$ ist nichtnegativ und aus der Eigenschaft (ii) in Lemma (4.4) erhalten wir:

$$\sigma(\Gamma \backslash U) < \infty \qquad \text{für jede Umgebung } U \text{ von } \mathit{1} \in \Gamma.$$

Wegen (2) und der Definition von $\sigma$ ist

$$d\,\sigma_w(\gamma) = \hat{w}(\gamma)\, d\sigma(\gamma), \qquad \gamma \neq \mathit{1},\ w \in F(\mathit{1}, k). \tag{3}$$

Daraus folgt:

$$\int_\Gamma |\hat{w}(\gamma)|\, d\sigma(\gamma) = \int_{\Gamma \backslash \{\mathit{1}\}} \mathit{1}\, d\,|\sigma_w(\gamma)| < \infty.$$

Das Maß $\sigma$ besitzt also die Eigenschaften 1.1 und 1.2. Sei nun $w_x$ das Maß (1) aus (4.1) mit $\gamma = \mathit{1}$.

Dann ist

$$w = (w_x * \tilde{w}_x)^{*k} \in F^+(\mathit{1}, k). \qquad \hat{w}(\gamma) = |\hat{w}_x(\gamma)|^{2k} = \big(1 - \operatorname{Re}\gamma(x)\big)^k.$$

Nach 1.1. erhalten wir:

$$\int_\Gamma \big(1 - \operatorname{Re}\gamma(x)\big)^k\, d\sigma(\gamma) < \infty. \tag{4}$$

Wir setzen

$$p(x) = f(x) - \int_\Gamma \big(\gamma(x) - P_k(x, \gamma)\big)\, d\sigma(\gamma)$$

mit

$$P_k(x, \gamma) = \sum_{n=0}^{2k-1} \frac{\big(il(x, \gamma)\big)^n}{n!},$$

wobei $l$ die Funktion aus Lemma (4.2) ist. Aus (4) und (vi) im Lemma (4.2) folgt, daß das Integral

$$\int_\Gamma \big(\gamma(x) - P_k(x, \gamma)\big)\, d\sigma(\gamma)$$

für jedes $x \in G$ existiert. Die Definition von $p(x)$ ist also sinnvoll. Sei nun $w \in F(1, k)$ beliebig. Da $P_k(\cdot, \gamma)$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ ein Polynom höchstens $(2k-1)$-ten Grades ist, gilt: $P_k(\cdot, \gamma) * w = 0$ (siehe Abschnitt 14). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} p * w(x) &= f * w(x) - \int_\Gamma (\gamma - P_k(\cdot, \gamma)) * w(x)\, d\sigma(\gamma) \\ &= \check{\sigma}_w(x) - \int_\Gamma \gamma * w(x)\, d\sigma(\gamma) \\ &= \check{\sigma}_w(x) - \int_\Gamma \gamma(x)\, \hat{w}(\gamma)\, d\sigma(\gamma). \end{aligned}$$

Aus (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \gamma(x)\, \hat{w}(\gamma)\, d\sigma(\gamma) &= \int_{\Gamma \setminus \{1\}} \gamma(x)\, d\sigma_w(\gamma) \\ &= \check{\sigma}_w(x) - \sigma_w(\{1\}). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$p * w(x) = \sigma_w(\{1\}) \qquad \text{für alle } x \in G \text{ und } w \in F(1, k).$$

Deshalb ist $p * (w * w') = 0$ für $w \in F(1, k)$ und $w' \in F(G)$ mit $\hat{w}'(1) = 0$. Hieraus folgt, daß $p$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens $(2k)$-ten Grades ist (Abschnitt 14). Im Falle $w \in F^+(1, k)$ haben wir $\sigma_w \in M^+(\Gamma)$ und somit ist $p * w(x) = \sigma_w(\{1\}) \geqslant 0$.

Nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $f$ die Darstellung (1) hat. Dann ist

$$f * w(x) = p * w(x) + \int_\Gamma \gamma(x)\, \hat{w}(\gamma)\, d\sigma(\gamma) \qquad \text{für alle } w \in F^+(1, k).$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist eine nichtnegative Konstante. Der zweite Term ist eine positiv definite Funktion, da nach 1.2 das Maß $\hat{w}\, d\sigma$ endlich ist. Die Funktion $f * w$ ist also für alle $w \in F^+(1, k)$ positiv definit und somit ist $f \in P^c(1, k)$. ∎

(4.7) Bemerkungen (a) Im Falle $k = 1$ erhalten wir aus Satz (4.6) die Lévy–Khinchin–Formel [39]:

$$f(x) = p(x) + \int_\Gamma \big(\gamma(x) - 1 - il(x, \gamma)\big)\, d\sigma(\gamma).$$

Hierbei ist $p$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens zweiten Grades, das sich nach (2) in (14.1) in der Form

(1) $$p(x) = A_0 + A_1(x) + A_2(x, x)$$

schreiben läßt. Es sei $w_x^{(1)} = w_x$ das Maß (1) in (4.1). Dann ist

$$2p * w_x * \tilde{w}_x(y) = 2p(y) - p(y-x) - p(y+x).$$

Somit erhalten wir aus (1):

$$p * w_x * \tilde{w}_x(y) = -A_2(x, x).$$

Da nach 3 im Satz (4.6) die Funktion $p * w_x * \tilde{w}_x$ eine nichtnegative Konstante ist, muß

$$\text{(i)} \qquad A_2(x, x) \leqslant 0, \quad x \in G,$$

sein. Aus der hermiteschen Symmetrie von $p$ folgen sofort die Beziehungen

$$\text{(ii)} \qquad \operatorname{Re} A_1(x) = 0, \quad x \in G,$$

und

$$\text{(iii)} \qquad A_0 \in R.$$

Andererseits ist es leicht zu sehen, daß jedes verallgemeinerte Polynom der Gestalt (1), wobei für $A_2$, $A_1$ und $A_0$ die Beziehungen (i), (ii) bzw. (iii) gelten, die Bedingung 3 im Satz (4.6) erfüllt.

(b) Es seien $G = R$ und $f$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion aus $P^c(1, 1)$. Dann ist die Funktion

$$2f * w_x * \tilde{w}_x(y) = 2f(y) - f(y-x) - f(y+x)$$

für jedes $x \in R$ positiv definit. Wegen

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(y) - f(y-x) - f(y+x)}{x^2} = -f''(y)$$

muß auch die Funktion $-f''$ positiv definit sein.

Ist $f$ eine $(2k)$-mal stetig defferenzierbare Funktion aus $P(1, k)$, so sieht man ganz analog, daß die Funktion $(-1)^k f^{(2k)}$ positiv definit ist. Die entsprechende Aussage gilt auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher: Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine $(2k)$-mal stetig differenzierbare Funktion aus $P(1, k)$, so ist für beliebige nichtnegative ganze Zahlen $k_i (i = 1, \ldots, n)$ mit $k_1 + \ldots + k_n = k$ die Funktion $(-1)^k \partial^{2k} f / \partial x_1^{2k_1} \ldots \partial x_n^{2k_n}$ positiv definit.

## 5. Charakterisierung der Funktionenklasse $P^c(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma_u$

(5.1) Satz. *Die Beziehung $f \in P^c(\gamma, k)$, $\gamma \in \Gamma_u$ gilt genau dann, wenn*

$$(1) \qquad f(x) = f_0(x) + \big(p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)}\big),$$

*wobei $f_0 \in P_0^c(G)$ und $p$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades sind.*

Beweis. Hat die Funktion $f$ die Gestalt (1), so ist

$$f * w = f_0 * w \in P_0^c(G)$$

für alle $w \in F^+(\gamma, k)$ und damit $f \in P^c(\gamma, k)$ (siehe Satz (14.3)).

Sei jetzt $f$ eine beliebige Funktion aus $P^c(\gamma, k)$. Wir wählen ein $x_0 \in G$ mit $\gamma(x_0) \neq 1$. Dann ist

$$|\gamma(x_0)+\overline{\gamma(-x_0)}| > 2. \tag{2}$$

Bezeichne $w_{x_0}$ das Maß (1) aus (4.1) mit $x = x_0$.

Da für ein beliebiges $\gamma' \in \Gamma$ die Beziehung $|\gamma'| = 1$ gilt, erhalten wir aus (2) und der Definition von $w_{x_0}$:

$$\inf_{\gamma' \in \Gamma} |\hat{w}_{x_0}(\gamma')| > 0. \tag{3}$$

Wir setzen $w_0 = w_{x_0}^{*k}$. Wegen $f \in P(\gamma, k)$ ist $f * w_0 * \tilde{w}_0$ eine positiv definite Funktion. Nach dem Satz von Bochner ist

$$f * w_0 * \tilde{w}_0 = \check{\sigma}_0 \qquad \text{mit}\, \sigma_0 \in M^+(\Gamma).$$

Ähnlich wie im Beweis vom Satz (4.6) führen wir das Maß $d\sigma = d\sigma_0/|\hat{w}_0|^2$ und die Funktionen $f_0 = \check{\sigma}$, $P = f - f_0$ ein. Wegen (3) ist $\sigma$ ein endliches Maß. Da $\sigma$ offenbar nichtnegativ ist, erhalten wir: $f_0 \in P_0^c(G)$. Analog wie im Satz (4.6) zeigt man nun, daß für $w \in F^+(\gamma, k)$ gilt:

$$P * w = 0.$$

Deshalb ist

$$P(x) = p(x)\gamma(x) + \overline{p(-x)\gamma(-x)},$$

wobei $p$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades ist (Satz (14.3)). Damit ist Satz (5.1) bewiesen. ■

## 6. Beschränkte definisierbare Funktionen

**(6.1)** LEMMA. *Gelte für eine hermitesche Funktion $f$ auf $G$ die Beziehung*

$$f * w_x * \tilde{w}_x \in P_0(G) \qquad \textit{für alle } x \in G,\ x \neq 0,$$

*wobei $w_x = w_x^{(1)}$ das Maß (1) aus (4.1) ist.*

*Dann ist die Funktion $f$ bedingt positiv definit.*

Beweis. Wegen der Definition einer bedingt positiv definiten Funktion können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $G$ durch endlich viele Elemente erzeugt wird. Die diskrete Topologie auf $G$ besitzt dann eine abzählbare Basis. Beim Beweis von Lemma (4.4) haben wir im diskreten Fall nur von den Maßen $w_x$ Gebrauch gemacht. Führt man jetzt auch den Beweis von Satz (4.6) nur mit Anwendung der Maße $w_x$ durch, so erhält man für $f$ die Integraldarstellung (1) im Satz (4.6) mit $k = 1$. Hierbei müssen in 1.2 die Maße $w \in F(1, 1)$ durch $w_x (x \in G, x \neq 0)$ ersetzt werden. Das Integral in der

Formel (1) im Satz (4.6) stellt auch mit diesem $\sigma$ (und $k = 1$) eine bedingt positiv definite Funktion dar. Anstelle der Eigenschaft 3 der Funktion $p$ tritt jetzt:

3'. $p$ ist eine hermitesche Funktion mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in G (x \neq 0)$ die Funktion $p * w_x * \tilde{w}_x$ eine nichtnegative Konstante ist.

Wir zeigen jetzt, daß $p$ bedingt positiv definit ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $p(0) = 0$ ist. Aus 3' erhalten wir:

$$2p(y) - p(y+x) - p(y-x) = 2q(x), \tag{1}$$

wobei $q$ eine nichtnegative Funktion auf $G$ ist. Wie setzen $p_1 = \operatorname{Re} p$ und $p_2 = \operatorname{Im} p$. Dann ist $p_1(x) = p_1(-x)$, $p_2(x) = -p_2(-x)$ und auch die Funktion $p_1$ erfüllt die Gleichung (1):

$$2p_1(y) - p_1(y+x) - p_1(y-x) = 2q(x). \tag{2}$$

Setzt man $y = 0$ in (2), so erhält man

$$-p_1(x) - p_1(-x) = -2p_1(x) = 2q(x).$$

Deshalb und wegen (2) gilt:

$$p_1(y+x) + p_1(y-x) = 2\big(p_1(y) + p_1(x)\big).$$

Die Funktion $p_1$ ist also eine quadratische Form [5], (7.18), die wegen $-p_1 = q \geqslant 0$ nichtpositiv ist. Nach [5, (7.19)] ist $p_1$ bedingt positiv definit. Die Funktion $p_2$ erfüllt die Gleichung

$$2p_2(y) - p_2(y+x) - p_2(y-x) = 0. \tag{3}$$

Durch Vertauschen der Variablen $x$ und $y$ erhalten wir:

$$2p_2(x) - p_2(y+x) - p_2(x-y) = 0. \tag{4}$$

Addiert man jetzt die Gleichungen (3) und (4) unter Berücksichtigung der Beziehung $p_2(x-y) = -p_2(y-x)$, so ergibt sich:

$$p_2(x+y) = p_2(x) + p_2(y).$$

Nach [5,(7.20)] ist die Funktion $ip_2$ bedingt positiv definit. Damit haben wir gezeigt, daß die Funktion $p = p_1 + ip_2$ und somit auch $f$ bedingt positiv definit sind. ∎

**(6.2)** Satz. *Für eine beschränkte, stetige hermitesche Funktion $f$ gilt die Beziehung $f \in P^c P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ genau dann, wenn sie die Form*

$$f = f_0 + a_1 \gamma_1 + \ldots + a_n \gamma_n \tag{1}$$

*besitzt.*

*Hierbei sind $f_0 \in P_0^c(G)$, $a_i \in R$ und $a_i = 0$ wenn $\gamma_i \in \Gamma_u$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Beweis. Hat eine Funktion $f$ die Gestalt (1), so folgt sofort, daß $f$ beschränkt und aus $P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ ist. Nehmen wir jetzt an, daß für die beschränkte Funktion $f$ die Beziehung $f \in P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ gilt. Nach Satz (3.3) läßt sich $f$ in der Form $f = f_1 + \ldots + f_n$ mit $f_i \in P^c(\gamma_i, k_i)$, $i = 1, \ldots, n$, darstellen. Wie es aus dem Beweis dieses Satzes hervorgeht, können die Funktionen $f_i$ so gewählt werden, daß sie die Gestalt $f_i = f * w_i$ mit $w_i \in F(G)$ besitzen und somit beschränkt sind. Deshalb genügt es die Aussage für den Fall $f \in P^c(\gamma, k)$ zu beweisen.

Es sei zuerst $\gamma \in \Gamma$. Wegen Bemerkung (3.2) (c) können wir annehmen, daß $\gamma = 1$. Wir betrachten die binomiale Reihe

$$(1+t)^{1/k} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i \tag{2}$$

mit

$$a_i = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{k} - i + 1\right)(i!)^{-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Sie ist für $|t| \leqslant 1$ absolut konvergent. Sei $\mu_x = \sqrt{2}\, w_x^{(1)} = \sqrt{2}\, w_x$, wobei $w_x^{(1)}$ das Maß (1) aus (4.1) ist.

Dann gilt: $\|\mu_x - 1_{\{0\}}\| = 1$. Setzen wir in (2) $1_{\{0\}}$ anstelle von 1 und $\mu_x - 1_{\{0\}}$ anstelle von $t$:

$$1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\mu_x - 1_{\{0\}})^{*i} = \mu.$$

Für das Maß $\mu \in M(G)$ gilt dann $\mu^{*k} = \mu_x$ und somit ist $\hat{\mu}(1) = 0$. Sei $\mu_N$ das Maß aus $F(G)$ mit

$$\mu_N = c_N 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^{N} a_i (\mu_x - 1_{\{0\}})^{*i}, \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

wobei $c_N \in C$ derart gewählt wird, daß $\hat{\mu}_N(1) = 0$. Wegen $\hat{\mu}(1) = 0$ ist $\lim_{N \to \infty} c_N = 1$ und $\lim_{N \to \infty} \|\mu_N - \mu\| = 0$. Aus (3) und der Beschränktheit von $f$ folgt die Beziehung

$$f * \mu_x * \tilde{\mu}_x(y) = f * (\mu + \tilde{\mu})^{*k}(y) = \lim_{N \to \infty} f * (\mu_N * \tilde{\mu}_N)^{*k}(y),$$

$y \in G$. Da die Funktion $f * (\mu_N * \tilde{\mu}_N)^{*k}$ positiv definit ist $(N = 1, 2, \ldots)$, muß $f * \mu_x * \tilde{\mu}_x$ und somit auch $f * w_x * \tilde{w}_x$ $(x \in G,\ x \neq 0)$ positiv definit sein. Wegen Lemma (6.1) ist die beschränkte Funktion $f$ bedingt positiv definit.

Nach dem Satz von K. Harzallah ([16], siehe auch [5]) hat $f$ die Gestalt $f = f_0 + m$ mit $f_0 \in P_0^c(G)$ und $m \in R$.

Sei jetzt $f$ eine beschränkte Funktion aus $P^c(\gamma, k)$ mit $\gamma \in \Gamma_u$. Nach Satz (5.1) ist

$$f(x) = f_0(x) + p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)},$$

wobei $f_0 \in P_0^c(G)$ und $p$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens $(k-1)$-ten Grades ist. Da $f$ und $f_0$ beschränkt sind, muß auch die Funktion

$$P(x) = p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)}$$

beschränkt sein. Bezeichne $T(P)$ die Gesamtheit aller Funktionen der Gestalt $P * w$ mit $w \in F(G)$. Die Menge $T(P)$ enthält nur beschränkte Funktionen. Wir zeigen jetzt, daß im Falle $p \neq 0$ die Funktion $\gamma$ in $T(P)$ enthalten ist. Aus der Umbeschränktheit von $\gamma$ folgt dann, daß $p = 0$ und damit $f = f_0$ sein muß.

Wäre $p \neq 0$, so könnten wir ein Maß $w_1 \in F(G)$ und eine positive ganze Zahl $l \leqslant k$ mit den folgenden Eigenschaften finden:

(i) $(p\gamma) * w^{*l} = 0$ für alle $w \in F(G)$ mit $\hat{w}(\gamma) = 0$;

(ii) $\hat{w}_1(\gamma) = 0$;

(iii) $(p\gamma) * w_1^{*(l-1)} \neq 0$.

Aus (i) und (iii) folgt einfach, daß

$$(p\gamma) * w_1^{*(l-1)} = c\gamma \qquad (c \in C,\ c \neq 0).$$

Sei jetzt $w_2 \in F(G)$ mit

$$\hat{w}_2(\overline{\gamma^{-1}}) = 0 \qquad \text{und} \qquad \hat{w}_2(\gamma) \neq 0.$$

Dann gilt:

$$P * w_1^{*l} * w_2^{*k} = c'\gamma \qquad \text{mit } c' = c\big(\hat{w}_2(\gamma)\big)^k \neq 0.$$

Damit ist der Beweis vollständig.

(6.3) Bemerkung. Bezeichne $S$ die Gesamtheit aller Maße $\sigma \in M^+(G)$ mit kompaktem Träger, die symmetrisch sind und für die $\sigma(G) = 1$ gilt. K. Harzallah zeigte in [17], daß eine reellwertige, hermitesche Funktion $f$ bedingt positiv definit ist, wenn die Funktion $f - f * \sigma$ für jedes $\sigma \in S$ positiv definit ist. Das Lemma (6.1) ist eine Verallgemeinerung dieser Aussage, da die Funktion $f * w_x * \tilde{w}_x$ in der Form

$$f * w_x * \tilde{w}_x = f - f * \sigma_x$$

mit

$$\sigma_x(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } y = x, \\ \frac{1}{2} & \text{für } y = -x, \\ 0 & \text{const}, \end{cases}$$

geschrieben werden kann. Das Maß $\sigma_x$ gehört offensichtlich zu $S$. Andererseits haben wir nicht gefordert, daß $f$ reellwertig ist. Wir bemerken noch, daß für das Maß $\mu' = 1_{\{0\}} - \sigma$ $(\sigma \in S)$ die Beziehungen $\hat{\mu}'(1) = 0$ und $\|1_{\{0\}} - \mu'\| = 1$ gelten. Deshalb existiert ein Maß $\mu \in M(G)$ mit $\hat{\mu}(1) = 0$ und $\mu * \mu = \mu * \tilde{\mu} = \mu'$. Das beweist man mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis von Satz (6.2).

Somit läßt sich die Funktion $f-f*\sigma$ in der Form $f-f*\sigma=f*\mu'=f*(\mu*\tilde{\mu})$ darstellen. Der Träger von $\mu$ ist im allgemeinen nicht kompakt. Deshalb sind die Klammern in dem letzten Ausdruck.

(6.4) Bemerkung. Im Abschnitt 8 werden wir zeigen, daß jede Funktion aus $P_k^c(G)$ definisierbar ist (Satz (8.2)). Mit Hilfe von Satz (6.2) erhalten wir somit einen neuen Beweis für Satz (2.2).

