ZASTOSOWANIA MATEMATYKI
APPLICATIONES MATHEMATICAE
VIII (1965)

E. KĄCKI i W. KRYSICKI (Łódź)

POWIERZCHNIE O WILGOTNOŚCI ŚREDNIEJ

1. Wstęp. Wyznaczenie powierzchni o wilgotności średniej w prostopadłościennej beli włókna, tytoniu, czy innego materiału ma aspekt praktyczny. Znajomość przebiegu wymienionych powierzchni pozwala na wskazanie miejsc, w których należy pobierać próbkę dla określenia wilgotności całej beli. W niniejszej pracy zostały wyprowadzone równania powierzchni o wilgotności średniej dla stanu nieustalonego wilgotności oraz równania powierzchni asymptotycznych.

W rozważaniach przyjęto, że wszystkie punkty powierzchni ograniczającej belę znajdują się w jednakowych warunkach, tzn. że wymiana wilgotności z otoczeniem dla każdego punktu powierzchni, jest określona przez ten sam współczynnik $h \neq 0$, stąd symetria warunków względem środka symetrii obszaru prostopadłościennego.

Przez *powierzchnię asymptotyczną* rozumiemy graniczną powierzchnię o wilgotności średniej, gdy czas t trwania beli w środowisku o stałych parametrach dąży do nieskończoności ($t \to \infty$). Jeżeli pobieranie próbki odbywa się po dłuższym okresie przebywania beli w określonym środowisku, to należy sądzić, że średnia wartość wilgotności będzie w miejscach beli położonych bardzo blisko powierzchni asymptotycznej. W końcu artykułu umieszczone są praktyczne wskazania co do pobierania próbek oraz porównanie uzyskanych w pracy danych z wynikami podanymi przez J. Oderfelda w pracy [3].

2. Równania powierzchni o wilgotności średniej. W rozważaniach przyjmujemy, że materiał beli jest izotropowy i jednorodny, co w pewnych przypadkach może w większym lub mniejszym stopniu odbiegać od rzeczywistości.

Oznaczymy przez $W(x, y, z, t)$ funkcję określającą nieustalone pole wilgotności w prostopadłościennej beli, tzn. dla $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$ i czasu $t > 0$:

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, z, t) + w_s, \tag{1}$$

gdzie $w(x, y, z, t)$ jest przyrostem wilgotności względem wilgotności środowiska, a w_s jest stałą wilgotnością środowiska.

Funkcja $w(x, y, z, t)$ spełnia równanie różniczkowe dyfuzji:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{2}$$

gdzie $\varkappa$ jest współczynnikiem charakteryzującym materiał beli. Jak okaże się w dalszych rozważaniach, znajomość współczynnika $\varkappa$ nie jest konieczna do wyznaczenia równań powierzchni asymptotycznych o wilgotności średniej. Przyjmujemy, że w chwili $t = 0$ wilgotność całej beli była jednakowa i równa pewnej wartości w_0. Stąd mamy następujący warunek początkowy dla funkcji $W(x, y, z, t)$:

$$W(x, y, z, 0) = w_0+w_s. \tag{3}$$

Ponadto przyjmujemy, że na powierzchni beli funkcja $w(x, y, z, t)$ spełnia warunki brzegowe drugiego rodzaju, tzn. że składowa normalna gradientu wilgotności na powierzchni jest proporcjonalna do wilgotności powierzchni, przy czym współczynnik proporcjonalności charakteryzuje zdolność wymiany wilgotności z otoczeniem. Są to następujące warunki brzegowe:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=-a} = hw(-a, y, z, t), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = -hw(a, y, z, t),\\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=-b} = hw(x, -b, z, t), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y=b} = -hw(x, b, z, t),\\ \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=-c} = hw(x, y, -c, t), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=c} = -hw(x, y, c, t),\end{gathered} \tag{4}$$

gdzie $h \neq 0$ jest ilorazem współczynnika wymiany wilgotności charakteryzującego środowisko przez współczynnik charakteryzujący zdolność przewodzenia wilgotności przez materiał beli.

