MATHEMATICAL CONTROL THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 14
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1985

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. М. МАРЧЕНКО

БТИ им. С. М. Кирова, Минск, БССР, СССР

Ниже излагаются некоторые результаты и методы исследования качественной теории управления системами с запаздываниями, основанные в основном на работах автора. Весь материал собран в виде 4 параграфов и включает следующие вопросы:

§ 1. Задачи поточечной управляемости и наблюдаемости.

§ 2. Общий подход к задачам управляемости и наблюдаемости.

§ 3. Управление спектром.

§ 4. Канонические структуры управляемых систем с последействием.

Качественная теория управления системами с последействием располагает в настоящее время обширной библиографией. К сожалению, в данной работе не представилось возможным дать её обзор.

§ 1. ПОТОЧЕЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Задачи поточечной управляемости и наблюдаемости систем с запаздыванием представляют собой по существу многоточечные конечномерные краевые задачи для бесконечномерных систем.

1.1. Поточечная управляемость

Пусть процесс управления описывается системой дифференциально-разностных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} \big(A_j x(t-h_j) + B_j u(t-h_j)\big), \qquad t > 0, \tag{1.1}$$

с начальными условиями[1]

(1.2) $\qquad x(\tau) = \varphi(\tau), \quad u(\tau) = u_0(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad x(+0) = \varphi_0.$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$; $0 = h_0 < \ldots < h_l = h$ — постоянные запаздывания; A_j, B_j, $j = 0, \ldots, l$, — постоянные матрицы соответствующих размеров; φ, u — кусочно-непрерывные на $[-h, 0]$ вектор-функции, $\varphi_0 \in \mathbf{R}^n$.

Определения. Система (1.1) называется:

1.1. *Управляемой в точках* $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ (здесь $0 \leqslant \beta_0 < \ldots < \beta_\gamma$), если существует момент t_1, $t_1 > 0$, такой, что для любых начальных условий (1.2), для любых n-векторов c_j, $j = 0, \ldots, \gamma$, существует кусочно-непрерывное управление u такое, что соответствующее решение $x(t)$, $t > 0$, системы (1.1), (1.2) обладает свойством

$$x(t_1 - \beta_j) = c_j, \qquad j = 0, \ldots, \gamma;$$

1.2. *a-поточечно управляемой* (здесь $a \geqslant 0$), если она поточечно управляема в любых точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ таких, что $0 \leqslant \beta_0 < \ldots < \beta_\gamma \leqslant a$;

1.3. *Поточечно управляемой*, если она a-поточечно управляема при любом неотрицательном числе a.

Пусть символ $X(\beta_0, \ldots, \beta_\gamma)$ означает матицу, столбцами которой являются ненулевые столбцы матриц

$$\begin{bmatrix} X_k(t-\beta_0) \\ X_k(t-\beta_1) \\ \vdots \\ X_k(t-\beta_\gamma) \end{bmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad t \in [0, \beta_\gamma + (n-1)h].$$

Здесь $X_k(t)$ — решение определяющего уравнения [2] системы (1.1):

(1.3) $$X_{k+1}(t) = \sum_{j=0}^{l} \big(A_j X_k(t-h_j) + B_j U_k(t-h_j)\big), \quad t > 0,$$

с начальными условиями: $X_i(t) = 0$, $k < 0$ или $t < 0$, $U_k(t) = 0$, если $k^2 + t^2 \neq 0$, $U_0(0) = I_r$ (I_r — единичная $(r \times r)$-матрица).

Справедливы следующие

Утверждения: 1.1. *Система* (1.1) *управляема в точках* $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ *в том и только в том случае, когда*

$$\operatorname{rank} X(\beta_0, \ldots, \beta_\gamma) = (\gamma + 1)n;$$

1.2. *Необходимый и достаточный критерий a-поточечной управляемости системы* (1.1) *заключается в требовании*

(1.4) $$\operatorname{rank} X(s_0, s_1, \ldots, s_\tau) = (\tau + 1)n,$$

[1] В данном параграфе считаем $u_0(t) \equiv 0$, $t \in [-h, 0]$.

где s_k, $k=1,2,\ldots,$ — *всевозможные точки вида* $s_k=\sum_{\tau_1=1}^{l_1} h_{j_{\tau_1}}-\sum_{\tau_2=1}^{l_2} h_{j_{\tau_2}}$, $j_i\in\{0,1,\ldots,l\}$, $l_1,l_2=1,2,\ldots$ *такие, что* $0=s_0<\ldots<s_\tau\leqslant a$, *но* $s_{\tau+1}>a$;

1.3. *Система* (1.1) *поточечно управляема тогда и только тогда, когда существует число* m, $m\geqslant 0$, *такое, что система*

$$\dot x(t)=\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}A_j\Big)x(t)+\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}B_j\Big)u(t),\qquad t>0,$$

управляема в смысле Калмана.

Схему доказательства утверждений 1.1–1.3 можно найти в [11], [22]. Основная техника, используемая в этих доказательствах — это техника определяющего уравнения.

1.2. Поточечная наблюдаемость

Рассмотрим систему (1.1) с

$$B_j=0,\ j=0,\ldots,l, \tag{1.5}$$

и выходом $y(t)=\sum_{j=0}^{l} C_jx(t-h_j)$, $t>0$, где C_j, $j=0,\ldots,\gamma$, — постоянные $(m\times n)$-матрицы.

Пусть $\beta_0,\ldots,\beta_\gamma$ — действительные числа такие, что $0\leqslant\beta_0<\ldots<\beta_\gamma$. На каждом интервале $[\beta_j-h,\beta_j]$ зададим начальные условия системы (1.1) в виде $x(\tau)=\varphi_j(\tau)$, $\tau\in[\beta_j-h,\beta_j]$, $x(\beta_j+0)=x_j$; соответствующее решение системы (1.1) обозначим через $x_j(\tau)$, $\tau>\beta_j$. Пусть далее

$$y_j(t)=\sum_{i=0}^{l} C_ix_j(t-h_i),\qquad t>\beta_j;\qquad x_j(\tau)\equiv 0,\qquad \tau<\beta_j.$$

Рассмотрим следующий функционал $\mathcal{J}_{t_1}$,

$$\mathcal{J}_{t_1}(y_j,\varphi_j)=\int_0^{t_1}\nu'(t)y_j(t)dt+\sum_{s=0}^{l}\int_{\beta_j-h_s}^{\beta_j} w_s'(t)\varphi_j(t)dt$$

(здесь и далее штрих (′) означает транспонирование).

