POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CCCXXXII

JACEK MICAŁ

Applications exponentielles pour les groupes des courants et la décomposition de Birkhoff pour les groupes des nœuds

WARSZAWA 1994

Jacek Micał
Institut de Mathématiques
Université de Varsovie
Banacha 2
02-097 Warszawa
Pologne

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 Warszawa, ul. Jakobinów 23, tel: 846-79-66, tel/fax: 49-89-95

P R I N T E D   I N   P O L A N D

ISSN 0012-3862

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

Nous considérons les applications exponentielles pour les groupes $C^\infty(M, GL(N,\mathbb{C}))$ où M est une variété lisse compacte. Nous montrons que l'application $P : C^\infty(M,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) \to C^\infty(M, GL(N,\mathbb{C}))$ définie par $P(f) = \mathrm{Exp}(f_1)\cdot\ldots\cdot\mathrm{Exp}(f_k)$ pour $f_i \in \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$ est (sous certaines conditions sur la décomposition de $\mathfrak{g}$) une bijection locale lisse (d'un voisinage de zéro sur un voisinage de l'unité). Nous montrons aussi que pour $M = S^1$ l'application Q définie par $Q(f)(t) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} \mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j(f)e^{ijt})$ est une bijection locale lisse.

1991 *Mathematics Subject Classification*: 58C15, 22E65, 22E67.
Received 6.7.1992; revised version 16.3.1993 and 16.9.1993.

Introduction

Nous étudions les applications exponentielles pour les groupes $\mathrm{Map}^{\infty}(M,G)$ des fonctions lisses définies sur une variété compacte M à valeurs dans un groupe de Lie G. Les groupes $\mathrm{Map}^{\infty}(X,G)$ où X est une variété (non nécessairement compacte) sont intéressants pour plusieurs raisons. Ils apparaissent dans la théorie quantique du champ électromagnétique comme les groupes de jauge ou les groupes des courants (l'espace X est en ce cas l'espace des configurations; dans des modèles simplifiés il peut être $\mathbb{R}$ ou S^1). Pour $M = S^1$ ce sont les groupes des nœuds.

Notons $\mathfrak{G} = C^{\infty}(M, GL(N,\mathbb{C}))$ le groupe des fonctions lisses définies sur une variété compacte M à valeurs dans le groupe linéaire géneral $GL(N,\mathbb{C})$. Le groupe $\mathfrak{G}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme de toute dérivée. L'algèbre de Lie associée est $\mathfrak{g} = C^{\infty}(M, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$.

Notons deux relations entre le groupe $\mathfrak{G}$ et l'algèbre $\mathfrak{g}$. Premièrement, $\mathfrak{G}$ est une variété de Fréchet 'modelé' sur l'espace de Fréchet $\mathfrak{g}$. Deuxièmement, $\mathfrak{g}$ est en correspondence biunivoque avec la famille de sous-groupes à un paramètre de $\mathfrak{G}$.

L'algèbre $\mathfrak{g}$ est liée au groupe $\mathfrak{G}$ par l'application exponentielle $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$, définie par $\mathrm{Exp}(f)(t) = \exp(f(t))$ où exp est l'application classique $\exp : \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}) \to GL(N,\mathbb{C})$. L'application Exp est lisse et définit une carte dans un voisinage ouvert de l'unité de $\mathfrak{G}$.

Dans ce travail nous considérons deux types d'applications : P et Q de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{G}$. L'application du type P est définie par

$$P(f) = \mathrm{Exp}(f_1) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(f_k)$$

où $f = f_1 + \ldots + f_k$ est la représentation de f liée à une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_k$ en somme directe de sous-espaces linéaires. C'est une analogie des coordonnées du deuxième espèce pour les groupes classiques de Lie. Dans le chapitre II nous montrons que P est une bijection locale et que l'application inverse à sa restriction convenable définit une carte dans un voisinage de $\mathfrak{G}$.

Pour les groupes des nœuds (c'est-à-dire pour $M = S^1$) la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ de l'algèbre $\mathfrak{g} = C^{\infty}(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ en fonctions à coefficients de Fourier d'indices négatifs et non négatifs, est en rapport avec un théorème classique de Birkhoff [1].

Le deuxième type d'applications est en rapport avec le fait que nous considérons les fonctions définies sur S^1. Nous développons $f \in \mathfrak{g}$ en série de Fourier

$$f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_j(f)e^{ijt}\quad\text{où}\quad \mathbf{A}_j(f)\in\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})\quad\text{pour } j=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

et nous faisons correspondre à f la fonction $Q(f)\in\mathfrak{G}$ définie par

$$Q(f)(t)=\prod_{j=-\infty}^{\infty}\mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j(f)e^{ijt}).$$

Dans le chapitre III nous montrons que cette application est une bijection lisse d'un voisinage de zéro de $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de l'unité de $\mathfrak{G}$.

Notre outil principal est le théorème de Nash et Moser sur la fonction inverse. La vérification des hypothèses de ce théorème exige de nombreuses et complexes estimations qui constituent une partie importante de ce travail.

Le chapitre I présente quelques préliminaires et, en forme compacte, les éléments de la technique de Nash–Moser.

Ce travail contient les résultats de la thèse écrite sous la surveillance de Monsieur le Professeur Wojciech Wojtyński. L'auteur lui remercie chaleureusement de sa patience et de son aide.

Chapitre I. Préliminaires

1. Le théorème de Nash et Moser

DÉFINITION 1.1. Nous appelons *gradation* sur un espace de Fréchet $\mathfrak{F}$ une famille de normes $\{\|\ \|_n\}$, où $n=0,1,2,\ldots$, vérifiant

$$\|f\|_0\le\|f\|_1\le\|f\|_2\le\cdots$$

et qui engendre la topologie de $\mathfrak{F}$. Nous dirons que deux gradations $\{\|\ \|_n\}$ et $\{\|\ \|'_n\}$ sont *équivalentes du degré r avec la base b* si

$$\|f\|_n\le C_n\|f\|'_{n+r},\qquad \|f\|'_n\le C_n\|f\|_{n+r}\tag{1.1}$$

pour tout entier $n\ge b$, la constante C_n ne dépendant que de n.

DÉFINITION 1.2. Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{H}$ deux espaces de Fréchet à gradation, et soit $P:(\mathcal{U}\subset\mathfrak{F})\to\mathfrak{H}$ une application définie sur un ensemble ouvert $\mathcal{U}$. Nous dirons que P est *concordante*, *du degré r avec la base b*, *avec les gradations* si

$$\|P(f)\|_n\le C_n(1+\|f\|_{n+r})\tag{1.2}$$

pour tout $f\in\mathcal{U}$ et tout $n\ge b$. Une application continue d'un ouvert de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$ est appelée *apprivoisée* (ang. tame) si elle est concordante avec les gradations sur un voisinage ouvert de chaque point de son domaine. Le degré r et la constante C_n peuvent varier ne dépendant que du point et de son voisinage.

Remarque 1.3. Lorsque $L:\mathfrak{F}\to\mathfrak{H}$ est linéaire, la concordance avec les gradations implique

$$\|Lf\|_n\le C_n\|f\|_{n+r},$$

ce qui entraîne la continuité de L (cf. [3], 2.1.5).

DÉFINITION 1.4. Pour un espace de Banach B muni de la norme $\| \|_B$, nous désignons par $\Sigma(B)$ l'espace de Fréchet des suites $\{f_k\} \subset B$ telles que

$$\|\{f_k\}\|_n = \sum_{k=0}^{n} e^{nk} \|f_k\|_B < \infty \quad \text{pour } n \geq 0,$$

muni de la gradation $\| \|_n$. Nous dirons qu'un espace $\mathfrak{F}$ à gradation est *apprivoisé* si, pour un espace de Banach B, il existe une projection apprivoisée $\Sigma(B) \to \mathfrak{F}$.

DÉFINITION 1.5. Nous dirons que l'application P comme ci-dessus est de classe C^n si la dérivée suivant les directions $D^n P(f)\{h_1, \dots, h_n\}$ existe et est continue comme une application

$$D^n P : (\mathcal{U} \subset \mathfrak{F}) \times \underbrace{\mathfrak{F} \times \dots \times \mathfrak{F}}_{n \text{ facteurs}} \to \mathfrak{H}.$$

P est dite de classe C^∞ (ou lisse) apprivoisée si elle est de classe C^n pour tout n et si chaque dérivée $D^n P$ est apprivoisée .

THÉORÈME 1.6 (Nash–Moser) (cf. [3]). *Soient $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{H}$ deux espaces apprivoisés. Supposons que l'équation $DP(f)h = k$ ait une seule solution $h = VP(f)k$ pour tout $f \in \mathcal{U}$ et tout $k \in \mathfrak{H}$, et que la famille des applications inverses VP : $\mathcal{U} \times \mathfrak{H} \to \mathfrak{F}$ soit apprivoisée de classe C^∞. Alors P est localement inversible et chaque inversion locale P^{-1} est de classe C^∞ apprivoisée.*

2. Gradations sur $C^\infty(M, \mathbb{C})$. Soit M une variété compacte réelle différentiable de classe C^∞. L'espace $C^\infty(M, \mathbb{C})$ est muni de la topologie de la convergence uniforme de suites $D^\alpha f_n$, où α est un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i)$ et $D^\alpha f$ est la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_i}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i}} f.$$

On peut engendrer cette topologie par plusieurs gradations. Une d'elles est définie comme suit :

$$|f|_k = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_M |D^\alpha f|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

La dérivée partielle doit être comprise comme suit : Nous plongeons M dans $\mathbb{R}^i$ où $i \geq 2 \dim M + 1$. Puis nous prolongeons f en une fonction $\widetilde{f}$ de classe C^∞ sur un voisinage tubulaire de M et nous considérons les dérivées partielles de $\widetilde{f}$. Deux tels plongements M' et M'' sont difféomorphes, ainsi que le sont leurs voisinages tubulaires. Le jacobien de ce difféomorphisme est borné sur M', donc les théorèmes formulés plus loin ne dépendent pas du plongement choisi. D'après 1.3.6 dans la deuxième partie de [3], $C^\infty(M, \mathbb{C})$ avec la gradation (1.3) est un espace apprivoisé. Quand M est le cercle (S^1), toute fonction $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ possède un développement en série de Fourier $f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijt}$, où $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^k \cdot |a_j| < \infty$

pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Nous pouvons donc introduire les systèmes de normes suivantes sur $C^\infty(S^1, \mathbb{C})$:

$$|f|'_k = \sum_{l=0}^{k} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^l |a_j| \Big), \tag{1.4}$$

$$|f|''_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|j|^k + 1)|a_j|, \tag{1.5}$$

$$|f|'''_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|j| + 1)^k |a_j| \tag{1.6}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$

Proposition 1.7. *Pour $M = S^1$, les systèmes de normes* (1.3), (1.4), (1.5) *et* (1.6) *sont équivalents.*

Démonstration. L'équivalence, du degré 0 avec la base 0, entre (1.4), (1.5) et (1.6) est évidente. Nous allons montrer que la gradation (1.3) est équivalente à (1.4), du degré 2 avec la base 0.

Si $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ijt}$ est la série de Fourier de $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$, nous avons

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt, \qquad a_j = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(ij)^{k+2}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+2)}(t) e^{ijt}\, dt$$

pour $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |f|'_k &= \sum_{l=0}^{k} \Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^l |a_j| \Big) \\ &\le \sup_{S^1} |f| + 2(k+1) \bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \bigg) \sup_{S^1} |f^{(k+2)}| \le C_k |f|_{k+2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |f|_k &= \max_{j=0,\ldots,k} \sup_{S^1} |f^{(j)}| = \max_{j=0,\ldots,k} \sup_{S^1} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (in)^j e^{ijt} \Big| \\ &\le \sum_{j=0}^{k} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^j |a_n| \Big) = |f|'_k. \end{aligned}$$

3. Gradations sur $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. La topologie naturelle de $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ est la topologie de la convergence uniforme de derivées de tout degré. Nous pouvons lier à cette topologie des gradations analogues aux (1.3)–(1.6).

Nous avons la décomposition naturelle

$$C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})) = \underbrace{C^\infty(M, \mathbb{C}) \times \ldots \times C^\infty(M, \mathbb{C})}_{N^2}$$

conduisant au système de normes

$$\|\|f\|\|_k = \sqrt{\textstyle\sum_{p,q=1}^{N} |f_{pq}|_k^2} \tag{1.7}$$

où $f = (f_{pq})$, $p, q = 1, 2, \ldots, N$. L'espace $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ muni de la gradation (1.7) est un espace apprivoisé (cf. [3], 1.3.4 et 1.3.9, partie II).

Aussi naturelle, et plus souvent utilisée dans ce travail, est la gradation

$$|f|_k = \max_{|\alpha| \le k} \sup_M \|D^\alpha f\| \tag{1.8}$$

où $\|\ \|$ est la norme d'opérateur sur $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$.

En développant $f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{int}$$

où $\mathbf{A}_n \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ vérifient, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^k \|\mathbf{A}_n\| < \infty,$$

nous pouvons introduire les normes suivantes sur $C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$:

$$\|f\|_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|^k + 1) \|\mathbf{A}_n\|, \tag{1.9}$$

$$\|f\|'_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n| + 1)^k \|\mathbf{A}_n\|. \tag{1.10}$$

Proposition 1.8. *Les gradations* (1.7) *et* (1.8) *sont équivalentes. Pour* $M = S^1$ *les gradations* (1.7)–(1.10) *sont toutes équivalentes.*

Démonstration. L'équivalence de (1.7) et (1.8) résulte de l'équivalence de la norme d'opérateur et de la norme de Hilbert–Schmidt sur $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$. La démonstration de la deuxième conclusion est similaire à la demonstration de la proposition 1.7.

4. Inégalités interpolatoires pour les normes sur $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Nous utiliserons quelques propriétés des normes (1.8)–(1.10).

Proposition 1.9. *Pour tous entiers* m, n, l *tels que* $0 \le l \le m \le n$, *chacune des gradations* (1.8)–(1.10) *vérifie*

$$\|f\|_m^{n-l} \le C_{l,m,n} \|f\|_n^{m-l} \|f\|_l^{n-m}. \tag{1.11}$$

D é m o n s t r a t i o n. Pour (1.8) nous utiliserons le théorème 2.2.1 de la deuxième partie de [3]. Nous avons

$$\begin{aligned}|f|_m^{n-l} &= (\max_{|\alpha|\le m}\sup_M \|D^\alpha f\|)^{n-l} \le (N\cdot\max_{p,q}|f_{pq}|_m)^{n-l}\\ &\le N^{n-l}\cdot C_{l,m,n}(\max_{p,q}|f_{pq}|_n)^{m-l}\cdot(\max_{p,q}|f_{pq}|_l)^{n-m}\\ &\le N^{n-l}\cdot C_{l,m,n}(\max_{|\alpha|\le n}\sup_M\|D^\alpha f\|)^{m-l}\cdot(\max_{|\alpha|\le l}\sup_M\|D^\alpha f\|)^{n-m}\\ &= C'_{l,m,n}\cdot|f|_n^{m-l}\cdot|f|_l^{n-m}.\end{aligned}$$

Pour la gradation (1.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\sum_{j=-\infty}^{\infty}(|j|+1)^m\|\mathbf{A}_j\|\\ &\quad\le\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(|j|+1)^n\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{(m-l)/(n-l)}\cdot\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(|j|+1)^l\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{(n-m)/(n-l)}\end{aligned}$$

pour $m\ne l$ et $n\ne m$, d'après l'inégalité de Hölder, d'où (1.11) avec $C_{l,m,n}=1$. Quand $m=n$ ou $l=m$ l'inégalité (1.11) est évidente. Les gradations (1.9) et (1.10) sont équivalentes du degré 0 avec la base 0, donc (1.11) a aussi lieu pour la gradation (1.9). Il est facile de voir qu'en ce cas $C_{l,m,n}=2^{m(n-l)}$.

COROLLAIRE 1.10. *Pour tout point entier* (i,j) *du segment liant* (k,l) *et* (m,n) *chacune des gradations* (1.8)–(1.10) *vérifie*

$$\|f\|_i\|g\|_j\le C_{k,l,m,n}(\|f\|_k\|g\|_l+\|f\|_m\|g\|_n).$$

COROLLAIRE 1.11. *La gradation* (1.8) *vérifie*

$$|fg|_n\le C_n(|f|_n|g|_0+|f|_0|g|_n)$$

D é m o n s t r a t i o n. Identique à celle de 2.2.3 dans la deuxième partie de [3].

Le corollaire analogue concernant la gradation (1.9) exige une démonstration particulière.

