ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Sur l'approximation de la représentation conforme par la méthode des points extrémaux de M. Leja

par W. Kleiner (Kraków)

1. Le problème. Soit D un domaine plan simplement connexe contenant le point à l'infini, dont la frontière Γ ne se réduit pas à un point. La méthode des points extrémaux [1], [2] permet une construction de la représentation conforme du domaine D sur un cercle $|w| > d = d(\Gamma)$ comme la limite de la suite (¹)

$$(1) \qquad f_n(z) = \sqrt[n]{(z-\eta_{n1})(z-\eta_{n2})\dots(z-\eta_{nn})} \to f(z) \qquad (z \in D)$$

où les points extrémaux de Fekete-Leja $(\eta_{n1}, \dots, \eta_{nn})$ sont définis comme n points sur Γ tels que le produit

$$V_n = \prod_{i \neq k} |\eta_{ni} - \eta_{nk}|$$

soit le plus grand possible (²); $d(\Gamma) = \lim V_n^{1/n(n-1)} > 0$ est dit diamètre transfini de Γ. Les racines dans (1) sont à choisir de manière que $f_n'(\infty) = 1$.

Nous nous proposons d'examiner de plus près la convergence de la suite (1), ce qui nous conduira à l'étude de la convergence des systèmes (η_{nk}) vers une distribution limite. À la fin du travail nous démontrons la convergence d'une suite effectivement donnée (cf. [10], [11]) de polynômes (26) vers la représentation conforme, qui est uniforme dans le cercle fermé. Autant que nous sachions, aucune pareille suite n'est connue.

Le problème de la limitation des approximations, obtenues par la méthode des points extrémaux, souvent mentionné aux séminaires de M. Leja, a été posé de nouveau, en 1958, par M. Erdös. L'auteur a été amené à étudier ces questions en étudiant la convergence de la suite (26), problème posé par M. Szybiak.

Nous employons les notations et les résultats de [3].

(¹) Les fonctions $f_n(z)$ diffèrent un peu de celles considérées par M. Leja.

(²) S'il existe pour un n plusieurs systèmes de tels points, nous en choisissons l'un quelconque.

2. Esquisse de résolution. Soit η_n une mesure discrète, portant la masse $1/n$ en tout point η_{nk} et s'annulant en dehors de ces points, et η la mesure d'équilibre sur Γ. On a $\eta = \lim \eta_n$, [4], et on appelle parfois η *mesure extrémale sur* Γ; donc $\log 1/f(z) = \lim \log 1/f_n(z) = \lim \int \log (z-\zeta)^{-1} d\eta_n$ $= \int \log(z-\zeta)^{-1} d\eta \;\; (z \in D)$.

Par la méthode donneé dans [6] on démontre une inégalité de la forme

$$\|\eta - \eta_n\|^2 \leqslant c_1 \frac{\log n}{n}; \tag{2}$$

de l'inégalité (33) de [3] on tire (³)

$$[\eta - \eta_n] \leqslant c_2 \frac{\log n}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

et, de même que (38) dans [3], on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_n(z) &= \left|\log \frac{1}{f(z)} - \log \frac{1}{f_n(z)}\right| = \left| \int \log \frac{1}{z-\zeta} d(\eta - \eta_n)(\zeta) \right| \\ &\leqslant [\eta - \eta_n] V(z) \leqslant c_2 V(z) \frac{\log n}{\sqrt{n}} \quad \text{où} \quad V(z) = \operatorname*{Var}_{\zeta \in \Gamma} \log \frac{1}{z-\zeta}. \end{aligned} \tag{4}$$

La présence du facteur $V(z)$ est tout à fait naturelle: pour $z \to \eta_{nk}$, on a $f_n(z) \to 0$ et $|f(z)| \to 1$, et alors $\Delta_n(z) \to \infty$.

Ces considérations si simples présentent pourtant un défaut embarassant. En effet, $\eta - \eta_n$ est d'énergie infinie; l'inégalité (2) ne devient vraie que si l'on y remplace η_n par une mesure continue approchée, par exemple γ_n, ce qui rend impossible, à son tour, l'application immédiate des théorèmes 5 et 6 de [3].

Passons donc à un calcul détaillé.