Определения. Система (1.1), (1.5) называется:

1.4. *Наблюдаемой в точках* $\beta_0,\ldots,\beta_\gamma$, если существует число $t_1>0$ такое, что для любых n-векторов p_j, $j=0,\ldots,\gamma$, существуют вектор-функции $\nu(t)$, $t\in[0,t_1]$; $w_s(\tau)$, $\tau\in[-h,\beta_\gamma]$, такие, что $\mathcal{J}_{t_1}(y_j,\varphi_j)=$

$= p_j' x_j$ для любых $x_j \in \boldsymbol{R}^n$ и кусочно-непрерывных n-вектор-функций φ_j, $j = 0, \ldots, \gamma$;

1.5. *α-поточечно наблюдаемой*, если она наблюдаема в любых точках $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ таких, что $0 \leqslant \beta_0 < \ldots < \beta_\gamma \leqslant \alpha$;

1.6. *Поточечно наблюдаемой*, если она α-поточечно наблюдаема при любом α, $\alpha \geqslant 0$.

Имеют место следующие (двойственные 1.1–1.3)

Утверждения: 1.4. *Система* (1.1) *управляема в точках* $\beta_0, \ldots, \beta_\gamma$ *в том и только в том случае, если двойственная система*

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j' x(t-h_j), \qquad y(t) = \sum_{j=0}^{l} B_j' x(t-h_j) \tag{1.6}$$

наблюдаема в этих точках;

1.5. *Система* (1.1) *поточечно* (*α-поточечно*) *управляема тогда и только тогда, когда система* (1.6) *поточечно* (*α-поточечно*) *наблюдаема.*

Справедливость этих утверждений устанавливается сравнением соответствующих критериев управляемости [11], [22] и наблюдаемости.

1.3. Замечания

Если система (1.1) α-поточечно управляема, то она и β-поточечно управляема при $\beta \geqslant \alpha$. Обратное утверждение в общем случае место не имеет: система (1.1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_j = 0, \quad B_1 = B_j = 0, \quad j = 2, \ldots, l,$$

α-поточечно управляема при $\alpha = 0$, но не является α-поточечно управляемой при $\alpha \geqslant h_1$. Однако замечателен тот факт, что свойство α-поточечной управляемости „насыщается“: если система (1.1) α-поточечно управляема при $\alpha = \bar{\alpha}$, где

$$\bar{\alpha} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} h + \max_{j \in \{0,1,\ldots,l\}} \min\{h_j, h_j \operatorname{rank} B_j\}, \tag{1.8}$$

то она и α-поточечно управляема при $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$. Это утверждение может быть усилено. Ограничимся формулировкой усиленного результата в случае, когда $B_j = 0$, $j \neq j_1$. В этой ситуации в качестве числа $\bar{\alpha}$

в (1.8) достаточно положить

$$\frac{(n-\operatorname{rank}B_{j_1})\,(n-\operatorname{rank}B_{j_1}-1)}{2}\,h.$$

Вопрос о точной нижней границе таких чисел $\bar{a}$ остается в настоящее время открытым.

Свойство a-поточечной управляемости зависит лишь от управляемости в конечном числе точек на промежутке $[0, a]$ (это суть точки s_j, $j = 0, \ldots, \tau$, из (1.4)) и остается инвариантным по отношению ко всем другим точкам этого промежутка.

Существует следующая связь между понятиями поточечной и a-поточечной управляемости: система (1.1) поточечно управляема тогда и только тогда, когда она a-поточечно управляема при $a = \bar{a}$, где $\bar{a}$ определено в (1.8). Отсюда, в частности, вытекает (см. также [12]): двумерная ($n = 2$) система (1.1) с $B_j = 0$, $j \neq j_1$, поточечно управляема в том и только в том случае, если она относительно [2] управляема (т.е. a-поточечно управляема при $a = 0$). На общий случай системы (1.1) это утверждение не переносится, о чем свидетельствует пример (1.7). По аналогии с критериями [13], [16] управляемости в смысле Калмана можно получить различные эквивалентные формы критерия поточечной управляемости, в частности, нетрудно убедиться в эквивалентности следующих положений:

„система (1.1) поточечно управляема“

$$\Leftrightarrow \exists m \geqslant 0 \;\; n = \operatorname{rank}\Big[\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}B_j : \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}A_j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}B_j\Big) : \ldots$$

$$\ldots : \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}A_j\Big)^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}B_j\Big)\Big];$$

$$\Leftrightarrow \exists m \geqslant 0, \forall\lambda \in C \operatorname{rank}\Big[\lambda I_n - \sum_{j=0}^{l} m^{h_j}A_j : \sum_{j=0}^{l} m^{h_j}B_j\Big] = n.$$

При синтезе систем автоматического регулирования зачастую собственная динамика (матрицы A_j, $j = 0, \ldots, \gamma$) системы задана, а структуру входного устройства (матрицы B_j, $j = 0, \ldots, \gamma$) можно выбирать. В этом случае представляет интерес следующая задача (вычисления минимального числа входов): найти матрицы B_j, $j = 0, \ldots$ $\ldots, \gamma$, при которых размерность $r = r^0$ входа $u(t)$ системы (1.1) будет минимальной. Оказывается $r^0 = \min\limits_{m>0} \varrho\,\big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j}A_j\big)$, где символ $\varrho(D)$ означает число нетривиальных (не равных тождественно 1) инвариантных полиномов λ-матрицы $\lambda I_n - D$. При этом достаточно положить $B_j = 0$, $j \neq 0$. Для вычисления матрицы B_0 можно воспользоваться алгоритмами [7], [8].

Вопрос о необходимом и достаточном условии поточечной управляемости систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа остается к настоящему моменту открытым.

В силу принципа двойственности (см. утверждения 1.4, 1.5) аналогичные замечания имеют место для задач поточечной наблюдаемости системы (1.1), (1.5).

§ 2. ОБЩИЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЯЕМОСТИ И НАБЛЮДАЕМОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Ниже излагается подход к исследованию проблемы управляемости и наблюдаемости систем с последействием, в основе которого лежит понятие состояния, аккумулирующее минимальную информацию о предыстории системы, необходимую для однозначного вычисления движения системы в будущем. Индуцированные этим понятием состояния свойства управляемости и наблюдаемости имеют много общих черт с управляемостью и наблюдаемостью по Калману систем без запаздывания.

