NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

КОНСЕРВАТИВНАЯ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

АНДРИС БУЙКИС

Физико-математический факультет, Латвийский Государственный Университет, Рига, СССР

В работе показано использование интерполирующих в среднем сплайнов для сведения задачи (1)–(4) с разрывными коэффициентами из $\boldsymbol{R}^{n+1}$ к задаче с непрерывными коэффициентами из $\boldsymbol{R}^n$.

1. Введение

Пусть область $(x,y)\in\tilde{\Omega}\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ представляет собой конечный цилиндр, являющийся декартовым произведением конечного интервала (a,b) действительной оси на ограниченную или неограниченную область $y\in\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$. Будем считать, что цилиндр $\tilde{\Omega}$ состоить из цилиндров $\tilde{\Omega}_i=(x_i,x_{i+1})\times\Omega$, $i=\overline{0,N}$, $x_0=a$, $x_{N+1}=b$ с высотами $H_i=x_{i+1}-x_i$. Рассмотрим следующую задачу математической физики с кусочно-постоянными по x коэффициентами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)+L^i(U_i)=-F_i(x,y),\qquad (x,y)\in\tilde{\Omega}_i,\ i=\overline{0,N},\tag{1}$$

$$U_{i-1}=U_i,\qquad k_{i-1}\frac{\partial U_{i-1}}{\partial x}=k_i\frac{\partial U_i}{\partial x},\qquad x=x_i,\ y\in\Omega,\ i=\overline{1,N},\tag{2}$$

$$\nu_0k_0\frac{\partial U_0}{\partial x}-\lambda_0U_0=-\Phi_0(y),\qquad \nu_0\cdot\lambda_0\geqslant 0,\ \nu_0+\lambda_0>0,\ x=x_0,\ y\in\Omega,\tag{3_0}$$

$$\nu_1k_N\frac{\partial U_N}{\partial x}+\lambda_1U_N=\Phi_1(y),\qquad \nu_1\cdot\lambda_1\geqslant 0,\ \nu_1+\lambda_1>0,\ x=x_{N+1},\ y\in\Omega.\tag{3_1}$$

Будем считать, что $k_i = k_i(y)$, что L^i являются произвольными линейными операторами по y с не зависящими от x коэффициентами. Далее, будем предполагать, что функция $U(x,y)$, совпадающая на каждом $\bar{\bar{\Omega}}_i$ с $U_i(x,y)$, является непрерывной на $\bar{\bar{\Omega}}$ функцией. Для полноты постановки задачи к (1)–(3$_1$) необходимо добавить дополнительные условия

$$(4) \qquad l^i(U_i) = \Phi^{(i)}(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega \times (x_i, x_{i+1}), \; i = \overline{0,N},$$

число и вид которых зависит от порядка и типа операторов L^i. Будем предпологать, что задача (1)–(4) является корректно поставленной, что решение ее $U(x,y)$, кроме непрерывности на замыкании $\tilde{\Omega}$, обладает в каждой из $\tilde{\Omega}_i$ непрерывными наивысшими входящими в L^i производными и непрерывной 2-ой производной по x.

Отметим, что под одной компонентой вектор-координаты y может подразумеваться временная координата и что операторы L^i для различных i могут иметь различный вид. Это позволяет охватить постановкой (1)–(4) достаточно широкий класс задач.

В монографиях [1], [2] и в большом количестве журнальных статей показана возможность использования сплайнов для эффективного решения дифференциальных уравнений. В обычно применяемом методе коллокации требуется, чтобы сплайн-аппроксимация решения рассматриваемой задачи удовлетворяла исходному дифференциальному уравнению в выбранных точках, называемых точками коллокации. При этом разрыв коэффициента в членах дивергентного типа вызывает некоторые затруднения: такой член записывают в недивергентном виде, а точку разрыва „зажимают" двумя точками коллокации [2]. Но дивергентная форма записи важна для выполнения свойства консервативности, т.е. для выполнения заложенного в исходной постановке закона сохранения [3]. В этой работе будет предложен другой подход для применения сплайнов при решении дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, названый нами методом консервативной сплайн-аппроксимации. Эффективность его при решении нестационарной трехмерной прикладной задачи из теории фильтрации продемонстрирована, напр., в нашей работе [4].