PROPOSITION 1.12. *La gradation* (1.9) *vérifie*

$$\|fg\|_n\le C_n(\|f\|_n\|g\|_0+\|f\|_0\|g\|_n).$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient $f,g\in C^\infty(S^1,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ et $f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_je^{ijt}$, $g(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{B}_je^{ijt}$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|fg\|_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|^n+1)\Big\|\sum_{p+q=k}\mathbf{A}_p\mathbf{B}_q\Big\|\\ &\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big((|k|^n+1)\Big(\sum_{p+q=k}\|\mathbf{A}_p\|\|\mathbf{B}_q\|\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le 2^n \Big[\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^n \|\mathbf{A}_k\| \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{B}_k\| \Big) \\
&\quad + \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{n-1} \|\mathbf{A}_k\| \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \|\mathbf{B}_k\| \Big) \\
&\quad + \ldots + \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{A}_k\| \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^n \|\mathbf{B}_k\| \Big) \Big] \\
&\quad + \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{A}_k\| \Big) \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{B}_k\| \Big) \\
&\le 2^n (\|f\|_n \|g\|_0 + \|f\|_{n-1} \|g\|_1 + \ldots + \|f\|_0 \|g\|_n) + \|f\|_0 \|g\|_0 .
\end{aligned}
$$

En appliquant à chaque produit $\|f\|_{n-i}\|g\|_i$ le corollaire 1.10 nous obtenons la proposition.

PROPOSITION 1.13. *La gradation* (1.8) *vérifie*

$$\vert\!\vert\!\vert f^n \vert\!\vert\!\vert_k \le C_k n^k 2^{n-1} \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_k \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_0^{n-1} .$$

Démonstration. De la formule (1.8) nous avons

$$
\begin{aligned}
\vert\!\vert\!\vert f^n \vert\!\vert\!\vert_k &= \max_{|\alpha| \le k} \sup_M \|D^\alpha f^n\| \\
&= \max_{|\alpha| \le k} \sup_M \Bigg\| \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \cdot D^{\beta_1} f \cdot D^{\beta_2} f \cdot \ldots \cdot D^{\beta_n} f \Bigg\| \\
&\le \max_{|\alpha| \le k} \sup_M \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \cdot \ldots \cdot \beta_n!} \cdot \|f\|_{|\beta_1|} \cdot \|f\|_{|\beta_2|} \cdot \ldots \cdot \|f\|_{|\beta_n|} . \qquad (*)
\end{aligned}
$$

A chaque terme de $(*)$ le corollaire 1.10 s'applique, donc il est borné par $C_{|\alpha|} 2^{n-1} \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_{|\alpha|} \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_0^{n-1}$. Finalement, $(*)$ est estimé par

$$\max_{|\alpha| \le k} n^{|\alpha|} 2^{n-1} C_{|\alpha|} \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_{|\alpha|} \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_0^{n-1} \le n^k 2^{n-1} C_k \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_k \vert\!\vert\!\vert f \vert\!\vert\!\vert_0^{n-1} .$$

5. Quelques propriétés algébro-différentielles de $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Nous utiliserons les inégalités du paragraphe précédent pour montrer que les applications de $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ apparaissant dans la suite sont apprivoisées et lisses.

PROPOSITION 1.14. *Soient F et G deux applications apprivoisées et lisses d'un ouvert $\mathcal{U} \subset C^\infty(M, gl(M, \mathbb{C}))$ à valeurs dans $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. L'application $F \cdot G(u) = F(u) \cdot G(u)$ pour $u \in \mathcal{U}$ est donc lisse et apprivoisée. Sa k-ième dérivée suivant les directions $\{h_1, \ldots, h_k\}$ est donné par*

$$(1.12)\quad D^k(F\cdot G)\{h_1,\dots,h_k\} = \sum_{\mathcal{S}\subset\{1,\dots,k\}} D^{|\mathcal{S}|}F(f)\{h_{i_1},\dots,h_{i_{|\mathcal{S}|}}\}\cdot D^{k-|\mathcal{S}|}G(f)\{h_{j_1},\dots,h_{j_{k-|\mathcal{S}|}}\}$$

où $\{i_1,\dots,i_{|\mathcal{S}|}\}=\mathcal{S}$, $\{j_1,\dots,j_{k-|\mathcal{S}|}\}=\{1,\dots,k\}\setminus\mathcal{S}$.

Démonstration. $F\cdot G$ est lisse et apprivoisée puisque la multiplication dans $C^\infty(M,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ l'est (corollaire 1.11). La démonstration de (1.12) est une simple conséquence de la formule de Leibniz.

6. Applications données par des séries entières. La propriété de l'algèbre $C^\infty(M,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ qui consiste à la possibilité d'exprimer la convergence de la série entière en termes d'une seule norme joue le rôle essentiel dans la vérification si les applications données par des séries de la forme

$$(1.13)\qquad f\overset{F}{\longmapsto}\sum_{n=0}^{\infty}a_nf^n$$

sont lisses et apprivoisées.

Définition 1.15. Soit A une algèbre localement convexe et p,q deux pseudonormes continues sur A. Nous appelons q *estimateur asymptotique* de p lorsqu'il existe un entier positif $m=m(p,q)$ tel que $p(u_1,\dots,u_n)\le q(u_1)\dots q(u_n)$ pour tous $n\ge m$ et $u_1,\dots,u_n\in A$.

Définition 1.16. L'algèbre localement convexe A avec une pseudonorme distinguée p_0 est appelée *AE-algèbre* lorsque pour toute pseudonorme p sur A il y a suffisamment beaucoup d'estimateurs asymptotiques de p au sens suivant :

Il existe un système $\{q_\nu:\nu\in\mathcal{I}\}$ d'estimateurs asymptotiques q_ν de p tel que

(i) $\{q_\nu:\nu\in\mathcal{I}\}$ est un ensemble filtré à gauche,
(ii) $\inf\{q_\nu(u):\nu\in\mathcal{I}\}=p_0(u)$ pour tout $u\in A$.

Le système de normes ci-dessus est dit un *AE-système* pour la pseudonorme p.

Proposition 1.17. *$C^\infty(M,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ est une AE-algèbre.*

Démonstration. Il suffit de prendre pour p_0 la norme $|\ |_0$ de la gradation (1.8) et pour p une autre pseudonorme de cette gradation. Puis la démonstration est similaire à celle de 3.1.2, exemple 2^0 dans [2]. La démonstration est particulièrement simple lorsque $M=S^1$ et la gradation qui engendre la topologie est (1.9). En ce cas nous prenons $p_0=\|\ \|_0$, $p=\|\ \|_k$ et

$$q_\tau(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|n|^{k\tau}+1)\|\mathbf{A}_n\|\qquad\text{pour }\tau\in[0,1].$$

Soient a_n comme en (1.13) et

$$R=(\limsup_n\sqrt[n]{|a_n|}\,)^{-1}.$$

Le nombre R ainsi défini est dit le rayon de convergence de la série (1.13). Il résulte de 3.2.2.4 dans [2] que la série (1.13) est convergente sur $\{f : |f|_0 < R\}$ et que l'application F donnée par cette série est lisse. Sa k-ième dérivée suivant les directions $\{h_1, \ldots, h_k\}$ est donnée par

$$D^k F(f)\{h_1, \ldots, h_k\} = \sum_{n=k}^{\infty} a_k D^k w_n(f)\{h_1, \ldots, h_k\}$$

où $w_n(f) = f^n$. Remarquons que

$$D^k w_n(f)\{h_1, \ldots, h_k\} = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{\sigma \in S_n} g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)} \tag{1.14}$$

pour $n \geq k$ où $g_1 = f, \ldots, g_{n-k} = f$ et $g_{n-k+1} = h_1, \ldots, g_n = h_k$ et S_n est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $k = 1$ la formule (1.14) donne

$$D w_n(f) h = \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i,j \geq 0}} f^i h f^j \tag{1.15}$$

pour $n \geq 1$.

Proposition 1.18. *Les applications données par des séries entières*

(a) *à rayon de convergence infini sont lisses sur $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ et apprivoisées sur $\{f : |f|_0 < C\}$ où C est une constante positive arbitraire,*

(b) *à rayon de convergence R sont lisses et apprivoisées sur $\{f : |f|_0 < C\}$ pour tout $C < \frac{1}{2} R$.*

Démonstration. Comme en 1.13, nous allons estimer la l-ième norme du produit $g_{\sigma(1)} \ldots g_{\sigma(n)}$ de (1.14) pour $n \geq k$:

$$\begin{aligned}
&|g_{\sigma(1)} \cdots g_{\sigma(n)}|_l \\
&\quad = \max_{|\alpha| \leq l} \sup_M \left\| \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} D^{\beta_1} g_{\sigma(1)} \ldots D^{\beta_n} g_{\sigma(n)} \right\| \\
&\quad \leq \max_{|\alpha| \leq l} \sup_M \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} \|D^{\beta_1} g_{\sigma(1)}\| \ldots \|D^{\beta_n} g_{\sigma(n)}\| \\
&\quad \leq \max_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} |g_{\sigma(1)}|_{|\beta_1|} \cdots |g_{\sigma(n)}|_{|\beta_n|} \\
&\quad = \max_{|\alpha| \leq l} \sum_{\beta_1 + \ldots + \beta_n = \alpha} \frac{\alpha!}{\beta_1! \ldots \beta_n!} |f|_{|\beta_1|} \cdots |f|_{|\beta_{n-k}|} |h_1|_{|\beta_{n-k+1}|} \cdots |h_k|_{|\beta_n|}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Nous majorons chaque terme de la série $(*)$:

$$
\begin{aligned}
&|f|_{|\beta_1|} \dots |f|_{|\beta_{n-k}|} |h_1|_{|\beta_{n-k+1}|} \dots |h_k|_{|\beta_n|} \\
&\quad \le C_{|\beta_1|+\ldots+|\beta_{n-k}|} 2^{n-k-1} |f|_{|\beta_1|+\ldots+|\beta_{n-k}|} |f|_0^{n-k-1} |h_1|_{|\beta_{n-k+1}|} \dots |h_k|_{|\beta_n|} \\
&\quad \le C_l 2^{n-1} (|f|_l |f|_0^{n-k-1} |h_1|_0 \dots |h_k|_0 \\
&\qquad + |f|_0^{n-k} |h_1|_l |h_2|_0 \dots |h_k|_0 + \ldots + |f|_0^{n-k} |h_1|_0 \dots |h_{k-1}|_0 |h_k|_l).
\end{aligned}
$$

Alors la série $(*)$ s'estime par

$$
\begin{aligned}
&C_l n^l 2^{n-1} (|f|_l |f|_0^{n-k-1} |h_1|_0 \dots |h_k|_0 \\
&\qquad + |f|_0^{n-k} |h_1|_l |h_2|_0 \dots |h_k|_0 + \ldots + |f|_0^{n-k} |h_1|_0 \dots |h_{k-1}|_0 |h_k|_l).
\end{aligned}
$$

Pour $n = k$, $|g_{\sigma(1)} \dots g_{\sigma(n)}|_l$ s'estime par

$$C_l n^l 2^{n-1} (|h_1|_l |h_2|_0 \dots |h_k|_0 + \ldots + |h_{k-1}|_0 |h_k|_l).$$

De là et de (1.14) nous avons l'inégalité

$$
\begin{aligned}
|D^k F(f)\{h_1, \dots, h_k\}|_l \le \Bigg(&\Bigg(\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \binom{n}{k} k! \cdot n^l \cdot 2^{n-1} \cdot |f|_0^{n-k} \Bigg) \\
&\times (|h_1|_l \cdot |h_2|_0 \cdot \ldots \cdot |h_k|_0 + \ldots + |h_1|_0 \cdot \ldots \cdot |h_{k-1}|_0 \cdot |h_k|_l) \\
&+ \sum_{n=k+1}^{\infty} \Bigg(|a_n| \binom{n}{k} \cdot k! \cdot n^l \cdot 2^{n-1} |f|_0^{n-k-1} \Bigg) \cdot |f|_l \cdot |h_1|_0 \cdot \ldots \cdot |h_k|_0 \Bigg).
\end{aligned}
$$

La proposition résulte du fait que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{n}{k} k! n^l 2^{n-1} |f|_0^{n-k-1}} = 2|f|_0.$$

7. Dérivées suivant les directions de Exp**.** Nous aurons besoin d'une autre expression de la n-ième dérivée suivant les directions de l'application Exp : $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})) \to C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. La formule qui décrit ces dérivées sera précédée de préparatifs combinatoires.

Pour une partition donnée, du type $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$, de l'ensemble (d'indices) $\{1, \dots, n\}$ soient $\mathcal{A}_1^1, \mathcal{A}_1^2, \dots, \mathcal{A}_1^{k_1}$ tous les sous-ensembles à un élément de cette partition, $\mathcal{A}_2^1, \mathcal{A}_2^2, \dots, \mathcal{A}_2^{k_2}$ tous les sous-ensembles à deux éléments etc. Evidemment $\bigcup_{i,j} \mathcal{A}_i^j = \{1, \dots, n\}$ et $\mathcal{A}_i^j \cap \mathcal{A}_k^l = \emptyset$ pour $(i, j) \ne (k, l)$. Pour les ensembles de cette partition nous établissons l'ordre suivant :

$$\mathcal{A}_i^j \prec \mathcal{A}_k^l \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \min \mathcal{A}_i^j > \min \mathcal{A}_k^l. \tag{1.16}$$

Maintenant nous pouvons numéroter ces ensembles d'un indice $\nu = 1, 2, \dots, k_1 + \ldots + k_n$ suivant l'ordre (1.16).

Exemple 1.19. Considérons la partition $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 5, 6\}$, $\{4, 7, 8, 9, 10\}$ de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (c'est une partition du type $1^2 3^1 5^1$). Nous avons $\mathcal{A}_1^1 = \{2\}$, $\mathcal{A}_1^2 = \{3\}$, $\mathcal{A}_3^1 = \{1, 5, 6\}$, $\mathcal{A}_5^1 = \{4, 7, 8, 9, 10\}$. Conformément à l'ordre (1.16) nous avons $\mathcal{A}_5^1 \prec \mathcal{A}_1^2 \prec \mathcal{A}_1^1 \prec \mathcal{A}_3^1$ et alors $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_5^1$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1^2$, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1^1$, $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_3^1$. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{A}_i^j$ sont ordonnés de la façon naturelle.

PROPOSITION 1.20. *Nous avons*

$$\begin{aligned} (1.17)\quad & D^n \operatorname{Exp}(f)\{h_1,\dots,h_n\} \\ &= \operatorname{Exp}(f)\Bigg(\sum_{\substack{k_1\cdot 1+\ldots+k_n\cdot n=n\\ k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0}} \ \sum_{\substack{\text{partitions}\\ \text{du type}\\ 1^{k_1}\ldots n^{k_n}}} \ \prod_{\nu=1}^{k_1+\ldots+k_n} \\ &\qquad \Bigg(\sum_{m=|\mathcal{A}_\nu|-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sum_\sigma \operatorname{ad}_{g_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot \operatorname{ad}_{g_{\sigma(m)}} h_{l_1^\nu}}{(m+1)!(m-|\mathcal{A}_\nu|+1)!}\Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

où Σ_1 s'étend sur toutes les permutations de m éléments,

$$g_1 = f,\ldots, g_{m-|\mathcal{A}_\nu|+1} = f,$$
$$g_{m-|\mathcal{A}_\nu|+2} = h_{l_2^\nu},\ldots, g_m = h_{l^\nu_{|\mathcal{A}_\nu|}},$$

et $|\mathcal{A}_\nu|$ est la cardinalité $\mathcal{A}_\nu$.