2.1. Постановка задачи: s-состояния

Пусть дана система управления

$$\dot{x}(t) = f\big(x_{[t-h,t]}, u(t), t\big), \qquad t > t_0, \qquad h = \mathrm{const} > 0, \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$x_{[t_0-h,t_0]} = \varphi, \qquad x(t_0+0) = \varphi_0 \in \boldsymbol{R}^n. \tag{2.2}$$

Предположим, что решение $x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u)$, $\tau > t_0$, системы (2.1), (2.2) (здесь и ниже $\{\varphi\} = (\varphi, \varphi_0)$) при каждой кусочно-непрерывной r-вектор-функции u и $\varphi_0 \in \boldsymbol{R}^n$, $\varphi \in C([t_0-h, t_0], \boldsymbol{R}^n)$ $= C(C([a, b], \boldsymbol{R}^m)$ — множество непрерывных на $[a, b]$ m-вектор-функций) существует, единственно и непрерывно по t, $t > 0$. Пусть далее $s \geqslant 0$. Введем на $C \times \boldsymbol{R}^n$ соотношение эквивалентности $\mathscr{X}_s$, положив:

$$\{\varphi\}\mathscr{X}_s\{\psi\} \Leftrightarrow \forall u, \ \forall \tau \geqslant t_0+s \ \ x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u) = x(\tau, t_0, \{\psi\}, u);$$

$$\{\varphi\}\mathscr{X}_\infty\{\psi\}$$
$$\Leftrightarrow \forall u, \ \exists t_1 = t_1(u) > t_0, \ \forall \tau \geqslant t_1 \ \ x(\tau, t_0, \{\varphi\}, u) = x(\tau, t_0, \{\psi\}, u).$$

Введем следующие определения-обозначения:

${}_s\{\varphi\} = \big\{\{\psi\} \mid \{\psi\}\mathscr{X}_s\{\varphi\}, \{\psi\} \in C \times \boldsymbol{R}^n\big\}$ — начальное s-состояние, т.е. класс эквивалентности с представителем $\{\varphi\}$;

$C \times \boldsymbol{R}^n/\mathscr{X}_s$ — фактор-множество по соотношению эквивалентности $\mathscr{X}_s$ — множество начальных s-состояний;

$x(\cdot, t_0, {}_s\{\varphi\}, u) = \{x(\cdot, t_0, \{\psi\}, u) |\ \{\psi\} \in {}_s\{\varphi\}\}$ — s-решение системы, соответствующее начальному s-состоянию ${}_s\{\varphi\}$ и управлению u;

$$ {}_sX_\tau = \{(x_{[t_0+\tau-h, t_0+\tau]}(\cdot, t_0, {}_s\{\varphi\}, u), \\ x(t_0+\tau+0, t_0, {}_s\{\varphi\}, u)) |\ \forall_s\{\varphi\} \in C \times \mathbf{R}^n/\mathscr{X}_s, \forall u\} $$

— множество возможных s-состояний системы в момент τ (его элементы суть возможные s-состояния в момент $\tau \geqslant 0$) — множество сужений на $[t_0+\tau-h, t_0+\tau]$ вместе с их правыми концами всевозмо-жных s-решений системы, $\tau \geqslant 0$. Ясно, что ${}_sX_0 = C \times \mathbf{R}^n/\mathscr{X}_s$. В случае $s = 0$ решение называется *сильным*, в случае $s = +\infty$ — *слабым*.

Определения. Систему (2.1) назовем:

2.1. *s-управляемой* ($s > 0$), если для каждого начального ${}_s\{\varphi\} \in {}_sX_0$ и конечного $(\psi, \psi_0) \in {}_sX_{s+h}$ — состояний существует кусочно-непрерывное управление u такое, что $x_{[t_0+s, t_0+s+h]}(\cdot, t_0, {}_s\{\varphi\}, u) = \psi$;

2.2. *Слабо управляемой* (*∞-управляемой*), если $\forall_s\{\varphi\}, \forall_s\{\psi\} \in C \times \mathbf{R}^n$, $\forall v$, $\exists t_1 > t_0$, $\exists u$, $\forall \tau \geqslant t_1$ $x(\tau, t_0, {}_\infty\{\varphi\}, u) = x(\tau, t_0, {}_\infty\{\psi\}, v)$;

2.3. *s-наблюдаемой* ($s \geqslant 0$) *по выходу*

$$ (2.3) \qquad y(t) = y(t, t_0, \{\varphi\}, u) = C(x_{[t-h,t]}, u(t), t), \qquad t \geqslant t_0, $$

если для любых $\{\varphi\}$, $\{\psi\}$ соотношение $y(t, t_0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, t_0, \{\psi\}, u)$ для $t \geqslant t_0+s$ и каждого управления u возможно лишь в том случае, если $\{\varphi\}\mathscr{X}_s\{\psi\}$;

2.4. *Слабо наблюдаемой по выходу* (2.3), если $\forall\{\varphi\}$, $\forall\{\psi\}$, $\forall u$, $\exists t_1 > t_0$, $\forall t \geqslant t_1$ $y(t, t_0, \{\varphi\}, u) \equiv y(t, t_0, \{\psi\}, u) \Rightarrow \{\varphi\}\mathscr{X}_\infty\{\psi\}$.

2.2. s-наблюдаемость, s-управляемость, двойственность

Рассмотрим систему (1.1) с матрицами

$$ (2.4) \qquad B_j = 0, \quad j = 1, \ldots, l, $$

и выходом

$$ (2.5) \qquad y(t) = Cx(t) $$

(здесь C — постоянная $(m \times n)$-матрица).

Предположим, что в определении 2.1 пара (ψ, ψ_0) суть нулевой элемент в ${}_sX_{s+h}$. Такую s-управляемую систему будем называть *нуль-s-управляемой*; если же в этом определении ${}_s\{\varphi\}$ есть нуль из ${}_sX_0$, то s-управляемую систему назовем *s-достижимой из нуля*.

Определение 2.5. Систему (1.1), (2.4) будем называть *линейно s-наблюдаемой* ($s > 0$) *по выходу* (2.5), если для каждой непрерывной

n-вектор-функции p и любого n-вектора g соотношение

$$(2.6)\qquad \int_0^s \nu'(t)y(t)\,dt = g'x(s) + \sum_{i=0}^{l}\int_s^{s+h_i} p'(\tau)A_i x(\tau-h_i)\,d\tau$$

выполняется при некоторой кусочно-непрерывной m-вектор-функции ν вдоль любого решения $x(\tau) = x(\tau, 0, \{\varphi\}, 0)$, $\tau \in [0, s]$, системы (1.1), (2.4).

Справедливы

Утверждения: 2.1. $\mathscr{X}_\infty \sim \mathscr{X}_{nh}$;

2.2. *Система* (1.1), (2.4) *s-управляема* ($s > 0$) $\Leftrightarrow$ *система* (1.1), (2.4) *нуль-s-управляема* $\Leftrightarrow$ *система* (1.1), (2.4) *s-достижима из нуля*;

2.3. *Система* (1.1), (2.4) *линейно s-наблюдаема по выходу* (2.5) *тогда и только тогда, когда система*

$$(2.7)\qquad \dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{l} A_j' x(t-h_j) + C'v(t), \qquad t > 0,$$

s-достижима из нуля (*принцип двойственности*).