Stosując metodę rozdzielania zmiennych, tzn. szukając rozwiązania w klasie funkcji postaci $w(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$, spełniających równanie różniczkowe (2) i warunki brzegowe (4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= \\ &= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} A_{k,m,n}\cos\frac{\gamma_k}{a}x\cos\frac{\mu_m}{b}y\cos\frac{\nu_n}{c}z\exp\left[-\left(\frac{\gamma_k^2}{a^2}+\frac{\mu_m^2}{b^2}+\frac{\nu_n^2}{c^2}\right)\varkappa t\right],\end{aligned} \tag{5}$$

gdzie γ_k, μ_m, ν_n są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań

$$\operatorname{ctg}\gamma_k=\frac{\gamma_k}{ah}, \quad \operatorname{ctg}\mu_m=\frac{\mu_m}{bh}, \quad \operatorname{ctg}\nu_n=\frac{\nu_n}{ch}. \tag{6}$$

Tablice pierwiastków równań (6) znajdują się w dostępnych podręcznikach [1] i [2].

Wartości współczynników $A_{k,m,n}$ wyznaczamy z warunku początkowego (3):

$$A_{k,m,n} = \frac{w_0 \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c \cos\frac{\gamma_k}{a}x \cos\frac{\mu_m}{b}y \cos\frac{\nu_n}{c}z\,dx\,dy\,dz}{\int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c \cos^2\frac{\gamma_k}{a}x \cos^2\frac{\mu_m}{b}y \cos^2\frac{\nu_n}{c}z\,dx\,dy\,dz}, \tag{6a}$$

skąd po obliczeniu mamy

$$A_{k,m,n} = \frac{8w_0 \sin\gamma_k \sin\mu_m \sin\nu_n}{\gamma_k \mu_m \nu_n \left(1+\frac{\sin 2\gamma_k}{2\gamma_k}\right)\left(1+\frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right)\left(1+\frac{\sin 2\nu_n}{2\nu_n}\right)}. \tag{7}$$

Średnią wartość wilgotności w beli określa następująca funkcja czasu:

$$w_{\text{śr}}(t) = \frac{1}{abc}\int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^c w(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz = \tag{8}$$

$$= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \frac{A_{k,m,n}\sin\gamma_k \sin\mu_m \sin\nu_n \exp\left[-\left(\frac{\gamma_k^2}{a^2}+\frac{\mu_m^2}{b^2}+\frac{\nu_n^2}{c^2}\right)\varkappa t\right]}{\gamma_k \mu_m \nu_n}.$$

Równanie powierzchni o wilgotności średniej, w dowolnej chwili czasu t, ma następującą ogólną postać:

$$w(x, y, z, t) - w_{\text{śr}}(t) = 0. \tag{9}$$

W rozważanym przypadku równanie (9) przyjmuje postać

$$\sum_{k,m,n,=0}^{\infty} \left\{\left[\cos\frac{\gamma_k}{a}x \cos\frac{\mu_m}{b}y \cos\frac{\nu_n}{c}z - \frac{\sin\gamma_k \sin\mu_m \sin\nu_n}{\gamma_k \mu_m \nu_n}\right] \times \right.$$

