COMPUTATIONAL MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1984

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Б. МОСЕЕНКОВ

Институт Математики АН УССР, ул. Репина 3, 252004 Киев-4, СССР

В работе рассматриваются вопросы, связанные с применением метода последовательных приближений и метода ускоренной сходимости к решению нелинейных уравнений в частных производных, содержащих малый положительный параметр ε при нелинейных членах, вида

$$(1)\qquad \mathfrak{L}(u) \equiv Lu+\varepsilon F\circ u^{(l)} = f \quad (x\in\tau),$$

где L – линейный дифференциальный оператор, $F\circ u^{(l)} = F(x, u, \ldots \ldots, D^\sigma u, \ldots)$ $(|\sigma|\leqslant l)$, $x\in\tau = \{x\in \boldsymbol{R}^n,\ 0\leqslant x_i\leqslant 2\pi,\ i=1,\ldots,n\}$. Как правило, для линейного уравнения, которое решается на каждом шаге итерационного процесса, удается доказать существование лишь обобщенного (слабого) решения. В связи с этим целесообразно реализовать итерационные методы в пространствах обобщенных функций. Выбирая в качестве таких пространств пространства Соболева, можно решить проблему о суперпозиции функций, а также выделить достаточно широкий класс слабо нелинейных операторов, допускающих реализацию итерационных методов. Существенным преимуществом итерационных методов перед другими приближенными методами является тот факт, что они дают конструктивные теоремы существования, позволяют исследовать вопрос о гладкости решений и дают условия, при которых найденное решение является сильным или классическим. Тот факт, что уравнение (1) есть уравнение на классах функций, заданных на торе, отнюдь не означает, что указанные методы не могут применяться для других уравнений. Классы периодических функций выбраны здесь в связи с тем, что линейный оператор L в уравнении (1) вообще говоря произволен (требуется только, чтобы он был в некотором смысле обратим), однако нет необходимости в каких-либо граничных условиях (их пришлось бы записывать также в общем виде в непериодическом случае).

Если $g \in W^{-k}$, $a_\sigma \in C^{\max\{|\sigma|,|\sigma|+r\}}$ ($|\sigma| \leqslant l$), k, $r = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$, $k \leqslant \max\{l, l+r\}$, то *слабым решением уравнения*

$$Mu \equiv \sum_{|\sigma|\leqslant l} a_\sigma D^\sigma u = g \qquad (x \in \tau)$$

будем называть функцию $u \in W^{-r}$, удовлетворяющую равенству

$$(u, M^* v) = (g, v) \qquad (v \in W^{\max\{l,l+r\}}) \tag{2}$$

(здесь $W^s = W_2^s(\tau)$ — пространства Соболева с нормой $\|\cdot\|_s$, W^{-s} — негативное пространство, порожденное пространством W^s, с нормой $\|\cdot\|_{-s}$, M^* — дифференциальное выражение, формально сопряженное к M). Линейный оператор M будем называть *равномерно обратимым из* W^{-k} *в* W^{-r}, если для всякого $g \in W^{-k}$ найдется $u \in W^{-r}$, удовлетворяющее равенству (2) и неравенству

$$\|u\|_{-r} \leqslant C\|g\|_{-k} \qquad (C > 0). \tag{3}$$

Линейное множество таких операторов обозначим через $\mathscr{L}(W^{-r}, W^{-k})$. Как известно [1], включение $M \in \mathscr{L}(W^{-r}, W^{-k})$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\|M^* v\|_r \geqslant C^{-1}\|v\|_k \qquad (C > 0;\ v \in W^{\max\{l,l+r\}}). \tag{4}$$