3. Les mesures extrémales. Nous supposons que la frontière $\partial D = \Gamma$ est une courbe de la classe C^{1H}, c'est-à-dire qu'elle possède en tout point $z \in \Gamma$ une tangente, faisant avec l'axe réel l'angle $\varphi = \varphi(z)$, et que $\varphi(z)$ satisfait à la condition de Hölder. Pour éviter des complications inutiles, supposons de plus que sa longueur $|\Gamma| < 1$. Soit η *la mesure d'équilibre sur* Γ, c'est-à-dire la mesure positive sur Γ de masse totale 1, pour laquelle $\|\eta\|$ est minimum. On sait [5] que $2\pi\eta(L)$ est égal à la mesure angulaire de l'image de L sur la circonférence $|w| = d$ par la représentation conforme $w = f(z)$, (1).

Désignons par η la mesure discrète positive de masse totale 1 telle que $\eta_n(\eta_{nk}) = 1/n \;\; (k = 1, \ldots, n)$. Soit $K_{nj} = K(\eta_{nj}, 1/n^3)$ une circonférence de rayon $1/n^3$ et de centre η_{nj}, et γ_n une mesure sur $K_{n1} \cup \ldots \cup K_{nn}$ de densité constante $n^2/2\pi$.

(³) Plus strictement, on le fait au moyen de l'inégalité $[\sigma]^2 \leqslant c_0 \|\sigma\|^2 \log \|\sigma\|^{-2}$, qui s'obtient de la même manière que (33).

Soit $n^{-3} < r$ ([3], § 4), L un arc quelconque de Γ, a, b ses extrémités, A, B des segments rectilignes de longueurs $2r$, de centres a, b respectivement, normals à Γ aux points a, b. L'ensemble $\Gamma^* = \Gamma \cup K_{n1} \cup \ldots \cup K_{nn}$ est partagé par $A \cup B$ en deux parties dont l'une contient L; nous désignons cette partie par L^* (fig. 1). Posons, pour une mesure quelconque σ sur Γ^*,

$$[\sigma] = \sup_{L \in A} |\sigma(L^*)| \tag{5}$$

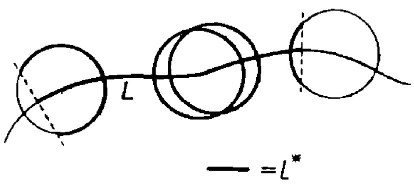

Fig. 1

(si σ est portée par Γ, cette définition équivaut à celle de [3]). On a démontre facilement (par (14), cf. 134-135) que

$$|[\eta - \gamma_n] - [\eta - \eta_n]| \leqslant \mathrm{const}/n^3 . \tag{6}$$

Posons encore

$$\sigma_n = \eta - \gamma_n . \tag{7}$$

Pour trouver une limitation de $[\sigma_n]$, nous allons étudier — suivant l'idée exposée dans [3] — l'énergie $\|\sigma_n\|^2$. Soit η^* la mesure d'équilibre sur Γ^*. Comme $\Gamma \subset \Gamma^*$, on a

$$\|\eta\|^2 \geqslant \|\eta^*\|^2 \geqslant \|\eta\|^2 - d^{-1}n^{-2}; \tag{8}$$

la dernière inégalité s'obtient de la même façon que dans [6]. D'autre part $U^{\eta^*}(z) = \|\eta^*\|^2$ pour tout $z \in \Gamma^*$ ([7], th. III, 38), donc (voir [3], (6))

$$(\eta^*, \eta^* - \gamma_n) = \int U^{\eta^*} d(\eta^* - \gamma_n) = \int \|\eta^*\|^2 d(\eta^* - \gamma_n) = 0$$

et nous avons l'égalité de Pythagore, que nous écrirons

$$\|\eta^* - \gamma_n\|^2 = \|\gamma_n\|^2 - \|\eta^*\|^2 . \tag{9}$$

Pareillement

$$\|\eta - \eta^*\|^2 = \|\eta\|^2 - \|\eta^*\|^2 \leqslant d^{-1}n^{-2} . \tag{10}$$