D é m o n s t r a t i o n. Pour $n = 1$, d'après (1.15) nous avons

$$(1.18)\qquad D\operatorname{Exp}(f)h = \operatorname{Exp}(f)\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\operatorname{ad}_f^m(h)}{(m+1)!}\Bigg) = \operatorname{Exp}(f)(\Phi(-\operatorname{ad}_f)h)$$

où $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est donnée par $\Phi(z) = (e^z - 1)/z$. Il est facile de voir que, pour $n = 1$, (1.17) et (1.18) coïncident. Supposons que (1.17) a lieu pour $1,\dots,n$. Nous avons

$$D^{n+1}P(f)\{h_1,\dots,h_{n+1}\} = \frac{d}{ds}D^n P(f + sh_{n+1})\{h_1,\dots,h_n\}_{|s=0}.$$

Pour $P = \operatorname{Exp}$ nous avons

$$\begin{aligned} & D^{n+1}\operatorname{Exp}(f)\{h_1,\dots,h_{n+1}\} = \frac{d}{ds}D^n \operatorname{Exp}(f+sh_{n+1})\{h_1,\dots,h_n\}_{|s=0} \\ &= \operatorname{Exp}(f)(\Phi(-\operatorname{ad}_f)h_{n+1}) \\ &\quad \Bigg(\sum_{\substack{k_1\cdot 1+\ldots+k_n\cdot n=n\\ k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0}} \ \sum_{\substack{\text{partitions}\\ \text{du type}\\ 1^{k_1}\ldots n^{k_n}}} \ \prod_{\nu=1}^{k_1+\ldots k_n} \sum_{m=|\mathcal{A}_\nu|-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sum_\sigma \operatorname{ad}_{g_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot \operatorname{ad}_{g_{\sigma(m)}} h_{l_1^\nu}}{(m+1)!(m-|\mathcal{A}_\nu|+1)!}\Bigg) \\ &\quad + \operatorname{Exp}(f)\Bigg(\sum_{\substack{k_1\cdot 1+\ldots+k_n\cdot n=n\\ k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0}} \ \sum_{\substack{\text{partitions}\\ \text{du type}\\ 1^{k_1}\ldots n^{k_n}}} \ \sum_{\nu=1}^{k_1+\ldots+k_n} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \\ &\qquad \Bigg(\sum_{m=|\mathcal{A}_\mu|-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sum_\sigma \operatorname{ad}_{g_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot \operatorname{ad}_{g_{\sigma(m)}} h_{l_1^\mu}}{(m+1)!(m-|\mathcal{A}_\mu|+1)!}\Bigg) \end{aligned}$$

$$\cdot\Big(\sum_{m=|\mathcal{A}_\nu|}^{\infty}(-1)^m\frac{\sum_\sigma \mathrm{ad}_{g_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mathrm{ad}_{g_{\sigma(m)}}\,h_{l_1^\nu}}{(m+1)!(m-|\mathcal{A}_\nu|)!}\Big)$$

$$\cdot\prod_{\mu=\nu+1}^{k_1+\ldots+k_n}\Big(\sum_{m=|\mathcal{A}_\mu|-1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sum_\sigma \mathrm{ad}_{g_{\sigma(1)}}\cdot\ldots\cdot\mathrm{ad}_{g_{\sigma(m)}}\,h_{l_1^\mu}}{(m+1)!(m-|\mathcal{A}_\mu|+1)!}\Big)\Big).$$

Notons que dans le facteur relatif à $\mathcal{A}_\nu$ on a $g_1 = h_{l_2^\nu},\ldots,g_{|\mathcal{A}_\nu|-1} = h_{l^\nu_{|\mathcal{A}_\nu|-1}}, g_{|\mathcal{A}_\nu|} = h_{n+1}, g_{|\mathcal{A}_\nu|+1} = f,\ldots,g_m = f$.

1. Il est évident que dans chaque terme relatif à la partition de $\{1,\ldots,n+1\}$, l'ordre décrit ci-dessus est conservé.

2. Lorsque $\{n+1\}$ est un élément de la partition de $\{1,\ldots,n+1\}$ le produit correspondant apparaît une seule fois dans le premier terme précédé par $\mathrm{Exp}(f)$.

3. Lorsque $\{l_1,l_2,\ldots,l_k,n+1\}$ appartient à la partition de $\{1,\ldots,n+1\}$ le produit relatif à cette partition apparaît dans le deuxième terme précédé par $\mathrm{Exp}(f)$ comme le résultat de la différentiation du produit relatif à la partition de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ contenant $\{l_1,\ldots,l_k\}$.

Chapitre II

Soit M une variété réelle compacte de classe C^∞. Soit $\mathfrak{g} = C^\infty(M,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) = X_1\oplus\ldots\oplus\mathfrak{X}_k$ une décomposition en somme directe de sous-espaces linéaires. Notons $P_i:\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}_i, i=1,\ldots,k$, les projections correspondantes. Nous allons considérer l'application

$$P(f)=\prod_{i=1}^{k}\mathrm{Exp}(P_i(f)) \tag{2.1}$$

de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{G} = C^\infty(M,GL(N,\mathbb{C}))$. Notre but est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Si chaque projection P_i est apprivoisée et les espaces $\mathfrak{X}_i$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{X}_j\oplus\ldots\oplus\mathfrak{X}_k$, pour $j=2,3,\ldots,k$, l'est aussi, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de zéro de $\mathfrak{g}$ et un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de l'élément neutre de $\mathfrak{G}$ tels que P est un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{U}$.*

Nous ne savons pas si l'hypothèse que les projections P_i sont apprivoisées est essentielle. C'est une exigence de la méthode du théorème de Nash et Moser. D'autre part, il existe plusieurs décompositions importantes de $\mathfrak{g}$ qui vérifient ces conditions. De telles décompositions et les applications des théorèmes démontrés dans ce chapitre seront discutés dans le chapitre IV.

Conformément à la méthode présentée dans le chapitre I, basée sur le théorème de Nash et Moser, nous allons montrer successivement que P est lisse apprivoisée, que sa dérivée suivant la direction est bijective pour un voisinage ouvert de zéro et que l'application inverse à la dérivée est continue et apprivoisée.

1. P est lisse apprivoisée

PROPOSITION 2.2. *Soient P_i $(i = 1, \dots, k)$ des projections apprivoisées du degré r avec la base b. Alors l'application P définie par* (2.1) *est lisse et apprivoisée du degré r avec la base b.*

Démonstration. L'application $\operatorname{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$, donnée par une série entière à rayon de convergence infini, est lisse sur $\mathfrak{g}$ et apprivoisée sur $\{f : |f|_0 < C\}$ pour tout $C > 0$ (cf. proposition 1.18). L'application $\operatorname{Exp} \circ P_i$ est lisse et apprivoisée (cf. 2.1.6 dans [3], deuxième partie). D'autant plus, comme des applications données par des séries entières sont apprivoisées du degré zéro, $\operatorname{Exp} \circ P_i$ est apprivoisée du même degré que P_i. La proposition 1.14 montre que

$$\operatorname{Exp} \circ P_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp} \circ P_k$$

est lisse et apprivoisée.

2. Bijectivité des dérivées de P

LEMME 2.3. *Nous avons*

$$\begin{aligned} &DP(f)h \\ &\quad = \operatorname{Exp}(P_1 f) \cdot (\Phi(-\operatorname{ad}_{P_1 f}) P_1 h) \cdot \operatorname{Exp}(P_2 f) \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f) \\ &\qquad + \operatorname{Exp}(P_1 f) \cdot \operatorname{Exp}(P_2 f) \cdot (\Phi(-\operatorname{ad}_{P_2 f}) P_2 h) \cdot \operatorname{Exp}(P_3 f) \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f) \\ &\qquad + \ldots + \operatorname{Exp}(P_1 f) \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f) \cdot (\Phi(-\operatorname{ad}_{P_k f}) P_k h) \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $\Phi(z) = (e^z - 1)/z$ (cf. (1.18)).

Démonstration. $\operatorname{Exp} \circ P_i$ est de classe C^∞, donc

$$P = \operatorname{Exp} \circ P_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp} \circ P_k$$

l'est aussi (cf. proposition 1.14), et la formule du lemme résulte de (1.18).

Soit $\mathcal{V} = \{f \in \mathfrak{g} : |f|_0 < 1\}$. Pour $f \in \mathcal{V}$, $h \in \mathfrak{g}$ et $i = 1, \dots, k$, posons

$$\begin{aligned} A_i(f)h = {} & \operatorname{Exp} \circ P_1(f) \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp} \circ P_i(f) \\ & \cdot (\Phi(-\operatorname{ad}_{P_i f})h) \cdot \operatorname{Exp} \circ P_{i+1}(f) \cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp} \circ P_k(f). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les applications $\operatorname{Exp} \circ P_i$ et

$$(f, h) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k+l=n-1 \\ k,l \geq 0}} \frac{(P_i f)^k \cdot h \cdot (P_i f)^l}{n!}$$

sont lisses apprivoisées, donc il en est de même de $(f, h) \mapsto \Phi(-\operatorname{ad}_{P_i f})h$ et $A_i : \mathcal{V} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$.

Fixons $f \in \mathcal{V}$ et considérons l'application linéaire

$$\mathfrak{g} \ni h \mapsto A_i(f)h \in \mathfrak{g}. \tag{2.4}$$

LEMME 2.4. *Pour tout $f \in \mathcal{V}$ l'application* (2.4) *est bijective.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous allons montrer que l'équation

$$A_i(f)h = k \tag{2.5}$$

a, pour tout k, une seule solution. Multiplions (2.5) à gauche par $\mathrm{Exp}(-P_i f) \cdot \mathrm{Exp}(-P_{i-1} f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_1 f)$ et à droite par $\mathrm{Exp}(-P_k f) \cdot \mathrm{Exp}(-P_{k-1} f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_{i+1} f)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\Phi(-\operatorname{ad}_{P_i f})h = {} & \mathrm{Exp}(-P_i f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_1 f) \\ & \cdot k \cdot \mathrm{Exp}(-P_k f) \cdot \mathrm{Exp}(-P_{k-1} f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_{i+1} f),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}h = \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})(&\mathrm{Exp}(-P_i f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_1 f) \\ & \cdot k \cdot \mathrm{Exp}(-P_k f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_{i+1} f))\end{aligned}$$

où $\Phi^{-1}(z) = z/(e^z - 1)$.

Désignons par $VA_i(f)$ l'application inverse à (2.4).

Lemme 2.5. *L'application*

$$\mathcal{V}_i \times \mathfrak{g} \ni (f, k) \mapsto VA_i(f)k \in \mathfrak{g},$$

où $\mathcal{V}_i = \{f : |P_i f|_0 < 1/4\}$, *est continue apprivoisée.*

D é m o n s t r a t i o n. Puisque la multiplication de l'algèbre $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ est continue et apprivoisée, l'application

$$\begin{aligned}&\mathcal{V} \times \mathfrak{g} \ni (f, k) \mapsto \\ &\qquad \mathrm{Exp}(-P_i f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_1 f) \cdot k \cdot \mathrm{Exp}(-P_k f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{Exp}(-P_{i+1} f) \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

est continue et apprivoisée. Nous allons donc montrer que l'application

$$\mathcal{V}_i \times \mathfrak{g} \ni (f, k) \mapsto \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})k \in \mathfrak{g}$$

est continue et apprivoisée. Soient $f, f + \Delta f \in \mathcal{V}_i$. Nous avons

$$\begin{aligned}&\Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i(f+\Delta f)})(k + \Delta k) - \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})k \\ &\qquad = \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i(f+\Delta f)})k - \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})k + \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i(f+\Delta f)})\Delta k.\end{aligned}$$

La fonction $\Phi^{-1}(z)$ a le développement

$$\Phi^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_n}{n!} z^n$$

où $\mathbf{B}_n$ est le n-ième nombre de Bernoulli, $|\mathbf{B}_n| \le n!$. Puisque

$$(\operatorname{ad}^n_{P_i(f+\Delta f)} - \operatorname{ad}^n_{P_i f})k = \sum_{\substack{\nu+\mu=n-1 \\ \nu,\mu \ge 0}} \operatorname{ad}^\nu_{P_i(f+\Delta f)} \cdot \operatorname{ad}_{P_i \Delta f} \cdot \operatorname{ad}^\mu_{P_i f} k,$$

nous avons

$$
\begin{aligned}
|(\operatorname{ad}^n_{P_i(f+\Delta f)} - \operatorname{ad}^n_{P_i f})k|_l \le C_n 2^{n+l}(n+1)^l &((\max(|P_i(f+\Delta f)|_l, |P_i f|_l)) \\
&\times (\max(|P_i(f+\Delta f)|_0, |P_i f|_0))^{n-1}|P_i(\Delta f)|_0|k|_0 \\
&+ (\max(|P_i(f+\Delta f)|_0, |P_i f|_0))^{n}|P_i(\Delta f)|_l|k|_0 \\
&+ (\max(|P_i(f+\Delta f)|_0, |P_i f|_0))^{n}|P_i(\Delta f)|_0|k|_l).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que la l-ième norme de

$$\Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i(f+\Delta f)})(k+\Delta k) - \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})k$$

tend vers zéro lorsque la l-ième norme des $P_i(\Delta f)$ et de k tend vers zéro. La démonstration que $(f,k) \mapsto \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_i f})k$ est apprivoisée est similaire.

Nous avons

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\mathbf{B}_n}{n!}\operatorname{ad}^n_{P_i f} k\Big|_l \\
&\qquad \le C_l \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n+l}(n+1)^l(|P_i f|_l |P_i f|_0^{n-1}|k|_0 + |P_i f|_0^n |k|_l).
\end{aligned}
$$

Le membre droit est convergent pour f dans $\{f : |P_i f|_0 < 1/4\}$.

Nous allons montrer que l'équation $DP(f)h = l$ a une seule solution pour toute f telle que $|P_i f|_0 < 1/4$, $i = 1,\dots,k$. D'après le lemme 2.3 nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad & \operatorname{Exp}(P_1 f)\cdot(\Phi(-\operatorname{ad}_{P_1 f})P_1 h)\cdot \operatorname{Exp}(P_2 f)\cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f) \\
&+ \operatorname{Exp}(P_1 f)\cdot \operatorname{Exp}(P_2 f)\cdot(\Phi(-\operatorname{ad}_{P_2 f})P_2 h)\cdot \operatorname{Exp}(P_3 f)\cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f) \\
&+ \ldots + \operatorname{Exp}(P_1 f)\cdot \operatorname{Exp}(P_2 f)\cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(P_k f)\cdot(\Phi(-\operatorname{ad}_{P_k f})P_k h) = l.
\end{aligned}
$$

Nous multiplions (2.6) à gauche par $\operatorname{Exp}(-P_1 f)$ et à droite par $\operatorname{Exp}(-P_k f)\cdot \operatorname{Exp}(-P_{k-1} f)\cdot \ldots \cdot \operatorname{Exp}(-P_2 f)$. Cette opération est un automorphisme continu et apprivoisé de $\mathfrak{g}$. Notons ${}^{\backprime}l$ l'effet de cette opération sur le membre droit de (2.6). Alors

$$
\begin{aligned}
&\Phi(-\operatorname{ad}_{P_1 f})P_1 h + \operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_2 f})\Phi(-\operatorname{ad}_{P_2 f})P_2 h \\
&\qquad + \operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_2 f})\operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_3 f})\ldots \operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_k f})\Phi(-\operatorname{ad}_{P_k f})P_k h \\
&= {}^{\backprime}l = P_1{}^{\backprime}l + \ldots + P_k{}^{\backprime}l.
\end{aligned}
$$

Il est évident que $\Phi(-\operatorname{ad}_{P_1 f})P_1 h \in P_1\mathfrak{g}$ et que la somme des autres termes appartient à $P_2\mathfrak{g} \oplus P_3\mathfrak{g} \oplus \ldots \oplus P_k\mathfrak{g}$. Donc

$$\Phi(-\operatorname{ad}_{P_1 f})P_1 h = P_1{}^{\backprime}l$$

et

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_2 f})\Phi(-\operatorname{ad}_{P_2 f})P_2 h + \ldots + \\
&\qquad \operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_2 f})\operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_3 f})\ldots \operatorname{Exp}(\operatorname{ad}_{P_k f})\Phi(-\operatorname{ad}_{P_k f})P_k h = P_2{}^{\backprime}l + \ldots + P_k{}^{\backprime}l.
\end{aligned}
$$

En appliquant $\operatorname{Exp}(-\operatorname{ad}_{P_2 f})$ et en désignant le résultat de cette opération sur le membre droit par "l nous avons encore

$$\Phi(-\operatorname{ad}_{P_2 f})P_2 h = P_2{}^{``}l.$$

Nous continuons ce procédé jusqu'à

$$\Phi(-\operatorname{ad}_{P_k f})P_k h = P_k{}^{(k)}l.$$

Par conséquent,

$$VP(f)l = \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_1 f})P_1{}^{`}l + \ldots + \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_{P_k f})P_k{}^{(k)}l. \tag{2.7}$$

D'après le lemme 2.5 l'application $(f, l) \mapsto VP(f)l$ est continue et apprivoisée sur $\{f : |P_i f|_0 < 1/4,\ i = 1, \ldots, k\} \times \mathfrak{g}$. Il résulte du théorème 3.1.1 dans la deuxième partie de [3] que VP est lisse apprivoisée. Les hypothèses du théorème de Nash et Moser étant ainsi vérifiées, P est donc une bijection lisse (à l'inverse lisse) d'un voisinage de zéro de $C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ sur un voisinage ouvert de l'unité de $C^\infty(M, GL(N, \mathbb{C}))$.