## 7. Zerlegung meßbarer definisierbarer Funktionen

(7.1) LEMMA. *Es sei $f$: $G\times G\to C$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *für jedes $x\in G$ ist $f(\cdot, x)\in P^m(\gamma_1, k_1;\ldots;\gamma_n, k_n)$;*

(b) *für jedes $y\in G$ ist die Funktion $f(y,\cdot)$ $m_G$-meßbar.*

*Dann gilt für die Funktion*

$$g(y)=\int_K f(y, x)\,dm_G(x), \qquad y\in G,$$

*die Beziehung $g\in P^m(\gamma_1, k_1;\ldots;\gamma_n, k_n)$. Hierbei ist $K$ eine beliebige kompakte Teilmenge von $G$.*

Beweis. Die Aussage des Lemmas folgt unmittelbar aus der Definition der Klasse $P^m(\gamma_1, k_1;\ldots;\gamma_n, k_n)$ und aus

$$g*w(y)=\int_K \big(f(\cdot, x)*w\big)(y)\,dm_G(x), \qquad w\in F(G). \blacksquare$$

(7.2) Satz. *Jede Funktion $f\in P^m P(\gamma_1, k_1;\ldots;\gamma_n, k_n)$ läßt sich in der Form*

$$f=f_c+f_s$$

*darstellen, wobei $f_c\in P^c(\gamma_1, k_1;\ldots;\gamma_n, k_n)$, $f_s\in P_0^m(G)$ und $f_s=0$ $m_G$-fast überall.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $G$ nicht diskret ist. Nach Satz (3.3) genügt es die Aussage für $f\in P^m(\gamma, k)$ zu zeigen. Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion bezülich $k$.

Sei erst $k=1$. Bezeichne $w_x (x\neq 0)$ das Maß (1) aus (4.1) mit $\gamma=1$. Dann ist

$$(1) \qquad f*w_x*\tilde{w}_x(y)=f(y)-\frac{f(y+x)}{\gamma(x)+\overline{\gamma(-x)}}-\frac{f(y-x)}{\overline{\gamma(x)}+\gamma(-x)}.$$

Aus $f\in P^m(\gamma, 1)$ folgt $f*w_x*\tilde{w}_x\in P_0^m(G)$, $x\neq 0$. Für jedes $x\in G$ bezeichne $f_x(y)$ die Funktion auf der rechten Seite von (1). Wegen $f_0=0$ ist $f_x\in P_0^m(G)$ für alle $x\in G$. Sei nun $K\subset G$ eine beliebige kompakte Menge mit $m_G(K)>0$. Dann ist die Funktion

(2)
$$g(y) = \int_K f_x(y)\, dm_G(x)$$

positiv definit. Aus (1) erhalten wir:

$$g(y) = m_G(K)\, f(y) + h(y),$$

wobei $h$ eine stetige Funktion ist. Da $g$ eine meßbare positiv definite Funktion ist, besitzt sie die Zerlegung $g = g_c + g_s$ mit $g_c \in P_0^c(G)$, $g_s \in P_0^m(G)$, $g_s = 0$ $m_G$-fast überall [18, II, Th. 32.12]. Setzt man

$$f_c = \frac{g_c - h}{m_G(K)} \quad \text{und} \quad f_s = \frac{g_s}{m_G(K)},$$

so gilt: $f = f_c + f_s$. Hierbei ist $f_c$ eine stetige Funktion, $f_s \in P_0^m(G)$ und $f_s = 0$ $m_G$-fast überall. Wir zeigen, daß $f_c \in P^c(\gamma, 1)$ ist. Diese Behauptung ist äquivalent mit der Ungleichung

$$\int_G f_c\, d(w * w') * (w * w')^{\sim} \geqslant 0$$

für $w \in F(G)$ mit $(w * \tilde{w})^{\wedge}(\gamma) = 0$ und $w' \in F(G)$ beliebig (siehe Bemerkung (3.2)). Da der Träger von $w$ und $w'$ endlich ist und $f_s$ fast überall verschwindet, sieht man leicht, daß Folgen $\{w_n\}_1^{\infty}$, $\{w'_n\}_1^{\infty} \subset F(G)$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

(i) $(w_n * \tilde{w}_n)^{\wedge}(\gamma) = 0$, $n = 1, 2,$

(ii) $\int_G f_s\, d(w_n * w'_n) * (w_n * w'_n)^{\sim} = 0$;

(iii) $\int_G f_c\, d(w * w') * (w * w') = \lim_{n\to\infty} \int_G f_c\, d(w_n * w'_n) * (w_n * w'_n)^{\sim}$

Wegen $f \in P^m(\gamma, 1)$ ist

$$\int_G f\, d(w_n * w'_n) * (w_n * w'_n)^{\sim} \geqslant 0.$$

Aus (ii) und (iii) folgt nun:

$$\begin{aligned}\int_G f_c\, d(w * w') * (w * w')^{\sim} &= \lim_{n\to\infty} \int_G f_c\, d(w_n * w'_n) * (w_n * w'_n)^{\sim} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_G f\, d(w_n * w'_n) * (w_n * w'_n)^{\sim} \geqslant 0,\end{aligned}$$

das heißt, $f_c \in P^c(\gamma, 1)$,

Nehmen wir jetzt an, daß die Aussage des Satzes für $k$ richtig ist und sei $f \in P^m(\gamma, k+1)$. Bezeichne wieder $f_x(y)$ die Funktion auf der rechten Seite von (1). Für $x \in G$ ist dann $f_x \in P^m(\gamma, k)$ und nach Lemma (7.1) gilt für die Funktion $g$ aus (2): $g \in P^m(\gamma, k)$. Wiederholt man nun die obigen Überlegungen, unter Benutzung der Induktionsannahme anstelle von [18], II, Th. 32. 12, so erhält man die gewünschte Zerlegung von $f$.

Kapitel III

# Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten

## 8. Definisierbarkeit der Funktionen aus $P_k(G)$

Es sei $f \in P_k(G)$. Wie in [22], [53] führen wir in $F(G)$ das Skalarprodukt

$$(w_1, w_2)_f = \int_G f d(w_1 * \tilde{w}_2), \qquad w_1, w_2 \in F(G),$$

ein. Da $f$ $k$ negative Quadrate hat, kann $F(G)$ in einen $\pi_k$-Raum $\Pi_k(f)$ eingebettet werden [22]. Das Skalarprodukt in $\Pi_k(f)$ und das zu einem $w \in F(G)$ gehörige Element von $\Pi_k(f)$ werden wir ebanfalls mit $( \ , \ )_f$ (oder einfach $( \ , \ )$), bzw. w bezeichnen. Den Raum $F(G)$ werden wir also als einen (dichten) Unterraum von $\Pi_k(f)$ betrachten.

Im diesem Abschnitt bezeichnet $G$ im weiteren eine lokalkompakte kommutative Gruppe.

**(8.1)** LEMMA. *Für eine beliebige Funktion $f \in P_k(G)$ und $w \in F(G)$ gilt:*

$$f * w * \tilde{w} \in P_l(G), \quad \textit{für ein } l \textit{ mit } 0 \leqslant l \leqslant k.$$

Beweis. Wir setzen $f' = f * w * \tilde{w}$. Aus der Gleichung

$$\left((w_i, w_j)_{f'}\right)_{i,j=1}^n = \left((w_i * w, w_j * w)_f\right)_{i,j=1}^n$$

und aus $f \in P_k(G)$ folgt, daß die Matrix $\left((w_i, w_j)_{f'}\right)_{i,j=1}^n$ für beliebige $w_1, \ldots, w_n \in F(G)$ höchstens $k$ negative Eigenwerte hat. Deshalb ist $f' \in P_l(G)$ mit $0 \leqslant l \leqslant k$.

**(8.2)** SATZ. *Für jede Funktion $f \in P_k^c(G)$ existieren $\gamma_i \in \Gamma'$ und positive ganze Zahlen $k_i$, $k_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, so daß gilt:*

$$f = f_1 + \ldots + f_n,$$

*$f_i \in P^c(\gamma_i, k_i')$, $i = 1, \ldots, n$, und $k_1' + \ldots + k_n' \leqslant k$. Die Funktion $f_i$ hat $k_i$ negative Quadrate und läßt sich in der Form $f_i = f * w_i$ mit $w_i \in F(G)$ und $\tilde{w}_i = w_i$ darstellen $(i = 1, \ldots, n)$.*

Beweis. Wir betrachten die linearen Operatoren

$$U_x\colon F(G) \to F(G), \qquad x \in G,$$

mit

$$(U_x w) = w(y-x), \qquad x, y \in G, w \in F(G).$$

Aus der Definition des Skalarproduktes $(\ ,\ )_f$ erhalten wir:

$$(U_x w_1, U_x w_2)_f = (w_1, w_2)_f.$$

Deshalb kann der Operator $U_x$ zu einem unitären Operator auf $\Pi_k(f)$ fortgesetzt werden [23]. Den fortgesetzten Operator werden wir ebenfalls mit $U_x$ bezeichnen. Wegen der Kommutativität von $G$ ist $U_x U_y = U_y U_x (x, y \in G)$.

Folglich haben die Operatoren $U_x$ einen gemeinsamen, nichtpositiven Eigenvektor $v_0 \in \Pi_k(f)$, $v_0 \neq 0$ [34]. Sei die Funktion $\gamma'_1$ durch die Gleichung

$$U_x v_0 = \gamma'_1(x) v_0, \qquad x \in G,$$

definiert. Wegen der Definition von $U_x$ ist

$$U_{x+y} = U_x U_y, \qquad U_0 = I \qquad \text{(Einheitsoperator)}$$

und damit

$$(1) \qquad \gamma'_1(x+y) = \gamma'_1(x)\,\gamma'_1(y) \quad \text{und} \quad \gamma'_1(0) = 1.$$

Wir zeigen jetzt, daß $\gamma'_1$ stetig ist. Da $\Pi_k(f)$ keinen isotropen Vektor enthält, gibt es ein $v'_0 \in \Pi_k(f)$ mit $(v_0, v'_0)_f \neq 0$. Seien $(\mu_n)$ und $(\mu'_n)$ Folgen in $F(G)$ mit $\mu_n \to v_0$ und $\mu'_n \to v'_0$. Aus der Stetigkeit von $f$ und aus $\mu_n, \mu'_n \in F(G)$ folgt die Stetigkeit der Funktion $h_n(x) = (U_x \mu_n, \mu'_n)_f$, $x \in G$, $n = 1, 2, \ldots$ Für jedes $x \in G$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} h_n(x) = \lim_{n \to \infty} (U_x \mu_n, \mu'_n)_f = (U_x v_0, v'_0) = \gamma'_1(x)\,(v_0, v'_0)_f.$$

Wegen $(v_0, v'_0) \neq 0$ ist $\gamma'_1$ die Grenzfunktion einer punktweise konvergierenden Folge von stetigen Funktionen. Somit ist $\gamma'_1$ $m_G$-meßbar. Aus (1) und [18,I,Th.22.18] folgt, daß $\gamma'_1$ stetig ist. Wir setzen $\gamma_1 = \gamma_1'^{-1}$. Es sei nun $w \in F(G)$ mit $(w * \tilde{w})^\wedge(\gamma_1) = 0$. Dann ist entweder $\hat{w}(\gamma_1) = 0$ oder $\hat{w}(\overline{\gamma_1^{-1}}) = 0$. Wir betrachten die linearen Operatoren

$$U = \sum_{x \in G} w(x)\, U_x, \qquad U' = \sum_{x \in G} \overline{w(-x)}\, U_x.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Beziehungen $U\mu = \mu * w$, $U'\mu = \mu * \tilde{w}$ und

$$(2) \qquad (U\mu, U\mu)_f = (U'\mu, U'\mu)_f = (\mu, \mu)_{f * w * \tilde{w}}$$

für $\mu \in F(G)$ gelten. Nach Lemma (8.1) ist $f * w * \tilde{w} \in P_l^c(G)$, mit $0 \leqslant l \leqslant k$. Wir zeigen, daß $l < k$ gilt. Nehmen wir zuerst an, daß $\hat{w}(\gamma_1) = 0$ ist und bezeichne

$H$ den linearen Unterraum von $\Pi_k(f)$, der durch die Vektoren $U'v$ ($v \in \Pi_k(f)$) erzeugt wird. Für alle $v \in \Pi_k(f)$ gilt:

$$(v_0, U'v)_f = \Big(v_0, \big(\sum_{x \in G} \overline{w(-x)}\, U_x\big) v\Big)_f = \Big(\big(\sum_{x \in G} w(-x)\, U_{-x}\big) v_0, v\Big)_f$$

$$= \Big(\big(\sum_{x \in G} w(-x)\, \gamma_1'(-x)\big) v_0, v\Big)_f = \Big(\big(\sum_{x \in G} w(x)\, \gamma_1'(x)\big) v_0, v\Big)_f$$

$$= \Big(\big(\sum_{x \in G} w(x)\, \gamma_1(-x)\big) v_0, v\Big)_f = 0.$$

Somit ist $v_0 \perp H$. Wenn $l = k$ wäre, dann würde es wegen (2) in $H$ paarweise orthogonale negative Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ geben. Ist $v_0 \notin H$, so sind die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_k$ unabhängig. Im Falle $v_0 \in H$ gilt $(v_0, v_0) = 0$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ einen negativen Unterraum erzeugen, erhalten wir wieder, daß $v_0, v_1, \ldots, v_k$ unabhängig sind. Die orthogonalen Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_k$ würden dann einen $(k+1)$-dimensionalen linearen Unterraum von $\Pi_k(f)$ erzeugen. Dieser Widerspruch zeigt, daß $l < k$ ist.

Im Falle $\hat{w}(\overline{\gamma^{-1}}) = 0$ betrachten wir den Operator $U$ anstelle von $U'$. Mit den gleichen Überlegungen erhalten wir dann, daß $l < k$ sein muß. Damit haben wir gezeigt daß Funktion $f_1 = f * w * \tilde{w}$ höchstens $(k-1)$ negative Quadrate hat. Hierbei ist $w$ ein beliebiges Maß aus $F(G)$ mit $(w * \tilde{w})^\wedge(\gamma_1) = 0$. Wiederholt man jetzt die obigen Überlegungen mehrere Male, so erhält man:

$$f \in P^c(\gamma_1, k_1'; \ldots; \gamma_n, k_n') \qquad \text{mit } \gamma_i \in \Gamma' \ (i = 1, \ldots, n)$$

und $k_1' + \ldots + k_n' \leqslant k$. Aus Satz (3.3) folgt nun die erste Behauptung von Satz (8.2). Wie aus dem Beweis des Satzes (3.3) hervorgeht, ist jede Funktion $f_i$ die Summe von endlich vielen Funktionen der Gestalt $f * w * \tilde{w}$. Deshalb und wegen Lemma (8.1) hat jede Funktion $f_i$ endlich viele $(k_i)$ negative Quadrate.

**(8.3)** Bemerkungen. (a) Den vorigen Beweis können wir auch mit einer $m_G$-meßbaren Funktion $f \in P_k^m(G)$ durchführen. Die Funktion $h_n$ und somit $\gamma_1'$ sind dann $m_G$-meßbar. Aus [18,Th.22.18] folgt wieder, daß $\gamma_1'$ stetig ist. Jede Funktion $f \in P_k^m(G)$ hat also die Gestalt

$$f = f_1 + \ldots + f_n$$

mit $f_i \in P^m(\gamma_i, k_i')$, $\gamma_i \in \Gamma'$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $k_1' + \ldots k_n' \leqslant k$.

(b) Da nach Satz (8.2) jede Funktion $f \in P_k^c(G)$ definisierbar ist, können wir im weiteren von Singularitäten der Funktion $f$ und deren Ordnungen sprechen ((3.5)–(3.8)).

(c) Die Definisierbarkeit einer Funktion $f \in P_k(Z)$ wurde in [21] bewiesen (siehe auch [22]). Im Falle der Gruppe $Z$ gilt auch die Umkehrung: Ist

$$f \in P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n) \qquad \text{und} \qquad f \notin P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots; \gamma_n, k_n)$$

für $i = 1, \ldots, n$, so gehört $f$ zu $P_k(Z)$ mit $k = k_1 + \ldots + k_n$. In der Tat, setzen wir

$$w = \mu_1^{*k_1} * \ldots * \mu_n^{*k_n},$$

wobei $\mu_i$ das Maß $w_x^{(\gamma_i)}$ mit $x = 1$ aus (4.1) ist. Die Funktion $f * w * \tilde{w}$ ist dann positiv definit und es gilt:

$$\operatorname{supp} w * \tilde{w} \subset \{-k, \ldots, 0, \ldots, k\}$$

und $w * \tilde{w}(k) \neq 0$, wobei $k = k_1 + \ldots + k_n$.

Nach der Terminologie in [22] gehört zu $w * \tilde{w}$ ein „definisierender" Operator der Ordnung $2k$. Aus Satz 5.1 in [22] folgt, daß $f$ höchstens $k$ negative Quadrate hat. Hätte $f$ weniger als $k$ negative Quadrate, so gäbe es nach Satz (8.2) positive ganze Zahlen $k_i'$ und Charaktere $\gamma_i' \in \Gamma'$ $(i = 1, \ldots, m)$ mit $f \in P(\gamma_1', k_1'; \ldots; \gamma_m', k_m')$ und $k_1' + \ldots + k_m' < k$. Aus der Eindeutigkeit der Singularitäten von $f$ und aus der Bedingung $f \notin P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ $i = 1, \ldots, n$, folgt sofort, daß $f$ $k$ negative Quadrate besitzt.

(d) Sei jetzt $f$ eine Funktion auf $R$ mit

$$f \in P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n) \quad \text{und}$$
$$f \notin P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k_i - 1; \ldots; \gamma_n, k_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dann hat $f$ $(k_1 + \ldots + k_n)$ negative Quadrate. Diese Aussage kann mit Hilfe von Bemerkung (8.3) (c) bewiesen werden, indem man die Funktion $f$ auf die Menge $\{hn: n \in Z\}$, $h > 0$, einschränkt und $h$ beliebig klein wählt.

Im Falle der Gruppe $R^n$ $(n \geqslant 2)$ kann eine Funktion $f \in P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ mehr als $(k_1 + \ldots + k_n)$ negative Quadrate haben. Zum Beispiel gehört die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ zu der Klasse $P^c(1, 2)$, und sie hat $(n+1)$ negative Quadrate (siehe Bemerkung (9.4)).

(e) In [30] wurde die Definisierbarkeit einer Funktion $f \in P_k^c(R)$ im folgenden Sinne bewiesen:

$$\int_R \int_R f(x-y)\, \bar{Q}\left(i\frac{d}{dx}\right) \phi(x) \overline{\bar{Q}\left(i\frac{d}{dx}\right) \phi(y)}\, dx\, dy \geqslant 0 \tag{1}$$

für jede beliebig oft differenzierbare Funktion $\phi$, die einen kompakten Träger besitzt. Hierbei ist $Q$ ein Polynom $k$-ten Grades. Mit Hilfe dieses Rresultates erhielt M. G. Krein die Integraldarstellung

$$f(x) = h(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - S(x, y)}{|Q(y)|^2} d\mu(y). \tag{2}$$

Hierbei ist $h$ eine hermitesche Lösung der Differentialgleichung

$$\bar{Q}\left(-i\frac{d}{dx}\right) Q\left(-i\frac{d}{dx}\right) h(x) = 0 \tag{3}$$

und $S(x, y)$ ist ein regularisierender Term (um die reellen Nullstellen von $Q$ zu kompensieren). Wir bemerken, daß die hermiteschen Lösungen von (3) hermitesche exponentielle Polynome sind [54]:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{r} \left(A_j(ix)\, c_j^x + \overline{A}_j(ix)\, \overline{c_j^{-x}}\right) + \sum_{l=1}^{s} B_l(ix)\, e^{ixt_l}.$$

Hierbei sind:

(i) $A_j$, $B_l$: Polynome mit komplexen bzw. reellen Koeffizienten ($j = 1, \ldots, r$; $l = 1, \ldots, s$);

(ii) $c_j \in C$, $|c_j| > 1$ $\quad$ ($j = 1, \ldots, r$);

(iii) $t_l \in R$ ($l = 1, \ldots, s$).

In der Integraldarstellung (2) sind die Singularitäten von $f$ nicht getrennt. Mit Hilfe der Sätze (8.2), (4.6) und (5.1) erhalten wir für eine Funktion $f \in P_k^c(R)$ die Darstellung

$$f = f_1 + \ldots + f_n.$$

Hierbei besitzt die Funktion $f_j$ ($j = 1, \ldots, n$) entweder die Integraldarstellung

(A) $$f_j(x) = \left(p(x)\, c_j^x + \overline{p(-x)\, c_j^{-x}}\right) + \int_R e^{ixy}\, d\mu(y).$$

mit $\mu \in M^+(R)$, $c_j \in C$, $|c_j| > 1$, wobei $p$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten ist, oder die Integraldarstellung

(B) $$f_j(x) = e^{it_j x}\left(p_j(x) + \int_R e^{ixy} - \sum_{m=1}^{r_j} \frac{(il(x, y))^m}{m!}\, d\sigma(y)\right).$$

Hierbei sind $\sigma$ ein nichtnegatives Maß mit den Eigenschaften 1.1. und 1.2. aus Satz (4.6), $l(x, y)$ die Funktion aus (4.3) mit $n = 1$, $p$ ein hermitesches Polynom und $t_j \in R$.