2. Интерполирующие в среднем сплайны и их свойства

Сформулируем следующую задачу интерполирования. Найти определенную на конечном сегменте $[a,b]$ кусочно-гладкую функцию $U(x)$, 1-ая производная которой терпит разрывы 1-го рода в N различных внутренних точках x_i, $i = \overline{1,N}$ сегмента, если известны интегральные средние величины ее u_i по всем подинтервалам гладкости функции $U(x)$:

$$(5) \quad U_i = H_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} U(x)dx, \quad i = \overline{0,N}, \; H_i = x_{i+1} - x_i, \; x_0 = a, \; x_{N+1} = b,$$

известны условия в точках разрыва гладкости ($k_i > 0$):

$$U(x_i-0) = U(x_i+0), \quad k_{i-1}U'(x_i-0) = k_i U'(x_i+0), \quad i = \overline{1,N} \tag{6}$$

и на концах сегмента $[a,b]$:

$$\nu_0 k_0 U'(a) - \lambda_0 U(a) = -\Phi_0, \quad \nu_1 k_N U'(b) + \lambda_1 U(b) = \Phi_1, \tag{7}$$
$$\nu_l \cdot \lambda_l \geqslant 0, \quad \nu_l + \lambda_l > 0, \quad l = 0,1.$$

В нашей работе [5] для решения этой задачи интерполирования был введен полиномиальный интерполирующий в среднем сплайн степени 2, названый нами интегральным параболическим сплайном и доказано существование и единственность его.

Определение 1. Функция $S_2(x;U) \equiv S_2(x)$ называется *интегральным параболическим сплайном* для функции $U(x)$, если: 1) $S_2(x) \in C[a,b]$; 2) $S_2(x) \in P_2[x_i, x_{i+1}]$ для $i = \overline{0,N}$; 3) $S_2(x)$ удовлетворяет условиям (5)–(7).

Будем искать $S_2(x)$ в такой форме для $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$S_2(x) = \bar{u}_i + m_i(x-\bar{x}_i) + \frac{e_i}{k_i H_i}(x-\bar{x}_i)^2, \quad i = \overline{0,N}, \quad \bar{x}_i = x_i + 0.5H_i \tag{8}$$

с неизвестными коэффициентами $\bar{u}_i$, m_i, e_i. В [5] показано, что остальные коэффициенты просто выражаются через e_i, для последних получается следующая система с трехдиагональной матрицей ($e_{-1} = e_{N+1} = 0$):

$$A_i e_{i-1} + C_i e_i + B_i e_{i+1} = F_i^-(u_{i-1} - u_i) + F_i^+(u_{i+1} - u_i), \quad i = \overline{0,N}, \tag{9}$$

где $A_i = G_{i-1}(G_i + G_{i+1})$, $\quad B_i = G_{i+1}(G_i + G_{i-1})$, $\quad C_i = A_i + B_i + D_i$,

$$D_i = (G_i + G_{i-1})(G_i + G_{i+1}), \tag{10}$$
$$F_i^- = 3(G_i + G_{i+1}), \quad F_i^+ = F_{i-1}^-, \quad G_i = k_i^{-1} H_i.$$

Кроме того

$$G_{-1} = \begin{cases} 2\lambda_0^{-1}\nu_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ 2\nu_0 - G_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad G_{N+1} = \begin{cases} 2\lambda_1^{-1}\nu_1, & \lambda_1 \neq 0, \\ 2\nu_1 - G_N, & \lambda_1 = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$u_{-1} = \begin{cases} \lambda_0^{-1}\Phi_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ u_0 + \Phi_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases} \quad u_{N+1} = \begin{cases} \lambda_1^{-1}\Phi_1, & \lambda_1 \neq 0, \\ u_N + \Phi_1, & \lambda_1 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

и коэффициент A_0 вычисляется при $\lambda_0 = 0$ не по (10), а полагается $A_0 = D_0$. Наконец, при $\lambda_1 = 0$ полагается $B_N = D_N$.

Очевидно, что матрица системы (9) является матрицей с доминирующей диагональю, т.е. система уравнений относительно e_i является однозначно разрешимой.