Для доказательства утверждения 2.1 к системе (1.1), (2.4) достаточно применить преобразование Лапласа и воспользоваться теоремой Винера–Пэли о целых функциях конечной степени; утверждение 2.2 является следствием интегрального представления решения системы по формуле Коши. Справедливость принципа двойственности (утверждение 2.3) устанавливается по следующей схеме: предполагая систему (1.1), (2.4) линейно s-наблюдаемой по выходу (2.5) и используя формулу Коши [1]:

$$(2.8)\qquad x(t) = x(t, 0, \{\varphi\}, u) = K(t)\varphi_0 + \sum_{i=0}^{l}\int_{h-h_i}^{h} K(t+h-h_i-\tau)A_i\varphi(\tau-h)\,d\tau + \int_0^t K(t-\tau)Bu(\tau)\,d\tau,$$

преобразуем левую и правую части равенства (2.6)

$$\int_0^s \nu'(t)y(t)\,dt = \int_0^s \nu'(t)CK(t)\,dt\,\varphi_0 + \sum_{j=1}^{l}\int_{h-h_j}^{h-h_{j-1}} \sum_{i=j}^{l}\int_0^s \nu'(t)\times CK(t+h-h_i-\tau)A_i\,dt\,\varphi(\tau-h)\,d\tau,$$

$$g'x(s) + \sum_{i=0}^{l}\int_s^{s+h_i} p'(t)A_i x(t-h_i)\,dt = \Big(g'K(s) + \sum_{i=0}^{l}\int_s^{s+h_i} p'(t)A_iK(t-h_i)\,dt\Big)\varphi_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{l}\int_{h-h_k}^{h-h_{k-1}}\Big(\sum_{j=k}^{l} g'K(s+h-h_j-\tau)A_j+\sum_{j=k}^{l}\sum_{i=0}^{l}\int_{s}^{s+h_i} p'(t)\times$$
$$\times A_iK(t+h-h_i-h_j-\tau)A_j dt\Big)\varphi(\tau-h)d\tau,$$

отсюда, учитывая произвольность φ и φ_0, получаем

$$\int_0^s \nu'(t)CK(t)dt = g'K(s)+\sum_{i=0}^{l}\int_s^{s+h_i} p'(t)A_iK(t-h_i)dt,$$

$$\sum_{i=k}^{l}\int_0^s \nu'(t)CK(t+h-h_i-\tau)A_i dt = \sum_{j=k}^{l}\Big(g'K(s+h-h_j-\tau)A_j+$$
$$+\sum_{i=0}^{l}\int_s^{s+h_i} p'(t)A_iK(t+h-h_i-h_j-\tau)A_j dt\Big),$$

$\tau\in[h-h_k, h-h_{k-1}]$, $k=1,\dots,l$, что в силу произвольности выбора g и p равносильно нуль-s-управляемости (и, следовательно, s-достижимости из нуля) системы (2.7), что и завершает доказательство принципа двойственности.

2.3. Замечания

Предположим для простоты, что рассматривается частный случай

$$\dot{x}(t) = A_0x(t)+A_1x(t-h)+Bu(t),\quad t>0, \tag{2.9}$$

системы (1.1), (2.4). Для того, чтобы однозначно вычислить движение этой системы в будущем обычно для нее задают начальные условия в виде (2.2) как элемент некоторого функционального пространства. Таким образом, в общем случае система с запаздыванием является бесконечномерной. Для таких систем наряду с конечномерными задачами управляемости (относительная, поточечная и др.) особый интерес вызывают различные типы бесконечномерной (функциональной) управляемости. Исторически первой в этом направлении была работа [5], где сформулирована задача полного успокоения (полной управляемости = полной нуль-управляемости) системы с запаздыванием (см. также [22], [7], [10], [24], [20] и библ. к ним). Немного позднее разрабатываются подходы (см., например, [20]) к задаче функциональной управляемости как управления ее состоянием, при этом начальные условия (2.2) интерпретируются как состояние системы. В зависимости от класса функций φ вводятся различные пространства состояний. В последние годы наиболее популярным в зарубежной литературе становится пространство $M_2 = L_2([-h, 0], \boldsymbol{R}^n)\times\boldsymbol{R}^n$. Управляемость при этом понимается (по аналогии с интерпретацией Калмана) как возможность перевода траектории системы из произвольного начального в произвольное конечное состояние (или его ε-окрестность — задача аппроксимативной управляемости). Посмотрим конкретно на примере системы (2.9), что же дает такое определение управляемости в случае пространства M_2. Пусть $A_1 = 0$. Тогда аппроксимативная M_2-управляемость невозможна, если $\operatorname{rank} B < n$. В этом случае теряется смысл системы (2.9) как системы с динамикой A_0, A_1; остается лишь „всемогущее" входное устройство B. Таким образом, требование M_2-управляемости системы (2.9) (хотя оно и сформулировано в духе определения Калмана) представляется чрезмерно стеснительным и малосодержательным по сравнению с условием управляемости по Калману системы (2.9) с $A_1 = 0$. Возникшая ситуация объясняется тем, что пространство состояний системы (2.9) с $A_1 = 0$ по существу конечномерно, что никоим образом не учитывается в формулировке M_2-управляемости. Отмеченных недостатков лишено определение s-управляемости, где система считается управляемой, если существует возможность (выбирая подходящим образом управление) перехода системы с одного произвольного допустимого режима управления на другой, т.е.

$$\forall\{\varphi\}, \forall\{\psi\}, \forall v, \exists u, \forall t \geqslant s \;\; x(t, 0, \{\varphi\}, u) \equiv x(t, 0, \{\psi\}, v),$$

в отличие от M_2-управляемости, где требуется приближение решениями системы элементов некоторого произвольно заданного функционального множества.

При увеличении параметра τ элеметы (классы эквивалентности) множества ${}_sX_\tau$ становятся беднее, „слипаясь" при $\tau \geqslant s+h$ в одну вектор-функцию. Поэтому в качестве s-состояний системы можно рассматривать элементы множества ${}_sX_{s+h}$. Тогда множества ${}_sX_\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant s+h$, играют роль s-предсостояний: на промежутке $[0, s+h]$ система накапливает информацию для своего s-состояния. Множество ${}_sX_{s+h}$ можно наделить различными структурами, в частности, структурой предгильбертова пространства. В связи с этим преставляет интерес строение этого пространства, в частности, интересен вопрос о полных и замкнутых системах в нем. С появлением топологии в ${}_sX_{s+h}$ автоматически возникают различные задачи аппроксимативной управляемости (см., например, [9]). Особый интерес вызывает вопрос о структуре пространства ${}_\infty X_{nh}$ слабых состояний. Например, можно показать, что все пространства ${}_\infty X_\tau$ изоморфны и различным слабым состояниям соответствуют различные слабые решения. В этом случае в полугруппе преобразований [14], [15], связанной с системой с запаздыванием, возможны сокращения и эта полугруппа погружается в свою группу частных. В этой связи заметим, что пространство слабых состояний системы (1.1), (2.4) в случае конечного спектра является конечномерным, что ставит такие системы по их свойствам в один ряд с системами без запаздывания.