(f) W. I. Gorbachuk bewies in [12] für eine Funktion $f \in P_k^c(R^n)$ die folgende Integraldarstellung:

(1) $$f(x) = h(x) + \int_{R^n} \frac{e^{ixy} - S(x, y)}{\sum_{j=1}^{n} |Q_j(y_j)|^2}\, d\sigma(y),$$

$xy = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. Hierbei sind $S(x, y)$ ein regularisierender Term, $Q_j$ ein komplexes Polynom von einer Veränderlichen ($j = 1, \ldots, n$), $h$ eine hermitesche Lösung der Differentialgleichung

(2) $$\sum_{j=1}^{n} \overline{Q}_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) Q_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) h(x) = 0.$$

Betrachten wir den Fall $Q_j(t) = t^2$ $(j = 1, \ldots, n)$. Dann ist die Funktion $h_0(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ eine hermitesche Lösung der Gleichung (2), die $(n+1)$ negative Quadrate besitzt (Bemerkung (9.4)). Die Darstellung (1) mit $h = h_0$ und $\sigma = 0$ gibt uns deshalb eine Funktion aus $P^c_{n+1}(R^n)$. Die Anzahl der negativen Quadrate kann also mit der Dimension wachsen, auch wenn der Grad der Polynome $Q_j$ konstant bleibt.

(g) Es sei $G$ eine beliebige lokalkompakte kommutative Gruppe. Im Satz (11.8) werden wir eine Charakterisierung solcher Funktionen aus $P^c_k(G)$ geben, die eine Singularität $\gamma \in \Gamma_u$ besitzen. Hat $G$ eine abzählbare Basis, so gibt uns Satz (4.6) (mit Hilfe von Satz (8.2) und Bemerkung (3.2) (c)) eine Integraldarstellung für Funktionen aus $P^c_k(G)$ mit einer Singularität $\gamma \in \Gamma$. Wir konnten jedoch kein Kriterium dafür angeben, daß eine Funktion $f$ mit der Darstellung (1) in Satz (4.6) genau $k$ negative Quadrate besitzt.

## 9. Realisierung des Raumes $\Pi_k(f)$ mit Hilfe von Funktionen auf der Gruppe

**(9.1)** Es seien $G$ eine beliebige lokalkompakte Gruppe, $f \in P_k(G)$ und bezeichne $\varepsilon_x$ das nichtnegative Maß auf $G$ mit $\varepsilon_x(G) = \varepsilon_x(\{x\}) = 1$. Wir betrachten den komplexen linearen Raum $T(f)$ aller Funktionen der Form

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x_j^{-1} x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_{x_j} * f(x), \qquad a_j \in C,\ x_j \in G.$$

Die Funktion $g$ kann auch in der Form $g = w * f$, $w \in F(G)$, $w = \sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon_{x_j}$ geschrieben werden. Sei

$$h(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j f(y_j^{-1} x)$$

eine beliebige Funktion aus $T(f)$ und definieren wir auf $T(f)$ die bilineare Form $(\ ,\ ) = (\quad)_f$ durch

$$(g, h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^{-1} y_j)\, a_i \bar{b}_j.$$

Es ist leicht zu sehen, daß für $g_1 = w_1 * f$ und $g_2 = w_2 * f$ gilt:

$$(1) \qquad (g_1, g_2) = \int_G f\, d(\widetilde{w_2^{\blacktriangle}} * w_1^{\blacktriangle}) = \int_G w_1 * f\, d(\overline{w_2}) = \int_G \overline{w_2 * \tilde{f}}\, d(w_1).$$

Aus (1) folgt, daß $(g_1, g_2)$ nicht von der konkreten Wahl der Maße $w_1$ und $w_2$ abhängt. Die Definition von $(\ ,\ )$ ist also sinnvoll.

Man sieht sofort, daß diese bilineare Form die Axiome II, IV und V im Abschnitt 15 erfüllt. Sei $g = w * f$ eine beliebige Funktion in $T(f)$. Aus (1) erhalten wir:

$$(2) \qquad (g, \varepsilon_x * f) = \int_G g\, d\varepsilon_x = g(x), \qquad x \in G.$$

Ist $g$ ein isotroper Vektor aus $T(f)$, so ist wegen (2) $g = 0$. Das Axiom III ist also auch erfüllt.

Wir führen in $T(f)$ die linearen Operatoren $U_x (x \in G)$ mit

$$(U_x g)(y) = (\varepsilon_x * g)(y) = g(x^{-1} y), \qquad g \in T(f), y \in G,$$

ein. Aus (1) erhalten wir, daß die Operatoren $U_x$ isometrisch sind:

$$(U_x g_1, U_x g_2) = (g_1, g_2), \qquad g_1, g_2 \in T(f).$$

Weiterhin folgt aus (2)

$$g(x) = (g, U_x f), \qquad g \in T(f),$$
$$f(x) = (f, U_x f).$$

Es sei nun $T(f) = P \oplus N$ eine Zerlegung des Raumes $T(f)$, wobei $P$ ein pre-Hilbertraum und $N$ ein $k$-dimensionaler negativer Raum sind. Dann läßt sich jeder Vektor $h \in T(f)$ in der Form $h = h^+ + h^-$ $(h^+ \in P, h^- \in N)$ darstellen.

Im Falle $g \in P$ ist $g^- = 0$, und aus der Ungleichung (2.4) in [23] erhalten wir:

$$\text{(3)} \qquad |g(y)|^2 = |(g, U_y f)|^2 \leqslant (g, g)[((U_y f)^+, (U_y f)^+) - ((U_y f)^-, (U_y f)^-)]$$
$$= (g, g)\, A(y).$$

Wir betrachten eine Cauchy–Folge $\{g_n\}$ in $P$. Wegen (3) ist $\{g_n(y)\}$ für jedes $y \in G$ eine Cauchy–Folge in $C$. Daraus folgt die Existenz einer Funktion $g$: $G \to C$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y)$, $y \in G$. Diese Überlegungen zeigen, daß wir eine Vervollständigung $\bar{P}$ des pre-Hilbertraumes $P$ derart wählen können, daß die Elemente von $\bar{P}$Funktionen auf $G$ sind. Der Raum

$$\Pi'_k(f) = \bar{P} \oplus N$$

erfüllt dann die Axiome I VI im Abschnitt 15. Jeder Operator $U_x$ läßt sich zu einem unitären Operator in $\Pi'_k(f)$ fortsetzen [23]. Die Fortsetzung bezeichnen wir auch mit $U_x$. Es ist leicht zu sehen, daß für $g \in \Pi'_k(f)$ gilt:

$$(U_x g)(y) = g(x^{-1} y) \qquad \text{und} \qquad g(x) = (g, U_x f).$$

Sei nun $\{e_1, \dots, e_k\}$ eine orthonormierte Basis in $N$. Dann ist

$$(U_x f)^- = -(U_y f, e_1) e_1 - \dots - (U_y f, e_k) e_k$$

und damit

$$A_1(y) = ((U_y f)^-, (U_y f)^-) = -|(U_y f, e_1)|^2 - \dots - |(U_y f, e_k)|^2$$
$$= -|e_1(y)|^2 - \dots - |e_k(y)|^2$$

Wegen $(U_y f, U_y f) = (f, f) = f(0)$ und

$$(U_y f, U_y f) = ((U_y f)^+, (U_y f)^+) + ((U_y f)^-, (U_y f)^-)$$

erhalten wir

$$A_2(y) = ((U_y f)^+, (U_y f)^+) = f(0) - A_1(y) = f(0) + |e_1(y)|^2 + \ldots + |e_k(y)|^2.$$

Da die Funktionen $e_1, \ldots, e_k$ zu $T(f)$ gehören, folgt aus der Beschränktheit (lokalen Beschränktheit) von $f$ die Beschränktheit (lokale Beschränktheit) von $A(y) = A_2(y) - A_1(y)$.

Nehmen wir jetzt an, daß $f$ eine beschränkte Funktion und $\{g_n\}$ eine Cauchy–Folge in $P$ sind. Wegen der Beschränktheit von $A(y)$ ist die Folge $\{g_n(y)\}$ bezüglich $y$ gleichmäßig konvergent. Da die Funktion $g_n$ beschränkt ist ($n = 1, 2, \ldots$), muß auch die Funktion $g = \lim g_n$ beschränkt sein. Daraus folgt, daß $\Pi'_k(f)$ nur beschränkte Funktionen enthält, wenn $f$ beschränkt ist.

Nehmen wir jetzt an, daß $f$ (und damit auch $A$) lokal beschränkt ist. Aus (3) un der lokalen Beschränktheit von $A$ folgt für jede Cauchy–Folge $\{g_n\}$ in $P$, daß die Funktionenfolge $\{g_n\}$ auf jeder kompakten Menge $K \subset G$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g$ konvergiert. Wegen der lokalen Beschränktheit von $g_n$ ist auch $g$ lokal beschränkt. $\Pi'_k(f)$ enthält also nur lokal beschränkte Funktionen.

Im Abschnitt 10 werden wir zeigen, daß jede meßbare Funktion $f \in P_k^m(G)$ lokal beschränkt ist (Satz (10, 12)). Ist also $f$ stetig oder meßbar, so ist $f$ und damit auch $A$ lokal beschränkt. Sei $\{g_n\}$ wieder eine Cauchy–Folge in $P$. Dann konvergiert $\{g_n\}$ als Funktionenfolge auf jeder kompakten Menge $K \subset G$ gleichmäßig zu einer Funktion $g$. Aus der Stetigkeit (Meßbarkeit) von $g_n$ folgt nun die Stetigkeit (Meßbarkeit) von $g$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

(9.2) SATZ. *Es seien $G$ eine lokalkompakte Gruppe und $f \in P_k(G)$. Dann existiert ein $\pi_k$-Raum $\Pi'_k(f)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *die Elemente von $\Pi'_k(f)$ sind Funktionen auf $G$;*

(ii) $T(f) \subset \Pi'_k(f)$ *und* $\overline{T(f)} = \Pi'_k(f)$;

(iii) *die Operatoren $U_x (x \in G)$ mit $(U_x g)(y) = g(x^{-1}y)$, $g \in \Pi'_k(f)$ sind unitär und es gilt:*

$$g(x) = (g, U_x f);$$

(iv) *wenn $f$ beschränkt, lokal beschränkt, stetig oder $m_G$-meßbar ist, dann sind alle Funktionen aus $\Pi'_k(f)$ beschränkt, lokal beschränkt, stetig bzw. $m_G$-meßbar.*

(9.3) SATZ. *Es seien $G$ eine kommutative Gruppe und $f \in P_k^c(G)$. Der Raum $\Pi'_k(f)$ ist genau dann endlichdimensional, wenn $f$ ein exponentielles Polynom ist.*

Beweis. Da der lineare Raum $\Pi'_k(f)$ aus Funktionen auf $G$ besteht und verschiebungsinvariant ist, folgt Satz (9.3) unmittelbar aus den in (14.1) erwähnten Resultaten. ∎

(9.4) Bemerkung. Betrachten wir die Funktion

$$f(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - \ldots - x_n^2, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in R^n.$$

Sie ist bekanntlich bedingt positiv definit und hat ein negatives Quadrat. Wir zeigen, daß die Funktion $-f$ $(n+1)$ negative Quadrate besitzt. Man könnte es direkt berechnen. Wir wählen jedoch einen anderen Weg, der auch in allgemeineren Fällen nützlich sein kann. Es ist leicht zu sehen, daß $T(f)$ durch die unabhängigen Funktionen $f, f_1, \ldots, f_n$ und 1 aufgespannt wird, wobei $f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die Dimension von $T(f)$ ist also $n+2$. Der Raum $\Pi'_1(f) = T(f)$ ist ein $\pi_1$-Raum und läßt sich in der Form

$$\Pi'_1(f) = (N \dotplus N') \oplus H$$

darstellen. Hierbei ist $H$ ein $n$-dimensionaler Hilbertraum, $N$ und $N'$ sind schiefverbundene, eindimensionale Nullräume. Führt man jetzt in $T(f)$ das Skalarprodukt $(\ ,\ )_{-f} = -(\ ,\ )_f$ ein, so bleiben $N$ und $N'$ schiefverbundene Nullräume und $H$ wird zu einem $n$-dimensionalen, negativen Raum. Deshalb hat die Funktion $-f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ $(n+1)$ negative Quadrate. Es ist leicht zu sehen, daß die Funktion $-f$ zu der Klasse $P^c(1, 2)$ gehört.

Es sei jetzt $\mathscr{H}$ ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(\ ,\ )$. Betrachtet man $\mathscr{H}$ als additive Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, so ist die Funktion $f(x) = -(x, x)$, $x \in \mathscr{H}$ stetig und bedingt positiv definit [5, (7.19)]. Es ist nich schwer zu sehen, daß die Funktion $f$ zu der Klasse $P^c(1, 2)$ gehört. Nach den obigen Überlegungen hat die einschränkung von $-f$ auf einen $n$-dimensionalen Teilraum $(n+1)$ negative Quadrate. Deshalb gehört die Funktion $-f$ zu keiner der Klassen $P_k(\mathscr{H})$, $k = 0, 1, \ldots$

## 10. Über meßbare Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten

(10.1) SATZ. *Es seien $f$ eine positiv definite Funktion auf der kommutativen Gruppe $G$ und $J$ eine Teilmenge von $G$. Für eine beliebige, positive relle Zahl $\delta$ läßt sich die Menge*

$$E_{J,\delta} f = \{t \in J : |f(t)| > \delta\}$$

*mit endlich vielen Verschiebungen der Menge* $\operatorname{supp} f \cap (J - J)$ *überdecken.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, daß $G$ teilbar ist, d.h., für jede natürliche Zahl $n$ und $x \in G$ existiert ein $y \in G$ mit $ny = x$. Wir betrachten $f$ als Funktion auf der diskreten Gruppe $G_d$. Wenn $f$ auf $G_d$ im Unendlichen verschwindet, dann ist $E_{J,\delta}$ eine endliche Menge. Wir können deshalb annehmen, daß $f$ im Unendlichen nicht verschwindet. Da $|f|^2$ eine positiv definite Funktion ist, können wir weiter voraussetzen, daß $f \geqslant 0$ gilt. Wir nehmen an, daß eine positive Zahl $\delta > 0$ und eine Menge $J \subset G$ existieren, so daß die Menge

$E = E_{J,\delta}$ sich nicht mit endlich vielen Verschiebungen von $S = \operatorname{supp} f \cap (J-J)$ überdecken läßt. Es sei $t_1 \in E$ beliebig Da die Menge $E$ sich mit endlich vielen Verschiebungen der Menge $S$ nicht überdecken läßt, existiert ein $t_2 \in E$, so daß $t_2 \notin S + t_1$ ist. Dann gilt $t_1 - t_2 \notin S$ und $t_2 - t_1 \notin S$.

Nehmen wir an, daß wir $t_1, \ldots, t_n \in E$ so ausgewählt haben, daß

$$t_i - t_j \notin S \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Da $E$ sich mit endlich vielen Verschiebungen der Menge $S$ nicht überdecken läßt, existiert ein $t_{n+1} \in E$, so daß gilt:

$$t_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^{n} (S + t_j).$$

Wir erhalten so eine Folge $\{t_k\}_1^\infty \subset E$ mit der Eigenschaft

$$t_i - t_j \notin S \quad \text{für } i, j = 1, 2, \qquad i \neq j.$$

Wie C. C. Graham im Beweis seines Satzes 1′ in [14] zeigte, existiert wegen $\{t_k\}_1^\infty \subset E$ eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit der folgenden Eigenschaft:

Für jede natürliche Zahl $n$ existieren paarweise verschiedene Gruppenelemente $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \{t_k\}_1^\infty$ und $t_0 \in G$, so daß gilt:

$$x_i + x_j + t_0 \in E_\varepsilon = \{g \in G\colon f(g) > \varepsilon\}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$. Sei $t$ ein Element von $G$ mit $2t = t_0$.

Definiert man

$$z_1 = x_1 + t, \qquad z_n = x_n + t, \quad z_{n+1} = y_1 + t, \qquad z_{2n} = y_n + t,$$

dann ist

$$z_i + z_j \in E_\varepsilon \quad \text{für } 1 \leqslant i \leqslant n, \quad n+1 \leqslant j \leqslant 2n$$

und

$$z_i - z_j \notin S \quad \text{für } i, j = 1; \ldots; 2n, \quad i \neq j.$$

Nach [20] gilt für die positiv definite Funktion $f$ die Ungleichung

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i - x_j)\, c_i \bar{c}_j \geqslant \left| \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i + x_j)\, c_i c_j \right|,$$

$x_i \in G$, $c_i \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wenden wir diese Ungleichung mit $c_i = 1$ an, dann erhalten wir

$$2nf(0) \geqslant \sum_{i,j=1}^{2n} f(z_i + z_j) > 2n^2 \varepsilon.$$

Daher gilt für jedes $n = 1, 2,$

$$f(0) > n\varepsilon,$$

und wir erhalten einen Widerspruch. Damit ist Satz (10.1) für teilbare Gruppen bewiesen.

Seien jetzt $G$ eine beliebige kommutative Gruppe und $G_0$ eine teilbare kommutative Gruppe mit $G \subset G_0$ [18.I,Th.A.15]. Wir setzen

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in G. \\ 0 & \text{für } x \notin G. \end{cases}$$

Dann ist $f'$ positiv definit [18,II], 281–282, $S$ und es gilt:

$$E_{J,\delta}f = E_{J,\delta}f', \qquad \operatorname{supp} f \cap (J-J) = \operatorname{supp} f' \cap (J-J).$$

Aus der Gültigkeit des Satzes (10.1) für $G_0$ folgt also die Gültigkeit für $G$.

**(10.2)** FOLGERUNG. *Es seien $G$, $f$ und $\delta$ wie im Satz* (10.1). *Weiter seien $K$ eine kompakte Teilmenge von $G$ und $V$ eine offene Umgebung von $0 \in G$. Dann läßt sich die Menge $E_{K,\delta}$ mit endlich vielen Verschiebungen der Menge* $\operatorname{supp} f \cap V$ *überdecken.*

Beweis. Da die Menge $E_{K,\delta}f$ sich mit endlich vielen offenen Mengen $U_i$ mit $U_i - U_i \subset V (i = 1, \ldots, n)$ überdecken läßt, folgt (10.2) unmittelbar aus Satz (10.1). ∎

**(10.3)** FOLGERUNG. *Seien $G$, $V$, $f$ wie in Folgerung* (10.2). *Wenn $f = 0$ lokal $m_G$-fast überall auf $V$, dann ist $f$ gleich Null lokal $m_G$-fast überall auf $G$.*

Beweis. Si $K \subset G$ eine beliebige kompakte Menge. Aus Folgerung (10.2) und der Beziehung

$$\operatorname{supp} f \cap K = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{K,1/n}f$$

erhalten wir

$$m_G(\operatorname{supp} f \cap K) = 0,$$

d.h., $f = 0$ lokal $m_G$-fast überall auf $G$. ∎

**(10.4)** BEMERKUNG. Für eine lokalkompakte kommutative Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie gilt die folgende Aussage [48]: Eine Menge $S \subset G$ ist der Träger einer stetigen, positiv definiten Funktion $f \neq 0$ genau dann, wenn

(i) $0 \in S$;
(ii) $S$ ist offen;
(iii) $S = -S$.

Mit Hilfe der vorhergehenden Resultate ist es einfach zu zeigen, daß diese Aussage nicht für alle lokalkompakten kommutativen Gruppen gilt. Ein Gegenbeispiel dafür ist die diskrete Gruppe der reellen Zahlen mit

$$S = [-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2].$$

**(10.5)** Satz *Seien $G$, $V$ und $f$ wie in Folgerung* (10.2). *Wenn $f$ auf $V$ $m_G$-meßbar ist, dann ist $f$ auch auf $G$ $m_G$-meßbar.*

Beweis. Nach dem Satz von Bochner ist $f$ die inverse Fourier-Transformierte eines positiven und endlichen Maßes auf der Charaktergruppe von $G_d$. Es sei

$$f = f_c + f_d$$

die Zerlegung der Funktion $f$ in ihre stetige und unstetige Komponente [13, Section 1.8]. Da $f$ auf $V$ meßbar ist, muß $f_d$ auf $V$ lokal $m_G$-fast überall verschwinden [13,Th.1.8.3]. Nach Folgerung (10.3) ist $f_d = 0$ lokal $m_G$-fast überall auf $G$. Somit ist $f_d$ $m_G$-meßbar [18,I,Th.11.30]. Wegen $f = f_c + f_d$ ist auch $f$ $m_G$-meßbar.

