NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. М. БЛОХИН

Институт математики СО АН СССР, Новосибирск, СССР

Введение

В настоящее время математическое моделирование широко используется в науке и технике. Обычно математическое моделирование реализуется в виде цепочки отображений: физическая модель явления — математическая модель явления — вычислительная модель явления — программа — ЭВМ. Правильное применение методов математического моделирования невозможно без детального анализа структуры и связей между различными звеньями этой цепочки.

Этот доклад посвящен вопросу о соотношении между математической и вычислительной моделями явления. При решении этого вопроса мы будем придерживаться подхода одновременного изучения исходной математической задачи и вычислительной модели для этой задачи. По этому поводу здесь уместно вспомнить основополагающую работу [1].

Вопрос о соотношении между математической и вычислительной моделями явления будет разбираться на примере задач газовой динамики. Известно, что в задачах газовой динамики для расчета течений с ударными волнами широко применяются различные разностные схемы. При этом сплошь и рядом имеет место следующая парадоксальная ситуация: вычислитель находит приближенное „решение" некоторой краевой задачи для уравнений газовой динамики, не зная, существует ли решение у этой математической задачи.

Мы предлагаем в основу конструирования и исследования разностных схем для уравнений газовой динамики положить требование *адекватности* разностной модели исходной дифференциальной за -дачи. Под адекватностью мы будем понимать следующее: разностная модель строится так, чтобы с ее помощью можно было бы доказать теорему существования решения исходной дифференциальной задачи.

Последнее обстоятельство представляется нам чрезвычайно важным фактом, поскольку при численных расчетах мы должны быть уверены в том, что приближенное решение действительно стремится в пределе к решению исходной дифференциальной задачи.

Из-за квазилинейности системы уравнений газовой динамики доказательство адекватности той или иной разностной модели исходной дифференциальной задаче пока весьма затруднительно по многим причинам. Поэтому в качестве исходной математической модели мы рассмотрим систему уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне (эта смешанная задача подробно рассматривалась в [2]). Корректность этой задачи изучается в [2] с помощью техники диссипативных интегралов энергии. Разностные модели для нахождения приближенного решения этой задачи будем строить так, чтобы они допускали построение разностного аналога диссипативного интеграла энергии. Наличие такого аналога даст нам возможность получить энергетическую оценку, из которой будет следовать устойчивость предлагаемой разностной схемы. Это и будет означать адекватность разностной модели исходной дифференциальной задаче, поскольку при наличии энергетической оценки теорема существования достаточно гладкого решения может быть доказана путем стандартных рассуждений (см. по этому поводу [3]).

§ 1. Предварительные сведения

Исходная математическая задача для линеаризованной системы уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне формулируется так. В области $\Pi = \{(t,x,y);\ t>0,\ x>0,\ y\in \boldsymbol{R}^1\}$ ищется решение смешанной задачи для системы уравнений акустики

$$AU_t+BU_x+CU_y=0, \tag{1.1}$$

с начальными условиями при $t=0$:

$$U(0,x,y)=U_0(x,y) \tag{1.2}$$

и с граничными условиями при $x=0$:

$$\begin{gathered} u+d\cdot p=0,\\ v_t+\omega_0\cdot v_y+\lambda\cdot p_y=0,\\ S+p=0. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь:

$$A = \begin{bmatrix} M^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} M^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \omega_0 A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = U(t,x,y) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ S \end{bmatrix};$$

u, v, p, S — малые возмущения компонент вектора скорости, давления и энтропии;
M $(0 < M < 1)$, d, λ, ω_0 $(\omega_0 \geqslant 0)$ — некоторые посроянные.

В монографии [2] подробно изучался вопрос о выделении областей некорректности смешанной задачи (1.1)–(1.3). С этой целью задача (1.1)–(1.3) сводилась к следующей эквивалентной задаче:

$$\{M^2(\hat\tau+\xi)^2-\xi^2-\eta^2\}p=0 \quad \text{в области } \Pi, \tag{1.4}$$

$$\{M^2(1+d)\hat\tau^2-\beta^2\hat\tau\xi+M^2\lambda\eta^2\}p=0 \quad \text{при } x=0, \tag{1.5}$$

$$p(0,x,y)=p_0(x,y),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}(0,x,y) = -\omega_0\frac{\partial p_0}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial p_0}{\partial x}(x,y)- \tag{1.6}$$

$$-\frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial v_0}{\partial y}(x,y) \quad \text{при } t=0.$$