Chapitre III

Nous allons considérer l'application Q de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ dans le groupe de Lie $\mathfrak{G} = C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$ définie par

$$Q(f)(t) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \tag{3.1}$$

pour

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_j e^{ijt}.$$

Notre but consiste à démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.1. *L'application Q est lisse sur $\mathfrak{g}$ et apprivoisée sur l'ensemble $\{f \in \mathfrak{g} : \|f\|_0 < C\}$ pour tout $C > 0$. L'application Q restreinte à $\mathcal{V} = \{f \in \mathfrak{g} : \|f\|_0 < \frac{1}{2}\ln 2\}$ a la dérivée suivant la direction bijective comme application $\mathfrak{g} \ni h \mapsto DP(f)h \in \mathfrak{g}$. Par conséquent, Q définit un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de zéro de $\mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert de l'élément neutre de $\mathfrak{G}$.*

La démonstration suit le procédé du théorème de Nash et Moser. Nous allons montrer que Q est lisse apprivoisée, qu'elle a la dérivée bijective et que la famille d'applications VQ est continue et apprivoisée. Au début nous introduisons un formalisme pour manipuler les séries de Fourier d'éléments de $\mathfrak{g}$.

1. Séries formelles de variables non commutatives. Soit l un entier positif. Soit Υ l'ensemble composé du nombre 0 et de toutes les paires de multiindices

$$((\nu_1, \ldots, \nu_s); (j_1, \ldots, j_s))$$

tels que ν_k est un entier positif, $1 \leq \nu_k \leq l$, et j_k est un entier quelconque, $k = 1, \ldots, s$. Pour une application fixée $\alpha_\omega : \Upsilon \to \mathbb{C}$ notée

$$\alpha_\omega((\nu_1, \ldots, \nu_s); (j_1, \ldots, j_s)) = \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}, \qquad \alpha_\omega(0) = \alpha_0, \tag{3.2}$$

nous considérons la série formelle de variables $\mathbf{X}_{j,\nu}$, $j = 0, \pm1, \ldots$, $\nu = 1, \ldots, l$, donnée par

$$\alpha_0 \mathbf{1} + \sum \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{X}_{j_1,\nu_1} \ldots \mathbf{X}_{j_s,\nu_s}. \tag{3.3}$$

Désignons par $\mathcal{P}_l$ l'ensemble de toutes les séries formelles de cette forme.

Soit $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{P}_l$,

$$\omega_1 = \alpha_0 \mathbf{1} + \sum \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{X}_{j_1,\nu_1} \ldots \mathbf{X}_{j_s,\nu_s}, \tag{3.4}$$

$$\omega_2 = \beta_0 \mathbf{1} + \sum \beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)} \mathbf{X}_{k_1,\mu_1} \ldots \mathbf{X}_{k_r,\mu_r}. \tag{3.5}$$

Nous définissons leur produit $\omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathcal{P}_l$ par

$$\begin{aligned}\omega_1 \cdot \omega_2 = \alpha_0\beta_0 \mathbf{1} &+ \sum \beta_0 \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{X}_{j_1,\nu_1} \ldots \mathbf{X}_{j_s,\nu_s} \\ &+ \sum \alpha_0 \beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)} \mathbf{X}_{k_1,\mu_1} \ldots \mathbf{X}_{k_r,\mu_r} + \sum \gamma^{(\xi_1,\ldots,\xi_p)}_{(l_1,\ldots,l_p)} \mathbf{X}_{l_1,\xi_1} \ldots \mathbf{X}_{l_p,\xi_p}\end{aligned}$$

où $\gamma^{(\xi_1,\ldots,\xi_p)}_{(l_1,\ldots,l_p)} = \sum_{r+s=p} \alpha^{(\xi_1,\ldots,\xi_s)}_{(l_1,\ldots,l_s)} \beta^{(\xi_{s+1},\ldots,\xi_{s+r})}_{(l_{s+1},\ldots,l_{s+r})}$. L'ensemble $\mathcal{P}_l$ avec la naturelle addition de séries, multiplication par les scalaires et multiplication décrite ci-dessus constitue une algèbre (avec unité $\mathbf{1}$).

Soient $f_1, \ldots, f_l \in \mathfrak{g}$ tels que

$$f_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{j,\nu} e^{ijt}, \qquad \nu = 1, \ldots, l.$$

L'évaluation de la série formelle (3.3) sur le vecteur $(f_1, \ldots, f_l)$ est

$$\omega(f_1, \ldots, f_l) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j e^{ijt} \tag{3.6}$$

où β_j est la série formelle de la forme

$$\begin{aligned}\beta_j &= \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=j \\ s=1,2,\ldots}} \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{A}_{j_1,\nu_1} \ldots \mathbf{A}_{j_s,\nu_s} \qquad \text{pour } j \neq 0, \\ \beta_0 &= \alpha_0 \mathbf{I} + \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_s=0 \\ s=1,2,\ldots}} \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)} \mathbf{A}_{j_1,\nu_1} \ldots \mathbf{A}_{j_s,\nu_s}\end{aligned} \tag{3.7}$$

(nous désignons par $\mathbf{I}$ la matrice unité).

Nous dirons que l'évaluation formelle $\omega(f_1, \ldots, f_l)$ est une evaluation quand la série

$$|\alpha_0| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_s=j \\ s=1,2,\ldots}} |\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}| \cdot \|\mathbf{A}_{j_1,\nu_1}\| \ldots \|\mathbf{A}_{j_s,\nu_s}\| \tag{3.8}$$

est convergente. En ce cas la somme (3.8) est notée $|\omega(f_1,\ldots,f_l)|$. (Rappelons que $\| \ \|$ désigne la norme d'opérateur sur $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$.)

Lemme 3.2. *Nous avons*

$$|(\omega_1+\omega_2)(f_1,\ldots,f_l)| \le |\omega_1(f_1,\ldots,f_l)| + |\omega_2(f_1,\ldots,f_l)|,$$
$$|(\omega_1\cdot\omega_2)(f_1,\ldots,f_l)| \le |\omega_1(f_1,\ldots,f_l)| \cdot |\omega_2(f_1,\ldots,f_l)|.$$

La dérivée formelle de la série formelle (3.3) donnée par α_ω est la série ω' donnée par $\alpha_{\omega'} : \Upsilon \to \mathbb{C}$ où

$$\alpha_{\omega'}((\nu_1,\ldots,\nu_s);(j_1,\ldots,j_s)) = i(j_1+\ldots+j_s)\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}, \qquad \alpha_{\omega'}(0) = 0$$

(i signifie l'unité imaginaire). Par récurrence, nous définissons la k-ième dérivée formelle $\omega^{(k)}$ comme la dérivée de $\omega^{(k-1)}$.

Exemple 3.3. Soit $\omega\in\mathcal{P}_1$, $\omega((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = \mathbf{X}_n$ pour n fixé. Alors on a $\omega^{(k)}((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = (n\cdot i)^k\mathbf{X}_n$.

Lemme 3.4. *La différentiation dans $\mathcal{P}_l$ obéit la formule de Leibniz :*

$$(\omega_1\omega_2)^{(k)} = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2\ge 0}} \binom{k}{k_1} \omega_1^{(k_1)}\omega_2^{(k_2)}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $(\omega_1\cdot\omega_2)' = \omega_1'\cdot\omega_2 + \omega_1\cdot\omega_2'$. Avec les définitions (3.4) et (3.5) nous avons

$$\begin{aligned}(\omega_1\omega_2)' = {} & \sum i(j_1+\ldots+j_s)\beta_0\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\ldots\mathbf{X}_{j_s,\nu_s} \\ & + \sum i(k_1+\ldots+k_r)\alpha_0\beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\ldots\mathbf{X}_{k_r,\mu_r} \\ & + \sum i(j_1+\ldots+j_s+k_1+\ldots+k_r) \\ & \times \Big(\sum_{s+r=p} \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\ldots\mathbf{X}_{j_s,\nu_s}\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\ldots\mathbf{X}_{k_r,\mu_r}\Big).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\omega_1'\omega_2 + \omega_1\omega_2' = {} & \Big(\sum i(j_1+\ldots+j_s)\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{j_s,\nu_s}\Big) \\ & \times \Big(\beta_0\mathbf{1} + \sum \beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{k_r,\mu_r}\Big) \\ & + \Big(\alpha_0\mathbf{1} + \sum \alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{j_s,\nu_s}\Big) \\ & \times \Big(\sum i(k_1+\ldots+k_r)\beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{k_r,\mu_r}\Big)\end{aligned}$$

$$= \sum i(j_1+\ldots+j_s)\beta_0\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{j_s,\nu_s}+$$
$$+\sum i(k_1+\ldots+k_r)\alpha_0\beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{k_r,\mu_r}+$$
$$+\sum\Big(\sum_{s+r=p} i(j_1+\ldots+j_s+k_1+\ldots+k_r)\alpha^{(\nu_1,\ldots,\nu_s)}_{(j_1,\ldots,j_s)}\beta^{(\mu_1,\ldots,\mu_r)}_{(k_1,\ldots,k_r)}\Big)\cdot$$
$$\cdot\mathbf{X}_{j_1,\nu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{j_s,\nu_s}\cdot\mathbf{X}_{k_1,\mu_1}\cdot\ldots\cdot\mathbf{X}_{k_r,\mu_r} = (\omega_1\cdot\omega_2)'.$$

LEMME 3.5. *Pour tous $\omega_1,\omega_2\in\mathcal{P}_l$ et pour toutes fonctions $f_1,\ldots,f_l\in\mathfrak{g}$ on a*

$$|(\omega_1\cdot\omega_2)^{(k)}(f_1,\ldots,f_l)| \le \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\ge 0}}\binom{k}{k_1}|\omega_1^{(k_1)}(f_1,\ldots f_l)|\cdot|\omega_2^{(k_2)}(f_1,\ldots,f_l)|.$$

Démonstration. Il suffit d'employer les lemmes 3.2 et 3.4.

EXEMPLE 3.6. Soit $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction analytique

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k.$$

Nous définissons la série $\omega\in\mathcal{P}_1$ par

$$\omega((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = a_0\mathbf{1}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\mathbf{X}_n)^k = F(\mathbf{X}_n), \tag{3.9}$$

c'est-à-dire, $\alpha_0=a_0$ et $\alpha^{(1,\ldots,1)}_{(j_1,\ldots,j_s)}=\delta^n_{j_1}\delta^n_{j_2}\ldots\delta^n_{j_s}a_s$ où δ^i_j est le symbole de Kronecker. Alors,

$$\alpha_{\omega'}(\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{s\text{ fois }1};\underbrace{(n,n,\ldots,n)}_{s\text{ fois }n}) = (i\cdot n\cdot s)a_s.$$

Autrement dit,

$$\omega'((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k(ink)(\mathbf{X}_n)^k = (in\mathbf{X}_n)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(\mathbf{X}_n)^{k-1}$$
$$= (in\mathbf{X}_n)\cdot F'(\mathbf{X}_n) = F'(\mathbf{X}_n)\cdot(\mathbf{X}_n)'.$$

Nous avons donc le lemme suivant :

LEMME 3.7. *La différentiation des séries formelles de la forme* (3.9) *obéit la formule de différentiation de fonctions composées* (*la formule de Faa di Bruno*). *En particulier, si $F(z)=e^z$, nous avons*

$$\omega^{(k)}((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty})$$
$$= \exp(\mathbf{X}_n)\Big(\sum_{\substack{l_1\cdot 1+\ldots+l_k\cdot k=k\\ l_1,\ldots,l_k\ge 0}}\kappa(l_1,\ldots,l_k)(in\mathbf{X}_n)^{l_1}((in)^2\mathbf{X}_n)^{l_2}\ldots((in)^k\mathbf{X}_n)^{l_k}\Big)$$

pour $\kappa(l_1,\ldots,l_k)=k!/(l_1!(1!)^{l_1}\cdot\ldots\cdot l_k!(k!)^{l_k})$ et $k=1,2,\ldots$

Les lemmes 3.5 et 3.7 entraînent

LEMME 3.8. *Pour* $\omega((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = \exp(\mathbf{X}_n)$ *et* $f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_j e^{ijt}$ *nous avons*

$$|\omega^{(k)}(f)| \le \exp(\|\mathbf{A}_j\|) \times \sum_{\substack{l_1\cdot 1+\ldots+l_k\cdot k=k \\ l_1,\ldots,l_k\ge 0}} \kappa(l_1,\ldots,l_k)(|n|\|\mathbf{A}_n\|)^{l_1}(n^2\|\mathbf{A}_n\|)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(|n|^k\|\mathbf{A}_n\|)^{l_k}$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

EXEMPLE 3.9. Soit $\omega \in \mathcal{P}_2$,

$$\omega((\mathbf{X}_{j,1})_{j=-\infty}^{\infty}, (\mathbf{X}_{j,2})_{j=-\infty}^{\infty}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\operatorname{ad}^m_{\mathbf{X}_{n,1}} \mathbf{X}_{n,2}}{(m+1)!}$$

pour n fixé. Nous avons

$$\omega^{(k)}((\mathbf{X}_{j,1})_{j=-\infty}^{\infty}, (\mathbf{X}_{j,2})_{j=-\infty}^{\infty}) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(i(m+1)n)^k \operatorname{ad}^m_{\mathbf{X}_{n,1}} \mathbf{X}_{n,2}}{(m+1)!}.$$

Si $f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_j e^{ijt}$ et $h(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_j e^{ijt}$, nous avons

$$|\omega^{(k)}(f, h)| \le \exp(C_k\|\mathbf{A}_n\|) \cdot n^k \|\mathbf{H}_n\|$$

où C_k est une constante ne dépendant que de k.

EXEMPLE 3.10. Soit $\omega \in \mathcal{P}_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ définie par

$$\omega((\mathbf{X}_{j,1})_{j=-\infty}^{\infty}, \ldots, (\mathbf{X}_{j,k+1})_{j=-\infty}^{\infty}) = \sum_{m=k-1}^{\infty} \frac{\sum_{\sigma\in S_m}(\prod_{s=1}^{m} \operatorname{ad}_{\mathbf{Y}_{\sigma(s)}})\mathbf{X}_{n,k_0+1}}{(m+1)!(m-k+1)!}$$

où $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_{n,1}$, $\ldots$, $\mathbf{Y}_{m-k+1} = \mathbf{X}_{n,1}$, $\mathbf{Y}_{m-k+2} = \mathbf{X}_{n,2}$, $\mathbf{Y}_{m-k+3} = \mathbf{X}_{n,3}$, $\ldots$, $\mathbf{Y}_{m-k+k_0} = \mathbf{X}_{n,k_0}$, $\mathbf{Y}_{m-k+k_0+1} = \mathbf{X}_{n,k_0+2}$, $\ldots$, $\mathbf{Y}_m = \mathbf{X}_{n,k+1}$. Si $f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_j e^{ijt}$ et $h_\nu(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{j,\nu} e^{ijt}$ pour $\nu = 1, \ldots, k$, nous avons

$$|\omega^{(l)}(f, h_1, \ldots, h_k)| \le \exp(C_l\|\mathbf{A}_n\|) \cdot \|\mathbf{H}_{n,1}\| \cdot \ldots \cdot \|\mathbf{H}_{n,k}\| n^l$$

où C_l est une constante qui ne dépend que de l.

LEMME 3.11. *Soient* $\omega \in \mathcal{P}_l$ *et* $f_1, \ldots, f_l \in \mathfrak{g}$. *Supposons que*

$$|\omega^{(k)}(f_1, \ldots, f_l)| = C_k < \infty$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$. *Alors*

(a) *la série* (3.7) *est convergente*,

(b) $\omega(f_1, \ldots, f_l) \in \mathfrak{g}$ *et*

$$\|\omega(f_1, \ldots, f_l)\|_k \le C_0 + C_k$$

(*rappelons que* $\| \ \|_k$ *est la norme* (1.9)).

Démonstration. (a) La convergence de la série (3.8) implique la convergence absolue de la série (3.7).

(b) $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_j e^{ijt} \in \mathfrak{g}$ lorsque, pour tout $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$(*) \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^k \|\beta_j\| < \infty.$$

Mais $\omega^{(k)}(f_1, \ldots, f_l) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (ij)^k \beta_j e^{ijt}$. De l'hypothèse et de la sous-multiplicativité de la norme $\| \ \|$ nous avons

$$(**) \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j|^k \|\beta_j\| \leq C_k$$

et le fait que les nombres C_k sont finis signifie que la première partie de l'assertion (b) a lieu. L'estimation $\|\omega(f_1, \ldots, f_l)\|_k \leq C_0 + C_k$ résulte de $(**)$ et de la définition de la norme $\| \ \|_k$.