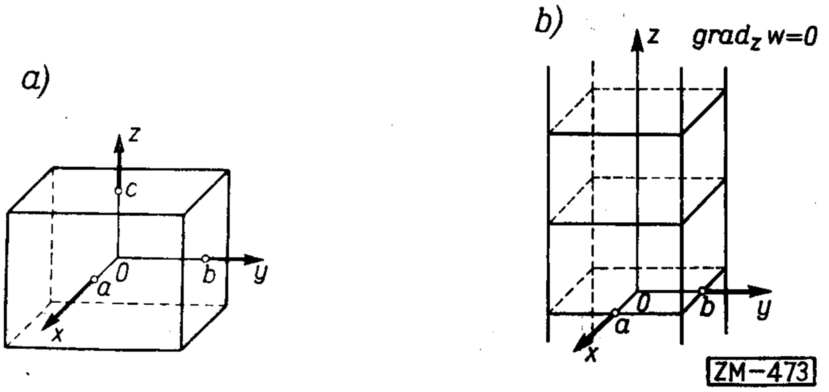
$$\left. \times \frac{A_{k,m,n}}{8w_0} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_k^2}{a^2}+\frac{\mu_m^2}{b^2}+\frac{\nu_n^2}{c^2}\right)\varkappa t\right]\right\} = 0. \tag{10}$$

Z założenia $h \neq 0$ wynika, że $A_{1,1,1} \neq 0$, zatem przy przejściu do granicy dla $t \to \infty$, otrzymujemy ze związku (10) równanie powierzchni asymptotycznej

$$\cos\frac{\gamma_1}{a}x \cos\frac{\mu_1}{b}y \cos\frac{\nu_1}{c}z - \frac{\sin\gamma_1 \sin\mu_1 \sin\nu_1}{\gamma_1 \mu_1 \nu_1} = 0. \tag{11}$$

W praktyce wygodnie jest operować zmiennymi bezwymiarowymi $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ i $\zeta = z/c$, które można wprowadzić do zależności (5), (10) i (11).

Wyprowadzone wyżej zależności dotyczą przypadku jednakowych warunków dla wszystkich sześciu ścianek beli (rys. 1a). Jeżeli bele są ułożone jedna na drugiej, ściśle przylegając do siebie, tworząc kolumnę (rys. 1b), to popełniamy minimalny błąd, szczególnie dla bel znajdujących się w środkowej części kolumny, przyjmując, że składowa gradientu



Rys. 1. a) Wszystkie ścianki beli znajdują się w jenakowych warunkach. b) Bele ułożone w kolumnę. Wymiana wilgotności z otoczeniem zachodzi tylko bocznymi ściankami kolumny

wilgotności w kierunku z (wzdłuż kolumny) jest zero. W przypadku wymienionego założenia mamy do czynienia z płaskim polem wilgotności, określonym przez funkcję $w(x, y, t)$ spełniającą równanie różniczkowe

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial w}{\partial t}, \tag{12}$$

warunek początkowy

$$w(x, y, 0) = w_0 \neq 0 \tag{13}$$

oraz warunki brzegowe

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=-a} = hw(-a, y, t), \qquad &\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = -hw(a, y, t), \\ &\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=-b} = hw(x, -b, t), \qquad &\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} = -hw(x, b, t), \end{aligned} \tag{14}$$

gdzie h, jak poprzednio, jest współczynnikiem wymiany wilgotności z otoczeniem. Analogicznie jak w poprzednim przypadku, znajdujemy funkcję $w(x, y, t)$ spełniającą równanie (12) oraz warunki (14):

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} \cos \frac{\gamma_m}{a} x \cos \frac{\mu_n}{b} y \exp\left[-\left(\frac{\gamma_m^2}{a^2} + \frac{\mu_n^2}{b^2}\right)\varkappa t\right], \tag{15}$$

gdzie γ_m i μ_n są kolejnymi dodatnimi pierwiastkami równań (6).