Nous avons, de même que (4), (5), (6) dans [6],

$$\|\gamma_n\|^2 \leqslant 3n^{-1}\log n + I_n \leqslant 3n^{-1}\log n + \|\eta\|^2 \tag{11}$$

donc, par (9), (8), (11),

$$\|\eta^* - \gamma_n\|^2 \leqslant 3n^{-1}\log n + d^{-1}n^{-2} . \tag{12}$$

De l'inégalité du triangle et des inégalités (10), (12) on tire

$$\|\sigma_n\| = \|\eta - \gamma_n\| \leqslant \|\eta - \eta^*\| + \|\eta^* - \gamma_n\| \leqslant \sqrt{d^{-1}n^{-2}} + \sqrt{3n^{-1}\log n + d^{-1}n^{-2}}\,,$$

donc

$$\|\sigma_n\|^2 \leqslant \frac{4\log n}{n} \qquad (n \geqslant n_0(\Gamma))\,. \tag{13}$$

4. Limitation. Le théorème 5 de [3] ne s'applique pas immédiatement à σ_n, car l'ensemble Γ^* dépend de n. Pour parer à cet inconvénient nous allons répéter ici la démonstration de ce théorème, en y introduisant des modifications nécessaires.

On peut s'arranger, dans le lemme 4 du [3], de façon que les droites l, l_1, l_2 ne coupent aucun cercle $Q_{nj} = K(\eta_{nj}, 2/n^2)$ pour $n \geqslant n_1(\Gamma)$ — sauf pour l à l'intérieur de C_r. Soit, en effet, E^* l'ensemble des valeurs de $\theta(z)$ pour $z \in Q_{nj} - C_r$:

$$E^* = \{\theta\colon \theta \in \langle 0, \pi/4\rangle\,,\ \theta = \theta(z)\,,\ z \in Q_{n1} \cup \ldots \cup Q_{nn}\,,\ z \notin C_r\}\,.$$

On a, pour n suffisamment grands, $|E^*| \leqslant n \cdot 2n^{-2}/r < \pi/4 - |E|$ $(n \geqslant n_2(\Gamma))$, et θ_0 peut être choisi dans $\langle 0, \pi/4\rangle - E - E^*$. La propriété (14) de [3] se démontre sans aucune modification (en particulier, ε, ϑ et N restent indépendants de n). Pour l_1 et l_2 on procède d'une façon analogue.

$\Gamma \in C^{1H}$, donc, en vertu d'un théorème de Kellog sur la représentation conforme ([8], p. 468) η est de densité bornée:

$$g_0|L| \leqslant \eta(L) \leqslant g|L| \qquad (L \subset \Gamma,\ 0 < g_0 \leqslant g < \infty)\,. \tag{14}$$

Soit L_n un arc de Γ, d'extrémités a_n, b_n, pour lequel

$$\sigma_n(L_n^*) = [\sigma_n]\,.$$

Nous pouvons supposer que l'on a $|L_n| \geqslant 5/n^2$ — car pour un n satisfaisant à $\sigma_n(L_n^*) \leqslant \eta(L_n) \leqslant g|L_n| < 5g/n^2$ l'inégalité (3) est immédiate. Soit L_n' resp. L_n'' un arc partiel de L_n de longueur $2/n^2$, dont a_n resp. b_n est une des extrémités. Soit E_k *la projection de* Q_{nk} *sur* Γ, c'est-à-dire le plus petit arc de Γ tel que $Q_{nk} \subset E_k^*$, et $E' = E_1 \cup \ldots \cup E_n$.

Lemme. *Pour* $n \geqslant n_4(\Gamma)$, L_n' *et* L_n'' *n'ont pas de points communs avec* E'.

Démonstration. Soit b' le dernier point de E' sur L_n', à partir de a_n. Si l'arc $\cup\, a_n b' \subset E'$, alors

$$(\eta - \gamma_n)(\cup\, a_n b') \leqslant g|\cup\, a_n b'| - n^2(2\pi)^{-1}|\cup\, a_n b'| < 0$$

pour $n \geqslant n_4'(\Gamma)$. S'il existe, au contraire, un point sur $\cup\, a_n b'$ qui n'appartient pas à E', un Q_{nj} se projette tout entier sur $\cup\, a_n b'$, donc

$$(\eta - \gamma_n)(\cup\, a_n b') \leqslant g|L_n'| - 1/n = 2g/n^2 - 1/n < 0$$

pour $n \geqslant n_4''(\Gamma)$. Par conséquent $\sigma_n(L_n) < \sigma_n(L_n - L_n')$, ce qui est en contradiction avec la définition de L_n.