2. L'application Q est lisse apprivoisée. Définissons d'abord quelques applications auxiliaires $\mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$:

$$(3.10) \qquad Q^+(f)(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}),$$

$$(3.11) \qquad Q_n^+(f)(t) = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \quad \text{où } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(3.12) \qquad Q^0(f) = \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_0),$$

$$(3.13) \qquad Q^-(f)(t) = \prod_{j=-\infty}^{-1} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}),$$

les facteurs des produits étant toujours numérotés “de gauche à droite”.

L'application Q est maintenant représentée comme $Q(f) = Q^-(f)Q^0(f)Q^+(f)$. D'après la proposition 1.14 il suffit de montrer que Q^-, Q^0 et Q^+ sont lisses apprivoisées. Le cas de Q^0 est évident. Par symétrie il suffit de considérer Q^+. Il résulte de la proposition 1.14 et de la démonstration de la proposition 2.2 que les Q_n^+ sont lisses. En utilisant le théorème 0.2.3 de [2], nous allons montrer que l'application

$$(3.14) \qquad Q^+ = Q_1^+ + \sum_{n=2}^{\infty} (Q_n^+ - Q_{n-1}^+)$$

est lisse.

Définition 3.12. Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ nous disons que les entiers non négatifs $c_1, \ldots, c_l$ vérifient la condition $\mathbf{b}(k)$, et nous écrivons $(c_1, \ldots, c_l) \in \mathbf{b}(k)$, quand

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_l \cdot l = k.$$

(Remarquons que l peut être plus grand que k. En ce cas $c_j = 0$ pour $j > k$.)

LEMME 3.13. *Pour tout entier positif k et tous réels $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$,*

$$\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\ge 0}} \binom{k}{k_1}\Big(\sum_{(c_1,\ldots,c_k)\in\mathbf{b}(k_1)} \frac{k_1!}{c_1!(1!)^{c_1}\ldots c_k!(k!)^{c_k}} a_1^{c_1}\ldots a_k^{c_k}\Big) \times\Big(\sum_{(d_1,\ldots,d_k)\in\mathbf{b}(k_2)} \frac{k_2!}{d_1!(1!)^{d_1}\ldots d_k!(k!)^{d_k}} b_1^{d_1}\ldots b_k^{d_k}\Big) = \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbf{b}(k)} \kappa(l_1,\ldots,l_k)(a_1+b_1)^{l_1}\ldots(a_k+b_k)^{l_k}. \tag{3.15}$$

Démonstration. Nous groupons le membre gauche de (3.15) en sommes de produits tels que, pour une solution fixée de l'équation

$$l_1\cdot 1 + l_2\cdot 2 + \ldots + l_k\cdot k = k,$$

on a les égalités

$$c_1+d_1=l_1,\quad c_2+d_2=l_2,\ \ldots,\ c_k+d_k=l_k.$$

En ce cas

$$\binom{k}{k_1}\frac{k_1!}{c_1!(1!)^{c_1}\ldots c_k!(k!)^{c_k}} a_1^{c_1}\ldots a_k^{c_k} \frac{k_2!}{d_1!(1!)^{d_1}\ldots d_k!(k!)^{d_k}} b_1^{d_1}\ldots b_k^{d_k} = \frac{k!}{l_1!(1!)^{l_1}\ldots l_k!(k!)^{l_k}} a_1^{c_1}b_1^{d_1}\binom{l_1}{c_1}\ldots a_k^{c_k}b_k^{d_k}\binom{l_k}{c_k}.$$

Donc la somme correspondant à $(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbf{b}(k)$ est

$$\frac{k!}{l_1!(1!)^{l_1}\ldots l_k!(k!)^{l_k}}(a_1+b_1)^{l_1}\ldots(a_k+b_k)^{l_k},$$

ce qui termine la démonstration.

LEMME 3.14. *Pour tout entier positif n, toute norme de* (1.9) *et toute fonction $f\in\mathfrak{g}$ $(f(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_j e^{ijt})$ on a*

$$\|Q_n^+(f)\|_0 \le \exp\Big(\sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_j\|\Big),$$

$$\|Q_n^+(f)\|_k \le \exp\Big(\sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_j\|\Big) \times\Big(1+\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbf{b}(k)} \kappa(l_1,\ldots,l_k)\cdot\Big(\sum_{j=1}^n j\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_1}\ldots\Big(\sum_{j=1}^n j^k\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_k}\Big). \tag{3.16}$$

Démonstration. Soit $\gamma_n\in\mathcal{P}_1$, $\gamma_n((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty})=\exp(\mathbf{X}_n)$ et soit $\omega_n\in\mathcal{P}_1$ définie par $\omega_n=\prod_{j=1}^n\gamma_j$. Nous avons $\gamma_n(f)=\mathrm{Exp}(\mathbf{A}_n e^{int})$ et $\omega_n(f)=Q_n^+(f)$ pour $n=1,2,\ldots$ Nous allons montrer, par récurrence sur n, que pour $k=0,1,2,\ldots,$

$$(3.17)\qquad |\omega_n^{(k)}(f)| \leq \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big)$$
$$\times\Big(\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbf{b}(k)} \kappa(l_1,\ldots,l_k)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n} j\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_1}\Big(\sum_{j=1}^{n} j^2\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_2}\ldots\Big(\sum_{j=1}^{n} j^k\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_k}\Big).$$

Pour $n=1$, $\omega_1=\gamma_1$ et l'inégalité (3.17) a lieu, pour $k=1,2,\ldots$, en vertu du lemme 3.8. Supposons que (3.17) a lieu pour les entiers inférieurs à n et pour tout $k=0,1,2,\ldots$ (pour $k=0$ le deuxième facteur de (3.17) manque). Du lemme 3.4 nous avons

$$\omega_n^{(k)} = \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1}\omega_{n-1}^{(k_1)}\gamma_n^{(k_2)}.$$

D'où et du lemme 3.5,

$$|\omega_n^{(k)}(f)| \leq \sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\geq 0}} \binom{k}{k_1}|\omega_{n-1}^{(k_1)}(f)|\cdot|\gamma_n^{(k_2)}|.$$

De l'hypothèse de récurrence appliquée à $\omega_{n-1}^{(k_1)}$, $k_1=0,1,\ldots,k$, et des lemmes 3.13 et 3.8 appliqués à $\gamma_n^{(k_2)}$, $k_2=0,1,\ldots,k$, nous obtenons (3.17). L'inégalité (3.16) résulte du lemme 3.11(b).

Corollaire 3.15. *Pour chaque $f\in C^\infty(S^1,\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ et $k=0,1,2,\ldots$ la suite $(\|Q_n^+(f)\|_k)_{n=1}^\infty$ est bornée par une constante $C_{f,k}$.*

Proposition 3.16. *L'application $Q^+:\mathfrak{g}\to\mathfrak{G}$ est bien définie, lisse et apprivoisée sur $\{f:\|f\|_0<C\}$ pour tout $C>0$.*

Démonstration. Nous allons montrer que la série d'applications (3.14) satisfait aux hypothèses du théorème sur la différentiabilité au sens de Michel–Bastiani (les points (a), (b), (d) de la démonstration) (cf. 0.2.3 dans [2]). Notamment, nous allons montrer que :

(a) La série (3.14) converge en chaque point.

(b) La série des dérivées suivant les directions du second membre de (3.14) converge en chaque point.

(c) L'application Q^+ ainsi que ses dérivées suivant les directions satisfont aux estimations apprivoisées, du degré 0 avec la base 0, pour la gradation (1.9).

(d) Pour toutes $f,h_1,\ldots,h_k\in\mathfrak{g}$ et pour toute norme (1.9) il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de f et un voisinage ouvert $\mathcal{U}_j$ de h_j $(j=1,\ldots,k)$ tels que la série

$$D^kQ_1^+(f)\{h_1,\ldots,h_k\}+\sum_{n=2}^{\infty}D^k(Q_n^+-Q_{n-1}^+)(f)\{h_1,\ldots,h_k\}$$

converge uniformément sur $\mathcal{U}\times\mathcal{U}_1\times\ldots\times\mathcal{U}_k$.

(a) Nous allons montrer davantage, à savoir que la série (3.14) converge absolument en chaque point. Pour tout k nous avons

$$\|Q_1^+(f)\|_k + \sum_{j=2}^{\infty} \|Q_j^+(f) - Q_{j-1}^+(f)\|_k$$
$$= \|Q_1^+(f)\|_k + \sum_{j=2}^{\infty} \|Q_{j-1}^+(f)(\mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) - \mathbf{I})\|_k.$$

En vertu de la proposition 1.12, le membre droit ne dépasse pas

$$\|Q_1^+(f)\|_k + C_k \cdot \sum_{j=2}^{\infty}\Big(\|Q_{j-1}^+(f)\|_k \cdot \|\operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) - \mathbf{I}\|_0$$
$$+ \|Q_{j-1}^+(f)\|_0 \cdot \|\operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) - \mathbf{I}\|_k\Big)$$
$$\le \|Q_1^+(f)\|_k + C_k \cdot (C_{f,k} + C_{f,0}) \cdot \Big(\sum_{j=2}^{\infty} \|\operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) - \mathbf{I}\|_k\Big)$$

d'après le corollaire 3.15, ce qui est majoré par

$$|\omega_1^{(k)}(f)| + |\omega_1(f)| + C_k \cdot (C_{f,k} + C_{f,0}) \cdot \Big(\sum_{j=2}^{\infty}(|\gamma_j^{(k)}(f)| + |\gamma_j(f)| - 1)\Big)$$

pour ω_j et γ_j définies comme dans la démonstration du lemme 3.14.

Pour prouver la convergence de la série ci-dessus, notons que la série $\sum_{j=2}^{\infty} |\gamma_j(f) - 1| = \sum_{j=2}^{\infty}(\exp(\|\mathbf{A}_j\|) - 1)$ est convergente parce que la série $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|$ l'est. En employant la formule du lemme 3.8 on voit aisément que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j^{(k)}(f)|$$
$$\le \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|\Big) \cdot \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in \mathbf{b}(k)} \kappa(l_1,\ldots,l_k) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j^k \cdot \|\mathbf{A}_j\|^{l_1+\ldots+l_k} < \infty.$$

La convergence ponctuelle de Q_n^+ signifie que Q^+ est bien définie.

(b) Nous allons montrer que la série des dérivées suivant les directions des applications en (3.14) est, en chaque point et pour toute famille de directions, absolument convergente. Nous commençons par montrer que les dérivées suivant les directions des applications Q_n^+ sont, en un point fixé et pour les directions fixées, bornées dans leur ensemble en norme arbitraire de la gradation (1.9) fixée. Dans ce but nous allons écrire la formule de la k-ième dérivée suivant les directions de l'application Q_n^+.

Soient $h_1, \dots, h_k \in \mathfrak{g}$ avec

$$h_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_{j,s} e^{ijt} \qquad (s = 1, \dots, k).$$

D'après (1.12) nous avons

$$(3.18) \qquad D^k Q_n^+(f)\{h_1, \dots, h_k\}$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_n = \{1,\dots,k\} \\ \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j = \emptyset}} \prod_{j=1}^{n} D^{|\mathcal{W}_j|} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt})\{\mathbf{H}_{j,k_1^j} e^{ijt}, \dots, \mathbf{H}_{j,k^j_{|\mathcal{W}_j|}} e^{ijt}\}$$

où $\{k_1^j, \dots, k^j_{|\mathcal{W}_j|}\} = \mathcal{W}_j$. (Remarquons que pour un terme fixé, tout au plus k ensembles $\mathcal{W}_j$ sont non vides.) D'après (1.17) nous avons

$$(3.19) \qquad D^k Q_n^+(f)\{h_1, \dots, h_k\}$$

$$= \sum_{\substack{\mathcal{W}_1 \cup \dots \cup \mathcal{W}_n = \{1,\dots,k\} \\ \mathcal{W}_i \cap \mathcal{W}_j = \emptyset}} \sum_{(\tau_1^j, \dots, \tau^j_{|\mathcal{W}_j|}) \in \mathbf{b}(|\mathcal{W}_j|)} \sum_{\substack{\text{partitions du type} \\ 1^{\tau_1^j} \dots |\mathcal{W}_j|^{\tau^j_{|\mathcal{W}_j|}}}} \prod_{j=1}^{n} \Bigg(\operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt})$$

$$\cdot \prod_{\nu=1}^{\tau_1^j + \dots + \tau^j_{|\mathcal{W}_j|}} \Bigg(\sum_{m=|\mathcal{A}_{j,\nu}|-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{ad}_{g_{\sigma(1)}} \cdot \dots \cdot \operatorname{ad}_{g_{\sigma(m)}} \mathbf{H}_{j,k_1^{j,\nu}} e^{ijt}}{(m+1)!(m - |\mathcal{A}_{j,\nu}| + 1)!} \Bigg) \Bigg)$$

où $\mathcal{A}_{j,\nu}$ est un élément de la partition de $\mathcal{W}_j$, l'indice ν étant conforme à l'ordre décrit en (1.16),

$$\mathcal{A}_{j,\nu} = \{k_1^{j,\nu}, \dots, k^{j,\nu}_{|\mathcal{A}_{j,\nu}|}\}, \qquad k_1^{j,\nu} < k_2^{j,\nu} < \dots < k^{j,\nu}_{|\mathcal{A}_{j,\nu}|},$$

et

$$g_1 = \mathbf{A}_j e^{ijt}, \dots, g_{m-|\mathbf{A}_{j,\nu}|+1} = \mathbf{A}_j e^{ijt},$$
$$g_{m-|\mathbf{A}_{j,\nu}|+2} = \mathbf{H}_{j,k_2^{j,\nu}} e^{ijt}, \dots, g_m = \mathbf{H}_{j,k^{j,\nu}_{|\mathcal{A}_{j,\nu}|}} e^{ijt}.$$

Nous allons estimer les normes de la fonction (3.19) en employant le schéma du premier paragraphe de ce chapitre. En substituant, dans (3.19), $\mathbf{A}_j e^{ijt}$ par $\mathbf{X}_{j,1}$ et $\mathbf{H}_{j,\nu} e^{ijt}$ par $\mathbf{X}_{j,\nu+1}$ nous obtenons la série $\omega_n \in \mathcal{P}_{k+1}$ telle que

$$\omega_n(f, h_1, \dots, h_k) = D^k Q_n^+(f)\{h_1, \dots, h_k\}$$

pour tout $(f, h_1, \dots, h_k) \in \mathfrak{g}^{k+1}$. Chaque terme $\eta \in \mathcal{P}_{k+1}$ de ω_n est de la forme

$$\eta((\mathbf{X}_{j,1})_{j=-\infty}^{\infty}, \dots, (\mathbf{X}_{j,k+1})_{j=-\infty}^{\infty})$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \operatorname{Exp}(\mathbf{X}_{j,1}) \prod_{\nu=1}^{\tau_j} \Bigg(\sum_{m=|\mathcal{A}_{j,\nu}|-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{ad}_{g_{\sigma(1)}} \dots \operatorname{ad}_{g_{\sigma(m)}} \mathbf{X}_{j,k_1^{j,\nu}+1}}{(m+1)!(m - |\mathcal{A}_{j,\nu}| + 1)!} \Bigg)$$

où $g_1 = \mathbf{X}_{j,1}$, $\dots$, $g_{m-|\mathcal{A}_{j,\nu}|+1} = \mathbf{X}_{j,1}$, $g_{m-|\mathcal{A}_{j,\nu}|+2} = \mathbf{X}_{j,k_2^{j,\nu}+1}$, $\dots$, $g_m = \mathbf{X}_{j,k^{j,\nu}_{|\mathcal{A}_{j,\nu}|}+1}$ et $\tau_j = \tau_1^j + \dots + \tau^j_{|\mathcal{W}_j|}$.

Nous allons estimer d'abord la norme de $|\eta^{(l)}(f, h_1, \ldots, h_k)|$. Dans ce but nous divisons la série $\eta^{(l)}$ en termes $\eta_0^{(l)} + \eta_1^{(l)} + \ldots + \eta_l^{(l)} = \eta^{(l)}$ définis de la manière suivante :

- $\eta_0^{(l)}$ se forme de la série η quand les différentiations formelles ne tombent que sur les facteurs $\operatorname{Exp}(\mathbf{X}_{j,1})$,
- $\eta_1^{(l)}$ se forme de la série η quand sur les facteurs $\operatorname{Exp}(\mathbf{X}_{j,1})$ tombent $(l-1)$ différentiations et une différentiation tombe sur un d'autres facteurs, etc. jusqu'à
- $\eta_l^{(l)}$ où les différentiations ne tombent qu'outre les facteurs $\operatorname{Exp}(\mathbf{X}_{j,1})$.

Nous profiterons du fait que les $\mathcal{W}_j$, $j = j_1, \ldots, j_r$, $r \leq k$, sont vides sauf pour un nombre fini d'indices j et que les ensembles de la partition de $\mathcal{W}_j \neq \emptyset$ sont ordonnés conformément à (1.16).