**(10.6)** Folgerung. ($G$ *und* $V$ *wie in Folgerung* (10.2)). *Wenn eine bedingt positiv definite Funktion $f$ auf $V$ $m_G$-meßbar ist, dann ist $f$ auch auf $G$ $m_G$-meßbar.*

Beweis. Nach [5, Prop. 7.11] ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (g_n(x) + a_n), \qquad x \in G. \tag{1}$$

Hierbei ist $\{a_n\}_1^\infty$ eine Folge von reellen Zahlen und $\{g_n\}_1^\infty$ eine Folge von positiv definiten Funktionen mit

$$g_n(x) = n \exp\left[\frac{1}{n}(f(x) - f(0))\right].$$

Da die positiv definite Funktion $g_n$ auf $V$ $m_G$-meßbar ist, muß sie nach Satz (10.5) auch auf $G$ $m_G$-meßbar sein. Aus (1) folgt nun die Behauptung. ∎

Definition. Es seien $k$ eine nichtnegative ganze Zahl und $0 \leqslant a \leqslant \infty$. Wir bezeichnen mit $P_{k;a}$ die Gesamtheit aller hermiteschen Funktionen $f\colon (-2a, 2a) \to C$ für die gilt: Die Matrix

$$A = (f(x_i - x_j))_{i,j=1}^n$$

hat für beliebige $x_1, \ldots, x_n \in (-a, a)$ höchstens $k$ negative Eigenwerte und für eine gewisse Wahl von $x_1, \ldots, x_n \in (-a, a)$ besitzt $A$ genau $k$ negative Eigenwerte.

Mit $P_{k;a}^m$ und $P_{k;a}^c$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen aus $P_{k;a}$, die (Lebesgue-) meßbar bzw. stetig sind.

Die nächste Folgerung ist eine Antwort auf eine Frage von M. G. Krein [31] und wurde bereits in [49] bewiesen.

**(10.7)** Folgerung. *Jede Funktion $f \in P_{0;a}^m$, $0 < a < \infty$, läßt sich zu einer Funktion $\tilde{f} \in P_{0;\infty}^m$ fortsetzen.*

Beweis. Nach einem Satz von A. P. Artemenko [3, 33] läßt sich $f$ zu einer positiv definiten Funktion $\tilde{f}$ auf $R$ fortsetzen. Aus Satz (10.5) folgt, daß $\tilde{f}$ auf $R$ meßbar ist. ∎.

Der folgende Satz stellt die Lösung eines Problems von H. Langer [32] dar.

(10.8) SATZ. *Jede Funktion $f \in P^m_{k;a}$ ist auf $I = (-2a, 2a)$ lokal beschränkt.*

Beweis. Wir zeigen, daß $f$ auf jedem Intervall $I_d = [-2a+d, 2a-d]$, $0 < d < a$ beschränkt ist. Für beliebiges $c > 0$ hat die Funktion $f+c$ höchstens $k$ negative Quadrate. Deshalb können wir voraussetzen, daß $f(0) > 0$ ist. Für $K > 0$ setzen wir

$$S_K f = \{t \in I\colon |f(t)| < K\}.$$

Die Mengen $S_k f$ sind meßbar und es gilt:

$$\lim_{K \to \infty} \lambda(S_K f) = 4a.$$

Hierbai bezeichnet $\lambda$ das Lebesgue'sche Maß. Nehmen wir an, daß $f$ auf $I_d$ nicht beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $\{t_n\}_1^\infty \subset I_d$ mit $|f(t_n)| \to \infty$. Sei $K > 0$ derart gewählt, daß

$$\lambda(S_K f) > 4a - \frac{d}{k^3} \quad \text{und} \quad 0 \in S_k f \tag{1}$$

ist. Wir zeigen, daß für $n = 1, 2,$ Zahlen $x_1^{(n)}, \ldots, x_{k+1}^{(n)}$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

$$x_i^{(n)} \in [-\tfrac{1}{2}d, \tfrac{1}{2}d] = J_d \quad \text{für } i = 1, \ldots, k+1 \quad \text{und} \quad x_1^{(n)} = 0; \tag{2}$$

$$x_i^{(n)} - x_j^{(n)} \in S_k f \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, k+1; \tag{3}$$

$$x_i^{(n)} - x_j^{(n)} + t_n \in S_k f \quad \text{für } i, j = 1, \ldots, k+1, \quad i \neq j. \tag{4}$$

Sei $x_1^{(n)} = 0$ und nehmen wir an, daß wir die Zahlen $x_1^{(n)}, \ldots, x_l^{(n)}$ $(1 \leqslant l < k+1)$ so bestimmt haben, daß (2), (3) und (4) (mit $l$ anstelle von $k+1$) erfüllt sind. Für $i = 1, \ldots, l$ setzen wir:

$$M_i = (S_K f + x_i^{(n)}) \cap J_d;$$

$$N_i = (S_K f + x_i^{(n)} - t_n) \cap J_d;$$

$$Q_i = (S_K f + x_i^{(n)} + t_n) \cap J_d.$$

Aus den Beziehungen $|x_i^{(n)}| < d/2$, $|x_i^{(n)} \pm t_n| < 2a - d/2$ und (1) folgt

$$\lambda\Big(\bigcap_{l,j,m=1}^{l} \{(J_d \setminus M_l) \cup (J_d \setminus N_l) \cup (J_d \setminus Q_m)\}\Big) < l^3 \frac{d}{k^3} \leqslant d = \lambda(J_d)$$

und somit

$$\lambda\left(\bigcap_{i,j,m=1}^{l}(M_i\cap N_j\cap Q_m)\right)>0.$$

Sei $x_{l+1}^{(n)}$ ein beliebiges Element der Menge $\bigcap_{i,j,m=1}^{l}(M_i\cap N_j\cap Q_m)$.

Dann sind (2), (3) und (4) mit $l+1$ anstelle von $k+1$ erfüllt. Aus diesen Überlegungen folgt die Existenz der Zahlen $x_1^{(n)},\dots,x_{k+1}^{(n)}$, die die Eigenschaften (2), (3) und (4) besitzen. Wir führen nun Zahlen $z_1^{(n)},\dots,z_{2k+2}^{(n)}$ durch

$$z_1^{(n)}=x_1^{(n)},\quad z_2^{(n)}=x_1^{(n)}+t_n,\quad z_3^{(n)}=x_2^{(n)},\quad z_4^{(n)}=x_2^{(n)}+t_n,$$

$$\dots,\ z_{2k+1}^{(n)}=x_{k+1}^{(n)},\quad z_{2k+2}^{(r)}=x_{k+1}^{(n)}+t_n$$

ein und betrachten die Matrix

$$A^{(n)}=(a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{2k+2}=\left(f(z_i^{(n)}-z_j^{(n)})\right)_{i,j=1}^{2k+2}.$$

Aus (2), (3) und (4) erhalten wir:

(5) $$|a_{2i-1,2i}^{(n)}|=|a_{2i,2i-1}^{(n)}|=|f(t_n)|\quad\text{für } i=1,\dots,k+1$$

und

(6) $|a_{i,j}^{(n)}|<K$ für die übrigen Elemente der Matrix $A^{(n)}$.

Sei

$$D_r^{(n)}=\det(a_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{r},\quad r=1,\dots,k+2.$$

Mit Hilfe von (5) und (6) erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{2r}^{(n)}}{|f(t_n)|^{2r}}=(-1)^r,\quad r=1,\dots,k+1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{2r+1}^{(n)}}{|f(t_n)|^{2r}}=(-1)^r,\quad r=1,\dots,k;$$

und $D_1^{(n)}>0$.

Für hinreichend großes $n$ gibt es also in der Folge $1, D_1^{(n)},\dots,D_{2k+2}^{(n)}$ genau $k+1$ Vorzeichenwechsel. Nach einem bekannten Satz von Frobenius hat die Matrix $A^{(n)}$ $k+1$ negative Eigenwerte. Dieser Widerspruch zeigt, daß $f$ auf $I_d$ beschränkt ist und damit haben wir Satz (10.8) bewiesen. ∎

Aus dem Zerlegungssatz in [32] und aus Satz (10.8) erhalten wir:

**(10.9)** SATZ. *Jede Funktion $f\in P_{k;a}^m$ läßt sich in der Form*

$$f(t)=f_c(t)+f_s(t),\quad -2a<t<2a,$$

*darstellen, wobei $f_c\in P_{k;a}^c$, $f_s\in P_{0;a}^m$ und $f_s=0$ fast überall auf $(-2a,2a)$ ist.*

Der nachstehende Fortsetzungssatz läßt sich nun einfach beweisen.

**(10.10)** SATZ. *Jede Funktion* $f \in P^m_{k;a}$, $0 < a < \infty$, *läßt sich zu einer Funktion* $\tilde{f} \in P^m_{k;\infty}$ *fortsetzen.*

Beweis. Sei $f \in P^m_{k;a}$. Nach Satz (10.9) ist

$$f(t) = f_c(t) + f_s(t), \qquad -2a < t < 2a,$$

mit $f_c \in P^c_{k;a}$, $f_s \in P^m_{0;a}$. Wie in [42] gezeigt wurde, läßt sich $f_c$ zu einer Funktion $\tilde{f}_c \in P^c_{k;\infty}$ fortsetzen. Nach Satz (10.7) besitzt die positiv definite Funktion $f_s$ eine Fortsetzung $\tilde{f}_s \in P^m_{0;\infty}$. Setzt man

$$\tilde{f} = \tilde{f}_c + \tilde{f}_s,$$

so ist $\tilde{f} \in P^m_{k;\infty}$ und es gilt: $f(t) = \tilde{f}(t)$ für $-2a < t < 2a$. ∎

Da jede positiv definite Funktion beschränkt ist, erhalten wir aus den Sätzen (10.9) und (10.10):

**(10.11)** FOLGERUNG. *Im Falle* $0 < a < \infty$ *ist jede Funktion* $f \in P^m_{k;a}$ *auf* $(-2a, 2a)$ *beschränkt.*

Sei jetzt $G$ eine beliebige Gruppe und $V$ eine symmetrische Teilmenge von $G$ mit $1 \in G$. Ganz analog wie wir die Funktionenklasse $P_{k;a}$ eingeführt haben, führen wir die Funktionenklasse $P_{k;V}$ für hermitesche Funktionen auf $V + V$ ein. Im Falle einer lokalkompakten Gruppe $G$ einer $m_G$-meßbaren Teilmenge $V$ bezeichnet $P^m_{k;V}$ die Menge der $m_G$-meßbaren Funktionen aus $P_{k;V}$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Überlegungen im Beweis von Satz (10.8) auch im Falle einer beliebigen lokalkompakten Gruppe durchgeführt werden können. Somit erhalten wir den folgenden Satz:

**(10.12)** SATZ. *Es seien* $G$ *eine lokalkompakte Gruppe und* $f \in P^m_{k;V}$, *wobei* $V$ *offen ist. Dann ist* $f$ *lokal beschränkt.*

Aus Satz (10.9) folgt unmittelbar, daß eine Funktion $f \in P^m_{k;a}$ mit $k \geqslant 1$ auf $(-2a, 2a)$ nicht fast überall verschwinden kann. Diese Aussage gilt auch für eine Funktion $f \in P^m_{k;V}$. Um das zu sehen benötigen wir folgendes Lemma:

**(10.13)** LEMMA. *Es seien* $G$ *eine beliebige Gruppe und* $f \in P_{k;V}$ *mit* $k \geqslant 1$. *Die Menge* $V$ *kann mit endlich vielen Verschiebungen des Trägers von* $f$ *überdeckt werden.*

Beweis. Wählen wir $g_1, \ldots, g_n \in V$ derart, daß die Matrix

$$A = \left(f(g_i^{-1} g_j)\right)_{i,j=1}^n$$

$k$ negative Eigenwerte besitzt. Wenn die Menge $V$ nicht mit endliche vielen Verschiebungen von $\operatorname{supp} f$ überdeckt werden kann, dann gibt es ein $g \in V$ mit

$$g \notin g_i^{-1} (\operatorname{supp} f)\, g_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Wir setzen

$$t_1 = g_1, \qquad t_n = g_n, \quad t_{n+1} = gg_1, \qquad t_{2n} = gg_n.$$

Dann ist

$$B = \left(f(t_i^{-1} t_j)\right)_{i,j=1}^{2n} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Deshalb hat die Matrix $B$ $2k$ negative Eigenwerte, was ein Widerspruch ist.

Aus Lemma (10.13) erhalten wir:

**(10.14)** FOLGERUNG. *Es seien $G$ eine lokalkompakte Gruppe, $f \in P_{k;V}^m$, $k \geqslant 1$ und $m_G(V) > 0$. Dann verschwindet $f$ nicht $m_G$-fast überall auf $V$.*

Als nächstes beweisen wir einen Zerlegungssatz für Funktionen aus $P_k^m(G)$. Die Beweismethode ist analog zu der in [6], wo der Fall $k = 0$ betrachtet wurde. Anstelle des Hilbertraumes tritt jedoch ein $\pi_k$-Raum und das bedeutet einige zusätzliche Schwierigkeiten. Die nachstehenden Lemmata werden wir im Beweis von Satz (10.18) benötigen.

**(10.15)** LEMMA. *Es seien $(V_x)$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $G$ in einem $\pi_k$-Raum $\Pi_k$ und $v \in \Pi_k$ beliebig. Dann hat die Funktion*

$$f(x) = (v, V_x v)$$

*höchstens $k$ negative Quadrate.*

Beweis. Für beliebige Gruppenelemente $x_1, \ldots, x_n \in G$ gilt:

$$A = \left(f(x_j^{-1} x_i)\right)_{i,j=1}^n = \left((v, V_{x_j^{-1}} V_{x_i} v)\right)_{i,j=1}^n$$

$$= \left((V_{x_j} v, V_{x_i} v)\right)_{i,j=1}^n.$$

Da $\Pi_k$ ein $\pi_k$-Raum ist, hat die Matrix $A$ höchstens $k$ negative Eingenwerte, woraus die Behauptung des Lemmas follgt. ∎

In den folgenden zwei Lemmata sind $G$ eine beliebige lokalkompakte Gruppe, $f \in P_k^m(G)$, weiter sind $U_x$ und $\Pi'_k(f)$ wie im Satz (9.2).

**(10.16)** LEMMA. *Die Funktion $\varphi(x) = (g, U_x h)$, $x \in G$, ist für beliebige $g, h \in \Pi'_k(f)$ meßbar und lokal beschränkt.*

Beweis. Wegen der Gleichung

$$(g, U_x h) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{3} i^l (g + i^l h, U_x(g + i^l h))$$

genügt es den Fall $g = h$ zu betrachten. Für jedes $g \in T(f)$ ist die Funktion $\varphi(x) = (g, U_x g)$ in $T(f)$, und somit ist sie meßbar. Wegen $\overline{T(f)} = \Pi'_k(f)$

existiert eine Folge $\{g_n\} \subset T(f)$, so daß in $\Pi'_k(f)$ gilt: $g = \lim_{h\to\infty} g_n$. Da der Operator $U_x$ für jedes $x \in G$ unitär und damit stetig ist, erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} (g_n, U_x g_n) = (g, U_x g) = \varphi(x),$$

mit $\varphi_n(x) = (g_n, U_x g_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Aus der Meßbarkeit der Funktion $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ folgt nun die Meßbarkeit von $\varphi$. Wegen Lemma (10.15) hat $\varphi$ endlich viele negative Quadrate und nach Satz (10.12) ist sie lokal beschränkt. ∎

**(10.17)** LEMMA. *Seien $\mu$ und $\nu$ komplexe Maße aus $M(G)$ mit kompaktem Träger. Gehört die Funktion $g$ zu $\Pi'_k(f)$, so gilt:*

(i) $\mu * g \in \Pi'_k(f)$;

(ii) $(\mu * g, \nu * f) = \int_G g \, d(\widetilde{\nu^\blacktriangle} * \mu^\blacktriangle)$.

Beweis. Wegen Lemma (10.16) existiert das Integral

$$B_\mu(g, h) = \int_G (g, U_{y^{-1}} h) \, d\mu(y) \qquad g, h \in \Pi'_k(f).$$

Da $B_\mu(g, h)$ ein stetiges bilineares Funktional auf $\Pi'_k(f) \times \Pi'_k(f)$ ist, existiert ein stetiger linearer Operator $A_\mu$: $\Pi'_k(f) \to \Pi'_k(f)$ mit

$$(1) \qquad (A_\mu g, h) = \int_G (g, U_{y^{-1}} h) d\mu(y).$$

Aus (1) und (iii) in Satz (9.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned}(A_\mu g)(x) &= (A_\mu g, U_x f) = \int_G (g, U_{y^{-1}} U_x f) \, d\mu(y) \\ &= \int_G (g, U_{y^{-1}x} f) \, d\mu(y) = \int_G g(y^{-1}x) \, d\mu(y) = \mu * g(x).\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\mu * g \in \Pi'_k(f)$ ist. Wir berechnen jetzt den adjungierten Operator $A^*_\mu$:

$$\begin{aligned}(A^*_\mu g)(x) &= (A^*_\mu g, U_x f) = (g, A_\mu U_x f) = \overline{(A_\mu U_x f, g)} \\ &= \overline{\int_G (U_x f, U_{y^{-1}}) \, d\mu(y)} = \overline{\int_G (U_{yx} f, g) \, d\mu(y)} \\ &= \int_G \overline{g(yx)} \, d\mu(y) = (\tilde{\mu} * g)(x).\end{aligned}$$

Es ist also $A^*_\mu = A_{\tilde{\mu}}$ und folglich gilt:

$$\begin{aligned}(\mu * g, \nu * f) &= (A_\mu f, A_\nu f) = (A^*_\nu A_\mu g, f) = (A_{\tilde{\nu} * \mu} g, f) \\ &= \int_G (g, U_{y^{-1}} f) \, d(\tilde{\nu} * \mu)(y) = \int_G g \, d(\widetilde{\nu^\blacktriangle} * \mu^\blacktriangle).\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $(g, U_{y^{-1}} f) = g(y^{-1})$ ist. ∎

**(10.18)** Satz. *Es sei $f \in P_k^m(G)$, wobei $G$ eine beliebige lokalkompakte Gruppe ist. Dann gilt:*

$$f = f_c + f_s \tag{1}$$

*mit $f_c \in P_k^c(G)$, $f_s \in P_0^m(G)$ und $f_s = 0$ $m_G$-fast überall.*

Beweis. Wenn $f$ fast überall verschwindet, dann ist $f$ positiv definit (Folgerung (10.14)) und wir erhalten die Zerlegung (1) mit $f_c = 0$. Nehmen wir jetzt an, daß $f$ nicht fast überall Null ist, und bezeichne $H_c$ die Menge aller stetigen Funktionen aus $\Pi'_f(f)$. Wir zeigen, daß in dem linearen Raum $H_c$ das Skalarprodukt nicht entartet.

Da $f$ nicht fast überall verschwindet gibt es ein absolut stetiges Maß $\mu \in M(G)$ mit kompaktem Träger, für das $\mu * f \neq 0$ ist. Aus der Stetigkeit der Funktion $\mu * f$ und aus Lemma (10.17) erhalten wir, daß $\mu * f \in H_c$ und damit $H_c \neq \{0\}$ ist. Es sei nun $g$ eine beliebige Funktion aus $H_c$ mit $g \neq 0$. Da $g$ stetig ist, gibt es ein absolut stetiges Maß $\nu \in M(G)$ mit kompaktem Träger, für das

$$\int_G g \, d\widetilde{\nu^\blacktriangle} \neq 0$$

gilt. Wegen Lemma (10.17) ist $\nu * f \in H_c$ und

$$(g, \nu * f) = \int_G g \, d\widetilde{\nu^\blacktriangle} \neq 0.$$

Der Teilraum $H_c$ enthält also keinen isotropen Vektor.

Es sei $\{g_n\} \subset H_c$ eine Cauchy-Folge in $H_c$. Dann konvergiert $\{g_n\}$ als Funktionenfolge auf jeder kompakten Menge gleichmäßig zu einer Funktion $g$. Das beweist man mit ähnlichen Überlegungen wie im Beweis vom Satz (9.2). Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Stetigkeit von $g$. Somit haben wir gezeigt, daß $H_c$ abgeschlossen ist. Folglich ist $H_c$ ein $\pi_l$-Raum, $0 \leqslant l \leqslant k$. Bezeichne $H_0$ das orthogonale Komplement von $H_c$. Aus [23, Satz 3.2] folgt, daß $H_0$ ein $\pi_{l'}$-Raum ist und est gilt:

$$\Pi'_k(f) = H_c \oplus H_0.$$

Die Teilräume $H_c$ und $H_0$ sind bezüglich der Operatoren $U_x$, $x \in G$, invariant. Sei nun $f = f_c + f_s$ mit $f_c \in H_c$ und $f_s \in H_0$. Dann gilt:

$$f(x) = (f, U_x f) = (f_c + f_s, U_x f_c + U_x f_s) = (f_c, U_x f_c) + (f_s, U_x f_s),$$

$$f_c(x) = (f_c, U_x f) = (f_c, U_x f_c + U_x f_s) = (f_c, U_x f_c),$$

$$f_s(x) = (f_s, U_x f) = (f_s, U_x f_c + U_x f_s) = (f_s, U_x f_s).$$

Die Funktion $f_c$ ist stetig und aus Lemma (10.15) folgt, daß die Funktionen $f_c$ und $f_s$ höchstens $l$ bzw. $l'$ negative Quadrate haben. Wie zeigen, daß $f_s$ fast überall verschwindet. Wenn das nicht der Fall wäre, hätten wir ein absolut stetiges Maß $\mu \in M(G)$ mit kompakten Träger für das $\mu * f_s \neq 0$ ist.