Здесь:

$$\tau=\frac{\partial}{\partial t},\ \xi=\frac{\partial}{\partial x},\ \eta=\frac{\partial}{\partial y},\ \hat\tau=\tau+\omega_0\cdot\eta,\ \beta^2=1-M^2.$$

Области некорректности смешанной задачи (1.4)–(1.6) выделялись путем построения примеров некорректности типа примера Адамара (см. по этому поводу [3]). Для этого у задачи (1.4)–(1.6) ищутся решения вида:

$$p=p^0\cdot\exp\{i(-\omega\cdot t+k\cdot y+l\cdot x)\}, \tag{1.7}$$

где p^0, ω, k, l — константы; $i=\sqrt{-1}$. Для определения констант ω, k, l из (1.4), (1.5) (подставляя в них представление (1.7)) можно получить следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{gathered} M^2(l-\omega+\omega_0 k)^2 = l^2+k^2, \\ M^2(1+d)(l-\omega+\omega_0 k)^2+M^2\lambda k-\beta^2(l-\omega+\omega_0 k)l=0. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Подробный анализ соотношений (1.8) приводит к следующим выводам:

1. В области K: $\lambda < 0$, $d+\frac{M^2}{\beta^2}\lambda > 0$ задача (1.4)–(1.6) имеет экспоненциальные решения вида (1.7) с $\operatorname{Im}\omega \leqslant 0$, $\operatorname{Im} l \geqslant 0$, $\operatorname{Im} k = 0$. Как показано в монографии [2], если точка $(d,\lambda)\in K$, то в этом случае для задачи (1.4)–(1.6) может быть получена следующая априорная оценка:

$$(1.9)\qquad \|p(t)\|_{W_2^2(\boldsymbol{R}_+^2)} \leqslant C_1(T)\cdot\|p_0\|_{W_2^2(\boldsymbol{R}_+^2)},$$

$$0 < t \leqslant T,\ \boldsymbol{R}_+^2 = \{(x,y);\ x>0,\ y\in\boldsymbol{R}^1\},$$

где $C_1(T)$ — некоторая константа, зависящая в конечном итоге от величины T.

Наличие априорной оценки (1.9) означает, что задача (1.4)–(1.6) (а вместе с ней и исходная задача (1.1)–(1.3)) корректно поставлена, когда точка $(d,\lambda)\in K$. Используя оценку (1.9), можно доказать существование и единственность решения $p(t,x,y)\in W_2^2(\boldsymbol{R}_+^2)$, а также существование классического решения смешанной задачи (1.4)–(1.6). С точки зрения дифференциальных уравнений область K является областью, в которой выполнено *равномерное условие Лопатинского*. Последнее означает, что в этой области корректной является сама задача (1.4)–(1.6), а также все задачи близкие к исходной.

2. Во всех остальных точках плоскости d, λ не выполнено либо равномерное условие Лопатинского, либо просто *условие Лопатинского* (это те точки (d,λ), для которых у задачи (1.4)–(1.6) существуют решения вида (1.7) с $\operatorname{Im}\omega > 0$, $\operatorname{Im} l > 0$, $\operatorname{Im} k = 0$). В последнем случае некорректность задачи (1.4)–(1.6) устанавливается просто построением следующего примера Адамара:

$$p_k = p^0\cdot\exp\{-\sqrt{|k|}+i(-\omega\cdot t+l\cdot x+k\cdot y)\},\qquad |k| = 1,2,\ldots$$

§ 2. Влияние граничных условий на устойчивость разностных схем

Во введении мы уже отмечали, что адекватность разностной модели исходной дифференциальной задаче фактически означает устойчивость предлагаемой разностной схемы (в подходящей норме). Для исследования устойчивости широко применяется спектральный анализ краевой разностной задачи. Этот прием исследования устойчивости подробно изложен в монографиях [4, 5].

На практике вычислители обычно ограничиваются спектральным анализом разностной задачи Коши. Получаемые при этом ограничения на шаги разностной сетки автоматически переносятся и на случай краевой разностной задачи. Однако такой анализ не может учитывать ни одной ошибки, возникающей из граничных точек.

В работе [6] подробно изучается влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость явной разностной схемы (типа схемы Фридрихся), описанной в монографии [3], для смешанной задачи (1.1)–(1.3). Прослеживается также соотношение между корректностью дифференциальной постановки задачи и устойчивостью ее разностного аналога.