Wartość współczynników $A_{m,n}$ wyznaczamy z warunku początkowego (13), według wzoru analogicznego do wzoru (6a); po obliczeniu otrzymamy

$$(16) \qquad A_{m,n} = \frac{4w_0 \sin\gamma_m \sin\mu_n}{\gamma_m^2 \mu_n^2 \left(1 + \dfrac{\sin 2\gamma_m}{2\gamma_m}\right)\left(1 + \dfrac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)}.$$

Zmiany w czasie średniej wilgotności w beli dla rozpatrywanego przypadku określa funkcja

$$(17) \qquad w_{\acute{s}r}(t) = \frac{1}{ab}\int_0^a \int_0^b w(x, y, t)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{A_{m,n} \sin\gamma_m \sin\mu_n \exp\left[-\left(\dfrac{\gamma_m^2}{a^2} + \dfrac{\mu_n^2}{b^2}\right)\varkappa t\right]}{\gamma_m \mu_n}.$$

Powierzchnią o wilgotności średniej w dowolnej chwili t jest następująca powierzchnia walcowa:

$$(18) \qquad w(x, y, t) - w_{\acute{s}r}(t) = 0,$$

skąd mamy

$$(19) \qquad \sum_{m,n=0}^{\infty} \left\{\left(\cos\frac{\gamma_m}{a}x \cos\frac{\mu_n}{b}y - \frac{\sin\gamma_m \sin\mu_n}{\gamma_m \mu_n}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{A_{m,n}}{4w_0} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_m^2}{a^2} + \frac{\mu_n^2}{b^2}\right)\varkappa t\right]\right\} = 0.$$

Z założenia $h \neq 0$ wynika, że $A_{1,1} \neq 0$, więc przy przejściu do granicy dla $t \to \infty$, otrzymujemy ze związku (18) równanie powierzchni asymptotycznej średniej wilgotności dla rozważanego pola wilgotności. Jest to powierzchnia o równaniu

$$(20) \qquad \cos\frac{\gamma_1}{a}x \cos\frac{\mu_1}{b}y - \frac{\sin\gamma_1 \sin\mu_1}{\gamma_1 \mu_1} = 0.$$

Tu również, jak i w poprzednim przypadku można wprowadzić zmienne bezwymiarowe $\xi = x/a$ i $\eta = y/b$.

3. O granicznych położeniach powierzchni asymptotycznej. Z ogólnych równań (9) i (18) powierzchni asymptotycznych równania (10) i (19) będą jednakowe mimo bardzo ogólnych warunków początkowych dla funkcji $w(x, y, z, t)$ czy $w(x, y, t)$. Oznacza to, że zamiast warunku początkowego (3) można podać warunek $w(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$, jeżeli

$f(x, y, z)$ jest funkcją parzystą względem każdej ze zmiennych. Zatem wystarczy, aby dla początkowego pola wilgotności punkt $O(0, 0, 0)$ był środkiem symetrii. Uwaga analogiczna dotyczy warunku początkowego (13).

Z powyższych uwag wynika, że korzystne byłoby rozpatrzenie granicznych położeń powierzchni asymptotycznych obejmujących tak szeroką klasę przypadków, ze względu na graniczne wartości współczynnika wymiany wilgotności z otoczeniem. Będą to przypadki $h \to 0$ oraz $h \to \infty$. Graniczny przypadek dla $h \to 0$ dla warunku początkowego $w(x, y, z, 0) = 0$ jako trywialny nie byłoby celu rozpatrywać, natomiast dla omówionego wyżej ogólnego warunku $w(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$, oznaczałby wyrównywanie się wilgotności w beli bez wymiany wilgotności z otoczeniem.

Tak więc w przypadku $h = 0$, zamiast warunków (4), będziemy mieli do czynienia z następującymi warunkami brzegowymi:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\mp a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\mp b} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=\mp c} = 0. \tag{21}$$

Wówczas równanie powierzchni asymptotycznej jest postaci

$$\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\cos\frac{\pi z}{c} = 0. \tag{22}$$

Ściśle rzecz biorąc, otrzymujemy równanie powierzchni ograniczającej obszar następującej kostki:

$$-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} \leqslant z \leqslant \frac{c}{2}.$$

Analogicznie, dla płaskiego pola wilgotności zamiast warunków (14) mamy

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=\mp a} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\mp b} = 0. \tag{23}$$