Die Funktion $\mu * f_s$ ist stetig und ganz analog wie in Lemma (10.17) folgt, daß $\mu * f_s \in H_0$ ist. Wegen $H_0 \cap H_c = \{0\}$ muß aber $\mu * f_s = 0$ sein. Dieser Widerspruch zeigt, daß $f_s$ fast überall verschwindet. Da $f_s$ höchstens endlich viele negative Quadrate hat, ist sie positiv definit (Folgerung (10.14)). Aus $f = f_c + f_s, f \in P_k(G)$ folgt nun sofort, daß $f_c$ $k$ negative Quadrate hat. Der Satz ist beweisen. ∎

## 11. Beziehungen zwischen Funktionen aus $P_k(G)$ und zyklischen unitären $\pi_k$-Darstellungen

Es seien $G$ eine beliebige Gruppe und $f \in P_k(G)$. In diesem Abschnitt bezeichnet $U_x (x \in G)$ immer den Verschiebungsoperator in $\Pi'_k(f)$, wie im Satz (9.2). Dann ist $(U_x)$ eine unitäre $\pi_k$-Darstellung von $G$ (siehe Abschnitt 15).

Wegen $\overline{T(f)} = \Pi'_k(f)$ ist $f$ ein zyklischer Vektor für diese Darstellung. Der nächste Satz zeigt, daß sich jede zyklische, unitäre $\pi_k$-Darstellung von $G$ auf diese Weise realisieren läßt.

**(11.1)** SATZ. *Es sei $(V_x)$ eine zyklische, unitäre $\pi_k$-Darstellung von $G$ mit zyklischem Vektor $v$. Dann hat die Funktion*

$$f(x) = (v, V_x v), \qquad x \in G, \tag{1}$$

*$k$ negative Quadrate und die Darstellung $(V_x)$ ist zu der Darstellung $(U_x)$ in $\Pi'_k(f)$ äquivalent.*

Beweis. Nach Lemma (10.15) hat $f$ $l$ negative Quadrate $(0 \leqslant l \leqslant k)$. Da $v$ ein zyklischer Vektor ist, muß $l = k$ sein. Die Behauptung, daß $(V_x)$ zu $(U_x)$ äquivalent ist beweist man nun ganz analog wie im Falle einer positiv definiten Funktion $f$ (siehe [18,II,32.8 (b)]). Der einzige Unterschied dabei ist, daß man anstelle der Fortsetzbarkeit eines isometrischen Operators in einem Hilbertraum die Fortsetzbarkeit eines isometrischen Operators in einem $\pi_k$-Raum benötigt [23, § 9]. ∎

**(11.2)** FOLGERUNG. *Gilt für die zyklischen, unitären $\pi_k$-Darstellungen $(V_x)$ und $(V'_x)$ mit zyklischen Vektoren $v$* bzw. *$v'$ die Gleichung*

$$(v, V_x v) = (v', V'_x v'), \qquad x \in G,$$

*so sind $(V_x)$ und $(V'_x)$ äquivalent.*

**(11.3)** FOLGERUNG. *Es sei $V$ ein zyklischer, unitärer Operator in einem $\pi_k$-Raum $\Pi_k$. Dann gehört zu jedem Eigenwert von $V$ genau ein Eigenvektor (bis auf skalare Vielfache).*

Beweis. Bezeichne $Z$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Dann ist $n \to V^n$ eine zyklische, unitäre $\pi_k$-Darstellung von $Z$. Nach Satz (11.1) ist die Darstellung $V_n = V^n$ äquivalent zu der Darstellung $(U_n)$ in $\Pi'_k(f)$. Hierbei ist $f$ die Funktion

$$f(n) = (v_0, V^n v_0), \qquad n \in Z,$$

und $v_0 \in \Pi_k$ ein zyklischer Vektor für $V$. Da $(V_n)$ und $(U_n)$ äquivalent sind, genügt es die Aussage für $(U_n)$ zu zeigen. Ist nun die Funktion $\gamma \in \Pi'_k(f)$ ein zu dem Eigenwert $c \in C$, $c \neq 0$, gehörender Eigenvektor für $U = U_1$, so gilt:

$$\gamma(n-1) = c\,\gamma(n), \qquad n \in Z.$$

Die einzigen Lösungen dieser Funktionalgleichung sind die Funktionen

$$\gamma(n) = (c^{-1})^n K, \qquad K \in C, \qquad K \neq 0.$$

Da die Funktion $\gamma$ durch den Wert $c$ (bis auf die Konstante $K$) eindeutig bestimmt ist, erhalten wir die Behauptung. ∎

**(11.4)** FOLGERUNG. *Jede endlichdimensionale, zyklische, unitäre $\pi_k$-Darstellung $(V_x)$ einer kommutativen Gruppe $G$ ist zu der Darstellung $(U_x)$ in $\Pi'_k(p)$ äquivalent, wobei $p$ ein exponentielles Polynom auf $G$ ist.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Satz (11.1) und Satz (9.3). ∎

**(11.5)** Bemerkungen. (a) Es sei $(V_x)$ eine stetige unitäre, zyklische $\pi_k$-Darstellung der kommutativen, lokalkompakten Gruppe $G$. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = (v, V_x v), \qquad x \in G,$$

wobei $v$ ein zyklischer Vektor ist. Dann hat die stetige Funktion $f$ $k$ negative Quadrate und die Darstellungen $(V_x)$ und $(U_x)$ sind äquivalent (Satz (11.1)). Äquivalente Darstellungen haben offensichtlich die gleichen Eigencharaktere. Mit Hilfe der Funktion $f$ stellen wir jetzt einen Zusammenhang zwischen den Eigencharakteren und den zugehörigen Eigenvektoren der Darstellung $(U_x)$ her. Nach Satz (8.2) ist $f \in P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ mit $\gamma_i \in \Gamma'$. Wir nehmen an, daß die Zahlen $k_i$ minimal sind, d.h.,

$$f \notin P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_i, k-1; \ldots; \gamma_n, k_n), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dann sind $\gamma_i$ und $k_i$ eindeutig bestimmt (Folgerung (3.8)). Ist nun die Funktion $h \in \Pi'_k(f)$ ein gemeinsammer, nichtpositiver Eigenvektor für die Verschiebungsoperatoren $U_x (x \in G)$, so gilt:

(1) $$h(y-x) = \gamma(x)\, h(y), \qquad x, y \in G.$$

Wie im Beweis des Satzes (8.2) gezeigt wurde, ist $\gamma \in \Gamma'$.

Mit $y = 0$ erhalten wir aus (1):

$$h(-x) = \gamma(x)\, h(0).$$

Wegen $h \not\equiv 0$ ist $h(0) \neq 0$ und somit

$$h(x) = c\gamma(-x) = c\gamma^{-1}(x) \tag{2}$$

mit einem $c \in C \setminus \{0\}$. Aus dem Beweis von Satz (8.2) sieht man, daß $\gamma^{-1}$ mit einem der Charaktere $\gamma_i, \overline{\gamma_i^{-1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ übereinstimmt und umgekehrt: jeder von diesen Charakteren gehört zu einem gemeinsamen, nichtpositiven Eigenvektor der Operatoren $U_x$. Die Eigencharaktere der Darstellung $(U_x)$ sind also $\gamma_i^{-1}$, $\bar{\gamma}_i (i = 1, \ldots, n)$. Wegen (2) sind die zugehörigen Eigenvektoren $\gamma_i$, $\overline{\gamma_i^{-1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Damit haben wir auch gezeigt, daß die Eigenvektoren durch die Eigencharaktere eindeutig bestimmt sind (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten).

(b) Es seien $f$ und $G$ wie in (11.5) (a). Das zu $\gamma_i \in \Gamma_u$ gehörende Wurzellineal $W_{\gamma_i}$ von $(U_x)$ in $\Pi'_k(f)$ ist endlichdimensional und verschiebungsinvariant (siehe Abschnitt 15). Die Elemente von $W_{\gamma_i}$ sind also exponentielle Polynome. Da $W_{\gamma_i}$ nur den Charakter $\gamma_i$ enthält, hat jedes exponentielle Polynom aus $W_{\gamma_i}$ die Gestalt $\gamma_i p$, wobei $p$ ein Polynom ist. Im Falle $\gamma_i \in \Gamma$ kann die Dimension von $W_{\gamma_i}$ unendlich sein. Jedoch folgt aus der Definition von $W_{\gamma_i}$ und aus den Ergebnissen im Abschnitt 14, daß jede Funktion aus $W_{\gamma_i}$ die Gestalt $\gamma_i p$ besitzt, wobei $p$ ein verallgemeinertes Polynom ist.

(c) Nehmen wir an, daß der lineare Teilraum $L \subset \Pi'_k(f)$ verschiebungsinvariant ist ($f$ und $G$ wie oben). Das Skalarprodukt auf $L$ kann ausgeartet sein, das heißt, $L$ kann isotrope Vektoren enthalten. Oft ist es nützlich zu wissen, daß die isotropen Vektoren von $L$ exponentielle Polynome sind. In der Tat, sei $p \in L$ ein isotroper Vektor. Dann ist $p \in T(p) \subset L$ und $p \perp T(p)$. Da die Elemente von $T(p)$ lineare Kombinationen von Verschiebungen der Funktion $p$ sind, folgt aus $p \perp T(p)$, daß $T(p)$ ein Nullraum ist. Die Dimension von $T(p)$ ist also höchstens $k$. Wegen der Verschiebungsinvarianz von $T(p)$ muß $p$ ein exponentielles Polynom sein.

**(11.6)** SATZ. *Es sei $(V_x)$ eine stetige, zyklische, unitäre $\pi_k$-Darstellung der kommutativen, lokalkompakten Gruppe $G$ in $\Pi_k$. Dann gibt es Charaktere $\gamma_i \in \Gamma'$ und $\pi_{k_i}$-Räume $\Pi(\gamma_i) \subset \Pi_k$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\Pi_k = \Pi(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \Pi(\gamma_n)$;

(b) $k_1 + \ldots + k_n = k$;

(c) *$\Pi(\gamma_i)$ ist invariant bezüglich $(V_x)$;*

(d) *die Einschränkung der Darstellung $(V_x)$ auf $\Pi(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ist zyklisch und besitzt nur die Eigencharaktere $\gamma_i^{-1}$ und $\bar{\gamma}_i$.*

Beweis. Bezeichne $f$ die Funktion $f(x) = (v, V_x, v)$, wobei $v$ ein zyklischer Vektor in $\Pi_k$ ist. Nach Satz (8.2) ist $f = f_1 + \ldots + f_n$, mit $f_i \in P^c(\gamma_i, k_i)$ und $f_i \in P^c_{k_i}(G)$. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen betrachten wir nur den Fall $n = 2$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ Im allgemeinen Fall der Beweis ganz analog durchgeführt. Wir bemerken, daß die Existenz der Teilräume $\Pi(\gamma_i)$ mit $\gamma_i \in \Gamma_u$ auch aus den Ergebnissen von M. A. Naimark folgt (siehe dazu (15.3)).

Wegen (11.5) (a) sind die einzigen gemeinsamen nichtpositiven Eigenvektoren der Verschiebungsoperatoren $U_x$ in $\Pi^{(i)} = \Pi'_{k'_i}(f_i)$ die Charaktere $\gamma_i$ ($i = 1$, 2). Ist $\gamma_2 \in \Pi^{(1)}$, so muß deshalb $\gamma_2$ ein positiver Vektor sein und wir erhalten die Zerlegung

(1) $$\Pi^{(1)} = L\{\gamma_2\} \oplus L\{\gamma_2\}^\perp$$

Hierbei bezeichnet $L\{\gamma_2\}$ den durch $\gamma_2$ erzeugten eindimensionalen $(U_x)$-invarianten Teilraum. Da $L\{\gamma_2\}^\perp$ ein $(U_x)$-invarianter $\pi_{k'_i}(f_i)$-Raum ist erhalten wir aus (1) die Zerlegung $f_1 = p\,\gamma_2 + f'_1$ mit $p > 0$ und $f'_1 \in L\{\gamma_2\}^\perp$. Es ist leicht zu sehen, daß die Beziehungen $f'_1 \in P^c(\gamma_1, k_1)$, $f'_1 \in P^c_{k'_i}(G)$ und $\gamma_2 \notin \Pi'_{k'_i}(f'_1)$ gelten. Wir setzen $f'_2 = f_2 + p\gamma_2$. Dann ist $f = f'_1 + f'_2$ und $\gamma_2$ ist nicht in $\Pi'_{k'_i}(f'_1)$ enthalten. Diese Überlegungen können auch mit $f'_2$ durchgeführt werden. Somit haben wir die Möglichkeit einer Zerlegung $f = f_1 + f_2$ gezeigt, wobei $f_i \in P_{k'_i}(G)$, $f_i \in P^c(\gamma_i, k_i)$, $i = 1, 2$, $\gamma_1 \notin \Pi^{(2)}$ und $\gamma_2 \notin \Pi^{(1)}$. Den Satz (11.6) werden wir mit Hilfe dieser Zerlegung beweisen.

Bezeichne $\Pi$ sas direkte Produkt der Raume $\Pi^{(1)}$ und $\Pi^{(2)}$:

$$\Pi = \Pi^{(1)} \times \Pi^{(2)}.$$

Dann ist $\Pi$ ein $\pi_{k'_1+k'_2}$-Raum. Wir führen die Bezeichnungen $\tilde{f} = \{f_1, f_2\}$, $\tilde{f}_1 = \{f_1, 0\}$ und $\tilde{f}_2 = \{0, f_2\}$ ein. Ist $h_i \in \Pi^{(i)}$, $i = 1, 2$, und $\tilde{h} = \{h_1, h_2\}$, so setzen wir

$$\tilde{U}_x \tilde{h} = \tilde{U}_x (h_1, h_2\} = \{U_x h_1, U_x h_2\}, \qquad x \in G.$$

Die Abbildung $x \to \tilde{U}_x$ ist eine unitäre $\pi_{k'_1+k'_2}$-Darstellung von $G$ in $\Pi$. Weiterhin gilt die Beziehung

(2) $$f(x) = (\tilde{f}, \tilde{U}_x \tilde{f}).$$

Bezeichne $\Pi^{(0)}$ die abgeschlossene lineare Hülle der Vektoren $\{\tilde{U}_x \tilde{f}: \quad x \in G\}$. Wir zeigen, daß das Skalarprodukt auf $\Pi^{(0)}$ nicht ausgeartet ist. Wäre das Skalarprodukt ausgeartet, so gäbe es unter den isotropen Vektoren von $\Pi^{(0)}$, die einen endlichdimensionalen $(\tilde{U}_x)$-invarianten Teilraum bilden, einen gemeinsamen Eigenvektor $\tilde{\gamma}$ der Operatoren $\tilde{U}_x$. Aus der Definition von $\tilde{U}_x$ folgt, daß $\tilde{\gamma}$ die Gestalt $\{\gamma, \gamma\}$, $\{\gamma, 0\}$ oder $\{0, \gamma\}$ mit $\gamma \in \Gamma$ haben muß (bis auf skalare Vielfache). Im Falle $\tilde{\gamma} = \{\gamma, \gamma\}$ ist $\gamma \in \Pi^{(1)} \cap \Pi^{(2)}$ und da $\tilde{\gamma}$ ein Nullvektor ist, muß $\gamma$ entweder in $\Pi^{(1)}$ oder in $\Pi^{(2)}$ ein nichtpositiver Vektor sein. Wäre zum Beispiel $\gamma$ nichtpositiv in $\Pi^{(1)}$, so müßte $\gamma = \gamma_1$ sein. Das ist aber wegen $\gamma_1 \notin \Pi^{(2)}$ nicht möglich. Nehmen wir jetzt an, daß $\tilde{\gamma} = \{\gamma, 0\}$ ist. Da $\Pi^{(0)}$ die Vektoren $\{w * f_1, w * f_2\}$, $w \in F(G)$ enthält, folgt sofort aus $\tilde{\gamma} \perp \Pi^{(0)}$ die Beziehung $\gamma \perp \Pi^{(1)}$. Das ist aber nicht möglich weil $\Pi^{(1)}$ keinen isotropen Vektor enthält.

Im Falle $\tilde{\gamma} = \{0, \gamma\}$ können wir die gleichen Überlegungen ausführen. Somit haben wir gezeigt, daß das Skalarprodukt auf $\Pi^{(0)}$ nicht ausgeartet ist.

Da $\tilde{f}$ ein zyklischer Vektor für die unitäre Darstellung $x \to \tilde{U}_x$ in $\Pi^{(0)}$ ist, folgt aus (2) und (11.2), daß die Darstellungen $x \to V_x$ in $\Pi_k$ und $x \to \tilde{U}_x$ in $\Pi^{(0)}$ äquivalent sind und daß $\Pi^{(0)}$ ein $\pi_k$-Raum ist. Deshalb genügt es die Aussage des Satzes für die Darstellung $x \to \tilde{U}_x$ in $\Pi^{(0)}$ zu beweisen.

Wegen der Äquivalenz sind die Eigencharaktere der Darstellung $x \to \tilde{U}_x$ die Charaktere $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$. Bezeichne $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ die zugehörigen nichtpositiven Eigenvektoren. Ganz analog wie oben zeigt man, daß $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ nicht die Form $\{\gamma, \gamma\}$ mit $\gamma \in \Gamma$ haben können. Deshalb sind $\tilde{\gamma}_1 = \{\gamma_1, 0\}$ und $\tilde{\gamma}_2 = \{0, \gamma_2\}$.

Wir zeigen jetzt, daß $H = \Pi^{(0)\perp}$ ein Hilbertraum ist. Wäre $H$ ein $\pi_l$-Raum $(l \geqslant 1)$, so gäbe es einen gemeinsamen nichtpositiven Eigenvektor $\tilde{\gamma}$ der Operatoren $\tilde{U}_x$. Wie wir schon gezeigt haben, kann $\tilde{\gamma}$ nicht die Gestalt $\{\gamma, \gamma\}$ haben. Folglich müßte $\tilde{\gamma} = \{\gamma_1, 0\} = \tilde{\gamma}_1$ oder $\tilde{\gamma} = \{0, \gamma_2\} = \tilde{\gamma}_2$ gelten. Das ist aber nicht möglich, da $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ in $\Pi^{(0)}$ enthalten sind. $H$ ist also ein Hilbertraum.

Wir betrachten die Zerlegung

$$\Pi = \Pi^{(0)} \oplus H, \tag{3}$$

wobei $\Pi^{(0)}$ und $H$ $(\tilde{U}_x)$-invariant sind. Bezeichne $P$ die orthogonale Projektion auf $\Pi^{(0)}$ (bezüglich des indefiniten Skalerproduktes). Wir setzen $\Pi(\tilde{\gamma}_1) = P(\Pi^{(1)} \times \{0\})$. Da $\Pi^{(0)}$ und $\Pi^{(1)} \times \{0\}$ $(\tilde{U}_x)$-invariant sind, ist auch $\Pi(\tilde{\gamma}_1)$ $(\tilde{U}_x)$-invariant. Im Falle $\tilde{\gamma}_2 \in \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ existieren Vektoren $\tilde{h} \in H$ und $\tilde{g}_1 \in \Pi^{(1)} \times \{0\}$ mit $\tilde{g}_1 = \tilde{\gamma}_2 + h$. Aus $H \perp \Pi^{(0)}$ erhalten wir $(\tilde{h}, \tilde{U}_x \tilde{f}) = 0$ und somit gilt:

$$g_1(x) = (\tilde{g}_1, \tilde{U}_x \tilde{f}) = (\tilde{\gamma}_2 + \tilde{h}, \tilde{U}_x \tilde{f}) = \gamma_2(x).$$

Folglich ist $\gamma_2 = g_1 \in \Pi^{(1)}$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\tilde{\gamma}_2 \notin \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ gelten muß. Wäre das Skalarprodukt auf $\Pi(\tilde{\gamma}_1)$ ausgeartet, so gäbe es unter den isotropen Vektoren von $\Pi(\tilde{\gamma}_1)$ einen gemeinsamen Eigenvektor der Operatoren $\tilde{U}_x$. Wegen $\tilde{\gamma}_2 \notin \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ könnte dieser Eigenvektor nur $\tilde{\gamma}_1$ sein. Aus $\tilde{\gamma}_1 \perp \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ erhalten wir:

$$0 = (\tilde{\gamma}_1, P\tilde{g}_1) = (P\tilde{\gamma}_1, \tilde{g}_1) = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{g}_1) = (\gamma_1, g_1),$$

für alle $\tilde{g}_1 = \{g_1, 0\} \in \Pi^{(1)}$, woraus $\gamma_1 \perp \Pi^{(1)}$ folgt. Dieser Widerspruch zeigt, daß das Skalarprodukt auf $\Pi(\tilde{\gamma}_1)$ nicht entartet. Wir setzen $\Pi(\tilde{\gamma}_2) = \Pi(\tilde{\gamma}_1)^{\perp}$. Dann ist

$$\Pi^{(0)} = \Pi(\gamma_1) \oplus \Pi(\tilde{\gamma}_2),$$

wobei $\tilde{\gamma}_1 \in \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ und $\tilde{\gamma}_2 \notin \Pi(\tilde{\gamma}_1)$.