Применение итерационных методов к решению нелинейных уравнений в пространствах Соболева W_p^r (с нормой $\|\cdot\|_{r,p}$) приводит к необходимости исследовать следующий вопрос: является ли суперпозиция функций $F \circ u^{(l)} = F(x, u, \ldots, D^\sigma u, \ldots)$ ($|\sigma| \leqslant l$) элементом пространства W_p^r, если $u \in W_p^{r+l}$, и как растет норма $\|F \circ u^{(l)}\|_{r,p}$ с ростом $\|u\|_{r+l,p}$. В [2] Ю. Мозер получил оценку для $\|F \circ u^{(l)}\|_r$ в случае, когда $u \in C^{r+l} \cap \{|u|_l < 1\}$, $F \in C^r(\tau \times \{|v| < 1\})$ (здесь C^s — пространство s раз непрерывно дифференцируемых на τ функций с нормой $|\cdot|_s$). В [3] этот результат обобщается на случай $u \in W_p^{r+l} \cap C^l$, при этом ослабляются ограничения на функцию F.

Теорема 1. *Пусть функция $F(x, v)$ r раз непрерывно дифференцируема по v в области $\Omega = \{(x, v) \mid x \in \tau, |v| < k \leqslant \infty\}$, а ее обобщенные производные $D_x^\sigma D_v^\varrho F(x, v)$ $(0 \leqslant |\sigma| + |\varrho| \leqslant r)$ при всех $u, v \in C_k^l = \{u \in C^l \mid |u|_l < k\}$ удовлетворяют следующим условиям:*

1° $\|D_x^\sigma D_v^\varrho F \circ u^{(l)}\|_{0,pr/|\sigma|} \leqslant B$;

2° $\lim\limits_{|u-w|_l \to 0} \|D_x^\sigma D_v^\varrho F \circ u^{(l)} - D_x^\sigma D_v^\varrho F \circ w^{(l)}\|_{0,pr/|\sigma|} = 0$;

3° $\lim\limits_{|z| \to 0} \left\|D_x^\sigma D_v^\varrho F\left(x + z, u(x), \ldots, D^\sigma u(x), \ldots\right) - D_x^\sigma D_v^\varrho F \circ u^{(l)}\right\|_{0,pr/|\sigma|} = 0.$

Тогда $F\circ u^{(l)}\in W_p^r$ *для всякого* $u\in W_p^{r+l}\cap C_k^l$ *и имеет место неравенство*

$$\|F\circ u^{(l)}\|_{r,p}\leqslant c_r B(1+|u|_l)^{r-1}(1+\|u\|_{r+l,p}), \tag{5}$$

где константа c_r *не зависит от функции* u.

Условия 1°–3° являются, по-видимому, наиболее общими и означают, что операторы $D_x^\sigma D_v^\varrho F\circ u^{(l)}$ из C_k^l в $L_{pr/|\sigma|}$ должны быть ограниченными, непрерывными и непрерывными в целом по „явно" входящему x. Нахождение достаточных условий для $F(x, v)$, при которых справедливы соотношения 1°–3° представляют самостоятельный интерес. Эта задача значительно упрощается, когда имеется какая-либо информация о структуре функции $F(x, v)$. Так, например, если $F(x,v) = f(x)\,g(v)$, где $f\in W_p^r\cap C^0$, $g\in C^r(\{|v|\leqslant k\})$, то теорема 1 имеет место.

Важным следствием теоремы 1 является тот факт, что пространство $W_p^r\cap C^0$ есть кольцо, что обобщает известный результат [4], доказанный для случая $r>n/p$.

Если функция F удовлетворяет условиям теоремы 1, $f\in W^r$, $L\in\mathscr{L}(W^l, W^0)\cap\mathscr{L}(W^{r+l}, W^r)$, $r>0$, $l\geqslant 0$, то для решения уравнения (1) можно применить метод последовательных приближений. А именно, строится итерационный процесс $u_{m+1}=u_0+\varepsilon v_{m+1}$, где u_0 и v_{m+1} есть соответственно слабые решения уравнений

$$Lu_0=f,$$
$$Lv_{m+1}=-F\circ u_m^{(l)}\qquad (m=0,1,\ldots).$$

Пусть a_{r+l} — норма оператора вложения W^{r+l} в C^l ($r>n/2$), $\hat{c}$ — норма обратного к $L\in\mathscr{L}(W^{r+l}, W^r)$ оператора, $\check{c}$ — норма обратного к $L\in\mathscr{L}(W^l, W^0)$ оператора,

$$k_0=\hat{c}\max\{1, a_{r+l}\},\qquad k_\varepsilon=\varepsilon B\max\Big\{\check{c}\sum_{|\sigma|\leqslant l}1,\ (2\pi)^{n/2}\check{c},\ c_r k_0(1+k)^r\Big\},$$

тогда имеет место следующая теорема [3].