В этом параграфе рассматривается вопрос о влиянии граничных условий (в том числе и дополнительных) на устойчивость некоторых разностных схем. В области Π построим разностную сетку с шагами $\Delta t = \Delta$, $\Delta x = h_x$, $\Delta y = h_y$. Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$U_{lj}^k = U = U(k\Delta, lh_x, jh_y), \qquad k,\, l,\, |j| = 0, 1, \ldots,$$

$$\varphi U_{lj}^k = U_{lj}^{k+1} = \hat{U}, \qquad \Psi^{\pm 1} U_{lj}^k = U_{l\pm 1, j}^k,$$

$$\theta^{\pm 1} U_{l,j}^k = U_{l,j\pm 1}^k, \qquad r_x = \frac{\Delta}{h_x}, \qquad r_y = \frac{\Delta}{h_y},$$

$$\tau = \varphi - 1, \qquad \xi = \Psi - 1, \qquad \bar{\xi} = 1 - \Psi^{-1}, \qquad \eta = \theta - 1, \qquad \bar{\eta} = 1 - \theta^{-1},$$

$$\xi_0 = \xi + \bar{\xi}, \qquad \eta_0 = \eta + \bar{\eta}, \qquad \hat{\xi} = \xi \cdot \bar{\xi}, \qquad \hat{\eta} = \eta \cdot \bar{\eta}.$$

В качестве первого примера рассмотрим следующую расностную модель смешанной задачи (1.1)–(1.3):

$$\left\{ A\tau + \frac{r_x}{2} B\xi_0 + \frac{r_y}{2} C\eta_0 - A(a\hat{\xi} + b\hat{\eta}) \right\} U = 0, \tag{2.1}$$

$$k, |j| = 0, 1, \ldots, \quad l = 1, 2, \ldots;$$

$$U_{lj}^0 = U_0(lh_x, jh_y), \qquad l, |j| = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

$$u_{0j}^k + d \cdot p_{0j}^k = 0, \qquad S_{0j}^k + p_{0j}^k = 0,$$

$$\tau v_{0j}^k + \frac{r_y}{2} \omega_0 \cdot \eta_0 v_{0j}^k - \frac{r_y}{2} \lambda \cdot \eta_0 p_{0j}^k - b\hat{\eta} v_{0j}^k = 0, \qquad k, |j| = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Здесь a, b — некоторые пока произвольные постоянные. Из (2.3) следует, что для определения компонент вектора $\hat{U}$ при $l = 0$ требуется дополнительное граничное условие (проблема построения дополнительных граничных условий описана, например, в монографии [7]).

Кратко напомним, как проводится спектральный анализ разностной задачи Коши (2.1), (2.2) (при этом k, $|l|$, $|j| = 0, 1, \ldots$). Будем искать у разностной схемы (2.1) частные решения следующего вида (полагая $h_x = h_y = h$, $r_x = r_y = r$):

$$U = q^k \chi^l e^{i \cdot j\varphi_0} V_0, \tag{2.4}$$

где V_0 — постоянный вектор, φ_0 — вещественный параметр; q, χ — комплексные числа. Подставляя (2.4) в (2.1), получим

$$\left\{(q-1)I_4+\frac{r}{2}A^{-1}[B\xi_0(\chi)+2i\sin\varphi_0\cdot C]-\right.$$
$$\left.-\left[a\hat{\xi}(\chi)-4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\cdot b\right]I_4\right\}V_0=0, \tag{2.5}$$

где $\xi_0(\chi)=\chi-\chi^{-1}$, $\hat{\xi}(\chi)=\chi-2+\chi^{-1}$, I_4 — единичная матрица порядка 4. В случае разностной задачи Коши $\chi=e^{i\Psi_0}$, Ψ_0 — вещественный параметр. При этом система (2.5) имеет нетривиальное решение V_0 лишь при тех $q=q(\varphi_0,\Psi_0)$, при которых определитель системы (2.5) обращается в нуль. Необходимое условие устойчивости схемы (2.1) заключается в том, чтобы при любых φ_0, Ψ_0 выполнялось неравенство

$$|q(\varphi_0,\Psi_0)|\leqslant 1, \tag{2.6}$$

т.е. чтобы спектр разностной задачи Коши лежал в единичном круге [4].