Sei $\tilde{f} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ die Zerlegung von $f$ mit $\tilde{f}_1 \in \Pi(\tilde{\gamma}_1)$ und $\tilde{f}_2 \in \Pi(\tilde{\gamma}_2)$. Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\tilde{f}_i$ ein zyklischer Vektor für die Darstellung $(\tilde{U}_x)$ in $\Pi(\gamma_i)$ ist $(i = 1,2)$. Um den Beweis zu beenden genügt es zu zeigen, daß $\tilde{\gamma}_2 \in \Pi(\tilde{\gamma}_2)$ ist. Der Unterraum $\Pi(\tilde{\gamma}_2)$ kann kein Hilbertraum sein, da sonst $f$ eine Singularität nur bei $\gamma_1$ hätte. Deshalb besitzen die Operatoren $\tilde{U}_x$ einen gemeinsamen nichtpositiven Eigenvektor in $\Pi(\tilde{\gamma}_2)$. Wegen $\tilde{\gamma}_1 \notin \Pi(\tilde{\gamma}_2)$ muß dieser Eigenvektor $\tilde{\gamma}_2$ sein. ∎

Im Satz (8.2) haben wir gezeigt, daß jede Funktion $f \in P_k^c(G)$ eine Zerlegung $f = f_1 + \ldots + f_n$ mit $f_i \in P^c(\gamma_i, k_i')$, $f_i \in P_{k_i}^c(G)$ und $f_i \in T(f)$ besitzt $(i = 1, \ldots, n)$. Aus dem vorhergehenden. Satz erhalten wir unmittelbar eine andere Zerlegung:

**(11.7)** FOLGERUNG. *Jede Funktion $f \in P_k^c(G)$ besitzt eine Zerlegung*

$$f = f_1 + \ldots + f_n$$

*mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $f_i \in P_{k_i}^c(G)$;

(b) $f_i$ *besitzt eine Singularität nur bei* $\gamma_i$ *und* $\overline{\gamma_i^{-1}}$;

(c) $f_i \in \Pi_k'(f)$;

(d) $f_i \perp f_j$, $i \neq j$;

(e) $k_1 + \ldots + k_n = k$.

Beweis. Sei $\Pi_k'(f) = \Pi(\gamma_1) \oplus \ldots \oplus \Pi(\gamma_n)$ die Zerlegung des Raumes $\Pi_k'(f)$ wie im Satz (11.6), wobei wir $(V_x) = (U_x)$ setzen. Dann ist $f = f_1 + \ldots + f_n$ mit $f_i \in \Pi(\gamma_1)$. Es gilt:

$$f_i(x) = (f_i, U_x f) = (f_i, U_x f_1 + \ldots + U_x f_n) = (f_i, U_x f_i).$$

Da $f$ ein zyklischer Vektor in $\Pi_k'(f)$ ist, ist $f_i$ ein zyklischer Vektor in $\Pi(\gamma_i)$. Nach Satz (11.1) hat $f_i$ $k_i$ negative Quadrate. Die übrigen Aussagen folgen nun aus Satz (11.6). Im nächsten Satz geben wir eine Charakterisierung der Funktionen mit endlich vielen negativen Quadraten, die eine Singularität $\gamma \in \Gamma_u$ besitzen. ∎

**(11.8)** SATZ. *Es seien $G$ eine kommutative, lokalkompakte Gruppe, $f \in P_k^c(G)$ und die Funktion $f$ besitze die Singularität $\gamma \in \Gamma_u$. Dann gilt:*

$$f(x) = f_0(x) + \left(p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)}\right), \tag{1}$$

*wobei $f_0 \in P_0^c(G)$ ist und $p$ ist ein Polynom mit der Eigenschaft, daß der lineqre Raum $T\left(p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)}\right)$ $(2k)$-dimensional ist.*

*Hat eine Funktion $f$ die Gastalt* (1), *so ist $f \in P_k^c(G)$ und $f$ besitzt die Singularität $\gamma$.*

Beweis. Wir betrachten den $\pi_k$-Raum $\Pi_k'(f)$ un die Verschiebungsoperatoren $U_x$ auf $\Pi_k'(f)$. Es gilt:

$$\Pi_k'(f) = (N \dotplus N') \oplus H.$$

Hierbei sind $(N \dotplus N')$ der $(2k)$-dimensionale hyperbolische Teilraum von $(U_x)$ und $H$ ein invarianter Hilbertraum (Abschnitt 15). Es sei $f = f_0 + P$ mit $f_0 \in H$ und $P \in N \dotplus N'$ Dann ist

$$f_0(x) = (f_0, U_x f) = (f_0, U_x f_0 + U_x P) = (f_0, U_x f_0)$$

und ganz analog $P(x) = (P, U_x P)$. Daraus und aus der Invarianz des Hilbertraumes $H$ und des $\pi_k$-Raumes $(N \dotplus N')$ folgt nun, daß $f_0$ positiv definit ist und

$P$ $k$ negative Quadrate hat (Satz (11.1)). Da $f$ ein zyklischer Vektor ist, so ist auch $P$ ein zyklischer Vektor in $N \dotplus N'$ Folglich gilt:

$$T(P) = N \dotplus N'$$

Da $(N \dotplus N')$ endlichdimensional ist, muß $P$ ein exponentielles Polynom sein. Der lineare Raum $(N \dotplus N')$ enthält aber nur die Charaktere $\gamma$ und $\overline{\gamma^{-1}}$ (Bemerkung (11.5) (b)). Daraus und aus der hermiteschen Symmetrie von $P$ folgt nun, daß

$$P(x) = p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)\,\gamma(-x)}$$

ist, wobei $p$ ein Polynom ist.

Nehmen wir jetzt an, daß $f$ die Gestalt (1) besitzt. Wir zeigen, daß $f$ $k$ negative Quadrate hat. Dazu genügt es zu beweisen, wie leicht zu sehen ist, daß die Funktion $P(x) = p(x)\,\gamma(x) + \overline{p(-x)}\,\overline{\gamma(-x)}$ $k$ negative Quadrate hat. Der $(2k)$-dimensionale Raum $T(P)$, versehen mit dem Skalarprodukt $(\ ,\ )_P$, ist ein $\pi_l$-Raum. Die einzigen Charaktere in $T(P)$ sind $\gamma$ und $\overline{\gamma^{-1}}$. Da sie unbeschränkt sind, müssen die Nullvektoren sein. Bezeichne $N$ bzw. $N'$ die zugehörigen Wurzellineale. Dann ist $\dim N = \dim N'$ und

$$T(P) = (N \dotplus N') \oplus \Pi,$$

wobei $\Pi$ ein invarianter $\pi_{l'}$-Raum ist ((15.3)). Wäre $\Pi \neq 0$, so hätten die Verschiebungsoperatoren in $\Pi$ einen gemeinsamen Eigenvektor. Da jeder gemeinsame Eigenvektor ein Charakter ist und $T(P)$ nur die Charaktere $\gamma$, $\overline{\gamma^{-1}} \in N \dotplus N'$ enthält, muß $\Pi = 0$ sein. Damit ist $l = \dim N = k$. Folglich hat $P$ genau $k$ negative Quadrate. ∎

**(11.9) Dritter Beweis für die Charakterisierung der beschränkten Funktionen aus $P_k^c(G)$.** Es sei $f \in P_k^c(G)$ eine beschränkte Funktion auf der kommutativen, lokalkompakten Gruppe $G$. Nach Satz (8.2) ist

$$f = f_1 + \ldots + f_n,$$

wobei $f_i$ $k_i$ negative Quadrate und nur eine Singularität hat und die Form $f_i = f * w_i$ mit $w_i \in F(G)$ besitzt ($i = 1, \ldots, n$). Deshalb sind auch die Funktionen $f_i$ beschränkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, daß $f$ nur eine Singularität besitzt. Sei $N$ ein $k$-dimensionaler, nichtpositiver Unterraum in $\Pi_k'(f)$ der bezüglich der Verschiebungsoperatoren $U_x\,(x \in G)$ invariant ist [34]. Da $f$ beschränkt ist, besteht $N$ aus beschränkten Funktionen (Satz (9.2)). Nach einem Satz von L. Székelyhidi [55,Th.3] ist $N$ durch beschränkte Charaktere aufgespannt. Da $f$ nur eine Singularität hat, enthält $N$ nur einen Charakter $\gamma \in \Gamma$. Somit ist $k = \dim N = 1$.

Die Funktion $\bar{\gamma} f$ ist deshalb bedingt positiv definit und beschränkt. Nach dem Satz von K. Harzallah ([16], siehe auch [5]) haben wir $\bar{\gamma} f = p + m$, wobei $p$ eine stetige positiv definite Funktion und $m \in R$ sind. Aus diesen Überlegungen erhält man nun sofort die Darstellung (1) in Satz (2.2).

Kapitel IV

# Die Lévy—Khinchin—Formel

## 12. Herleitung der Formel aus der Naimark'schen Spektraldarstellung für unitäre $\pi_1$-Darstellungen

In diesem Abschnitt bezeichnet $G$ eine lokalkompakte, kommutative Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie. In [38] schrieb M. A. Naimark, daß sich die Integraldarstellung für Funktionen aus $P_k(Z)$ und $P_k^c(G)$ wahrscheinlich aus seiner Spektraldarstellung für unitäre $\pi_k$-Darstellungen herleiten läßt. Wir betrachten jetzt dieses Problem für $k=1$. Es sei $f \in P_k^c(G)$. Dann ist entweder $f \in P_1^c(\gamma, 1)$ mit $\gamma \in \Gamma_u$ oder $\bar{\gamma} f \in P^c(1, 1)$ mit $\gamma \in \Gamma$ (Satz (8.2), Bemerkung (3.2) (c)). Da wir den Fall $\gamma \in \Gamma_u$ schon untersucht haben (Satz (11.8)), brauchen wir nur noch den Fall einer bedingt positiv definiten Funktion $f \in P^c(1, 1)$ zu betrachten.

Nehmen wir an, daß $f$ nicht positiv definit ist. Dann hat $f$ ein negatives Quadrat. Wir betrachten den $\pi_1$-Raum $\Pi_1'(f)$ und die Verschiebungsoperatoren $U_x$ (Satz (9.2)). Da $G$ eine abzählbare Basis besitzt, ist $\Pi_1'(f)$ separabel. Bezeichne $e$ den gemeinsamen nichtpositiven Eigenvektor der Operatoren $U_x$ und sei $N$ der durch $e$ erzeugte lineare Raum. Ist $e$ ein negativer Vektor, so ist das Skalarprodukt auf $N$ nicht entartet und wir erhalten die Zerlegung

$$\Pi_1'(f) = \mathrm{N} \oplus \mathrm{N}^{\perp},$$

wobei $N^{\perp}$ *ein* $(U_x)$-invarianter Hilbertraum ist.

Es sei $f = v + w$ mit $v \in N$ und $w \in N^{\perp}$ Dann ist

$$f(x) = (f, U_x f) = (v+w, U_x v + U_x w) = (v, v) + (w, U_x w).$$

Da $N^{\perp}$ ein Hilbertraum ist, ist die Funktion $p(x) = (w, U_x w)$ positiv definit und wir erhalten

$$f = p + m \qquad \text{mit } m = (v, v) \in R.$$

Im Falle $(e, e) < 0$ ist also $f$ beschränkt. Wir betrachten jetzt den Fall $(e, e) = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $f(0) = 0$ ist. Dann gilt: $(f, f) = f(0) = 0$. Da $\Pi_1'(f)$ ein $\pi_1$-Raum ist, muß $(e, f) \neq 0$ sein. Wir setzen $e' = f$. Für die Darstellung $(U_x)$ gelten dann die Formeln in (15.4) (iii).

Wir führen die linearen Operatoren $V_x (x \in G)$ in $\Pi'_1(f)$ auf folgende Weise ein:

$$V_x e = U_x e = e;$$

$$(1) \qquad V_x\{h(\gamma)\} = U_x\{h(\gamma)\};$$

$$V_x(q) = U_x(q);$$

$$V_x e' = b(-x) + e' + \{(\gamma(x)-1)\, w(\gamma)\} + q(-x),$$

wobei

$$(2) \qquad b(-x) = \int_\Gamma (\gamma(x) - 1 + il(x, \gamma))\, (w(\gamma), w(\gamma))\, d\sigma(\gamma) - \tfrac{1}{2}(q(-x), q(-x))$$

mit der Funktion $l(x, \gamma)$ aus Lemma (4.2). Die Existenz des Integrals in (2) folgt aus (vi) in Lemma (4.2) und aus (15.4) (a).

Wir zeigen, daß $x \to V_x$ eine unitäre $\pi_1$-Darstellung von $G$ ist. Um die Beziehung $V_{x+y} = V_x V_y$ nachzuweisen, genügt es wegen der Definition von $V_x$ zu zeigen, daß $V_{x+y} e' = V_x(V_y e')$ ist. Aus (1) erhalten wir:

$$V_{x+y} e' = b(-x-y)\mathrm{e} + e' + \{(\gamma(x+y)-1)\, w(\gamma)\} + q(-x-y),$$

$$\begin{aligned} V_x(V_y e') &= V_x\big(b(-y)e + e' + \{(\gamma(y)-1)\, w(\gamma)\} + q(-y)\big) \\ &= \Big[b(-x) + b(-y) + \int_\Gamma (\gamma(x)-1)(\gamma(y)-1)\, (w(\gamma), w(\gamma))\, d\sigma(\gamma) \\ &\quad - (q(-y), q(-x))\Big] e + e' + \{(\gamma(x)-1)\, w(\gamma)\} \\ &\quad + \{\gamma(x)(\gamma(y)-1)\, w(\gamma)\} + q(-x) + q(-y). \end{aligned}$$

Wegen

$$q(-x-y) = q(-x) + q(-y),$$

$$\{(\gamma(x)-1)\, w(\gamma)\} + \{\gamma(x)(\gamma(y)-1)\, w(\gamma)\} = \{(\gamma(x+y)-1)\, w(\gamma)\}$$

brauchen wir nur noch die Gleichung

$$\begin{aligned} b(-x-y) &= b(-x) + b(-y) \\ &\quad + \int_\Gamma (\gamma(x)-1)(\gamma(y)-1)\, (w(\gamma), w(\gamma))\, d\sigma(\gamma) - (q(-y), q(-x)) \end{aligned}$$

zu überprüfen. Diese folgt aber unmittelbar aus der Definition von $b(-x)$ und aus den Beziehungen

$$l(x+y, \gamma) = l(x, \gamma) + l(y, \gamma),$$

$$(q(-x-y), q(-x-y)) = (q(-x), q(-x)) + 2(q(-x), q(-y)) + (q(-y), q(-y)).$$

Um zu zeigen, daß die Operatoren $V_x$ unitär sind, brauchen wir nur die Gleichung $(V_x e', V_x e') = (e', e') = 0$ nachzuweisen. Es gilt:

$$(V_x e', V_x e') = b(-x) + \overline{b(-x)} +$$

$$+ \{(\gamma(x)-1)\,(\overline{\gamma(x)}-1)\,(w(\gamma), w(\gamma))\} + (q(-x), q(-x)).$$

Aus der Definition von $b(-x)$ folgt nun sofort, daß $(V_x e', V_x e') = 0$ ist.

Wir haben also zwei unitäre $\pi_1$-Darstellungen der Gruppe $G$, die auf $N \oplus H \oplus H_0$ übereinstimmen. Nach [24, Lemma 3] sind $(V_x)$ und $(U_x)$ äquivalent, d.h., $U_x = W^{-1} V_x W$, wobei $W$ ein unitärer Operator in $\Pi'_1(f)$ ist. (Wir bemerken, daß in [24] Lorentz-Gruppen betrachtet wurden. Die Beweisgedanken des von uns benötigten Lemmas sind aber auch in unserem Fall durchführbar.)

Somit erhalten wir:

$$f(x) = (f, U_x f) = (e', U_x e') = (e', W^{-1} V_x W e') = (We', V_x(We')), \qquad x \in G.$$

Wie aus dem Beweis vom Lemma 3 in [24] hervorgeht, läßt sich der Vektor $We'$ in der Form

$$We' = ce + e', \qquad c \in C,$$

darstellen. Unter Beachtung der Definition von $V_x$ können wir nun die Integraldarstellung für $f$ herleiten:

$$\begin{aligned} f(x) &= (We', V_x We') = (ce+e', V_x(ce+e')) = (ce+e', ce+V_x e') \\ &= c+\bar{c}+(e', V_x e') = 2\operatorname{Re} c + \overline{b(-x)} \\ &= c' - \tfrac{1}{2}(q(-x), q(-x)) + \\ &\quad + \overline{\int_\Gamma (\gamma(x)-1+il(x,\gamma))\,(w(\gamma), w(\gamma))\,d\sigma(\gamma)}. \end{aligned}$$

Setzt man jetzt

$$d\sigma'(\gamma) = (w(\gamma), w(\gamma))\,d\sigma(\gamma),$$

$$p(x) = \tfrac{1}{2}(q(-x), q(-x)),$$

so gilt:

$$\int_\Gamma (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\,d\sigma'(\gamma) < \infty, \qquad x \in G,$$

((15.4), (iii) (a)). Damit haben wir die gleiche Integraldastellung wie in [39] erhalten.

## 13. Herleitung der Formel mit Hilfe des Satzes von Krein—Milman–Choquet

In diesem Abschnitt betrachten wir stetige, bedingt positiv definite Funktionen auf der Gruppe $R$. Wir setzen

$$K = \{f \in P^c(1, 1): \quad f(0) \leqslant 0, \int_0^1 f(u)\,du = -1\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $K$ ein konvexer Kegel ist.

Wie in [26] gezeigt wurde, gibt es für jede nichtkonstante Funktion $f \in P^c(1, 1)$ reelle Zahlen $a > 0$, $b$, $c$, so daß die Funktion $af(u) + ibu + c$ zu $K$ gehört. Um eine Integraldarstellung für bedingt positiv definite Funktionen zu erhalten, genügt es also, nur Funktionen aus $K$ zu betrachten. Diese Funktionen haben höchstens ein quadratisches Wachstum, das heißt, es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$|f(u)| \leqslant c(1+u^2), \qquad u \in R,$$

[26]. Diese Tatsache ermöglicht es, in $K$ eine Topologie so einzuführen, daß $K$ kompakt wird. Kennt man nun die Extremalpunkte des kompakten, konvexen Kegels $K$, so erhält man mit Hilfe des Satzes von Krein–Milman–Choquet [40] eine Integraldarstellung für die Funktionen aus $K$. Es gilt der folgende Satz:

**(13.1)** Satz ([26]). *Die Extremalpunkte von $K$ sind die Funktionen*
1) $f_\infty(u) \equiv -1$;
2) $f_0(u) = -3u^2$;
3) $f_x(u) = \left(e^{iux} - 1 - iux\, 2(1-\cos x)/x^2\right)(1 - \sin x/x)^{-1}$, $x \neq 0$.

Der Johansen'sche Beweis dieses Satzes ist ziemlich rechenaufwendig, wir geben hier einen einfacheren Beweis.

Beweis. Es sei $f$ ein Extremalpunkt von $K$. Dann ist entweder $f = f_\infty \equiv -1$ oder $f$ genügt der Funktionalgleichung

$$A(t)f(u) = f(u+t) + f(u-t) - f(t) - f(-t) - 2iuB(t) \tag{1}$$

mit $f(0) = 0$ [26]. Hierbei sind $A$ und $B$ gewisse stetige, reelle Funktionen. Aus (1) und [1,S.199] folgt, daß $f$ beliebig oft differenzierbar ist. Nach zweimaligem Ableiten bezüglich $u$ der beiden Seiten von (1) erhalten wir die Gleichung

$$A(t)f''(u) = f''(u+t) + f''(u-t), \qquad u, t \in R.$$

Die hermiteschen Lösungen dieser Gleichung sind [1,S.170]
(a) $f'' \equiv 0$;
(b) $f''(u) = ce^{iux}, c, x \in R$;
(c) $f''(u) = c(\cosh(xu) + i\sinh(xu)), \qquad c, x \in R$;
(d) $f''(u) = c_1 + ic_2 u, \qquad c_1, c_2 \in R$.