Soit $\mathcal{A}_{j,\nu}$ la partition de $\mathcal{W}_j$ et $\nu = 1, \ldots, \tau_j$. Soient $k_1, \ldots, k_p$ les plus petits éléments des $\mathcal{A}_{j,\nu}(j = j_1, \ldots, j_r; \nu = 1, \ldots, \tau_{j_i}; p = \tau_{j_1} + \ldots + \tau_{j_r})$, c'est-à-dire $k_1 = k_1^{j_1,1}, k_2 = k_1^{j_1,2}, \ldots, k_p = k_1^{j_r,\tau_{j_r}}$. Posons aussi

$$\mathcal{W}_{j_1} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_{\tau_1}\} = \{q_1, \ldots, q_{|\mathcal{W}_{j_1}|-\tau_1}\},$$
$$\mathcal{W}_{j_2} \setminus \{k_{\tau_1+1}, \ldots, k_{\tau_1+\tau_2}\} = \{q_{|\mathcal{W}_{j_1}|-\tau_1+1}, \ldots, q_{|\mathcal{W}_{j_1}|+|\mathcal{W}_{j_2}|-\tau_1-\tau_2}\}$$

etc. En vertu de (3.17) et de l'exemple 3.10, nous avons, pour $s = 0, 1, \ldots, l$, les estimations

$$\tag{3.20} \begin{aligned} &|\eta_s^{(l)}(f, h_1, \ldots, h_k)| \\ &\leq \binom{l}{s} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{(p_1,\ldots,p_{l-s})\in\mathbf{b}(l-s)} \kappa(p_1, \ldots, p_{l-s}) \\ &\quad \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} j\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{p_1} \ldots \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{l-s}\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{p_{l-s}}\Big) \exp(k \cdot C_s(\|\mathbf{A}_{j_1}\| + \ldots + \|\mathbf{A}_{j_r}\|)) \\ &\quad \times \Big(\sum_{\substack{s_1+\ldots+s_p=s \\ s_i\geq 0}} \binom{s}{s_1, \ldots, s_p} \cdot j_1^{s_1}\|\mathbf{H}_{j_1,k_1}\| \cdot \ldots \cdot j_r^{s_p}\|\mathbf{H}_{j_r,k_p}\| \\ &\quad \times \|\mathbf{H}_{j_1,q_1}\| \cdot \ldots \cdot \|\mathbf{H}_{j_r,q_{k-\tau_1-\ldots-\tau_r}}\|\Big) \end{aligned}$$

où C_s $(s = 1, \ldots, l)$ sont les constantes de l'exemple 3.10.

Nous additionnons ceux parmi les termes de la série η qui sont définis par un certain nombre r d'ensembles non vides $\mathcal{W}_j$ (où $r \leq k$) et les ensembles $\mathcal{W}_j$ sont relatifs aux mêmes partitions en ensembles $\mathcal{A}_{j,\nu}$. Autrement dit, il existe des indices $j_1, \ldots, j_r$ correspondants à un terme de η et des indices $j'_1, \ldots, j'_r$ correspondants à un autre terme de η tels que

$$\mathcal{W}_{j_1} = \mathcal{W}_{j'_1}, \ldots, \mathcal{W}_{j_1} = \mathcal{W}_{j'_r}; \quad \tau_{j_i} = \tau_{j'_i}; \quad \mathcal{A}_{j_i,\nu} = \mathcal{A}_{j'_i,\nu}.$$

Le terme de ω_n ainsi construit sera désigné par ξ. Par analogie à la définition des séries $\eta_s^{(l)}$ nous avons l'égalité $\xi^{(l)} = \xi_0^{(l)} + \ldots + \xi_l^{(l)}$ et les estimations résultant de (3.20) :

$$
\begin{aligned}
(3.21)\quad & |\xi^{(l)}(f, h_1, \ldots, h_k)| \\
& \le \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big) \cdot \Big(\sum_{(p_1,\ldots,p_{l-s})\in \mathbf{b}(l-s)} \kappa(p_1, \ldots, p_{l-s}) \\
& \times \Big(\sum_{j=1}^{n} j\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{p_1} \ldots \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{l-s}\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{p_{l-s}} \Big) \exp\Big(k \cdot C_s \cdot \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big) \\
& \times \sum_{\substack{s_1+\ldots+s_p=s \\ s_i\ge 0}} \binom{s}{s_1, \ldots, s_p} \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{s_1}\|\mathbf{H}_{j,k_1}\|\Big) \ldots \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{s_p}\|\mathbf{H}_{j,k_p}\|\Big) \\
& \times \Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{H}_{j,q_1}\|\Big) \ldots \Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{H}_{j,q_{k-\tau_1-\ldots-\tau_r}}\|\Big).
\end{aligned}
$$

La série ω_n est composée des termes ξ. Leur nombre, pour $n > k$, ne dépend pas de n et ne dépasse pas

$$
\mathbf{b}_k + \sum_{\substack{j_1+j_2=k \\ j_i\ge 1}} \mathbf{b}_{j_1} \cdot \mathbf{b}_{j_2} + \ldots + \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{k-1}=k \\ j_i\ge 1}} \mathbf{b}_{j_1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{b}_{j_{k-1}} + 1 = \mathbf{B}_k
$$

où $\mathbf{b}_j$ est le j-ième nombre de Bell.

La norme de l'évaluation $\omega_n^{(l)}(f, h_1, \ldots, h_k)$ s'estime alors par

$$
\begin{aligned}
(3.22)\quad & \mathbf{B}_k \cdot \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} \exp\Big(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big) \\
& \times \Big(\sum_{(p_1,\ldots,p_{l-s})\in \mathbf{b}(l-s)} \kappa(p_1, \ldots, p_{l-s}) \exp\Big(k \cdot C_s \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_j\|\Big) \\
& \times \Big(\sum_{\substack{s_1+\ldots+s_k=s \\ s_i\ge 0}} \binom{s}{s_1, \ldots, s_k} \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{s_1}\|\mathbf{H}_{j,1}\|\Big) \ldots \Big(\sum_{j=1}^{n} j^{s_k}\|\mathbf{H}_{j,k}\|\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

Elle est donc bornée par une constante $C_{f,h_1,\ldots,h_k,l}$ qui ne dépend pas de n. Comme en point (a), la convergence de la série

$$
\begin{aligned}
& \|D^k Q_1^+(f)\{h_1, \ldots, h_k\}\|_l + \sum_{j=2}^{\infty} \|D^k(Q_j^+ - Q_{j-1}^+)(f)\{h_1, \ldots, h_k\}\|_l \\
& \quad = \|D^k Q_1^+(f)\{h_1, \ldots, h_k\}\|_l + \sum_{j=2}^{\infty} \|D^k(Q_{j-1}^+ \cdot (\mathrm{Exp} \circ P_j - \mathbf{id}))(f)\{h_1, \ldots, h_k\}\|_l,
\end{aligned}
$$

où $P_j(f) = \mathbf{A}_j e^{ijt}$, ne dépend que de la convergence de la série

$$\sum_{j=2}^{\infty} \|D^k(\mathrm{Exp} - \mathbf{id})(\mathbf{A}_j e^{ijt})\{\mathbf{H}_{j,1}e^{ijt}, \ldots, \mathbf{H}_{j,k}e^{ijt}\}\|_l.$$

En employant (1.17) et en utilisant les méthodes de groupement des termes, décrites en cas de ω_n, nous voyons que la série ci-dessus est majorée par

$$\begin{aligned} &2\exp\Big((kC_l+1)\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{(c_1,\ldots,c_k)\in\mathbf{b}(k)}\kappa(c_1,\ldots,c_k)\\ &\quad\times\sum_{\substack{s_0+\ldots+s_{c_1+\ldots+c_k}=l\\ s_i\geq 0}}\binom{l}{s_0,\ldots,s_{c_1+\ldots+c_k}}\cdot\sum_{(d_1,\ldots,d_{s_0})\in\mathbf{b}(s_0)}\kappa(d_1,\ldots,d_{s_0})\\ &\quad\times j^l\|\mathbf{A}_j\|^{d_1+\ldots+d_{s_0}}\cdot\|\mathbf{H}_{j,1}\|\ldots\|\mathbf{H}_{j,k}\|\end{aligned}$$

(c) De la formule (3.17) et des inégalités

$$\text{(i)}\qquad \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^k\|\mathbf{A}_j\|\Big)^l \leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k\cdot l}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l-1}$$

(cf. l'inégalité de Jensen) et

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\qquad \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^k\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^l\|\mathbf{H}_j\|\Big) &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+1}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_j\|\Big)\\ &\quad+\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^{k+1}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\end{aligned}$$

(cf. 1.10) il s'ensuit que, pour $\|f\|_0 \leq C$,

$$\|Q^+(f)\|_0 \leq \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big) \leq C_0(1+\|f\|_0),$$

$$\begin{aligned}\|Q^+(f)\|_k &\leq 2^{k-1}\cdot\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\\ &\quad\times\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbf{b}(k)}\kappa(l_1,\ldots,l_k)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} j^k\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)^{l_1+\ldots+l_k-p(l_1,\ldots,l_k)}\end{aligned}$$

où $p(l_1,\ldots,l_k)$ est le nombre des $l_i \geq 1$. Pour les fonctions f telles que $\|f\|_0 < C$, chaque terme du membre droit de l'inégalité ci-dessus est $\leq C_k \cdot \|f\|_k$. L'application Q^+ satisfait donc aux estimations apprivoisées, du degré 0 avec la base 0, pour la gradation (1.9).

D'après (i) et (ii) chaque terme de (3.22) s'estime, pour tout n, par

$$\begin{aligned}\exp\Big((kC_s+1)\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big[\Big(\sum_{j=1}^{\infty}j^l\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_{j,1}\|\Big)\dots\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_{j,k}\|\Big)\\ +\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}j^l\|\mathbf{H}_{j,1}\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_{j,2}\|\Big)\dots\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_{j,k}\|\Big)\\ +\dots+\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\mathbf{H}_{j,1}\|\Big)\dots\Big(\sum_{j=1}^{\infty}j^l\|\mathbf{H}_{j,k}\|\Big)\Big],\end{aligned}$$

ce qui signifie que les dérivées suivant les directions de Q^+ vérifient des estimations apprivoisées, du degré 0 avec la base 0, pour la gradation (1.9).

(d) D'abord, nous allons montrer la convergence locale uniforme, par rapport à chaque norme (1.9), de Q_n^+ vers Q^+.

Soit $\mathcal{U}^{(l)}=\{g\in\mathfrak{g}:\|g\|_{l+2}<1\}$. Soit $f\in\mathfrak{g}$ et soit $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{A}_je^{ijt}$ son développement en série de Fourier. Chaque $g\in\mathcal{U}^{(l)}$ a un développement $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\mathbf{G}_je^{ijt}$. Nous allons montrer que, par rapport à la l-ième norme (1.9), la suite Q_n^+ converge uniformément sur $\mathcal{U}=f+\mathcal{U}^{(l)}$. Remarquons que

$$\|Q^+(f+g)-Q_n^+(f+g)\|_l=\Big\|Q_n^+(f+g)\Big(\prod_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Exp}((\mathbf{A}_j+\mathbf{G}_j)e^{ijt})-\mathbf{I}\Big)\Big\|_l.$$

D'après la proposition 1.12 le membre droit ne dépasse pas

$$\begin{aligned}C_l\Big(\|Q_n^+(f+g)\|_l\cdot\Big\|\prod_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Exp}((\mathbf{A}_j+\mathbf{G}_j)e^{ijt})-\mathbf{I}\Big\|_0\\ +\|Q_n^+(f+g)\|_0\cdot\Big\|\prod_{j=n+1}^{\infty}\mathrm{Exp}((\mathbf{A}_j+\mathbf{G}_j)e^{ijt})-\mathbf{I}\Big\|_l\Big).\end{aligned}$$

Puisque Q^+ vérifie les estimations apprivoisées il existe une constante positive $C_{f,l}$, ne dépendant que de f, telle que l'expression ci-dessus s'estime par

$$\begin{aligned}C_{f,l}(\|f\|_l+1)\Big(\Big(\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)-1\Big)\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}\|\mathbf{G}_j\|\Big)\\ +\Big(\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}\|\mathbf{G}_j\|\Big)-1\Big)+\sum_{j=n+1}^{\infty}(j^l+1)\|\mathbf{A}_j\|+\sum_{j=n+1}^{\infty}(j^l+1)\|\mathbf{G}_j\|\Big)\\ \le C'_{f,l}\Big(\Big(\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}\|\mathbf{A}_j\|\Big)-1\Big)+\Big(\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{\infty}\|\mathbf{G}_j\|\Big)-1\Big)\\ +\sum_{j=n+1}^{\infty}(j^l+1)\|\mathbf{A}_j\|+\sum_{j=n+1}^{\infty}(j^l+1)\|\mathbf{G}_j\|\Big).\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé nous pouvons choisir un n_0 tel que pour tout $n > n_0$ chaque terme de la somme ci-dessus soit inférieur à $\varepsilon/(4C'_{f,l})$, ce qui donne le résultat voulu.

Posons

$$\mathcal{U}_l = (f + \mathcal{U}^{(l)}) \times (h_1 + \mathcal{U}^{(l)}) \times \ldots \times (h_k + \mathcal{U}^{(l)}).$$

Nous allons montrer que la suite des k-ièmes dérivées suivant les directions $\{h_1, \ldots, h_k\}$ des Q_n^+ converge, en l-ième norme, vers la k-ième dérivée de Q^+. Nous avons

$$\begin{aligned}(3.23)\quad & D^k Q^+(f+g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\} - D^k Q_n^+(f+g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\} \\ &= D^k\Big(Q_n^+ \cdot \Big(\prod_{j=n+1}^{\infty} (\mathrm{Exp} \circ P_j) - \mathbf{I}\Big)\Big)(f+g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\}\end{aligned}$$

où $P_j(f) = \mathbf{A}_j e^{ijt}$. D'après (1.12) et le fait que la l-ième norme de $D^k Q_n^+(f + g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\}$ est bornée sur $\mathcal{U}_l$ (une conséquence de (3.22)) il suffit de démontrer la convergence uniforme de la suite

$$\Big\|D^k\Big(\prod_{j=n+1}^{\infty} (\mathrm{Exp} \circ P_j) - \mathbf{I}\Big)(f+g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\}\Big\|_l$$

où $k \geq 1$ est fixé (le cas où $k = 0$ a été considéré au début de la démonstration du point (d). Il est évident qu'il suffit de démontrer la convergence uniforme, vers 0, de la suite

$$\Big\|D^k\Big(\prod_{j=n+1}^{\infty} \mathrm{Exp} \circ P_j\Big)(f+g)\{h_1+g_1,\ldots,h_k+g_k\}\Big\|_l$$

pour k fixé, ce qui résulte immédiatement de l'observation que les dérivées des applications $\prod_{j=n+1}^{\infty} \mathrm{Exp} \circ P_j$ satisfont, pareillement à Q^+, à des estimations apprivoisées par rapport à la gradation (1.9).

3. La dérivée suivant la direction de Q est bijective, la famille d'inverses VQ est continue apprivoisée. La proposition 3.16 et les remarques au début du paragraphe 2 de ce chapitre montrent que la dérivée suivant la direction de Q^+ est la limite des dérivées correspondantes de Q_n^+. On remarque aisément que la dérivée suivant la direction de Q est la limite des dérivées suivant la direction des applications $Q_n^- \cdot Q^0 \cdot Q_n^+$, où

$$Q_n^-(f)(t) = \prod_{j=-n}^{-1} \mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Par conséquent, la dérivée $DQ(f)h$ est égale à

$$(3.24)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod_{j=-\infty}^{n} \mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt})(\varPhi(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}})\mathbf{H}_n e^{int}) \prod_{j=n+1}^{\infty} \mathrm{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}).$$

Rappelons que la fonction f a les coefficients de Fourier $\mathbf{A}_j$ et h a les coefficients $\mathbf{H}_j$. La fonction $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est donnée par $\Phi(z) = (e^z - 1)/z$. Remarquons que

$$\begin{aligned}(3.25)\quad & (DQ(f)h)(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \Big(\prod_{j=-\infty}^{n-1} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \Big) (\Phi(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}}) \mathbf{H}_n e^{int}) \Big(\prod_{j=n}^{\infty} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \Big) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\prod_{j=-\infty}^{n} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \Big) (\Phi(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}}) \mathbf{H}_n e^{int}) \Big(\prod_{j=n+1}^{\infty} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) \Big).\end{aligned}$$

La bijectivité de la dérivée suivant la direction h de l'application $\exp : C^\infty(S^1, \mathbb{C}) \to C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ est évidente : $D\exp(f)h = \exp(f) \cdot h$ et l'équation $D\exp(f)h = k$ a une seule solution $h = \exp(-f) \cdot k$ pour toute $f \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$. Pour $\operatorname{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{G}$ on a $D\operatorname{Exp}(f)h = \operatorname{Exp}(f) \cdot (\Phi(-\operatorname{ad}_f)h)$ et l'équation $D\operatorname{Exp}(f)h = k$ a une seule solution $h = \Phi^{-1}(-\operatorname{ad}_f)(\operatorname{Exp}(-f) \cdot h)$ pour f d'un voisinage ouvert de zéro de $\mathfrak{g}$. Clairement en ces deux cas la solution de l'équation donnée est en rapport avec la transformation $g \mapsto \operatorname{Exp}(-f) \cdot g$ pour $g \in C^\infty(S^1, \mathbb{C})$ ou $g \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. En cherchant une transformation analogue, convenable pour l'équation

$$(3.26)\qquad DQ(f)h = k$$

où $k(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_j e^{ijt}$, nous avons une difficulté à surmonter; notamment, chaque matrice $\mathbf{C}_j$ est une somme infinie de termes dépendant des matrices $(\mathbf{A}_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ et $(\mathbf{H}_j)_{j=-\infty}^{\infty}$.