Теорема 2. *Если* $r>n/2>k_0\|f\|_r+k_\varepsilon<k$, $k_\varepsilon<1$, *то уравнение* (1) *имеет единственное слабое решение* $u\in W^s$, $s<r+l$ *и справедливы неравенства*

$$\|u-u_m\|_l\leqslant 2kk_\varepsilon^m,$$
$$\|u-u_m\|_{s_1}\leqslant 2kk_\varepsilon^{m\frac{s-s_1}{s-l}}\qquad (l<s_1<s<r+l).$$

Заметим, что если в теореме 1 $k=\infty$, то в теореме 2 в качестве константы k следует выбрать выражение $k_0\|f\|_r+1$, сняв ограничения на величину $\|f\|_r$.

Предположим теперь, что L — линейное дифференциальное выражение порядка l с постоянными коэффициентами и найдено линейное дифференциальное выражение Λ порядка $m \leqslant l-a$ $(0 < a \leqslant l)$ с постоянными коэффициентами λ_σ такое, что уравнение $\Lambda w = \varphi$ имеет единственное решение $w \in \Pi$ для всякого $\varphi \in \Pi$ и выполняется неравенство

$$\|\varphi\|_{l-a}^2 \leqslant c(\Lambda\varphi, L\varphi) \qquad (c > 0;\ \varphi \in \Pi),$$

из которого следует оценка (4) с индексами $r = a-l$, $k = 0$ (здесь Π — множество тригонометрических полиномов). Кроме того, будем считать, что функции $F(x, v)$ $(v = \{v_\sigma\}_{|\sigma|\leqslant l})$ и $F_\sigma(x, v) = \dfrac{\partial F(x, v)}{\partial v_\sigma}$ $r+a$ раз непрерывно дифференцируемы по v и удовлетворяют соответствующим условиям теоремы 1, а $f \in W^{r+2a}$, $r > 0$.

Поскольку $F \circ u^{(l)}$ — дифференциальный оператор порядка l, а $L \in \mathscr{L}(W^{l-a}, W^0)$ $(a > 0)$, то в этом случае не удастся реализовать метод последовательных приближений из-за потери гладкости на каждом его шаге (это можно сделать лишь тогда, когда $a = 0$). Для решения такой задачи можно применить метод ускоренной сходимости, который был разработан Ю. Мозером [2] для построения приближенных решений нелинейных операторных уравнений на торе и в дальнейшем успешно использовался для решения различных нелинейных задач [3], [5], [6].

Приближенные решения будем искать в виде $u_{s+1} = u_s + v_{s+1}$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$, где u_0 есть слабое решение уравнения $Lu_0 = f$, а v_{s+1} — приближенное решение линеаризованного уравнения

$$\mathfrak{L}'(u_s)v_{s+1} \equiv \Big[L + \sum_{|\sigma|\leqslant l}(F_\sigma \circ u_s^{(l)})D^\sigma\Big]v_{s+1} = f - \mathfrak{L}(u_s),$$

обладающее более высокой гладкостью по сравнению с точным его решением. Для нахождения v_{s+1} применим метод эллиптической регуляризации, а именно, будем решать линеаризованное уравнение с малой искусственной вязкостью

$$L_{h_{s+1},s}v_{s+1} \equiv [h_{s+1}^{2\nu/a}(1-\Delta)^\nu L + \mathfrak{L}'(u_s)]v_{s+1} = f - \mathfrak{L}(u_s),$$