В нашей работе [6] доказана теорема о представимости коэффициентов e_i сплайна (8) в виде

$$e_i = \sum_{j=0}^{N+1} \alpha_{i,j}(u_{j-1}-u_j)\operatorname{sign}(i-j+0.5), \qquad i = \overline{-1, N+1}, \tag{13}$$

где не зависящие от u_i коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть найдены как решения следующих $N+2$ независимых систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами. Для фиксированного $j = \overline{0, N+1}$:

$$\begin{cases} \alpha_{-1,j} = \alpha_{N+1,j} = 0, \\ A_i\alpha_{i-1,j}+C_i\alpha_{i,j}+B_i\alpha_{i+1,j} = 0, \quad i = \overline{0,N},\ i \neq j-1,\ i \neq j, \\ A_i\alpha_{i-1,j}+C_i\alpha_{i,j}+B_i\alpha_{i+1,j} = F_i^+, \quad i = j-1, \\ -A_i\alpha_{i-1,j}+C_i\alpha_{i,j}+B_i\alpha_{i+1,j} = F_i^-, \quad i = j. \end{cases} \tag{14}$$

Ясно, что для решения систем (14) может быть применен экономичный метод прогонки, напр., [1]–[3] и коэффициенты $\alpha_{i,j}$ могут быть вычислены заранее, без знания интегральных средних величин u_i функции $U(x)$. Это весьма существенно при использовании сплайна (8) для решени я дифференциальных уравнений.

3. Метод консервативной сплайн-аппроксимации

Введем, согласно (5), интегральные средние величины $u_i(y)$ от функции $U(x, y)$. Количество и расположение точек x_i при этом может быть достаточно произвольными, однако в число их обязательно должны быть включены все точки разрыва коэффициентов дифференциального уравнения (1). После интегрирования (1) по x от $x = x_i$ до $x = x_{i+1}$ и замены разности потоков разностью потоков из аппроксимации $U(x, y)$ сплайном (8) в место (1) получаем систему

$$L^i(u_i)+2H_i^{-1}e_i = -f_i(y), \qquad i = \overline{0, N},$$

где $f_i(y)$ — средняя, согласно (5), величина от функции $F_i(x, y)$. Остается воспользоваться представлением (13), чтобы получить окончательную систему дифференциальных уравнений из $\boldsymbol{R}^n$:

$$L^i(u_i)+2H_i^{-1}\sum_{j=0}^{N+1} \alpha_{i,j}(u_{j-1}-u_j)\operatorname{sign}\ (i-j+0.5) = -f_i(y), \qquad i = \overline{0, N}, \tag{15}$$

Две дополнительные искомые функции $u_{-1}(y)$ и $u_{N+1}(y)$, фигурирующие в (15), находятся из алгебраических соотношений (12). Для полности постановки остается добавить усреднение дополнительных условий (4):

$$l^i(u_i) = \varphi^{(i)}(y), \qquad y \in \partial\Omega,\ i = \overline{0, N}. \tag{16}$$

И так, вместо задачи (1)–(4) из $\boldsymbol{R}^{n+1}$ имеем задачу (12), (15), (16) для системы $N+1$-го уравнения, определенную уже в $\boldsymbol{R}^n$.

Так как сплайн (8) существует всегда, то всегда вместо (1) можно также получить систему (15).

Подчеркнем, что система (15) является интегральным следствием уравнений (1), единственная погрешность сделана при замене разности потоков (производных $U(x,y)$ при $x = x_i$, $x = x_{i+1}$) соответствующими производными сплайна. Этой величиной будет определяться погрешность сплайн-аппроксимации уравнений (1).

Возможна и другая форма консервативной сплайн-аппроксимации: если выражения e_i, $e_{i\pm 1}$ из проинтегрированных по x уравнений (1) подставляются непосредственно в (9). Эта форма особенно удобна для обыкновенных дифференциальных уравнений, когда в (1) отсутствует оператор L^i и для u_i получаем систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

Отметим, наконец, что вместо сплайна (8) можно ввести по аналогии с [2] интегральный рациональный сплайн, который позволяет сформулировать пограничные слои в окрестностях точек x_i.

Литература

[1] С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*, Наука Москва 1976.

[2] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва 1980.

[3] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва 1983.

[4] А. А. Буйкис, *Решение задач тепломассопереноса для слоистых сред при помощи интерполируйущих в среднем сплайнов*, Математическое моделирование и численные методы в теории переноса, ч. 2. Минск, ИТМО АН БССР 1986, 141-147.

[5] —, *Интерполяция интегральных средних кусочно-гладкой функции параболическим сплайном*, Латвийский математический ежегодник, вып. 29, Зинатне, Рига (1985), 194–197.

[6] —, *Вычисление коэффициентов интегрального параболического сплайна*, Латвийский математический ежегодник, вып. 30, Зинатне, Рига (1986), 228–232.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 — May 29, 1987