Pour tout entier n et pour toute $f \in \mathfrak{g}$ nous définissons l'application $R_n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par

$$(3.27)\qquad R_n(g)(t) = \prod_{j=n}^{-\infty} \operatorname{Exp}(-\mathbf{A}_j e^{ijt}) \cdot g(t) \cdot \prod_{j=\infty}^{n+1} \operatorname{Exp}(-\mathbf{A}_j e^{ijt}).$$

Lemme 3.17. *R_n est un automorphisme linéaire lisse apprivoisé de $\mathfrak{g}$. L'application $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (f, g) \mapsto R_n(g) \in \mathfrak{g}$ est lisse apprivoisée. L'application inverse R_n^{-1} a les mêmes propriétés.*

Démonstration. La démonstration est une adaptation des raisonnements du paragraphe 2 de ce chapitre. L'application inverse à R_n est donnée par

$$R_n^{-1}(g)(t) = \prod_{j=-\infty}^{n} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}) g(t) \prod_{j=n+1}^{\infty} \operatorname{Exp}(\mathbf{A}_j e^{ijt}).$$

Le pas suivant, qui prépare la démonstration du théorème principal de ce chapitre, consiste à définir et à examiner quelques propriétés d'une application $F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. En se servant d'elle nous allons montrer que la famille VQ d'inverses par rapport à la dérivée suivant la direction DQ, étant continue, satisfait aux estimations apprivoisées. Définissons d'abord les applications $F_n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, pour

$n = 0, 1, 2, \ldots$, par

$$(F_n(f))(t) = \Big(\prod_{j=1}^{\infty} \mathrm{Exp}(2\mathbf{A}_j e^{ijt}) - \mathbf{I}\Big)^n.$$

Il résulte du début du paragraphe 2 et de la proposition 1.14 que les F_n sont lisses apprivoisées.

LEMME 3.18. *L'application F donnée par $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ est lisse apprivoisée sur $\mathcal{V} = \{f \in \mathfrak{g} : \|f\|_0 < \frac{1}{2}\ln 2\}$. Posons*

$$d(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_j e^{ijt}.$$

Le n-ième coefficient de Fourier de la fonction

$$F \cdot \mathbf{id}(f, d) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(f) \cdot d$$

est

$$\sum_{q=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-q} \sum_{\substack{(i_1^1,\ldots,i_{p_1}^1)\in\mathbf{b}(p_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ (i_1^k,\ldots,i_{p_k}^k)\in\mathbf{b}(p_k) \\ p_1+\ldots+p_k=n-q \\ p_1\geq 1,\ldots,p_k\geq 1}} \prod_{l=1}^{k} \prod_{j=1}^{p_l} \frac{(2\mathbf{A}_j)^{i_j^l}}{i_j^l!} \mathbf{D}_q. \tag{3.28}$$

Démonstration. (Remarquons que F est une analogie de la fonction $\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (e^z - 1)^n$, bien connue de l'analyse combinatoire; cf. [4].)

Soit $\omega_n \in \mathcal{P}_1$, $\omega_n((\mathbf{X}_j)_{j=-\infty}^{\infty}) = (\prod_{j=1}^{\infty} \exp(2\mathbf{X}_j) - \mathbf{1})^n$. Nous avons $\omega_m(f) = F_m(f)$ et

$$\omega_m^{(k)} = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_m=k \\ k_i\geq 0}} \binom{k}{k_1, \ldots, k_m} \prod_{\nu=1}^{m} \Big(\prod_{j=1}^{\infty} \exp(2\mathbf{X}_j) - \mathbf{1}\Big)^{(k_\nu)}.$$

Donc

$$|\omega_m(f)| \leq \Big(\exp\Big(2\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|\Big) - 1\Big)^n$$

et

$$|\omega_m^{(k)}(f)| \leq C_k m^k \Big(\exp\Big(2\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|\Big) - 1\Big)^{m-k} \Big(\exp\Big(2\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|\Big)\Big)^k$$
$$\times \Big(2\sum_{j=1}^{\infty} \|\mathbf{A}_j\|\Big)^{k-1} \Big(2\sum_{j=1}^{\infty} j^k \|\mathbf{A}_j\|\Big)$$

pour $k = 1, 2, \ldots$

Pour $f \in \mathcal{V}$ la série $\sum_{n=k+1}^{\infty} \|F_n(f)\|_k$ est donc convergente, l'application F est bien définie et satisfait à des estimations apprivoisées. En répétant les arguments du point (d) de la démonstration de la proposition 3.16 nous obtenons la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$ sur un voisinage ouvert convenable de chaque point $f \in \mathcal{V}$. Rappelons que ces voisinages sont choisis par rapport à une norme (1.9) fixée. L'application F est donc continue. La démonstration de la formule (3.28) consiste à l'observation suivante : Dans la construction du n-ième coefficient de l'expansion en série de Fourier de $F \cdot \mathbf{id}(f,d)$ prennent partie les coefficients $\mathbf{D}_q$ pour $1 \le q \le n$ et certains termes des séries $F_1(f), \ldots, F_{n-q}(f)$; notamment, les termes de $F_1(f)$ de la forme

$$\frac{(2\mathbf{A}_1)^{i_1^1}}{i_1^1!} \cdot \ldots \cdot \frac{(2\mathbf{A}_{p_1})^{i_{p_1}^1}}{i_{p_1}^1!}$$

où $i_1^1 \cdot 1 + \ldots + i_{p_1}^1 \cdot p_1 = n - q$; les termes de $F_2(f)$ de la forme

$$\frac{(2\mathbf{A}_1)^{i_1^1}}{i_1^1!} \cdot \ldots \cdot \frac{(2\mathbf{A}_{p_1})^{i_{p_1}^1}}{i_{p_1}^1!} \cdot \frac{(2\mathbf{A}_1)^{i_1^2}}{i_1^2!} \cdot \ldots \cdot \frac{(2\mathbf{A}_{p_2})^{i_{p_2}^2}}{i_{p_2}^2!}$$

où $i_1^1 \cdot 1 + \ldots + i_{p_1}^1 \cdot p_1 + i_1^2 \cdot 1 + \ldots + i_{p_2}^2 \cdot p_2 = n - q$, $p_1 + p_2 = n - q$ et $p_1 \ge 1$, $p_2 \ge 1$, etc. jusqu'au terme avec $p_1 + \ldots + p_{n-q} = n - q$ (ce qui est possible quand $p_i = 1$), c'est-à-dire, jusqu'au terme de F_{n-q} qui est égale à

$$\underbrace{(2\mathbf{A}_1) \cdot \ldots \cdot (2\mathbf{A}_1)}_{n-q \text{ facteurs}}$$

PROPOSITION 3.19. *Pour toute* $f \in \mathcal{V} = \{f \in \mathfrak{g} : \|f\|_0 < \frac{1}{2}\ln 2\}$ *l'équation* (3.26) *a une seule solution* $VQ(f)k$ *et l'application* $VQ : \mathcal{V} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *est continue et apprivoisée.*

Démonstration. Nous allons établir que

(a) la solution formelle de (3.26) existe, c'est-à-dire il est possible de calculer $\mathbf{H}_j$ en termes de $(\mathbf{A}_j)_{j=-\infty}^{\infty}$ et $(\mathbf{C}_j)_{j=-\infty}^{\infty}$,

(b) la solution du point (a) appartient à $\mathfrak{g}$, et la famille VQ est continue et apprivoisée.

Nous conservons les notations déjà introduites pour les développements de Fourier.

(a) Appliquons R_0 (cf. (3.27)) aux deux membres de (3.26) et notons $d = R_0(k)$ la fonction de $\mathfrak{g}$ à développement

$$d(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_j e^{ijt}.$$

Puisque dans $\mathfrak{g}$ on a l'identité

$$\mathrm{Exp}(w) \cdot u \cdot \mathrm{Exp}(-w) = \exp(\mathrm{ad}_w)u,$$

l'équation (3.26) prend la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\prod_{j=0}^{n}\exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_j e^{ijt}})(\varPhi(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}})\mathbf{H}_n e^{int}) + \varPhi(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{H}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\exp(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_j e^{ijt}})(\varPhi(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}})\mathbf{H}_n e^{int}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathbf{D}_n e^{int} \tag{3.29}$$

et donc se décompose en trois équations indépendantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\prod_{j=0}^{n}\exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_j e^{ijt}})(\varPhi(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}})\mathbf{H}_n e^{int}) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\mathbf{D}_n e^{int}, \tag{3.30}$$

$$\varPhi(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{H}_0 = \mathbf{D}_0, \tag{3.31}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\exp(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_j e^{ijt}})(\varPhi(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_n e^{int}})\mathbf{H}_n e^{int}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{D}_j e^{ijt}. \tag{3.32}$$

Si $\|\mathbf{A}_0\| < \frac{1}{2}$, la solution de (3.31) est donnée par

$$\mathbf{H}_0 = \varPhi^{-1}(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{D}_0. \tag{3.33}$$

En ordonnant les membres gauches de (3.30) et (3.32) par rapport au système $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ nous obtenons deux systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{D}_{-1}, \\ \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\left(\mathbf{H}_{-2} + \dfrac{[\mathbf{A}_{-1},\mathbf{H}_{-1}]}{2} - [\mathbf{A}_{-1},\mathbf{H}_{-1}]\right) = \mathbf{D}_{-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0}) \displaystyle\sum_{\substack{i_1\cdot 1+\ldots+i_{k-1}\cdot(k-1)+(i_k+l+1)\cdot k=n \\ i_1\geq 0,\ldots,i_{k-1}\geq 0, l\geq 0}} \prod_{s=1}^{k}\frac{(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_{-s}})^{i_s}}{i_s!} \\ \qquad\qquad \cdot\dfrac{(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_{-k}})^l}{(l+1)!}\mathbf{H}_{-k} = \mathbf{D}_{-n}, \end{cases} \tag{3.34}$$

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1, \\ \mathbf{H}_2 + [\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_1] - \dfrac{[\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_1]}{2} = \mathbf{D}_2, \\ \mathbf{H}_3 + [\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_2] + \dfrac{[\mathbf{A}_1,[\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_1]]}{2!} - \dfrac{[\mathbf{A}_1,[\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_1]]}{2!} + \dfrac{[\mathbf{A}_1,[\mathbf{A}_1,\mathbf{H}_1]]}{3!} = \mathbf{D}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \displaystyle\sum_{\substack{i_1\cdot 1+\ldots+i_{k-1}\cdot(k-1)+(i_k+l+1)\cdot k=n \\ i_1\geq 0,\ldots i_k\geq 0, l\geq 0}} \prod_{s=1}^{k}\frac{(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_s})^{i_s}}{i_s!}\cdot\frac{(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_k})^l}{(l+1)!}\mathbf{H}_k = \mathbf{D}_n. \end{cases} \tag{3.35}$$

Les identités

$$\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(-1)^{l-k}}{(l-k+1)!} = \frac{1}{(l+1)!}, \qquad \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{(l-k+1)!} = \frac{(-1)^l}{(l+1)!}$$

montrent que les systèmes (3.34) et (3.35) sont équivalents respectivement à

$$(3.36) \quad \begin{cases} \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{H}_{-1} = \mathbf{D}_{-1}, \\ \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\left(\mathbf{H}_{-2} - \dfrac{[\mathbf{A}_{-1}, \mathbf{H}_{-1}]}{2!}\right) = \mathbf{D}_{-2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \exp(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_0})\Bigg(\displaystyle\sum_{\substack{i_1\cdot 1+\ldots+i_{k-1}\cdot(k-1)+(i_k+1)\cdot k=n \\ i_1\geq 0,\ldots i_k\geq 0}} \frac{1}{(i_k+1)} \\ \qquad \cdot \displaystyle\prod_{l=1}^{k} \frac{(-\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_l})^{i_l}}{i_l!}\mathbf{H}_{-k}\Bigg) = \mathbf{D}_{-n}, \end{cases}$$

$$(3.37) \quad \begin{cases} \mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1, \\ \mathbf{H}_2 + \dfrac{[\mathbf{A}_1, \mathbf{H}_1]}{2!} = \mathbf{D}_2, \\ \mathbf{H}_3 + [\mathbf{A}_1, \mathbf{H}_1] + \dfrac{[\mathbf{A}_1, [\mathbf{A}_1, \mathbf{H}_1]]}{3!}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \displaystyle\sum_{\substack{i_1\cdot 1+\ldots+i_{k-1}\cdot(k-1)+(i_k+1)\cdot k=n \\ i_1\geq 0,\ldots,i_k\geq 0}} \frac{1}{(i_k+1)} \prod_{l=1}^{k} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_l})^{i_l}}{i_l!}\mathbf{H}_k = \mathbf{D}_n. \end{cases}$$

Pour les résoudre nous raisonnons par récurrence. Le système (3.37) se transforme comme suit :

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_1 = \mathbf{D}_1, \\ &\mathbf{H}_2 = \mathbf{D}_2 - \frac{[\mathbf{A}_1, \mathbf{D}_1]}{2!}, \\ &\mathbf{H}_3 = \mathbf{D}_3 - \frac{[\mathbf{A}_1, [\mathbf{A}_1, \mathbf{D}_1]]}{3!} - [\mathbf{A}_1, \mathbf{D}_2] + \frac{[\mathbf{A}_1, [\mathbf{A}_1, \mathbf{D}_1]]}{2!}. \end{aligned}$$

Supposons que pour $n \leq l$

$$(3.38) \qquad \mathbf{H}_n = \mathbf{D}_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{\substack{i_1^1\cdot 1+\ldots+i_{p_1-1}^1\cdot(p_1-1)+(i_{p_1}^1+1)\cdot p_1=n \\ i_1^2\cdot 1+\ldots+i_{p_2-1}^2\cdot(p_2-1)+(i_{p_2}^2+1)\cdot p_2=p_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i_1^k\cdot 1+\ldots+i_{p_k-1}^k\cdot(p_k-1)+(i_{p_k}^k+1)\cdot p_k=p_{k-1}}} \prod_{s=1}^{k} \frac{1}{(i_{p_s}^s+1)} \cdot \prod_{s=1}^{k}\prod_{l=1}^{p_s} \frac{(\operatorname{ad}_{\mathbf{A}_l})^{i_l^s}}{i_l^s!}\mathbf{D}_{p_k}.$$

L'équation numéro $l+1$ de (3.37) peut s'écrire

$$\mathbf{H}_{l+1} = \mathbf{D}_{l+1} - \sum_{\substack{i_1\cdot 1+\ldots+i_{p-1}\cdot(p-1)+(i_p+1)\cdot p=l+1 \\ \text{au moins un indice } i_r \text{ n'est pas } 0}} \prod_{s=1}^{p} \frac{(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_s})^{i_s}}{i_s!} \frac{1}{(i_p+1)} \mathbf{H}_p.$$

Puisque $p < l+1$, nous pouvons employer l'hypothèse de récurrence et remplacer $\mathbf{H}_p$, $p = 1, \ldots, l$, par les expressions de (3.38), ce qui donne (3.38) pour $n = l+1$. Par analogie nous avons la solution suivante du système (3.36) :

$$\mathbf{H}_{-n} = \mathbf{D}_{-n} + \sum_{\substack{i^1_1\cdot 1+\ldots+i^1_{p_1-1}\cdot(p_1-1)+(i^1_{p_1}+1)\cdot p_1=n \\ i^2_1\cdot 1+\ldots+i^2_{p_2-1}\cdot(p_2-1)+(i^2_{p_2}+1)\cdot p_2=p_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ i^k_1\cdot 1+\ldots+i^k_{p_k-1}\cdot(p_k-1)+(i^k_{p_k}+1)\cdot p_k=p_{k-1} \\ \text{dans chaque ligne au moins un indice} \neq 0}} \prod_{s=1}^{k} \frac{1}{(i^s_{p_s}+1)} \cdot \prod_{s=1}^{k}\prod_{l=1}^{p_s} \frac{(-\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_{-l}})^{i^s_l}}{i^s_l!} (\exp(\mathrm{ad}_{\mathbf{A}_0})\mathbf{D}_{-p_k}) \tag{3.39}$$

(b) Nous allons utiliser le lemme 3.18. L'application $F \cdot \mathbf{id} : \mathcal{V} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est continue et apprivoisée. Nous transformons la n-ième matrice $\mathbf{H}_n$ calculée en (3.37) "dans" la n-ième matrice de la formule (3.28). A savoir, nous faisons correspondre à $\mathbf{H}_n$ la matrice

$$\mathbf{G}_n = \mathbf{D}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{i^1_1\cdot 1+\ldots+i^1_{p_1-1}\cdot(p_1-1)+(i_{p_1}+1)\cdot p_1=n \\ i^2_1\cdot 1+\ldots+i^2_{p_2-1}\cdot(p_2-1)+(i_{p_2}+1)\cdot p_2=p_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ i^k_1\cdot 1+\ldots+i^k_{p_k-1}\cdot(p_k-1)+(i_{p_k}+1)\cdot p_k=p_{k-1} \\ \text{dans chaque ligne au moins un indice} \neq 0}} \prod_{s=1}^{k}\prod_{l=1}^{p_s} \frac{(\mathbf{A}_l)^{i^s_l}}{i^s_l!} \cdot \mathbf{D}_{p_k}. \tag{3.40}$$

Par comparaison des formules (3.38) et (3.40) il résulte que la norme d'opérateur de $\mathbf{H}_n$ est majorée par celle de $\mathbf{G}_n$ estimée absolument. Puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} F_n$ est absolument convergente, le produit $F \cdot \mathbf{id}$ est apprivoisée, la suite $(\mathbf{H}_n)_{n=1}^{\infty}$ donne une fonction de $\mathfrak{g}$ dépendant continûment de f et k, et de même pour la suite $(\mathbf{H}_{-n})_{n=1}^{\infty}$ donnée par (3.39). Alors $VQ(f)k$ est continue et apprivoisée.