Проверим выполнение неравенства (2.6) в частном случае $\varphi_0=\Psi_0$. С учетом условия Куранта, Фридрихса и Леви [1] мы получим следующие ограничения на величины a, b, r: $a,b>0$, $a+b<1/2$,

$$r\leqslant\sqrt{2(a+b)}/(1+\omega_0+\sqrt{2}M^{-1}). \tag{2.7}$$

Вернемся теперь к разностной модели (2.1)–(2.3). Дополним граничные условия (2.2) еще одним. С этой целью выпишем вначале дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция

$$\begin{gathered}w=\beta_0u+\beta_1v+\beta_2p,\\ w_t+w_x+\omega_0w_y+\beta_2u_x+\frac{\beta_0}{M^2}p_x+\beta_2v_y+\frac{\beta_1}{M^2}p_y=0,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где β_0, β_1, β_2 — некоторые константы, а затем и некоторую аппроксимацию выражения (2.8) при $x=0$.

$$\beta_0\tau u_{0j}^k+\beta_1\tau v_{0j}^k+\beta_2\tau p_{0j}^k+(\beta_0+\beta_2)\cdot\gamma u_{0j}^k+\beta_1\cdot\delta v_{0j}^k+\left(\frac{\beta_0}{M^2}+\beta_2\right)\cdot\mu p_{0j}^k+ \tag{2.9}$$
$$+\beta_0\omega_0\frac{r}{2}\cdot\eta_0u_{0j}^k+(\omega_0\beta_1+\beta_2)\frac{r}{2}\cdot\eta_0v_{0j}^k+\left(\frac{\beta_1}{M^2}+\omega_0\beta_2\right)\frac{r}{2}\cdot\eta_0p_{0j}^k-b\cdot\hat{\eta}w_{0j}^k=0.$$

Здесь $\gamma(\Psi)$, $\delta(\Psi)$, $\mu(\Psi)$ — некоторые разностные операторы, аппроксимирующие оператор $\Delta\dfrac{\partial}{\partial x}$ при $x=0$ (например, $\gamma=(r/2)(4\Psi-\Psi^2-3)$ и т.д.)

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Разностная схема* (2.1) *с граничными условиями* (2.3) *и* (2.9) *неустойчива при любых* β_0, β_1, β_2 *и при любых* $\gamma(\Psi)$, $\delta(\Psi)$, $\mu(\Psi)$, *аппроксимирующих оператор* $\Delta\dfrac{\partial}{\partial x}$ *при* $x = 0$.

Доказательство теоремы основано на построении разностного примера Адамара для разностной модели (2.1)–(2.3), (2.9), т.е. комбинации решений разностной схемы (2.1) вида (2.4) с $|q| > 1$, $|\chi(q, \varphi_0)| < 1$.

В качестве другого примера можно рассматривать разностную модель смешанной задачи (1.1)–(1.3), основанную на принципе расщепления [8]:

$$\left\{A\tilde{\tau}+\frac{r_y}{2}C\cdot\tilde{L}_t\eta_0\right\}U = 0, \quad k, l, |j| = 0, 1, \ldots, \tag{2.10}$$
$$\{A\tilde{\tau}+r_xB_1\cdot\tilde{L}_t\bar{\xi}-r_xB_2\cdot\tilde{L}_t\xi\}\tilde{U} = 0, \quad k, |j| = 0, 1, \ldots, \; l = 1, 2, \ldots,$$

$$U_{lj}^0 = U_0(lh_x, jh_y), \quad l, |j| = 0, 1, \ldots, \tag{2.11}$$

$$u_{0j}^k+d\cdot p_{0j}^k = 0, \quad S_{0j}^k+p_{0j}^k = 0, \tag{2.12}$$
$$\tau v_{0j}^k+\omega_0 r_y\cdot L_t\bar{\eta}v_{0j}^k-\lambda r_y\cdot L_t\bar{\eta}p_{0j}^k = 0, \quad k, |j| = 0, 1, \ldots$$

Здесь:

$$\tilde{\tau} = \varphi^{1/2}-1, \quad \tilde{L}_t = \alpha\varphi^{1/2}+\delta, \quad \varphi^{1/2}U_{lj}^k = U_{lj}^{k+1/2} = \tilde{U},$$
$$L_t = \alpha_0\varphi+\delta_0, \quad \alpha+\delta = 1, \quad \alpha_0+\delta_0 = 1,$$

α_0, δ_0, α, $\delta \geqslant 0$ — некоторые числа;

$$B = B_1-B_2, \quad B_1 = \begin{bmatrix} M^2k_1/2 & 0 & Mk_1/2 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 & 0 \\ Mk_1/2 & 0 & k_1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} M^2k_2/2 & 0 & -Mk_2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Mk_2/2 & 0 & k_2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 = 1+M^{-1},\; k_2 = M^{-1}-1.$$

Легко показать, что предлагаемая разностная схема (2.10) для задачи Коши является устойчивой при всех r_x, r_y и при $\alpha > \delta$. Однако для разностной модели (2.10)–(2.12) может быть построен разностный пример Адамара точно так, как и в первом примере.