Wówczas równanie asymptotycznej powierzchni walcowej jest postaci

$$\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b} = 0. \tag{24}$$

W tym przypadku otrzymujemy powierzchnię ograniczającą następujący walec:

$$-\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \frac{b}{2}.$$

Drugi graniczny przypadek, $h \to \infty$, odpowiada w przybliżeniu bardzo intensywnej wymianie wilgotności z otoczeniem. Warunki brzegowe odpowiadające temu przypadkowi są następujące:

$$w(\mp a, y, z, t) = 0, \quad w(x, \mp b, z, t) = 0, \quad w(x, y, \mp c, t) = 0. \tag{25}$$

W tym przypadku równanie powierzchni asymptotycznej ma postać

$$\cos\frac{\pi}{2a}x\cos\frac{\pi}{2b}y\cos\frac{\pi}{2c}z - \frac{8}{\pi^3} = 0. \tag{26}$$

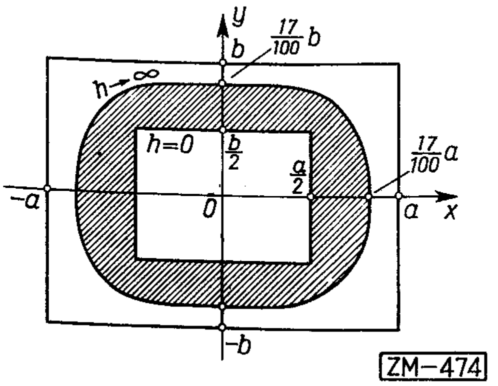
Analogicznie, dla przypadku płaskiego pola wilgotności, zamiast warunków (14) mamy

$$w(\mp a, y, t) = 0, \quad w(x, \mp b, t) = 0. \tag{27}$$

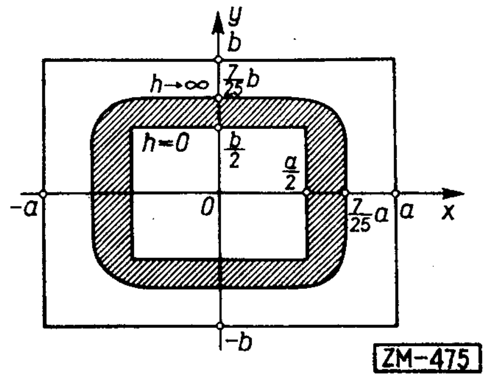
Równanie powierzchni asymptotycznej w tym przypadku jest następujące:

$$\cos\frac{\pi}{2a}x\cos\frac{\pi}{2b}y - \frac{4}{\pi^2} = 0. \tag{28}$$

4. Zakończenie. Równania (10) i (19) powierzchni o wilgotności średniej, a w szczególności równania (11) i (20) powierzchni asymptotycznych, pozwalają na ustalenie miejsc pobierania próby o wilgotności najbardziej zbliżonej do średniej wartości. Kształt powierzchni asymptotycznych nie zależy od warunku początkowego o ile pole wilgotności w chwili



Rys. 2. Przekrój beli płaszczyzną $z = 0$. Obszar zakreskowany jest zawarty między granicznymi powierzchniami asymptotycznymi (wzory (22) i (26)). Przypadek przestrzennego pola wilgotności



Rys. 3. Przekrój beli płaszczyzną $z = 0$. Obszar zakreskowany jest zawarty między granicznymi powierzchniami asymptotycznymi (wzory (24) i (28)). Przypadek płaskiego pola wilgotności