Представляет интерес теория управления и наблюдения систем с запаздыванием, если в качестве множества возможных s-состояний системы в момент τ, $\tau > 0$, рассмотреть множество ${}_{\infty}X_0$. Естественным классом допустимых управлений в этом случае становится класс обобщенных функций.

Может оказаться полезной другая интерпретация общего подхода к управляемости и наблюдаемости систем с запаздыванием, в котором наряду с понятием s-состояния вводится понятие t-информатора решения. Рассмотрим систему (1.1). По аналогии с предыдущим начальные условия $(\{\varphi\}, u_0)$ и $(\{\psi\}, v_0)$ считаются s-эквивалентными, если при каждом управлении u для соответствующих решений имеет место тождество

$$x(\tau, \{\varphi\}, u_0, u) \equiv x(\tau, \{\psi\}, v_0, u), \qquad \tau \geqslant s.$$

Величину

$$Иx(\cdot, \{\varphi\}, u_0, u) = (\gamma, \bar{\gamma})$$

(здесь $\bar{\gamma} = x(t+0, \{\varphi\}, u_0, u)$, γ—вектор-функция на $[0, h]$ со значениями

$$\gamma(\tau) = \sum_{j=k}^{l} \big(A_j x(t+\tau-h_j, \{\varphi\}, u_0, u) + B_j u(t+\tau-h_j)\big),$$

$\tau \in [h_{k-1}, h_k]$, $k = 1, \ldots, l$) назовем *t-информатором решения* $x(\cdot, \{\varphi\}, u_0, u)$. В нем по существу аккумулируется минимальная информация в момент t о предыстории решения, которая необходима и достаточна для однозначного вычисления решения для $\tau > t$ при известном управлении $u(\tau)$, $\tau > t$. Основное свойство t-информатора заключается в том, что два начальных условия s-эквивалентны в том и только в том случае, когда соответствующие t-информаторы совпадают при каждом управлении. Множество

$${}_tИ\Sigma = \{{}_tИx(\cdot, \{\varphi\}, u_0, u) \mid \forall\{\varphi\}, \forall u_0, \forall u\}$$

всех возможных t-информаторов решений назовем *t-информатором системы*. Тогда s-управляемость системы можно интерпретировать как существование решения, s-информатор которого совпадает с произвольным наперед заданным элементом множества ${}_sИ\Sigma$. Интересно также отметить, что в определении линейной s-наблюдаемости (формула (2.6)) по существу восстанавливается s-информатор решения. Если множество ${}_sИ\Sigma$ наделить топологией, то естественным образом возникает понятие аппроксимативной s-управляемости, которое позволяет использовать в исследовании классические методы функционального анализа (в частности, теорему Хана–Банаха о продолжении).

§ 3. УПРАВЛЕНИЕ СПЕКТРОМ

Задача управления спектром (задача модального управления в другой терминологии) возникла из нужд практики, с одной стороны, с другой — как развитие других теорий, из которых в первую очередь следует отметить задачи стабилизации и аналитического конструирования регуляторов. По существу модальное управление системой заключается в построении такой обратной связи, при которой замкнутая система имеет произвольный наперед заданный возможный спектр. В зависимости от вида обратной связи существуют различные постановки этой задачи, к рассмотрению которых мы и приступаем.

3.1. Дискретные регуляторы

Присоединим к системе (1.1) линейный дискретный регулятор с запаздыванием

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\nu} Q_j x(t-\mu_j), \tag{3.1}$$

$x(\tau) \equiv 0,\ \ \tau < -h;\ \ 0 = \mu_0 < \ldots < \mu_\nu;\ \ Q_j,\ \ j = 0, \ldots, \nu,$ — постоянные $(r \times n)$-матрицы.

Поскольку коэффициенты характеристического уравнения

$$\det\Big[\lambda I_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-\lambda h_j)\Big] = 0$$

однородной системы (1.1) однозначно определяют его корни, то задачу модального управления для системы (1.1) можно интерпретировать как задачу управления коэффициентами ее характеристического квазиполинома.

Определение 3.1. Система (1.1) называется *модально управляемой* при помощи дискретного регулятора (3.1), если для любых чисел r_{ij}, $0 = \varepsilon_0 < \ldots < \varepsilon_k$, $i = 0, \ldots, n-1$; $j = 0, \ldots, k$, существует регулятор вида (3.1) (существуют числа ν, μ_j и матрицы Q_j, $j = 0, \ldots, \nu$) такой, что характеристический квазиполином замкнутой системы (1.1), (3.1) имеет вид

$$\det\Big[pI_n - \sum_{j=0}^{l} A_j \exp(-ph_j) - \Big(\sum_{j=0}^{l} B_j \exp(-ph_j)\Big)\Big(\sum_{j=0}^{l} Q_j \exp(-p\mu_j)\Big)\Big] \equiv$$
$$\equiv p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} r_{ij} p^i \exp(-p\varepsilon_j), \qquad p \in C.$$

Предположим, что в (1.1)

(3.2) $$B_j = b_j \in \boldsymbol{R}^n, \quad j = 0, 1, \dots, l.$$

Имеет место

Утверждение 3.1. *Система* (1.1), (3.2) *модально управляема при воздействии регулятора* (3.1) *тогда и только тогда, когда*

(3.3) $$\det\Big[\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} b_j \vdots \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} b_j\Big) \vdots \dots \vdots \Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j\Big)^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{h_j} b_j\Big)\Big] \equiv$$
$$\equiv \mathrm{const} \neq 0, \qquad m \geqslant 0.$$

При этом элементы искомых $(1\times n)$*-матриц* $Q_j = q_j'$, $j = 0, 1, \dots, \nu$, *и числа* ν, $\mu_0, \dots, \mu_\nu$ *находятся из тождества*

$$\sum_{j=0}^{\nu} q_j' m^{\mu_j} D(m) \equiv$$
$$\equiv \Big[\sum_{j=0}^{k} r_{0j} m^{\varepsilon_j} - r_0(m) \vdots \dots \vdots -r_{n-1}(m) + \sum_{j=0}^{k} r_{n-1,j} m^{\varepsilon_j}\Big], \qquad m \geqslant 0,$$

где

$$D(m) = [d_1(m) \vdots \dots \vdots d_n(m)],$$

$$d_j(m) = \Big(\sum_{i=0}^{l} m^{h_i} A_i\Big)^{n-j}\Big(\sum_{i=0}^{l} m^{h_i} b_i\Big) + \sum_{i=1}^{n-j} r_{n-i}(m)\Big(\sum_{k=0}^{l} m^{h_k} A_k\Big)^{n-j-i}\Big(\sum_{k=0}^{l} m^{h_k} b_k\Big),$$

$$d_n(m) = \sum_{i=0}^{l} m^{h_i} b_i, \qquad j = 1, \dots, n-1;$$

$$\det\Big[pI_n - \sum_{i=0}^{l} m^{h_j} A_j\Big] \equiv p^n + r_{n-1}(m) p^{n-1} + \dots + r_0(m), \qquad m \geqslant 0.$$

3.2. Регуляторы общего вида

Рассмотрим систему (1.1) с

(3.5) $$B_0 = b \in \boldsymbol{R}^n, \quad B_i = 0, \; i = 1, \dots, l.$$

Присоединим к ней линейный регулятор общего вида, представляющий собой линейный ограниченный функционал, заданный на отрезке $x(s)$, $s \in [t-\theta, t]$, траектории системы. Согласно теореме Рисса о представлении этот регулятор можно записать в виде

(3.6) $$u(t) = \int_{-\theta}^{0} [d_s Q(s)] x(t+s),$$

где $x(\tau)\equiv 0,\ \tau<-h$; $Q(\cdot)$ — $(r\times n)$-матрица-функция ограниченной вариации. Определение модальной управляемости системы (1.1) при помощи регулятора (3.6) дается по аналогии с определением 3.1 (см. [21]).