Durch zweimaliges Integrieren erhalten wir aus (a)–(b) die Funktion $f$. Da $f$ höchstens quadratisches Wachstum haben kann, kommen nur (a), (b) und (d) mit $c_2 = 0$ in Frage, d.h.,

$$f(u) = c_1 + ic_2 u + c_3 u^2,$$

oder

$$f(u) = c_1 + ic_2 u + c_3 e^{iux}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in R.$$

Unter Berücksichtigung der Bedingungen $f(0) = 0$ und $\int_0^1 f(u)\,du = -1$ erhalten wir sofort, daß entweder $f = f_0$ oder $f = f_x$ ist für $0 < x < \infty$.

Wir zeigen jetzt, daß die Funktionen $f_x (0 \leqslant x \leqslant \infty)$ extremal sind. Im Falle $0 \leqslant x < \infty$ erhalten wir aus der Definition der Funktionen $f_x$:

$$f_x(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_x(u+t) + f_x(u-t)\big) = A(t)\, e^{iux}, \qquad t \in R, \tag{2}$$

wobei $A$ eine stetige, nichtnegative Funktion ist. Nehmen wir an, daß $f_x = (f_1 + f_2)/2$ ist mit $f_1, f_2 \in K$. Wegen $f_1, f_2 \in P^c$ (*1*, 1) sind die Funktionen

$$f_j(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_j(u+t) + f_j(u-t)\big), \quad j = 1, 2,$$

für jedes $t \in R$ positiv definit. Da die positiv definite Funktion $F_{t,x}(u) = A(t)\, e^{iux}$ für alle $t, x \in R$ extremal ist und wegen (2) die Beziehung

$$f_1(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_1(u+t) + f_1(u-t)\big) + f_2(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_2(u+t) + f_2(u-t)\big) = 2A(t)\, e^{iux}$$

gilt, erhalten wir:

$$f_j(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_j(u+t) + f_j(u-t)\big) = B_j(t)\, e^{iux}. \tag{3}$$

Aus (3) folgt wieder, daß $f_j$ und $B_j$ beliebig oft differenzierbar sind [1, S, 199]. Wir leiten die beiden Seiten von (3) nach $t$ *ab*:

$$f'_j(u+t) - f'_j(u-t) = -B'_j(t)\, e^{iux}.$$

Die hermiteschen Lösungen dieser Gleichung sind [1, S. 176]:
(a) $f'_j(u) = c_1 e^{iux} + c_2$;
(b) $f'_j(u) = c_1 u^2 + ic_2 u + c_3$,
$c_1, c_2, c_3 \in R$. Unter Beachtung, daß $f_j$ höchstens ein quadratisches Wachstum hat, und daß $f_j(0) = 0$ und $\int_0^1 f_j(u)\,du = -1$ sind ($j = 1, 2$), erhalten wir sofort, daß $f_j = f_x$ sein muß. Im Falle $x = \infty$, ist

$$f_\infty(u) - \tfrac{1}{2}\big(f_\infty(u+t) + f_\infty(u-t)\big) = 0.$$

Mit den gleichen Überlegungen wie oben, erhalten wir daß die Funktionen $f_1$ und $f_2$ aus $K$ mit $f=(f_1+f_2)/2$ die Gleichung

$$f_j(u)-\tfrac{1}{2}(f_j(u+t)+f_j(u-t))=0, \quad j=1,2,$$

erfüllen, Deshalb ist

$$f_j(u)=c_1+ic_2u, \quad c_1, c_2 \in R,$$

[1, S. 170]. Aus $f_j \in K$ folgt wieder, daß $f_j=f_\infty$ ist. Die Funktion $f_x$ ist also extremal $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$, und damit ist der Beweis beendet. ∎

Durch die Anwendung des Satzes von Krein–Milman–Choquet erhält man nun die folgende Integraldarstellung für eine Funktion $f \in P^c(\mathit{1}, 1)$ ([26]):

$$f(u)=c_1-ic_2u+c_3\int_R\left(e^{iux}-1-iux\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\right)\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-1}d\mu(x).$$

Hierbei sind $c_1$, $c_2$, $c_3$ reelle Zahlen, $c_3 \geqslant 0$ und $\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $R$.

# Anhang

## 14. Polynome auf Gruppen

In diesem Abschnitt fassen wir einige Definitionen und Resultate über Polynome auf Gruppen zusammen (siehe hierzu die Arbeiten [55]–[57], [2], [7], [8]. Das Symbol $G$ bezeichnet stets eine lokalkompakte, kommutative Gruppe.

**(14.1)** Eine komplexwertige Funktion $a$ auf $G$ heißt additiv, wenn $a(x+y) = a(x)+a(y)$ ist für beliebige $x, y \in G$. Ist $p(x) = P(a_1(x), \ldots, a_n(x))$, wobei $a_i$ eine stetige additive Funktion $(i = 1, \ldots, n)$ und $P$ ein komeplexes Polynom mit $n$ Veränderlichen sind, so heißt $p$ ein Polynom auf $G$.

Eine Funktion der Form $\gamma_1 p_1 + \ldots + \gamma_m p_m$ nennen wir *exponentielles Polynom*, wenn $p_i$ ein Polynom und $\gamma_i \in \Gamma' (i = 1, \ldots, m)$ sind. Ist $p$ ein exponentielles Polynom,. so ist $T(p)$ endlichdimensional. Es gilt auch die Umkehrung: Jeder verschiebungsinvariante, endlichdimensionale lineare Raum von stetigen Funktionen auf $G$ besteht aus exponentiellen Polynomen. Beschräkte exponentielle Polynome, haben die einfache Form $c_1 \gamma_1 + \ldots + c_m \gamma_m$ mit $c_i \in C$ und $\gamma_i \in \Gamma (i = 1, \ldots, m)$. Genügt eine stetige Funktion $p$ der Gleichung

(1) $$p * w_1 * \ldots * w_{k+1} = 0 \quad \text{für alle } w_i \in F(G) \quad \text{mit } \hat{w}_i(1) = 0$$

$(i = 1, \ldots, k+1)$, so heißt sie ein *verallgemeinertes Polynom* höchstens $k$-ten Grades.

Zum Beispiel ist das Polynom $p(x) = P(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ ein verallgemeinertes Polynom höchstens $k$-ten Grades, wenn $P$ ein Polynom höchstens $k$-ten Grades ist. Jedes verallgemeinerte Polynom $p$ höchstens $k$-ten Grades läßt sich eindeutig in der Form

(2) $$p(x) = \sum_{j=0}^{k} A_j(x, x, \ldots, x), \qquad x \in G,$$

darstellen. Hierbei ist die Funktion $A_j(x_1, \ldots, x_j)$ symmetrisch (d.h., invariant bezüglich des Vertauschens der Variablen) und additiv bezüglich jeder Variable ($A_0$ ist eine Konstante). An dieser Stelle möchten wir bemerken, daß die hier eingeführte Definition des verallgemeinerten Polynoms sich von der üblichen

Definition unterscheidet. Im Allgemeinen fordert man nämlich (1) nur für die Maße $w_i = w_x \in F(G)$, $i = 1, \ldots, k+1$, mit $\hat{w}_x(1) = 0$ und $\operatorname{supp} w_x = \{0, x\}$, $x \in G$. Es ist aber nicht schwer zu sehen, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. In der Tat, jedes verallgemeinerte Polynom p nach der üblichen Definition, hat die Gestalt (2) [7]. Aus (2) folgt aber, wie man leicht sieht, die Beziehung (1).

Wir bemerken noch, daß im Falle der Gruppen $R^n$ und $Z^n$ die Begriffe „Polynom" und „verallgemeinertes Polynom" zusammenfallen.

Es seien $k_i$ positive ganze Zahlen und $\gamma_i \in \Gamma'$ ($i = 1, \ldots, n$) paarweise verschiedene Charaktere von $G$. Eine stetige Funktion $p$ heißt *verallgemeinertes exponentielles Polynom*, wenn die Gleichung

$$p * w = 0$$

für alle $w \in F(G)$ der Form

(3) $$w = w_1^{(1)} * \ldots * w_{k_1}^{(1)} * w_1^{(2)} * \ldots * w_{k_2}^{(2)} * \ldots * w_1^{(n)} * \ldots * w_{k_n}^{(n)}$$

mit $(w_l^{(i)})^\wedge (\gamma_i) = 0$ $\quad (i = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, k_i)$ erfüllt ist.

Diese Definition und die folgenden Sätze sind wahrscheinlich neu.

**(14.2)** SATZ. *Eine stetige Funktion $p$ auf $G$ ist genau dann ein verallgemeinertes exponentielles Polynom, wenn sie die Form*

(1) $$p = p_1 \gamma_1 + \ldots + p_n \gamma_n$$

*hat, wobei $p_i$ ein verallgemeinertes Polynom ist.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $p * w = 0$ ist für alle $w \in F(G)$ der Gestalt (3) in (14.1). Wir zeigen erst, daß

(2) $$p = q_1 + \ldots + q_n$$

ist, wobei

$$q_i * w_1 * \ldots * w_{k_i} = 0$$

gilt für alle $w_l \in F(G)$ mit $\hat{w}_l(\gamma_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, k_i)$.

Im Falle $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Im Falle $n \geqslant 2$ wählen wir ein $x \in G$ mit $\gamma_1(x) \neq \gamma_2(x)$. Dann ist $\gamma_1(x)\, \gamma_2(-x) \neq 1$. Wir setzen

$$c_1 = \frac{1}{1 - \gamma_1(x)\, \gamma_2(-x)};$$

$$w_1(y) = \begin{cases} c_1, & y = 0, \\ -c_1 \gamma_1(x), & y = x, \\ 0, & \text{const}; \end{cases}$$

$$w_2(y) = \begin{cases} 1-c_1, & y=0, \\ c_1\gamma_1(x), & y=x, \\ 0, & \text{const.} \end{cases}$$

Dann gilt: $\hat{w}_1(\gamma_1) = 0$, $\hat{w}_2(\gamma_2) = 0$ und $w_1 + w_2 = 1_{\{0\}}$. Somit ist

$$f = f * 1_{\{0\}} = f * w_1 + f * w_2.$$

Die Funktion $f * w_i$ erfüllt die Gleichung $(f*w_i)*w = 0$ für alle $w$ der Form (3) in (14.1), wobei $k_i$ durch $(k_i\text{-}1)$ ersetzt wird $(i = 1, 2)$. Wiederholt man mehrere Male diese Überlegungen, so erhält man die Zerlegung (2). Betrachten wir jetzt die Funktion $p_i = \gamma_i^{-1} q$. Es ist leicht zu sehen, daß $p_i * w_1 * \ldots * w_{k_i} = 0$ ist für alle $w_l \in F(G)$ mit $\hat{w}_l(1) = 0$ $(i = 1, \ldots, n,\ l = 1, \ldots, k_i)$. Die Funktion $p_i$ ist also ein verallgemeinertes Polynom höchstens $(k_i - 1)$-ten Grades. Wegen (2) und $q_i = \gamma_i p_i$ erhalten wir die Darstellung (1).

Der Beweis der umgekehrten Aussage ist einfach. ■

(14.3) Satz. *Eine stetige Funktion $p$ erfüllt die Gleichung*

(1) $$p * w * \tilde{w} = 0$$

*für alle $w \in F(G)$ der Gestalt* (3) *in* (14.1) *genau dann, wenn gilt:*

$$p = \sum_{\gamma_i \in \Gamma_u} (p_i\gamma_i + p_i'\overline{\gamma_i^{-1}}) + \sum_{\gamma_j \in \Gamma} p_j''\gamma_j,$$

*wobei $p_i$, $p_i'$* und *$p_j''$ verallgemeinerte Polynome höchstens $(k_i - 1)$-ten bzw. $(2k_j - 1)$-ten Grades sind. Ist $p$ hermitesch, so gilt:*

$$p_i'(x) = \overline{p_i(-x)}, \qquad p_j''(x) = \overline{p_j''(-x)}.$$

Beweis. Mit den gleichen Induktionsüberlegungen wie im Beweis von Lemma (4.5) zeigt, man daß aus (1) die Beziehung

$$p * w_1 * \tilde{w}_2 = 0$$

für alle $w_1$, $w_2 \in F(G)$ der Gestalt (3) in (14.1), folgt.

Da $(\tilde{w}_2)^\wedge(\gamma) = 0$ zu $\hat{w}_2(\overline{\gamma^{-1}}) = 0$ äquivalent ist, erhalten wir die erste Behauptung des Satzes (14.3) sofort aus Satz (14.2).

Für den Beweis der zweiten Aussage zerlegen wir die hermitesche Funktion $p$ in eine Summe

$$p = q_1 + \ldots + q_n,$$

wobei $q_i$ eine hermitesche Funktion mit

$$q_i * w * \tilde{w} = 0 \quad \text{für alle } w \in F(G)$$

der Gestalt

$$w = w_1 * \ldots * w_{k_i} \quad \text{mit } \hat{w}_l(\gamma_i) = 0 \quad (l = 1, \ldots, k_i)$$

ist. Diese Zerlegung erfolgt ganz analog wie im Beweis von Satz (3.3). Deshalb und wegen der ersten Aussage des Satzes (14.3) brauchen wir nur die Fälle

$$p = p'\gamma \quad (\gamma \in \Gamma) \qquad \text{und} \qquad p = p'\gamma + \overline{p''\gamma^{-1}} \quad (\gamma \in \Gamma_u)$$

zu untersuchen. Nehmen wir an, daß die Funktion $p = p'\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ hermitesch ist. Es gilt:

$$p(-x) = p'(-x)\,\gamma(-x) = \overline{p(x)} = \overline{p'(x)\,\gamma(x)}.$$

Wegen $\gamma(-x) = \overline{\gamma(x)}$ muß $p'(-x) = \overline{p'(x)}$ sein.

Nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $p = p'\gamma + \overline{p''\gamma^{-1}}$ $(\gamma \in \Gamma_u)$ hermitesch ist, wobei $p'$ und $p''$ verallgemeinerte Polynome höchstens $(k-1)$-ten Grades sind. Dann gilt:

$$p'(x)\,\gamma(x) + p''(x)\,\overline{\gamma(-x)} = \overline{p'(-x)\,\gamma(-x)} + \overline{p''(x)}\,\gamma(x)$$

und somit

$$|\gamma(x)|^2 \left(p'(x) - \overline{p''(-x)}\right) = \overline{\left(p'(-x) - p''(x)\right)}. \tag{1}$$

Wir setzen $P(x) = \overline{p'(-x)} - p''(x)$ und zeigen, daß $P = 0$ ist. Wegen (1) gilt:

$$P * w_1^{*k} = 0 \qquad \text{für alle } w_1 \in F(G) \text{ mit } \hat{w}_1(1) = 0,$$

$$P * w_2^{*k} = 0 \qquad \text{für alle } w_2 \in F(G) \text{ mit } \hat{w}_2(|\gamma|^2) = 0.$$

Seien $w_1$ und $w_2$ wie im Beweis von Satz (14.2) definiert, wobei wir $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = |\gamma|^2$ setzen (wegen $\gamma \in \Gamma_u$ ist $|\gamma|^2 \neq 1$). Dann gilt:

$$P = P * 1_{\{0\}} = P * (w_1 + w_2)^{*(2k)} = \sum_{j=1}^{2k} P * w_1^{*j} * w_2^{*(2k-j)}.$$

Da entweder $j \geqslant k$ oder $2k - j \geqslant k$ erfüllt ist, muß $P = 0$ sein.

## 15. $\pi_k$-Räume und $\pi_k$-Darstellungen

**(15.1)** Ein *Skalarprodukt* auf einem linearem Raum $L$ ist eine komplexwertige Funktion $(\ ,\ )$ auf $L \times L$ mit den Eigenschaften

$$(c_1 v_1 + c_2 v_2, w) = c_1 (v_1, w) + c_2 (v_2, w),$$

$$(v_1, v_2) = \overline{(v_2, v_1)}$$

für alle $v_1, v_2, w \in L$ und $c_1, c_2 \in C$.

Wegen der hermiteschen Symmetrie von $(\ ,\ )$ ist $(v, v) \in R$. Der Vektor $v \in L$ heißt *positiver Vektor* (*negativer Vektor*, *Nullvektor*), wenn $(v, v) > 0$ $((v, v) < 0,\ (v, v) = 0)$ ist. Ein Unterraum $P \subset L$ wird positiv genannt, wenn $(v, v) > 0$ ist für alle $v \in P$ mit $v \neq 0$. Negative, nichtnegative, nichtpositive

Unterräume und Nullräume werden analog definiert. Wenn $(v, w) = 0$ ist, dann schreiben wir $v \perp w$ und sagen, daß $v$ und $w$ *orthogonal* sind. Zwei Teilmengen $A, B \subset L$ heißen orthogonal (geschrieben: $A \perp B$), wenn $a \perp b$ ist für alle $a \in A$ und $b \in B$. Das *orthogonale Komplement* einer Menge $A \subset L$ ist die Menge

$$A^{\perp} = \{v \in L:\ v \perp A\}.$$

Sei $L'$ ein Unterraum von $L$. Wenn für ein $v \in L'$ mit $v \neq 0$ $v \perp L'$ ist, dann heißt ein *isotroper Vektor* von $L'$. Enthält $L'$ keinen isotropen Vektor, so sagen wir, daß das Skalarprodukt auf $L'$ *nicht ausgeartet* ist.

Zwei Nullräume $N_1$, $N_2 \subset L (N_1 \neq 0,\ N_2 \neq 0)$ heißen *schiefverbunden*, wenn

(a) kein Vektor $v \neq 0$ aus $N_1$ ist zu $N_2$ orthogonal;

(b) kein Vektor $w \neq 0$ aus $N_2$ ist zu $N_1$ orthogonal;

Ist $L$ die direkte Summe von paarweise orthogonalen Teilräumen $L_1, \ldots, L_n$, so schreiben wir

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n.$$

(15.2) Ein $\pi_k$-*Raum* $(k = 1, 2, \ldots)$ ist am einfachsten zu de finieren als ein Hilbertraum in dem außer dem gewöhnlichen Skalarprodukt $[\ ,\ ]$ noch ein anderes Skalarprodukt $(\ ,\ )$ angegeben ist, das in einer bezüglich $[\ ,\ ]$ orthonormalen Basis $\{e_j\}$ in der Form

$$(v, w) = -\sum_{j=1}^{k} v_i \overline{w_j} + \sum_{j>k} v_j \overline{w_j}$$

mit $v_j = [v, e_j]$, $w_j = [w, e_j]$ dargestellt werden kann.

Eine äquivalente Definition eines $\pi_k$-Raumes $\Pi_k$ ist die folgende [23].

I. $\Pi_k$ ist ein linearer Raum.

II. In $\Pi_k$ ist ein Skalarprodukt $(\ ,\ )$ gegeben.

III. $\Pi_k$ enthält keinen isotropen Vektor.

IV. Der Raum $\Pi_k$ enthält mindestens einen $k$-dimensionalen negativen Unterraum.

V. Die Matrix $((v_i, v_j))_{i,j=1}^{n}$ hat höchstens $k$ negative Eigenwerte für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \Pi_k$.

VI. Es gibt mindestens einen $k$-dimensionalen negativen Unterraum $\Pi_-$ mit

$$\Pi_k = \Pi_- \oplus \Pi_-^{\perp}$$

wobei $\Pi_-^{\perp}$ ein positiver und bezüglich der Norm $|v| = \sqrt{(v, v)}$ $(v \in \Pi_-^{\perp})$ ein vollständiger Unterraum ist.

Sei $v = v_- + v_+$ die der Beziehung (1) entsprechende Zerlegung des Vektors $v \in \Pi_k$ mit $v_- \in \Pi_-$ und $v_+ \in \Pi_-^{\perp}$. Die Norm

$$\|v\| = \sqrt{(v_+, v_+) - (v_-, v_-)}$$

erzeugt eine Topologie auf $\Pi_k$ die nicht von der speziellen Wahl von $\Pi_-$ abhängt. Unter *Stetigkeit* eines linearen Operators oder Funktionals auf $\Pi_k$ verstehen wir Stetigkeit bezüglich dieser Topologie.

Ein linearer Operator $U$, dessen Definitions- und Wertebereich gleich $\Pi_k$ sind und für den die Beziehung

$$(Uv, Uw) = (v, w), \qquad v, w \in \Pi_k,$$

gilt, heißt *unitär*. Unitäre Operatoren sind stetig.

Jedem stetigen linearen Operator $A$ in $\Pi_k$ entspricht genau ein stetiger linearer Operator $A^*$ in $\Pi_k$ derart, daß

$$(Av, w) = (v, A^* w) \qquad \text{gilt für alle } v, w \in \Pi_k.$$

Der Operator $A^*$ heißt der zu $A$ *adjungierte* Operator.