początkowej $t = 0$ miało środek symetrii w punkcie $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Stąd wniosek, że bez względu na wartość wilgotności środowiska i niezależnie od tego czy następuje proces nasilenia wilgotności, czy osuszania, równania powierzchni asymptotycznych wilgotności średniej są jednakowe. Stąd możliwość dość ogólnego stosowania tych równań. W przypadku nieznajomości parametrów charakteryzujących materiał beli i środowiska, można korzystać z granicznych przypadków powierzchni asymptotycznych, $h = 0$ lub $h \to \infty$. Biorąc pod uwagę graniczne położenie powierzchni asymptotycznych otrzymujemy, że najkorzystniej jest pobierać próbę w odległości $8{,}5\% < p_I < 25\%$ długości odcinka przebicia, liczonej od powierzchni beli (patrz rys. 2) wzdłuż dowolnej osi symetrii beli. Zalecana przez J. Oderfelda w końcowych wnioskach pracy [3] wartość p wynosi $p = 12{,}5\%$, a zatem mieści się pomiędzy wyznaczonymi w niniejszej pracy położeniami granicznymi powierzchni asymptotycznych.

Dla przypadku II dotyczącego płaskiego pola wilgotności otrzymaliśmy $14\% < p < 25\%$ (patrz rys. 3).

Prace cytowane

[1] E. Kącki i E. Guz, *Wybrane zagadnienia z termokinetyki*, Łódź 1962.

[2] A. Лыков, *Теория теплопроводности*, Moskwa 1952.

[3] J. Oderfeld, *Powierzchnie o wilgotności średniej*, Zastosow. Mat. 4 (1959), str. 341-349.

Praca wpłynęła 27.1. 1964

Е. КОНЦКИ и В. КРЫСИЦКИ (Лодзь)

ПОВЕРХНОСТИ СРЕДНЕЙ ВЛАЖНОСТИ

РЕЗЮМЕ

В работе выведено уравнения ((10), (19)) поверхности средней влажности в параллелепипедной кипе для случая пространственного и плоского поля влажности при условии, что начальное поле влажности (при $t = 0$) однородно (3), т. е. $w(x, y, z, 0) = w_0 \neq 0$. Далее, определено уравнения ((11), (20)) асимптотических поверхностей, применимые к значительно более широкому классу случаев, так как уравнения (11), (20) не зависят от начальных условий если начальное поле влажности является централъно симметрическим полем относительно точке $O(0, 0, 0)$.

В формулах, выведенных в работе учитиваются параметры, характеризующие материал кипы а также интенсивность обмена влажности с окружающей средой. Указанные параметры не всегда известны, поэтому добавочно определены пределные положения асимптотических поверхностей независящие от этих параметров. Первое предельное расположение ((22), (24)) соответствует отсутствию обмена влажности с окружающей средой а другое предельное расположение ((26), (28)) асимптотической поверхности соответствует неограниченно интенсивному обмену влажности с окружающей средой. В конце работы даны некоторые указания относительно выбора точки снятия проб для определения средней влажности кипы (см. черт. 2 и 3).

E. KĄCKI and W. KRYSICKI (Łódź)

SURFACES OF MEAN HUMIDITY

SUMMARY

The authors introduce the equations ((10, (19)) of surfaces of mean humidity in a rectangular parallelepiped bale for the cases of a spatial and a plane humidity field under the assumption that the initial humidity field (for $t = 0$) is homogeneous (3), i. e. $w(x, y, z, 0) = w_0 \neq 0$. The equations ((11), (20)) of asymptotic surfaces are then determined, comprising a much wider class of cases since they do not depend on the initial conditions if the initial humidity field has its centre of symmetry at point $O(0, 0, 0)$.

The formulas derived in the paper contain parameters characterizing the material of which the bale is composed and the intensity of humidity exchange with the invironment. Those parameters are not always known, and that is why the authors additionally determine the limit locations of the asymptotic surfaces, independent of the parameters in question. The first limit location ((22), (24)) corresponds to the case where there is no humidity exchange with the environment, and the second limit location ((26), (28)) of the asymptotic surface corresponds to the case where the humidity exchange with the environment has an unlimited intensity. At the end of their paper the authors make certain suggestions as to the place of taking the sample for determining the mean humidity of the bale (see figs. 2 and 3).