Les considérations qui suivent s'appuient sur la démonstration du théorème 5 de [3]; les chiffres 1°, 2°, ... indiquent les parties correspondantes de cette démonstration, où l'on trouvera aussi les définitions de quelques symboles utilisés ici.

1°. Partageons $L_n - L_n' - L_n''$ en $p \leqslant 3N^*$ arcs $A_1, \ldots, A_p$, chacun de longueur $\leqslant r/3$. Sur chaque a_i il existe un point z_i à distance $> 1/n^2$ de $K_{n1} \ldots K_{nn}$, pourvu que $n \geqslant n_5(\Gamma)$. Nous fixons encore deux points z', z'' qui partagent L_n' resp. L_n'' en deux parties de longueur $1/n^2$. Annulons le partage précédent et partageons L_n au moyen des points $z', z_2, z_4, \ldots$ $\ldots, z_{2q}, z''$ en $q+2 \leqslant 2N^*$ arcs $A', A_1, \ldots, A_q, A''$. Nous pouvons supposer que $|\sigma_n|(A'^* + A''^*) < 2g/n^2 < [\sigma_n]/3N^*$; si la dernière inégalité était fausse pour un n, nous aurions déjà (3). Pour un A_j, que nous noterons L, on a alors

$$\sigma_n(L^*) \geqslant [\sigma_n]/3N^* , \quad |L| < r . \tag{15}$$

Nous séparons L de $\Gamma - L$ par un quadrilatère de côtés l, l_1, l_2, l_3, construits conformément à la remarque faite au commencement de ce paragraphe. Observons que pour $n \geqslant n_8(\Gamma)$ ces droites ne s'approchent pas trop de K_{nj} non seulement à l'extérieur de C_r, mais aussi dans C_r, car le η_{nj} le plus proche se trouve à une distance $\geqslant n^{-2}\sin\varepsilon$ de l resp. l_3. C'est pourquoi nous avons consacré tant de soin aux voisinages des extrémités de L.

2°. Soit Q la classe des mesures μ sur Γ^* telles que

$$\mu(\Gamma^*) = 0 , \quad [\mu] = \mu(L) = \sigma_n(L) > [\sigma_n]/3N^* , \quad |\mu| \leqslant \nu = \eta + \gamma_n , \tag{16}$$

et μ_0 la mesure minimale dans Q. Soit, par exemple, $\mu(D_1) \leqslant -\frac{1}{4}[\mu_0]$ et soit Γ^{*-} la partie de Γ^* séparée de L par l, et $\Gamma^{*+} = \Gamma^* - \Gamma^{*-}$. On a $\mu_0(\Gamma^{*-}) \leqslant \mu_0(D_1) \leqslant -\frac{1}{4}[\mu_0]$. Soit τ une mesure majorée par $\nu = \eta + \gamma_n$, $\tau(\Gamma^*) = 0$, $\tau(\Gamma^{*-}) = \mu_0(\Gamma^{*-})$ pour laquelle $\|\tau\|$ est la plus petite. Nous avons

$$\begin{gathered} \|\sigma_n\| \geqslant \|\tau\| , \quad \tau^+(\Gamma^*) \geqslant [\sigma_n]/12N^* , \quad |\tau| \leqslant \nu = \eta + \gamma_n , \\ \tau \geqslant 0 \quad \text{dans } \Gamma^{*+}, \quad \tau \leqslant 0 \quad \text{dans } \Gamma^{*-}. \end{gathered} \tag{17}$$

4°. Nous effectuons maintenant une symétrisation et nous obtenons les mesures λ_s. L'analogue du cas 5° s'étudie avec une légère modification: on prend $\vartheta - n^{-3}$ au lieu de ϑ. Pour le cas 6°, soit A^* le support de λ_s^+. Pour $z \in K_{nj} \subset A^*$ on a $\operatorname{im} z \geqslant n^{-2}\sin\varepsilon - n^{-3} \geqslant \frac{1}{2}n^{-2}\sin\varepsilon$ $(n \geqslant n_9(\Gamma))$ (l a été choisie pour axe réel).