Имеет место

Утверждение 3.2. *Система* (1.1), (3.5) *модально управляема при воздействии регулятора* (3.6) *тогда и только тогда, когда она полностью* (*слабо*) *управляема.*

Данное утверждение является обобщением на системы с запаздыванием хорошо известной для систем без запаздывания теоремы Уонэма [27].

Схема доказательства. Не ограничивая общности, считаем $b'=[1\vdots 0\vdots\ldots\vdots 0]$. Тогда, применяя к замкнутой системе (1.1), (3.5), (3.6) преобразование Лапласа, исходную задачу сводим к разрешимости в специальном классе целых функций $q_1(p),\ldots,q_n(p)$ системы

$$\det\left[\begin{bmatrix} p-a_{11}(p) & -a_{12}(p) & \ldots & -a_{1n}(p)\\ -a_{21}(p) & p-a_{22}(p) & \ldots & -a_{2n}(p)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1}(p) & -a_{n2}(p) & \ldots & p-a_{nn}(p)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}[q_1(p)\vdots\ldots\vdots q_n(p)]\right]\equiv$$

$$\equiv p^n+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} r_{ij}p^i\exp(-p\varepsilon_j)$$

(здесь $a_{ij}(p)$ обозначает элемент i-ой строки и j-ого столбца матрицы $\sum\limits_{j=0}^{l}A_j\exp(-ph_j)$, $1\leqslant i,j\leqslant n$) или, что эквивалентно,

$$q_1(p)d_1(p)+\ldots+q_n(p)d_n(p)\equiv\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} r_{ij}p^i\exp(-p\varepsilon_j) \tag{3.7}$$

(здесь $d_j(p)$ — некоторая целая функция переменных p, $a_{is}(p)$, $1\leqslant i$, $s\leqslant n$; $j=1,\ldots,n$), откуда, разрешая уравнение (3.7) относительно $q_1(p)$, убеждаемся в справедливости исходного утверждения, при этом оказывается, что меру в (3.6) достаточно брать в виде суммы абсолютно непрерывной и дискретной мер.

3.3. Системы с неполной информацией

Рассмотрим вновь систему (1.1) с матрицами (3.2). Предположим, что измерению доступна величина

$$y(t)=\sum_{j=0}^{l}c_j'x(t-h_j),\qquad t>0;\quad c_j\in\mathbf{R}^n,\quad j=0,\ldots,l. \tag{3.8}$$

Такие системы обычно называют *системами с неполной информацией* о состоянии. Задача модального управления для таких систем заключается в построении такой обратной связи по выходу (3.8), которая обеспечивала бы замкнутой системе желаемый спектр. Для систем без запаздывания широко распространены два подхода к решению этой задачи. Один из них заключается в построении наблюдающего устройства, восстанавливающего состояние системы, и применении впоследствии обратной связи по состоянию. Другой использует обратную связь в виде динамического регулятора, использующего информацию о выходе и конечном числе его производных. Существуют разноречивые точки зрения о возможностях практической реализации этих двух методов. Оставляя этот вопрос в стороне, ограничимся замечанием, что каждый из этих подходов имеет свою область приложений, свой круг задач, для которых он эффективнее. Ниже для системы (1.1), (3.2), (3.8) строится аналог известного для систем без запаздывания динамического регулятора Пирсона [26].

Присоединим к системе (1.1), (3.2), (3.8) динамический регулятор вида

$$\frac{d^{\varrho}u(t)}{dt^{\varrho}}+\sum_{i=0}^{\varrho-1}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}\frac{d^{i}u(t-\delta_j)}{dt^{i}}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}\beta_{ij}\frac{d^{i}y(t-\delta_j)}{dt^{i}}. \tag{3.9}$$

Пусть ε_j, r_{ij} — произвольные действительные числа, $i=0,1,\ldots$ $\ldots,n+\varrho-1$; $j=0,1,\ldots,\xi$ (ξ — произвольное фиксированное натуральное число), $0=\varepsilon_0<\ldots<\varepsilon_{\xi}$.

Задача. Найти условие на параметры системы (1.1), (3.2), (3.8), при которых найдется регулятор вида (3.9) (найдутся числа ϱ, M, N, δ_j, a_{ij}, β_{ij}, $0=\delta_0<\ldots<\delta_M$) такой, что характеристическое уравнение системы (1.1), (3.2), замкнутой регулятором (3.9), имеет вид

$$\lambda^{n+\varrho}+\sum_{i=0}^{n+\varrho-1}\sum_{j=0}^{\xi}r_{ij}\lambda^{i}\exp(-\lambda\varepsilon_j)=0. \tag{3.10}$$

По аналогии с [26] имеет место [21]

Утверждение 3.3. *Если выполнены требования*

$$\det\Big[\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}b_i:\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}A_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}b_i\Big):\ldots:\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}A_i\Big)^{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}b_i\Big)\Big]\equiv$$
$$\equiv\mathrm{const}\neq 0,$$

$$\det\Big[\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}c_i:\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}A_i'\Big)\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}c_i\Big):\ldots:\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}A_i'\Big)^{n-1}\Big(\sum_{i=0}^{l}m^{h_i}c_i\Big)\Big]\equiv$$
$$\equiv\mathrm{const}\neq 0,\qquad m\geqslant 0,$$

то существует регулятор вида (3.9) *такой, что характеристическое уравнение замкнутой системы* (1.1), (3.2), (3.8), (3.9) *имеет вид* (3.10).

3.4. Замечания

Условие (3.3) модальной управляемости при воздействии дискретной обратной связи (3.1) является более стеснительным по сравнению с критерием модальной управляемости при воздействии обратной связи (3.6), однако регулятор вида (3.1) предпочтительнее с практической точки зрения, т.к. его коэффициенты определяются из конечномерной системы (3.4) линейных алгебраических уравнений, в отличие от регулятора (3.6), для построения которого в общем случае нужно решить интерполяционную проблему с узлами в корнях некоторого трансцендентного уравнения, что с точки зрения практической реализации представляет серьезную проблему.