§ 3. Пример построения адекватной разностной модели для смешанной задачи (1.1)–(1.3)

Сформулируем следующую разностную модель смешанной задачи (1.1)–(1.3):

(3.1) $$\{A\hat{\tau}+B\cdot L_t\xi+C\cdot L_t\eta\}U=0,\quad k,l,|j|=0,1,\ldots,$$

(3.2) $$U_{lj}^0=U_0(lh_x,jh_y),\quad l,|j|=0,1,\ldots,$$

(3.3) $$u_{0j}^k+d\cdot p_{0j}^k=0,\quad S_{0j}^k+p_{0j}^k=0,\quad \hat{\tau}v_{0j}^k-\lambda\cdot L_t\eta p_{0j}^k=0,\quad k,|j|=0,1,\ldots$$

Здесь $\hat{\tau}=\tau+\omega_0\cdot L_t\eta$, $\tau=(\varphi-1)/\Delta$, $\xi=(\Psi-1)/h_x$, $\eta=(1-0^{-1})/h_y$, $L_t=\alpha\varphi+{}$ $+\delta$, $\alpha+\delta=1$, $\alpha,\delta\geqslant 0$ — некоторые постоянные.

Как и для смешанной задачи (1.1)–(1.3) (см. § 1), разностная модель (3.1)–(3.3) может быть сведена к следующей разностной задаче:

(3.4) $$\{M^2(\hat{\tau}+L_t\xi)^2-(L_t\xi)^2-(L_t\eta)^2\}p=0,\quad k,i,|j|=0,1,\ldots,$$

(3.5) $$p_{lj}^0=p_0(lh_x,jh_y),\quad (\hat{\tau}+L_t\xi)p_{lj}^0+L_t\xi u_{lj}^0+L_t\eta v_{lj}^0=0,\quad l,|j|=0,1,\ldots,$$

(3.6) $$\{M^2(1+d)\hat{\tau}^2-\beta^2\hat{\tau}L_t\xi+M^2\lambda(L_t\eta)^2\}p_{0j}^k=0,\quad k,|j|=0,1,\ldots$$

В монографии [2] показано, что используя факт сведения разностной задачи (3.1)–(3.3) к задаче (3.4)–(3.6), для разностной модели (3.1)–(3.3) может быть получена следующая априорная оценка:

(3.7) $$\mathcal{P}_k=\mathrm{const}\cdot\mathcal{P}_0,\quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$\mathcal{P}_k=\|U^k\|^2+\|\tau U^k\|^2+\ldots+\|\tau^3U^k\|^2+\ldots+\|\eta^3U\|^2,$$

$$\|U^k\|^2=h_xh_y\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|U\|^2,\quad \|U\|^2=(U_{lj}^k,U_{lj}^k)\quad \text{и т.д.}$$

Оценка (3.7) получена при условии, что выполнены следующие достаточные условия устойчивости:

(3.8) $$\alpha>\delta,\quad M^{-1}<\omega_0<h_y/h_x,\quad r_x>\frac{1}{(\alpha-\delta)(1-\omega_0h_x/h_y)}.$$

Оказывается, пользуясь оценкой (3.7) и используя стандартную аргументацию (например, из монографии [3]), мы легко можем доказать теорему существования достаточно гладкого решения смешанной задачи (1.1)–(1.3). К сожалению, разностная модель (3.1)–(3.3) не совсем удобна для конкретных численных расчетов из-за весьма обременительных ограничений (3.8) на шаги разностной сетки.

Литература

[1] Р. Курант, К. Фридрихс и Г. Леви, *О разностных уравнениях математической физики*, Успехи математических наук вып. 8, 1940, 125–160.

[2] А. М. Блохин, *Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики*, Наука, Новосибирск 1986.

[3] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва 1979.

[4] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Разностные схемы*, Наука, Москва 1977.

[5] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*. Наука, Москва 1986.

[6] Р. Д. Алаев и А. М. Блохин, *Влияние коэффициентов граничных условий на устойчивость явной разностной схемы для системы уравнений акустики*, Труды семинара С. Л. Соболева/ИМ СО АН СССР, Новосибирск 1 (1982), 5–30.

[7] Ю. И. Шокин и Н. Н. Яненко, *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике*, Наука, Новосибирск 1985.

[8] Н. Н. Яненко, *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*, Наука, Новосибирск 1967.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987