Soit θ la restriction de λ_s à $A+\bar{A}$ ($\bar{A}$ symétrique à A), $\beta=\lambda_s-\theta$. Par la cosymétrie $(\theta,\beta)\geqslant 0$ et

$$\|\sigma_n\|^2\geqslant\|\lambda_s\|^2\geqslant\|\theta+\beta\|^2\geqslant\|\theta\|^2+\|\beta\|^2\,. \tag{18}$$

Deux cas sont à distinguer:

6°a. $\theta(A)\geqslant\frac{1}{2}\lambda_s(A)$. Comme $|\theta|\leqslant\eta$, on a d'après [3], (28), (26)

$$\|\theta\|^2\geqslant c_3\theta(A)^2/\log\frac{1}{\omega_\eta^{-1}\big(\frac{1}{2}\theta(A)\big)}$$

où ω_η est le module de continuité de $\nu=\eta$. La densité de η sur A est $\leqslant g$, donc

$$\|\sigma_n\|^2\geqslant\|\theta\|^2\geqslant c_3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3N^*(2N+2)}\right)^2[\sigma_n]^2/\log\frac{g}{M^*[\sigma_n]}; \tag{19}$$

c_3 et M^* dépendent seulement de Γ.

6°b. $\beta(A^*)\geqslant\frac{1}{2}\lambda_s(A)$. β est concentrée sur quelques K_{nj} dont les centres $\epsilon\,A$. Nous partageons A^* en parties $A_1,\dots,A_p$ au moyen des droites $\operatorname{im}z=y_\varkappa$ ([3], (24)), p étant choisi de manière que l'on ait

$$\tfrac{1}{4}n^{-2}\sin\varepsilon\leqslant y_p\leqslant\tfrac{1}{2}n^{-2}\sin\varepsilon;$$

nous prenons à cet effet

$$p=\left[\frac{\log\left(\dfrac{\vartheta}{\sin\varepsilon}n^2\right)}{\log(1+\sin\varepsilon)}\right]+1\,. \tag{20}$$

Cela étant, aucun K_{nj} n'est situé dans la bande $-y_p\leqslant\operatorname{im}z\leqslant y_p$. Pour $z,\zeta\,\epsilon\,A_\varkappa$ $(\varkappa\leqslant p)$

$$\frac{|z-\bar{\zeta}|}{|z-\zeta|}\geqslant\frac{2y_\varkappa}{(y_{\varkappa-1}-y_\varkappa)\sin^{-1}\varepsilon+2n^{-3}}\geqslant\frac{2y_\varkappa}{y_\varkappa+2n^{-3}}\geqslant\frac{2y_\varkappa}{\frac{4}{3}y_\varkappa}=\frac{3}{2}, \tag{21}$$

puisque

$$\frac{2}{n^3}<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{n^2}<\frac{1}{3}y_\varkappa$$

(pour $n\geqslant n_{10}(\Gamma)$). Nous posons maintenant

$$\beta_\varkappa=\text{restriction de }\beta\text{ à }A_\varkappa+\bar{A}_\varkappa\qquad(\varkappa=1,\dots,p)$$

et nous obtenons, de même que l'inégalité (28) pour λ_k dans [3],

$$\|\beta\|^2\geqslant\frac{\beta^+(A)^2}{p}\log\frac{3}{2} \tag{22}$$

(p est donné la formule (20)).