выбирая соответствующим образом параметры $\nu = [n/2] + a + 1$ и h_{s+1}, характеризующие вязкость (подробно это описано в [3]). Применяя мультипликативные неравенства, интерполяционные теоремы вложения [7], [8] и теоремы вложения Соболева, удается доказать равномерную обратимость оператора $L_{h_{s+1},s}$, и априорные оценки для v_{s+1} вида

(6) $$|v_{s+1}|_l < 1,$$

$$(\|v_{s+1}\|_{r+l}^2 + h_{s+1}^{2\nu/a}\|v_{s+1}\|_{r+l+\nu}^2)^{1/2} \leqslant \bar{c}\Big(\|f - \mathfrak{L}(u_s)\|_{r+a} + \varepsilon \sum_{|\sigma|\leqslant l}\|F \circ u_s^{(l)}\|_{r+a}\Big),$$

на основании которых выводится следующая теорема.

Теорема 3. *Если* $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$,

$$\Big(\sum_{|\sigma| \leqslant m} \lambda_\sigma^2\Big)^{-1/2} c a_{\nu_0+l} \|f\|_{\nu_0+a} < k, \qquad \left[\frac{l+m}{2}\right] \leqslant l-a,$$

$$r > \max\left\{\nu+l-2a-1,\, 2\nu-1,\, \nu_0-2a+\frac{2a(\nu_0+a)}{2\nu-a},\right.$$
$$\left.\frac{(\nu+a)[2\nu+a+\lambda(2\nu-\lambda a)]}{2\nu-a-2a\lambda}-2a\right\},$$

где

$$\frac{\nu_0+a}{r-\nu_0} < \lambda < \frac{2\nu-a}{2a}, \qquad \nu_0 = \left[\frac{n}{2}\right]+a_0+1, \qquad a_0 = \max\{l_0, a\},$$

$$l_0 = \max\left\{a-1,\, \left[\frac{l-m+1}{2}\right], \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{l+m+1}{2}\right]\right\}\right\},$$

то уравнение (1) *имеет единственное классическое решение*

$$u \in W^\varrho \subset W^{\nu_0+l} \subset C_k^{l+a_0} \qquad \Big(l-a < \varrho \leqslant r-l-\frac{r+a}{\lambda+1}\Big).$$

Более того, найдутся константы K_0, M_1, M_2 (их точные значения приводятся в [3]) *такие, что*

$$\|u-u_s\|_\varrho \leqslant M_1(\varrho, \lambda) K_0^{-\varkappa^s\left[\lambda-\frac{(\lambda+1)(\varrho-l+a)}{r+a}\right]},$$

$$\|\mathfrak{L}(u_s)-f\|_{\varrho'} \leqslant M_2(\varrho') K_0^{-\varkappa^s\left[\lambda-\frac{(\lambda+1)\varrho'}{r+a}\right]} \qquad \Big(\varrho' < r+a-\frac{r+a}{\lambda+1}\Big),$$

где

$$\varkappa \in \left(\frac{2\nu+1}{2\nu-\lambda a}, \frac{2\lambda(r+2a)-\lambda(\nu+a)}{\lambda(r+2a)+\nu+a}\right) \subset (1, 2).$$

Литература

[1] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев 1965, 798 с.

[2] Ю. Мозер, *Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения*, Успехи мат. наук 23.4 (1968), 179–238.

[3] А. М. Самойленко, В. Б. Мосеенков, *Итерационные методы решения нелинейных уравнений с частными производными, близких к линейным*, Препринт 80.10, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1980, 44с.

[4] М. С. Агранович, *Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы*, Успехи мат. наук 20.5 (1965), 3–120.

[5] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*, Наук. думка, Киев 1969, 248 с.

[6] P. H. Rabinowitz, *Periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 15–40.

[7] L. Nirenberg, *On elliptic partial differential equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III, 13 (1959), 115–162.
[8] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения,* „Наука", Москва 1977, 456 с.

Presented to the Semester
Computational Mathematics
February 20 — May 30, 1980