Критерий модальной управляемости системы (1.1), (3.2), (3.6) оказывается эквивалентным условию полной управляемости. Возникает вопрос, существует ли содержательное физическое понятие управляемости, эквивалентное критерию (3.3) модальной управляемости. В связи с этим заметим, что формальное определение такой управляемости можно найти в работе [23].

Вопрос о критериях модальной управляемости систем нейтрального типа, а также многовходных систем запаздывающего типа остается в общем случае открытым.

Представляет интерес вопрос об отыскании удобных (промежуточных между (3.1) и (3.6)) классов регуляторов, применяемых для решения задач модального управления.

Подробное обсуждение вопросов модального управления линейными стационарными системами с запаздыванием имеется в [21].

§ 4. КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ниже рассматриваются некоторые канонические формы систем управления с запаздыванием, основанные на алгебраических свойствах оператора сдвига.

4.1. Преобразования систем с запаздыванием

Рассмотрим класс $\mathcal{F}$ линейных стационарных управляемых динамических систем со многими запаздываниями. Каждую такую систему можно описать дифференциально-разностным уравнением вида (1.1). Всякая система (1.1) однозначно определяется матричной парой $\big(A(m), B(m)\big)$, где

$$A(m) = \sum_{j=0}^{l} m^{h_j} A_j, \qquad B(m) = \sum_{j=0}^{l} m^{h_j} B_j.$$

Поэтому в качестве класса $\mathscr{F}$ можно рассматривать класс множеств матричных пар вида $(A(m), B(m))$, каждый раз отождествляя систему вида (1.1) с парой $(A(m), B(m))$, $m \geqslant 0$. Пусть далее символы $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_4$ означают множества матриц-функций вида:

$$\mathscr{R}_i = \Big\{T_i(m) | \quad T_i(m) = \sum_{j=0}^{k} T_{ij} m^{s_j}; \quad \det T_i(m) \neq 0, \quad m \geqslant 0;$$

$$T_{ij} - \text{ постоянная } (n \times n)\text{-матрица}, \ 0 = s_0 < \ldots < s_k, \quad j = 0, 1, \ldots, k; \quad k = 0, 1, \ldots\Big\},$$

где $T_1(m) \equiv T$, $\det T_2(m) \equiv \mathrm{const} \neq 0$, $\det T_3(m) \equiv cm^a$, $c = \mathrm{const} \neq 0$, $a \geqslant 0$, $\det T_4(m) \not\equiv 0$, $m \geqslant 0$.

Множества $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_4$ порождают 4 класса невырожденных преобразований [4]

$$x(t) = T_i(\exp(-p))y(t), \qquad t \in \boldsymbol{R}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, \qquad p = d/dt$$

системы (1.1), которые для простоты также обозначим символами $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_4$.

Свойства преобразований $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_4$ подробно изучаются в [4]. Отметим некоторые из них: класс $\mathscr{F}$, как легко видеть, инвариантен относительно преобразований $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$, что позволяет интерпретировать задачу отыскания канонических форм в этом классе как задачу построения некоторого универсального элемента; классы $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_3$ сохраняют такие важные свойства системы как поточечная, модальная([2]) и полная управляемость, стабилизируемость (класс $\mathscr{R}_1$ сохраняет и относительную управляемость) и др.; классы $\mathscr{R}_3$, $\mathscr{R}_4$ являются более широкими по сравнению с классами $\mathscr{R}_1$, $\mathscr{R}_2$, но в общем случае преобразования из этих классов ($\mathscr{R}_4$) приводят систему к специальным системам нейтрального типа, канонические формы которых зависят от вида преобразования, при этом возможно появление элементов опережения аргумента.

Отметим, в частности, что интерпретация системы (1.1) как матричной пары $(A(m), B(m))$ позволяет исследовать (по аналогии с системами без запаздывания) многие ее качественные свойства чисто алгебраическим путем, не прибегая к методам пространства состояний.

([2]) Класс $\mathscr{R}_3$ в общем случае не сохраняет свойство модальной управляемости при помощи дискретного регулятора.

4.2. Связь с проблемой универсальности

Введем на $\mathscr{F}$ соотношение эквивалентности $\mathscr{X}_i$, положив

$$\big(A(m), B(m)\big)\mathscr{X}_i\big(\bar{A}(m), \bar{B}(m)\big) \Leftrightarrow \exists T_i(m) \in \mathscr{R}_i, \ \forall m \geqslant 0,$$
$$\bar{A}(m) = \big(T_i(m)\big)^{-1} A(m) T_i(m), \qquad \bar{B}(m) = \big(T_i(m)\big)^{-1} B(m),$$
$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Пусть далее S — произвольное множество свойств элементов класса $\mathscr{F}$, инвариантное относительно $\mathscr{X}_i$. Обозначим через $W(S)$ множество всех отображений $f\colon \mathscr{F} \to S$, инвариантных относительно $\mathscr{X}_i$, т.е. $f\Big(\big(A(m), B(m)\big)\Big) = f\Big(\big(\bar{A}(m), \bar{B}(m)\big)\Big)$, если $\big(\bar{A}(m), \bar{B}(m)\big)\,\mathscr{X}_i\,\big(A(m), B(m)\big)$. Тогда проблема универсальности может быть сформулирована следующим образом: найти множество C и отображение $\xi \in W(C)$ такие, что для любого множества S и любого отображения $f \in W(S)$ существует единственное отображение $\eta\colon C \to S$ такое, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "f"'] & & C \arrow[dl, "\eta"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Пара (ξ, C) есть универсальный элемент для этой задачи. Проблема универсальности имеет стандартное (единственное с точностью до некоторого изоморфизма) решение $(\xi, \mathscr{F}/\mathscr{X}_i)$, где ξ отображает $\mathscr{F}$ на фактор-множество $\mathscr{F}/\mathscr{X}_i$. Однако более интересно такое решение проблемы универсальности, когда $C \subset \mathscr{F}$. В этом случае отображение ξ из универсальной пары называется *каноническим*, а само множество C — *множеством канонических форм*. Это множество канонических форм, как уже отмечалось выше, единственно с точностью до некоторого изоморфизма. Таким образом, множество канонических форм систем из $\mathscr{F}$ в классе преобразований $\mathscr{R}_i$ есть множество C из универсальной пары (ξ, C), коль скоро $C \subset \mathscr{F}$.

4.3. Некоторые канонические формы

Пусть $n_1(m) \geqslant n_2(m) \geqslant \ldots \geqslant n_{k(m)}(m)$ — инварианты Кронекера [18] пары $\big(A(m), B(m)\big)$, $B(m) = [b_1(m) \vdots \ldots \vdots b_r(m)]$. Обозначим $n_j = \max\limits_{m\geqslant 0} n_j(m)$, $j = 1, \ldots, \nu = \min\limits_{m \geqslant 0} k(m)$, $\sum\limits_{j=1}^{\nu} n_j = n$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_\nu$.