7°. Moyennant des considérations analogues à celles de [3] nous uniformisons les résultats et nous avons

$$\|\sigma_n\|^2 \geqslant c_4[\sigma_n]^2 \frac{1}{\log \dfrac{n^2}{M^*[\sigma_n]}} \qquad (n \geqslant n_{11}(\Gamma))$$

où les constantes positives c_4, M^* (autres que c, M de [3]) et n_{11} dépendent de Γ seulement. Par des calculs élémentaires nous en tirons

$$[\sigma_n]^2 \leqslant c_5 \|\sigma_n\|^2 \log \frac{n}{\|\sigma_n\|^2} \qquad (n \geqslant n_{12}(\Gamma)) \text{ (}^4\text{)} .$$

$x^2 \log x^{-2}$ est une fonction croissante pour $x \in (0, e^{-1/2}\rangle$, donc, en vertu de (13),

$$[\sigma_n]^2 \leqslant 8c_5 \frac{(\log n)^2}{n} \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant \max(n_0, 20) .$$

Nous y ajoutons (6) et éliminons la restriction sur n en augmentant la constante $8c_5$, ce qui nous donne le

THÉORÈME 1. *Il existe une constante positive c, ne dépendant que de* $\Gamma \in C^{1H}$, *telle que* (5)

$$[\eta - \eta_n] \leqslant c \frac{\log n}{\sqrt{n}} . \tag{23}$$

Comme au théorème 8 de [3] nous obtenons l'inégalite

$$|\log f_n(z) - \log f(z)| = \left| \int \log \frac{1}{z-\zeta} d(\eta - \eta_n)(\zeta) \right| \leqslant [\eta - \eta_n] V(z) ,$$

où

$$V(z) = \underset{\zeta \in \Gamma}{\operatorname{Var}} \log \frac{1}{z-\zeta} . \tag{24}$$

Il en résulte, par (23), une limitation de l'erreur relative de l'approximation de f par f_n:

THÉORÈME 2.

$$\left| \log \frac{f_n(z)}{f(z)} \right| \leqslant c V(z) \frac{\log n}{\sqrt{n}} \qquad (z \in D) .$$

5. Approximation par des polynômes. Soit $\varphi(w)$ la fonction inverse de $f(z)$. Désignons par $w_{nk} = d \exp(2\pi i k/n + \psi)$ les points extrémaux de la circonférence $|w| = d$, et par ε_{nk} leurs images conformes sur Γ:

$$\varepsilon_{nk} = \varphi(w_{nk}) .$$

---

(4) La position spécifique des centres des K_{nj} ne joue aucun rôle dans la démonstration de cette inégalité; elle aura donc lieu pour toute mesure σ_n, concentrée sur Γ (où $|\sigma_n(E)| \leqslant g|E|$) et sur n circonférences de rayons $1/n^3$ et de centres arbitraires sur Γ (où $|\sigma_n(E)| \leqslant |E| n^2/2\pi$), de masse nulle: $\sigma_n(\text{plan}) = 0$.

(5) La restriction $|\Gamma| < 1$ se lève comme dans [3].

Le nombre réel ψ soit choisi de sorte que l'on ait $\varepsilon_{n1} = \eta_{n1}$. Pour un arc quelconque $L \subset \Gamma$ qui contient q points ε_{nk}, on a (voir § 3)

$$|\eta(L) - q/n| \leqslant 1/n\,. \tag{25}$$

Introduisons, pour chaque n, deux polynômes de degré $n-1$ de la variable $1/w$, P_n et S_n, définis par les conditions

$$\begin{aligned} P_n(w_{nk}) &= \varepsilon_{nk} - w_{nk}\,, \\ S_n(w_{nk}) &= \eta_{nk} - w_{nk}\,, \end{aligned} \qquad (k = 1\,, 2, \ldots, n)\,. \tag{26}$$

Les polynômes P_n, obtenus par l'interpolation de $\varphi(w) - w$, convergent uniformément vers cette fonction [9]:

$$P_n(w) \rightrightarrows \varphi(w) - w \qquad (|w| \geqslant d)\,. \tag{27}$$

Mais la définition de P_n exige la connaissance de $\varphi(w)$, tandis que pour celle de S_n la connaissance des points extrémaux η_{nk} suffit; celle du diamètre transfini $d = d(\Gamma)$ n'est pas essentielle, comme nous le montrerons dans la suite.