**(15.3)** Es seien $G$ eine beliebige Gruppe und $\Pi_k$ ein $\pi_k$-Raum. Die Abbildung $x \to V_x$ $(x \in G)$ heißt eine *unitäre $\pi_k$-Darstellung* von $G$, wenn gilt:

(a) $V_x$ ist für jedes $x \in G$ ein unitärer Operator in $\Pi_k$;

(b) $V_{xy} = V_x V_y$ für $x, y \in G$.

(c) $V_e = I$ ($e$: Einheitselement, $I$: Einheitsoperator).

Anstelle von $x \to V_x$ werden wir einfach $(V_x)$ schreiben. Im Falle einer topologischen Gruppe heißt die Darstellung $(V_x)$ *stetig*, wenn die Funktion $x \to V_x w$ für beliebiges $w \in \Pi_k$ stetig ist.

Ein Vektor $v \in \Pi_k$ ist *zyklisch* für die Darstellung $(V_x)$, wenn die abgeschlossene lineare Hülle der Menge $\{V_x v \colon x \in G\}$ gleich $\Pi_k$ ist. Die Darstellung $(V_x)$ heißt zyklisch, wenn sie mindestens einen zyklischen Vektor besitzt.

Es seien $(V_x)$ und $(V'_x)$ unitäre $\pi_k$-Darstellungen von $G$ in $\Pi_k$ bzw. $\Pi'_k$. Wenn eine isometrische Abbildung $W$ von $\Pi_k$ auf $\Pi'_k$ derart existiert, daß für jedes $x \in G$

$$W V_x W^{-1} = V'_x$$

ist, dann heißen die Darstellungen $(V_x)$ und $(V'_x)$ *äquivalent*. Betrachten wir jetzt eine stetige, zyklische unitäre $\pi_k$-Darstellung $(V_x)$ der kommutativen, lokalkompakten Gruppe $G$. Da die Operatoren $V_x (x \in G)$ vertauschbar sind, existiert mindestens ein gemeinsamer, nichtpositiver Eigenvektor [34]. Es seien $e_1, \ldots, e_l$ $(1 \leqslant l \leqslant 2k)$ alle gemeinsamen, nichtpositiven Eigenvektoren der Operatoren $V_x$. Die Funktionen $\gamma_i$ mit

$$V_x e_i = \gamma_i(x) e_i, \qquad x \in G,$$

heißen *Eigencharaktere* der Darstellung $(V_x)$ (vgl. mit dem Begriff der Eigenfunktionale in [35]).

Ganz analog wie im Beweis von Satz (8.2) sieht man, daß $\gamma_i \in \Gamma'$ $(i = 1, \ldots, l)$.

Die Gesamtheit aller Vektoren $v$ die der Beziehung

$$(V_x - \gamma_i(x) I)^p v = 0 \qquad \text{für alle } x \in G$$

und für ein ganzes $p = p(v) \geqslant 0$ genügen, heißt das zu $\gamma_i$ gehörende *Wurzellineal* von $(V_x)$ und wird durch $W_{\gamma_i}$ bezeichnet. Es ist leicht zu sehen, daß die Wurzellineale bezüglich $(V_x)$ invariant sind. Die nachstehenden Aussagen sind einfache Folgerungen der Ergebnisse in [35] (siehe auch [36], [37]).

1. Ist $\gamma$ ein Eigencharakter von $(V_x)$, so ist auch $\overline{\gamma^{-1}}$ ein Eigencharakter.
2. Es seien $\gamma$, $\gamma_1$ und $\gamma_2$ Eigencharaktere von $(V_x)$.
   (i) Wenn $\gamma_1 \neq \gamma_2$, dann ist $W_{\gamma_1} \cap W_{\gamma_2} = 0$.
   (ii) Ist $\gamma_1 \neq \overline{\gamma_2^{-1}}$, so gilt $W_{\gamma_1} \perp W_{\gamma_2}$.
   (iii) Im Falle $\gamma \in \Gamma_u$ ist $W_\gamma$ ein Nullraum. Weiterhin gilt: $\dim W_\gamma = \dim W_{\overline{\gamma^{-1}}} \leqslant k$ und die Unterräume $W_\gamma$ und $W_{\overline{\gamma^{-1}}}$ sind schiefverbunden.

Es seien $\gamma_1, \overline{\gamma_1^{-1}}, \ldots, \gamma_l, \overline{\gamma_l^{-1}}$ alle unbeschränkten Eigencharaktere von $(V_x)$ mit $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$. Der $(V_x)$-invariante Unterraum

$$W_H = \sum_{i=1}^{l} \oplus (W_{\gamma_i} \dotplus W_{\overline{\gamma_i^{-1}}})$$

heißt der *hyperbolische Teilraum* von $(V_x)$. Die Dimension von $W_H$ ist höchstens $2k$. Es gilt:

$$\Pi_k = W_H \oplus \Pi_l,$$

wobei $\Pi_l$ ein $(V_x)$-invarianter $\pi_l$-Raum ist $(0 \leqslant l \leqslant k)$ und die Einschränkung von $(V_x)$ auf $\Pi_l$ besitzt keine unbeschränkten Eigencharaktere.

**(15.4)** In den Arbeiten [36]–[38] gab M. A. Naimark eine Spektraldarstellung für unitäre $\pi_k$-Darstellungen von lokalkompakten Gruppen mit einer abzählbaren Basis der Topologie an. Im Abschnitt 12 wird der folgende Spezialfall seiner Ergebnisse benötigt.

Es seien $G$ eine lokalkompakte kommutative Gruppe mit abzählbarer Basis der Topologie und $(U_x)$ eine unitäre $\pi_1$-Darstellung von $G$ in einem separablen Raum $\Pi_1$. Nehmen wir an, daß $(U_x)$ nur den Eigencharakter $1$ besitzt, der zu einem Nullvektor $e \in \Pi_1$ gehört. Bezeichne $N$ den durch $e$ erzeugten eindimensionalen Nullraum und sei $N'$ ein beliebiger mit $N$ schiefverbundener, eindimensionaler Nullraum, der durch einen Vektor $e' \in \Pi_1$ erzeugt wird. Zu der Darstellung $(U_x)$ gehört dann eine Zerlegung

$$\Pi_1 = (N \dotplus N') \oplus H \oplus H_0$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $H$ und $H_0$ sind Hilberträume;
(ii) $H$ ist das direkte Integral von Hilberträumen $H(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, nach einem Maß $\sigma \in M^+(\Gamma)$:

$$H = \int_\Gamma H(\gamma)\, d\sigma(\gamma);$$

(iii) $U_x e = e$;

$$U_x\{h(\gamma)\} = \int_\Gamma (\gamma(x)-1)\,(h(\gamma), w(\gamma))\, d\sigma(\gamma) + \{\gamma(x)\, h(\gamma)\}$$

für $h = \{h(\gamma)\} \in H$ mit $h(\gamma) \in H(\gamma)$;

$$U_x e' = a(-x)e + e' + \{(\gamma(x)-1)\, w(\gamma)\} + q(-x);$$

$$U_x(q) = (q, q(x))e + q \qquad \text{für } q \in H_0.$$

Hierbei sind:

(a) $w$ eine $\sigma$-meßbare, vektorwertige Funktion auf $\Gamma$ mit $w(\gamma) \in H(\gamma)$ und $\{(\gamma(x)-1)\, w(\gamma)\} \in H$. (Aus der letzten Beziehung folgt, daß das Integral

$$\int_\Gamma (1 - \operatorname{Re}\gamma(x))\,(w(\gamma), w(\gamma))\, d\sigma(\gamma)$$

endlich ist.)

(b) $a(x)$ eine komplexwertige, stetige Funktion auf $G$;

(c) $q(x)$ eine vektorwertige, stetige Funktion auf $G$ mit den Eigenschaften $q(x) \in H_0$, $q(x+y) = q(x) + q(y)$ und

$$(q(x), q(x)) = (q(y), q(x)), \qquad x, y \in G.$$

(Die beiden letzten Eigenschaften von $q$ sind unmittelbare Folgerungen der Beziehung $U_{x+y}e' = U_x(U_y e') = U_y(U_x e')$.)

**(15.5)** Es sei $(V_x)$ eine unitäre $\pi_k$-Darstellung der lokalkompakten Gruppe $G$ in einem Raum $\Pi_k$. Die Darstellung $(V_x)$ heißt schwach stetig, wenn die Funktion

(1) $$x \to (g, V_x h), \qquad x \in G,$$

für alle $g$, $h \in \Pi_k$ stetig ist. Betrachten wir jetzt die Operatoren $V_x$ als beschränkte Operatoren in einem Hilbertraum $H$ mit Skalarprodukt $[\ ,\ ]$ wie in (15.2).

Dann sind die Funktionen

(2) $$x \to [g, V_x h], \qquad x \in G,$$

für alle $g$, $h \in H$ stetig. Nach [58,Th.2.8] folgt aus der Stetigkeit von (2) die Stetigkeit der Funktionen

$$x \to V_x h, \qquad x \in G,$$

für alle $h \in H$. Deshalb ist bei unitären $\pi_k$-Darstellungen die schwache Stetigkeit mit der Stetigkeit äquivalent.

# Verzeichnis einiger benutzter Symbole

| | |
|---|---|
| $C$ | – Menge der komplexen Zahlen. |
| $C(\Gamma)$ | – wobei $\Gamma$ eine topologische Gruppe ist: die Menge der stetigen, beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf $\Gamma$. |
| $C^+(\Gamma)$ | = $\{f \in C(\Gamma)\colon f(\gamma) \geqslant 0$ für $\gamma \in \Gamma\}$. |
| $F(G)$ | – wobei $G$ eine Gruppe ist: die Menge aller komplexen Maße auf $G$ mit endlichem Träger. |
| $F(\gamma, k)$ | – siehe Seite 25. |
| $F^+(\gamma, k)$ | – siehe Seite 25. |
| $G$ | – eine Gruppe. |
| $G_d$ | – $G$, versehen mit der diskreten Topologie. |
| $\Gamma$ | – die Charaktergruppe einer lokalkompakten, kommutativen Gruppe $G$ mit Ausnahme vom Abschnitt 1, wo mit $\Gamma$ eine beliebige kompakte Gruppe bezeichnet wird. |
| $\Gamma_u$ | – die Menge der stetigen, unberschränkten Charaktere einer lokalkompakten, kommutativen Gruppe $G$. |
| $\Gamma'$ | = $\Gamma \cup \Gamma_u$. |
| $\operatorname{Im} c$ | – der imaginäre Teil einer komplexen Zahl $c$. |
| $\mathfrak{K}(\Gamma)$ | – wobei $\Gamma$ eine kompakte Gruppe ist: die Menge der Funktionen $f \in L_1(\Gamma)$, die eine absolut konvergente Fourier-Reihe besitzen ([18], (34.4)). Wir bemerken, daß jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(\Gamma)$ auch als eine Funktion aus $C(\Gamma)$ betrachtet werden kann ([18, (34.6)). |
| $\mathfrak{K}^+(\Gamma)$ | = $\{f \in \mathfrak{K}(\Gamma)\colon f(\gamma) \geqslant 0$ für $\gamma \in \Gamma\}$. |
| $L_1(G)$ | – die Menge der $m_G$-integrierbaren komplexwertigen Funktionen auf $G$. |
| $m_G$ | – wobei $G$ eine lokalkompakte Gruppe ist: das Haar'sche Maß auf $G$. Wenn $m_G$ und $m_\Gamma$ zusammen auftreten, dann sind sie so normiert, daß die Fourier-Umkehrformel ohne eine multiplikative Konstante gilt. |
| $M(G)$ | – wobei $G$ eine lokalkompakte Gruppe ist: die Menge der endlichen, komplexen Borel-Maße auf $G$. |
| $M^+(G)$ | = $\{\mu \in M(G)\colon \mu \geqslant 0\}$. |
| $P_k(G)$ | – siehe Seite 3. |
| $P_k^c(G)$ | = $\{f \in P_k(G)\colon f$ ist stetig$\}$. |
| $P_k^m(G)$ | = $\{f \in P_k(G)\colon f$ ist $m_G$-meßbar$\}$. |
| $P(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ | – siehe Seite 16. |
| $P^c(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ | – siehe Seite 16. |
| $P^m(\gamma_1, k_1; \ldots; \gamma_n, k_n)$ | – siehe Seite 16. |
| $R$ | – die Menge der reellen Zahlen. |
| $\operatorname{Re} c$ | – der Realteil einer komplexen Zahl $c$. |
| supp | – der Träger einer Funktion oder eines Maßes. |
| $T(f)$ | – wobei $f$ eine Funktion auf $G$ ist: die Menge der Funktionen $g$ der Form $g = f * w$ mit $w \in F(G)$. |
| $Z$ | – die Gruppe der ganzen Zahlen. |
| $\wedge$ | – die Fourier-Transformierte einer Funktion oder eines Maßes. |
| | – die inverse Fourier-Transformierte einer Funktion oder eines Maßes. |
| $*$ | – Faltung |
| $\tilde{\mu}$ | – das konjugierte Maß von $\mu$: $\tilde{\mu}(B) = \overline{\mu(B^{-1})}$ für jede Borelmenge $B \subset G$. |
| $\mu^{\blacktriangle}$ | – $\mu^{\blacktriangle}(B) = \mu(B^{-1})$ für jede Borelmenge $B \subset G$. |
| $\mu^{*k}$ | = $\mu * \ldots * \mu$ – $k$-mal. |

# Literatur


[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York–London, 1966.

[2] P. M. Anelsone, J. Korevaar, *Translation invariant subspaces of finite dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 747–752.

[3] А. П. Артёменко, *Эрмитого-положительные функции и позитивные фукционалы*, Канд, Диссертация, Одесский гос. ун-т (1941).

[4] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения*, Итоги Науки и Техн., сер. мат. ан. 17 (1979), 113–205.

[5] Ch. Berg, G. Forst, *Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1979.

[6] A. Devinatz, *On measurable positive definite operator functions*, J. London Math. Soc. 35 (1960), 417–424.

[7] D. Ž. Djokovič, *A representation theorem for* $(X_1-1)(X_2-1)\dots(X_n-1)$ *and its applications*, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 189–198.

[8] M. Engert, *Finite dimensional translation invariant subspaces*, Pacific J. Math. 32 (1970), 333–343.

[9] L. Fejér, *Über trigonometrische Polynome*, J. Reine Angew. Math. 146 (1916), 53–82.

[10] I. M. Gelfand, N. J. Wilenkin, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen), IV*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin 1964.

[11] *Об одном характеристическом свойстве безгранично делимых законов распределения*, Бюлл. МГУ, секция A 15 (1937), 9–15.

[12] В. И. Горбачук, *Об интегральном представлении эрмитого-индефинитных ядер, случай многих переменных*, Укр. мат. ж. 16,2 (1964), 232–236.

[13] C. C. Graham, O. C. McGehee, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1979.

[14] C. C. Graham, *Non-Sidon sets in the support of a Fourier-Stieltjes transform*, Colloq. Math. 36 (1976), 269–273.

[15] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics*, Lecture Notes in Math. 261, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1972.

[16] K. Harzallah, *Fonctions opérant sur les fonctions définies négatives*, Ann. Inst. Fourier 17 (1), (1967), 433–468.

[17] –, *Sur und démonstration de la formule de Lévy–Khinchine*, Ann. Inst. Fourier 19 (2), (1969), 527–532.

[18] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Vols. I, II, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1963/70.

[19] H. Heyer, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1977.

[20] R. A. Horn, *Quadratic forms in harmonic analysis and the Bochner–Eberlein theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 263–270.

[21] И. С. Иохвидов, *Унитарные и самосопряженные операторы в пространствах с индефинитной метрикой*, Диссертация, Одесса 1950.

[22] И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, *Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, II*, Труды Москов. Мат. Общ. 8 (1959), 413–496; Englische Übersetzung Amer. Math. Soc. Transl. (2) 134 (1963) 283–373.

[23] I. S. Iohvidov, M. G. Krein, H. Langer, *Introduction to the Spectral Théory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric*, Akademie–Verlag, Berlin 1982.

[24] Р. С. Исмагилов, *Унитарные представления группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой*, Изв. Акад. Наук СССР, сер. мат. 30 (1966), 497–522.

[25] А. М. Яглом, *Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n-ми приращениями*, Мат. сборник. 37, 79 (1955), 141–196.

[26] S. Johansen, *An Application of Extreme Point Methods to the Representation of Infinitely Divisible Distributions*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 5 (1966), 304–316.

[27] М. Г. Крейн, *О логарифме безгранично разложимой положительно определенной функции*, ДАН 45 (1944), 99–102.

[28] —, *Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений и лоренцовы преобразования*, Успехи мат. наук. 3,3 (1948), 158–160.

[29] —, *Эрмитого-положительные ядра на однородных пространствах, I часть*, Укр. мат. Ж. АН УССР, 4 (1949), 64–98.

[30] —, *Об интегральном представлении непрерывной эрмитого индефинитной функции о конечным числом отрицательных квадратов*, ДАН СССР, 125, I (1958), 31–34.

[31] M. G. Krein, *Banach algebras of functions generated by the set of all almost periodic polynomials whose exponents belong to a given interval*, in *Linear and Complex Analysis Problem Book*, 199 Research Problems, Lecture Notes in Math., 1043, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1984.

[32] H. Langer, *On measurable Hermitian indefinite functions with a finite number of negative squares*, Acta Sci. Math. Szeged. 45 (1983), 282–292.

[33] Б. Я. Левин, *Об одном обобщении теоремы Фейера-Рисса*, Докл. АН. СССР 52 (1946), 291–294.

[34] M. A. Naimark, *On commuting unitary operators in spaces with an indefinite metric*, Acta Sci. Math. Szeged 24 (1963), 177–189.

[35] —, *Kommutative symmetrische Operatoralgebren in Pontryaginschen Räumen $\Pi_k$*, Math. Ann., 1962 (1965), 147–171.

[36] *On unitary group representations in spaces with indefinite metric*, Acta Sci. Math. Szeged 26 (1965), 201–209.

[37] —, *О структуре унитарных представлений локално компактных групп и симметричных представлений алгебр в пространствах Понтрягина $\Pi_k$*, Изв. Акад, Наук СССТ. 30 (1966), 1111–1132.

[38] —, *О представлениях коммутативных симметричных банаховых алгебр и коммутативных топологических групп в пространстве $\Pi_k$*, ДАН СССР 170, 2 (1966), 271–274.

[39] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York–London 1967.

[40] R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand, Princeton, N. J. 1966.

[41] М. С. Пинскер, *Теория кривых в гилбертовом пространстве со стационарными n-ми приращениями*, Изв. Акад. Наук СССР, 19 (1955), 319–344.

[42] В. И. Плющева, (В. И. Горбачук), *Об интегральном представлении непрерывных эрмитово-индефинитных ядер*, ДАН СССР 145, 3 (1962), 534–537.

[43] Z. Sasvári, *The Extension Problem for Measurable Positive Definite Functions*, Math. Z. 191 (1986), 475–478.

[44] —, *On measurable functions with a finite number of negative squares*, Acta Sci. Math. Szeged 50 (1986), 359–363.

[45] —, *On the Measurability of Positive Definite and Conditionally Positive Definite Functions*, Math. Nachr. 125 (1986), 239–242.

[46] Z. Sasvári, *On bounded functions with a finite number of negative squares*, Monatshefte Math. 99 (1985), 223–234.

[47] –, *Indefinite functions on commutative groups*, Monatshefte Math. 100 (1985), 223–238.

[48] –, *Über die Nullstellenmenge von charakteristischen Funktionen*, Math. Nachr. 121 (1985), 33–40.

[49] –, *Einige Beiträge zur Theorie der positiv definiten Funktionen mit Anwendungen für Charakterisations probleme der mathematischen Statistik*, Dissertation A, TU Dresden, Sektion Mathematik, 1984.

[50] I. J. Schoenberg, *Remarks to Maurice Fréchet's article, "Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert"*, Ann. of Math. 36 (1935), 724–732.

[51] –, *Metric spaces and positive definite functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 522–536.

[52] J. Stewart, *Positive definite functions and generalizations, an historical survay*, Rocky Mountain J. Math. 6 (1976), 409–434.

[53] –, *Functions with a finite number of negative squares*, Canad. Math. Bull. 15 (1972), 399–410.

[54] В. А. Штраус, *О непрерывных эрмитово-индефинитных функциях*, Мат. заметки 13 (2) (1973), 303–310.

[55] L. Székelyhidi, *Note on exponential polynomials*, Pacific J. Math. 103 (1982), 583–587.

[56] –, *Almost periodic functions and functional equations*, Acta Math. Szeged 42 (1980), 165–169.

[57] G. Van der Lijn, *La définition fonctionelle des polynomes dans les groupes abeliens*, Fund. Math. 33 (1939), 42–50.

[58] K. deLeeuw, I. Glicksberg, *The decomposition of certain group representations*, J. Analyse Math. 15 (1965), 135–192.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
SEKTION MATHEMATIK
8027 Dresden
Mommsenstr. 13
DDR