Предположим, что $\forall m \geqslant 0$,

$$\det\big[b_1(m) \vdots \ldots \vdots \big(A(m)\big)^{n_1 - 1} b_1(m) \vdots \ldots \vdots b_\nu(m) \vdots \ldots \vdots \big(A(m)\big)^{n_\nu - 1} b_\nu(m)\big] \equiv$$
$$\equiv \text{const} \neq 0, \quad m \geqslant 0.$$

Тогда существует преобразование $T(m) \in \mathscr{R}_2$ такое, что для достаточно больших t, если $x(t) = T(\exp(-p))y(t)$, тогда $\dot{y}(t)$ равно

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
0 & 1 & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 1 & & & & & & & & & \\
\times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times \\
 & & & & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & \dots & 1 & & & & & \\
\times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times \\
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\times & \times & \dots & \times & \times & \times & \dots & \times & \dots & \times & \times & \dots & \times
\end{array}\right] \\
\qquad n_1 \qquad\qquad\qquad n_2 \qquad\qquad \dots \qquad\qquad n_\nu
\end{array}
y(t) +
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & \times & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & 1 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right] \\
\quad \nu \qquad\quad r-\nu
\end{array}
u(t)
$$

где символ $\times$ означает, вообще говоря, некоторые степенные функции от $\exp(-p)$. В частности, всякая модально управляемая при воздействии регулятора (3.1) система (1.1), (3.5) приводится в классе $\mathscr{R}_2$ к системе вида

$$
\dot{y}(t) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & & 1 \\
-r_0(\exp(-p)) & -r_1(\exp(-p)) & \dots & -r_{n-1}(\exp(-p))
\end{bmatrix} y(t) + [0 \vdots \dots \vdots 0 \vdots 1]' u(t), \qquad p = \frac{d}{dt},
$$

являющейся обобщением на системы с запаздыванием известного для систем без запаздывания канонического представления Калмана [3], стр. 55.

4.4. Замечания

Если класс $\mathscr{F}$ расширить до класса систем с бесконечным числом запаздываний (и нулевыми начальными условиями), то задача универсальности в этом классе для $\mathscr{R}_4$ решается как и в случае обыкновенных систем, например, посредством построения нормальных канонических форм (форм Фробениуса).

В общем случае вопрос о содержательном решении проблемы универсальности для преобразований $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_3$ на множестве $\mathscr{F}$ остается к настоящему моменту открытым.

Детальное рассмотрение преобразований $\mathscr{R}_1$–$\mathscr{R}_4$ дано в [4], некоторые их приложения к качественной теории управления системами с запаздыванием имеются в [4], [17], [21], [22]. Другие классы преобразований, использующие также алгебраические свойства оператора сдвига, представлены в [19].

В заключение отметим еще работы [22], [25], в которых сравниваются различные концепции управляемости систем с запаздыванием.

Литература

[1] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва 1967.

[2] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, *Качественная теория оптимальных процессов*, Наука, Москва 1971.

[3] Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, *Очерки по математической теории систем*, Мир, Москва 1971.

[4] Ф. М. Кириллова, В. М. Марченко, *Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом*, Препринт № 7 (39), Институт Математики АН БССР, Минск, апрель 1978.

[5] Н. Н. Красовский, *Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Оптимальные системы. Статистические методы*, в: Труды II конгресса ИФАК, т. 2, Наука, Москва 1965, 201–210.

[6] В. М. Марченко, *Минимальное число входов управляемых систем*, Дифференциальные уравнения 10 (1974), 1789–1796.

[7] —, *К управляемости линейных систем с последействием*, ДАН СССР 236, 5 (1977), 1083–1086.

[8] —, *К задаче вычисления минимального числа входов управляемых динамических систем*, Известия вузов. Математика 4 (1978), 42–52.

[9] —, *Полная квазиуправляемость линейных систем с последействием*, Автоматика и телемеханика 3 (1979), 18–22.

[10] —, *О полной управляемости систем с запаздыванием*, Problems of Control and Informations Theory 8, 5–6 (1979), 421–432.

[11] В. М. Марченко, Б. П. Московска, Ю. С. Симеонова, *Поточечная управляемость систем с последействием*, Дифференциальные уравнения 7 (1978), 1324–1327.

[12] С. А. Минюк, *Две задачи управляемости для линейных систем с последействием*, Вестник Белорусского университета, сер. 1, 1 (1972), 8–11.

[13] В. М. Попов, *Гиперустойчивость автоматических систем*, Наука, Москва 1970.

[14] С. Н. Шиманов, *К теории линейных дифференциальных систем с запаздыванием*, Дифференциальные уравнения 1 (1965), 102–116.

[15] J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York 1977.

[16] M. L. Hautus, *Controllability and observability conditions of linear autonomous systems*, Indag. Math. 31 (1969), 443–448.

[17] V. V. Ignatenko, V. I. Janovich, *Controllability and reconstruction of systems with delay*, in: Proc. First International Conference Functional-Differential Systems and Related Topics, Zielona Góra 1980.

[18] R. E. Kalman, *Kronecker invariant and feedback*, in: Proc. Conf. Ordinary Differential Equations, Math. Research Center, Naval Research Lab., Washington, D. C. 1971.

[19] E. B. Lee, S. Neftci, A. Olbrot, *Canonical forms for time delay systems*, IEEE Trans. Automatic Control 27 (1982), 128–132.

[20] A. Manitius, R. Triggiani, *Function space controllability of linear retarded systems*, SIAM J. Control Optimization 16, 4 (1978), 559–645.

[21] V. M. Marchenko, I. K. Asmykovich, *On the problem of modal control in linear systems with delay*, in: Proc. IMACS European Simulation Meeting on Simulation of Distributed Parameter and Large-Scale Systems, Patrace, Greece, October 2–4, 1979.

[22] V. M. Marchenko, *Controllability problems for time-lag systems*, Preprint 234, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, January 1981.

[23] A. S. Morse, *Ring models for delay-differential systems*, Automatica 12 (1976), 529–531.

[24] A. W. Olbrot, *Algebraic criteria of controllability to zero function for linear constant time-lag systems*, Control and Cybernetics 2, 1/2 (1973), 59–77.

[25] A. W. Olbrot, S. H. Żak, *Controllability and observability problems for linear functional-differential systems*, Foundations of Control Engineering 5, 2 (1980), 79–89.

[26] J. B. Pearson, C. Y. Ding, *Compensator design for multivariable linear systems*, IEEE Trans. Automatic Control AC-14, 2 (1969), 130–134.

[27] W. M. Wonham, *On pole assignment in multi-input controllable systems*, ibid. AC-12, 6 (1967), 660–665.