THÉORÈME 3. *Pour $\Gamma \in C^{1H}$ la suite $S_n(w)$ de polynômes en $1/w$, définie par la pseudo-interpolation* (26), *tend uniformément vers $\varphi(w) - w$*:

$$S_n(w) \rightrightarrows \varphi(w) - w \qquad (|w| \geqslant d)\,.$$

Démonstration. Introduisons les "polynômes de Lagrange"

$$L_n^j(w) = \prod_{k \neq j} \frac{w^{-1} - w_{nk}^{-1}}{w_{nj}^{-1} - w_{nk}^{-1}};$$

on a $L_n^j(w_{nk}) = \delta_{jk}$, donc

$$|S_n(w) - P_n(w)| = \Big|\sum_{k=1}^{n} (\eta_{nk} - \varepsilon_{nk}) L_n^j(w)\Big| \leqslant \max_k |\eta_{nk} - \varepsilon_{nk}| \sum_{k=1}^{n} |L_n^j(w)|\,.$$

$L_n^j(1/t)$ sont les polynômes de Lagrange habituels; nous profitons donc d'une limitation connue de la somme de leurs valeurs absolues:

$$|S_n(w) - P_n(w)| \leqslant \max_k |\eta_{nk} - \varepsilon_{nk}| c_4 \log n \qquad (|w| \geqslant d)\,.$$

Soit H_k l'arc $\smile \eta_{n1}\eta_{nk}$ de Γ (⁵), dont l'orientation est induite par celle de Γ, et E_k l'arc analogue $\smile \varepsilon_{n1}\varepsilon_{nk}$. On a

$$|\eta_{nk} - \varepsilon_{nk}| \leqslant |\pm H_k \mp E_k|\,.$$

Mais

$$|\eta(E_k) - k/n| \leqslant 1/n$$

et comme $\eta_n(H_k) = k/n$,

$$|\eta(E_k) - \eta_n(H_k)| \leqslant 1/n\,.$$

(⁵) Nous supposons que la numération des η_{nk} correspond à l'orientation de Γ.

Par le théorème 1

$$|\eta_n(H_k)-\eta(H_k)| \leqslant [\eta-\eta_n] \leqslant c\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

et en s'appuyant sur (14), on a

$$(28)\qquad |\eta_{nk}-\varepsilon_{nk}| \leqslant |\pm E_k \mp H_k| \leqslant g_0^{-1}|\eta(E_k)-\eta(H_k)| \leqslant g_0^{-1}(n^{-1}+cn^{-1/2}\log n) < c_6 n^{-1/2}\log n$$

et

$$|S_n(w)-P_n(w)| \leqslant c_7 n^{-1/2}(\log n)^2 \qquad (|w| \geqslant d)$$

(où c_7 dépend seulement de Γ). En vertu de (27) le théorème est ainsi établi.

Si Γ est une courbe analytique, $|P_n(w)-\varphi(w)+w| \leqslant MC^{-n}$ $(C=C(\Gamma)>1$, $M=M(\Gamma))$ [9]. Dans ce cas on a $|S_n(w)-\varphi(w)+w| \leqslant c_8(\log n)^2 n^{-1/2}$.

La valeur exacte d n'est pas connue en général. Soit alors $a_n = d_n/d$, $d_n = V_n^{1/n(n-1)}$ (voir p. 131), et $w^* = a_n w$, $w^*_{nk} = a_n w_{nk}$, $\eta^*_{nk} = a_n\eta_{nk}$. Soient S^*_n, S^{**}_n des polynômes en $1/w$ du degré $n-1$, tels que

$$S^*_n(w^*_{kn}) = \eta^*_{nk}-w^*_{nk}, \qquad S^{**}_n(w^*_{nk}) = \eta_{nk}-w^*_{nk}\,.$$

Or, $S^*_n(w^*) = a_n S_n(w)$ et

$$|S^*_n(w^*)-S^{**}_n(w^*)| = \Big|\sum (\eta^*_{nk}-\eta_{nk})L^j_n(w)\Big| \leqslant R(a_n-1)c_4\log n\,,$$

où $R = \max_\Gamma |z|$. On a $0 \leqslant a_n-1 \leqslant \mathrm{const}\cdot n^{-1}\log n$ ([6], p. 173, où une erreur triviale est à corriger), donc

$$S^{**}_n(w^*)-S_n(w) \rightrightarrows 0, \qquad S^{**}_n(w^*) \rightrightarrows \varphi(w)-w \qquad (|w| \geqslant d)\,.$$