Chapitre IV

1. Introduction. Les représentations des matrices comme produits de matrices appartenant aux classes fixées ont été cherchées en connexion avec des problèmes différents de l'algèbre, de l'analyse et des équations différentielles. De telles représentations sont liées à l'application exponentielle et à la structure de $GL(N,\mathbb{C})$ comme groupe de Lie. Dans ce chapitre nous décrivons quelques représentations de ce type et ces analogies pour le groupe $C^{\infty}(S^1, GL(N,\mathbb{C}))$.

Définition 4.1. Soit $\mathfrak{G}$ un groupe de Lie avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (les cas qui nous intéressent sont $\mathfrak{G} = GL(N, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{G} = C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$). Soit $\Omega \subset \mathfrak{G}$ et soit

$$(*) \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{X}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}_n$$

une décomposition en somme directe de sous-espaces linéaires fermés. Nous dirons que les éléments de Ω ont une représentation conforme à la décomposition $(*)$ si pour tout $\mathbf{A} \in \Omega$ il existe $\mathbf{B}_i \in \mathfrak{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$(**) \qquad \mathbf{A} = \exp \mathbf{B}_1 \cdot \exp \mathbf{B}_2 \cdot \ldots \cdot \exp \mathbf{B}_n.$$

Si pour tout $\mathbf{A} \in \Omega$ il existe une seule représentation de la forme $(**)$, nous dirons que Ω a la décomposition conforme à $(*)$.

2. Décompositions classiques de $GL(N, \mathbb{C})$. Nous allons décrire maintenant quelques décompositions classiques importantes et, au paragraphe 3, leurs analogies pour $C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$. Ces décompositions sont liées aux noms de Gauss, Bruhat et Iwasawa. L'existence de ces décompositions est une chose extraordinaire : même pour un groupe non abélien à deux dimensions il n'est pas vrai que chaque paire de sous-groupes donne une décomposition.

Pour la suite $\mathfrak{G} = GL(N, \mathbb{C})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$.

(a) *Décomposition polaire.* En représentant la matrice $\mathbf{B} \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ sous la forme

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B} + \mathbf{B}^*}{2} + \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}^*}{2}$$

nous avons la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ où $\mathfrak{X}_1$ est le sous-espace des matrices hérmitiennes et $\mathfrak{X}_2$ est le sous-espace des matrices antihérmitiennes. Pour $\Omega = \mathfrak{G}$ nous obtenons alors la décomposition polaire

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{U}$$

où $|\mathbf{A}| = \exp \mathbf{B}_1$, $\mathbf{U} = \exp \mathbf{B}_2$; $\mathbf{B}_i \in \mathfrak{X}_i$, $i = 1, 2$. Remarquons que $\mathfrak{G}_1 = \exp \mathfrak{X}_1$ est l'ensemble des matrices hérmitiennes positives et $\mathfrak{G}_2 = \exp \mathfrak{X}_2$ est le groupe des matrices unitaires.

(b) *La décomposition en matrices triangulaires et en matrices unitaires.* Nous prenons

$$\mathfrak{X}_1 = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) : \mathbf{A} = (a_{ij}), a_{ij} = 0 \text{ pour } i < j, a_{ii} \in \mathbb{R}\}$$

et $\mathfrak{X}_2$ comme au point (a). La décomposition qui en résulte pour $\Omega = \mathfrak{G}$ signifie que chaque matrice non singulière peut être représentée comme produit d'une matrice triangulaire à termes positifs sur la diagonale principale et à termes nuls au-dessous de la diagonale principale et d'une matrice unitaire. Remarquons encore que cette décomposition est directement liée au procédé d'orthogonalisation de Gram–Schmidt.

(c) *La décomposition de Gram.* C'est une modification de (b) obtenue en décomposant $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1' \oplus \mathfrak{X}_1''$ où

$$\mathfrak{X}_1' = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{X}_1 : a_{ii} = 0,\ i = 1, \dots, N\}$$

et $\mathfrak{X}_1''$ est composé des matrices diagonales appartenant à $\mathfrak{X}_1$. La décomposition $\mathfrak{G} = \mathcal{N} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathcal{K}$ ainsi obtenue, où $\mathcal{N} = \exp \mathfrak{X}_1'$ est un groupe nilpotent, $\mathcal{A} = \exp \mathfrak{X}_1''$ est un groupe abélien, et $\mathcal{K} = \exp \mathfrak{X}_2$ est un groupe compacte, est connue dans la théorie des groupes de Lie semisimples sous le nom de la décomposition d'Iwasawa.

(d) *La décomposition de Gauss.* Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \mathfrak{Y}_2$ où

$$\mathfrak{Y}_1 = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) : a_{ij} = 0,\ i < j\},$$
$$\mathfrak{Y}_2 = \{\mathbf{A} \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) : a_{ij} = 0,\ i \geq j\},$$

et soit

$$\eta(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^{N-1} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Alors pour $\Omega = \{\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C}) : \eta(\mathbf{A}) \neq 0\}$ nous avons la factorisation

$$\mathbf{A} = \exp \mathbf{B}_1 \cdot \exp \mathbf{B}_2, \qquad \mathbf{B}_i \in \mathfrak{Y}_i,\ i = 1, 2.$$

Notons que la décomposition ci-dessus est un cas particulier de la décomposition de Bruhat.

Soit T le groupe des matrices de permutations :

$$T = \{T_\sigma \in GL(N, \mathbb{C}) : T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)},\ \sigma \in S_n\}$$

où S_n est le n-ième groupe symétrique. Pour toute $\mathbf{A} \in GL(N, \mathbb{C})$ il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que

$$\mathbf{A} = (\exp \mathbf{B}_1) \cdot T_\sigma \cdot (\exp \mathbf{B}_2), \qquad \mathbf{B}_i \in \mathfrak{Y}_i.$$

3. Analogies des décompositions classiques pour $C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$. Premièrement, nous pouvons appliquer une décomposition particulière de $GL(N, \mathbb{C})$ à une fonction $f \in C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$ en chaque point séparément. De telles décompositions sont lisses (c'est-à-dire, les facteurs dépendent lissement de la matrice décomposée), donc les fonctions ainsi obtenues donnent une décomposition $f(t) = f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_k(t)$ où $f_i \in C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$ pour $i = 1, \dots, k$. Ces décompositions reflètent la structure de $C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$ comme "produit lisse" des groupes $GL(N, \mathbb{C})$ indexés par S^1. Elles sont, d'un certain point de vue, peu intéressantes.

Les analogies plus intéressantes (découvertes dernièrement) viennent de l'observation que la structure du groupe $C^\infty(S^1, GL(N, \mathbb{C}))$ ressemble à celle de $GL(N, \mathbb{C})$ traité comme la complexification de $U(N)$. Cette ressemblance fait part de la théorie d'algèbres affines de Kac–Moody (cf. [5]). En décrivant les analogies successives des décompositions (a)–(d) nous allons signaler seulement la correspondance entre les éléments de la structure du groupe $GL(N,\mathbb{C})$ et du groupe $C^\infty(S^1, GL(N,\mathbb{C}))$.

(A) *La décomposition polaire*. En développant $f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ en série de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n e^{int} \tag{4.1}$$

on notera que l'analogie de l'involution $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^*$ dans l'algèbre $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ est l'involution $f \mapsto f^\circ$ où $f^\circ(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}^*_{-n} e^{int}$. Nous avons donc $f^\circ(t) = (f(t))^*$ et l'espace $\mathfrak{X}_2$ de la décomposition (a) correspond à l'espace $\mathfrak{Y}_2 = \{f : f^\circ(t) = -f(t)\}$, c'est-à-dire, à la sous-algèbre de $C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{u}(N)$. De même, l'espace $\mathfrak{X}_1$ de (a) correspond à $\mathfrak{Y}_1 = \{f : f^*(t) = f(t)\}$, c'est-à-dire, au sous-espace des fonctions à valeurs opérateurs hérmitiens. La décomposition ainsi obtenue est donc banale, elle est déterminée par la décomposition (a).

(B) *Une analogie de la décomposition* (b). Une analogie non triviale des matrices triangulaires à termes nuls au-dessous (au-dessus) de la diagonale principale dans l'algèbre $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ à coefficients d'indices non positifs (non négatifs) nuls. L'analogie de $\mathfrak{X}_1$ sera

$$\mathfrak{Y}_1 = \{f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) : \mathbf{A}_n = 0 \text{ pour } n < 0,\ \mathbf{A}_0 \in \mathfrak{X}_1\}$$

où $\mathfrak{X}_1$ vient de la décomposition (b) et $\mathfrak{Y}_2$ est comme au point (A).

(B′) L'algèbre $C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$ se décompose de la manière suivante :

$$\mathfrak{Y}_1 = \{f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) : \mathbf{A}_n = 0 \text{ pour } n < 0\},$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \Big\{f \in C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) : f^\circ = -f;\ f(1) = 0, \text{ i.e. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_n(f) = 0\Big\}.$$

Nous obtenons aussi $f = f_1 \cdot f_2$ où $f_1(1) = \mathbf{I}$, $f_1(z) \in U(N)$ pour $z \in S^1$, et $\mathbf{A}_n(f_2) = 0$ pour $n = -1, -2, \ldots$

(C) *La décomposition de Gram*. Pareillement à $GL(N,\mathbb{C})$ nous décomposons (B) en posant $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_1' \oplus \mathfrak{Y}_1''$ où

$$\mathfrak{Y}_1' = \{f \in \mathfrak{Y}_1 : \text{ les termes diagonaux de } \mathbf{A}_0(f) \text{ sont nuls}\},$$
$$\mathfrak{Y}_1'' = \{f \in \mathfrak{Y}_1 : \mathbf{A}_0(f) \text{ est une matrice diagonale}\}.$$

(C′) $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_1' \oplus \mathfrak{Y}_1''$ où

$$\mathfrak{Y}_1' = \{f \in \mathfrak{Y}_1 : \mathbf{A}_n(f) = 0,\ n = 0, -1, -2, \ldots\},$$
$$\mathfrak{Y}_1'' = \{f \in \mathfrak{Y}_1 : \mathbf{A}_n(f) = 0 \text{ pour } n \neq 0\}.$$

(D) *La décomposition de Gauss–Birkhoff*. Cette décomposition correspond à la décomposition de $\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})) = \mathfrak{Z}_1 \oplus \mathfrak{Z}_2$ où

$$\mathfrak{Z}_1 = \{f \in \mathfrak{g} : \mathbf{A}_n(f) = 0 \text{ pour } n \geq 0\},$$
$$\mathfrak{Z}_2 = \{f \in \mathfrak{g} : \mathbf{A}_n(f) = 0 \text{ pour } n < 0\}.$$

Soit $\mathfrak{G}_1$ le sous-groupe de $C^\infty(S^1, GL(N,\mathbb{C}))$ engendré par $\operatorname{Exp}\mathfrak{Z}_1$, et $\mathfrak{G}_2$ celui engendré par $\operatorname{Exp}\mathfrak{Z}_2$. En ce cas toute $f \in C^\infty(S^1, GL(N,\mathbb{C}))$ a la décomposition

$$f(t) = f_1(t) \cdot \operatorname{diag}(e^{im_1t}, \ldots, e^{im_Nt}) \cdot f_2(t)$$

où $f_k \in \mathfrak{G}_k$, et les m_j sont des entiers.

Soit $\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ une décomposition apprivoisée de l'algèbre $\mathfrak{g} = C^\infty(M, \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C}))$, où M est une varieté compacte de classe C^∞ et $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, et soient comme plus haut $\mathfrak{G}_1$ le sous-groupe de $\mathfrak{G}$ engendré par $\operatorname{Exp}\mathfrak{X}_1$, et $\mathfrak{G}_2$ le sous-groupe engendré par $\operatorname{Exp}\mathfrak{X}_2$. Le groupe $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ opère sur $\mathfrak{G}$ ($(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}_2^{-1}$). Du théorème 2.1 nous avons

Corollaire 4.2. *L'orbite de l'unité sous l'action de $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ sur $\mathfrak{G}$ est ouverte.*

Corollaire 4.3. *L'ensemble Ω des éléments de $\mathfrak{G}$ qui ont une décomposition $\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2$, où $\mathbf{g}_k \in \mathfrak{G}_k$, $k = 1, 2$, est ouvert.*

En terminant nous allons formuler quelques questions et nous allons signaler certaines possibilités de la continuation de la recherche.

1. La démonstration du fait que l'application Q définie les coordonnées locales sur $C^\infty(S^1, GL(N,\mathbb{C}))$ est liée à la tentative de la construction d'une base multiplicative (en ce cas une base de bloques). Est-ce que l'existence des coordonées du deuxième espèce, qui n'auraient pas eu le caractère de bloque, conduit, pareillement au cas classique, au théorème qui dit que chaque homomorphisme continu des groupes de Lie est lisse? Il semble que la réponse est, généralement, négative : l'homomorphisme doit satisfaire à des conditions supplémentaires.

2. Est-ce que l'hypothèse de la décomposition en sous-algèbres est nécessaire dans le théorème 2.1? En allant plus loin, ne suffit-il pas de décomposer $\mathfrak{g}$ en sous-espaces linéaires fermés comme dans le cas classique?

3. L'existence des décompositions des groupes classiques comme des groupes des nœuds, et généralement des groupes des courants, est un fait intéressant. Est-ce qu'il est possible de donner les critères de l'existence de telles décompositions? Dans ce travail nous signalons les conditions de l'existence des décompositions locales au voisinage de l'unité du groupe (ils peuvent être traités comme les conditions nécessaires); ils ne mènent pas nécessairement aux décompositions globales.

4. Les espaces considérés sont nucléaires. Les méthodes liées à ces espaces ont intervenu seulement dans la démonstration que l'application Q est lisse. Est-ce que le fait que les espaces considérés sont nucléaires a l'influence à la réponse aux questions 1 et 2?

Ouvrages cités

[1] G. D. Birkhoff, *A theorem on matrices of analytic functions*, in: George David Birkhoff, Collected Mathematical Papers. Vol. I, Amer. Math. Soc., 1950, 240–251.

[2] H. Boseck, G. Czichowski and K.-P. Rudolph, *Analysis on Topological Groups—General Lie Theory*, Teubner, Leipzig, 1981.

[3] R. S. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982), 65–222.

[4] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.

[5] A. Pressley and G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1986.