La position du point w^* par rapport à la circonférence $|w^*| = d_n$ est la même que celle de w par rapport à $|w| = d$. Quant à φ même, on a $\varphi(w) = \lim S^*_n(w^*)+w^*$ uniformément dans $d \leqslant |w| \leqslant \varrho$, pour tout ϱ fini, et

$$\frac{S^*_n(w^*)+w^*}{w} \rightrightarrows \frac{\varphi(w)}{w} \qquad (d \leqslant w \leqslant \infty)\,.$$

Moyennant une inversion, on obtient une méthode de construction d'une suite de polynômes (proprement dits) pour l'approximation uniforme de la représentation conforme d'un cercle sur un domaine borné.

6. La condition $\Gamma \in C^{1H}$ peut être affaiblie. Supposons seulement que

(29) Γ soit la réunion d'un nombre fini d'arcs $\Gamma_i \in C^{1H}$ qui se coupent aux "sommets" $z_1, \ldots, z_s$ sous les angles $\psi_1, \ldots, \psi_s$, $0 < \psi_0 \leqslant \psi_i \leqslant 2\pi-\psi_0$.

Supposons que Γ soit une courbe simple (sinon, il faut cemmencer par des transformations $z' = \sqrt{(z-a)/(z-b)}$ $(a, b \in \Gamma)$. Soit $f_i(z) =$

$= (z-z_i)^{\pi/\varphi_i}(z-z_0)^{1-\pi/\varphi_i}$ $(z_0 \notin D \cup \Gamma)$. La frontière de $D_i = f_i(D)$ est C^{1H} auprès de $f_i(z_i)$. Pour la représentation conforme F_i de D_i sur $|w| > d$, il existe $F'(f_i(z_i)) \neq 0$ ([8], p. 468). Mais $f(z) = F_i(f_i(z))$, donc $[f(z) - f(z_i)]/ /(z-z_i)^{\pi/\varphi_i} \to g_i \neq 0$ $(z \to z_i,\ z \in D \cup \Gamma)$. Il existe donc $g_0, g > 0$ tels que

$$g_0|z'-z''|^{\pi/\varphi_0} \leqslant |f(z')-f(z'')| \leqslant g|z'-z''|^{\pi/(2\pi-\varphi_0)},$$

et par le n° 5

$$g_0^*|L|^{\pi/\varphi_0} \leqslant \eta(L) \leqslant g^*|L|^{\pi/(2\pi-\varphi_0)} \qquad (0 < g_0^* < \infty,\ 0 < g^* < \infty). \tag{30}$$

Avec ces conditions sur η, on peut répéter nos considérations. Il est vrai, il faut y changer quelques détails, les rayons des K_{nj} et Q_{nj} par exemple, et la limitation (28) devient beaucoup plus faible; néanmoins les théorèmes 1, 2 et 3 restent valables si l'on y admet la condition (29) au lieu de $\Gamma \in C^{1H}$.

Travaux cités

[1] F. Leja, *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur un cercle*, Ann. Soc. Polon. Math. 14 (1935), pp. 116-134.

[2] — *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957, pp. 558.

[3] W. Kleiner, *Une condition de Dini Lipschitz dans la théorie du potentiel*, Ann. Polon. Math. ce volume, pp. 117-130.

[4] A. Szybiak, *Some properties of plane sets with positive transfinite diameter*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), pp. 19-28.

[5] — *On the density of the equilibrium distributions of plane sets*, Ann. Polon. Math. 6 (1959), pp. 41-49.

[6] W. Kleiner, *Sur l'approximation du diamètre transfini*, Ann. Polon. Math. 12 (1962), pp. 171-173.

[7] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Tokyo 1959, p. 590.

[8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва-Ленинград 1952 (G. M. Golusin, *Geometrische Funktionentheorie*, Berlin 1957).

[9] J. L. Walsh, *Interpolation and approximation*, New York 1935.

[10] W. Kleiner, *Sur la détdrmination numérique des points extrémaux de Fekete-Leja*, Ann. Pol. Math., à paraître.

[11] — *Une variante de la méthode de M. Leja pour approcher la représentation conforme*, Ann. Polon. Math., à paraître.

UNIVERSITÉ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 31. 7. 1961