POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY

KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ,
ZBIGNIEW SEMADENI, WANDA SZMIELEW

CXLIV

J.-N. BELGY

Fonctions arithmétiques

Biblioteka Uniwersytecka
w Warszawie
1000822929

WARSZAWA 1977
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S. 7133

PRINTED IN POLAND

Copyright ©
by PWN – Polish Scientific Publishers,
Warszawa 1977

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5

Chapitre I. L'algèbre A

§ 1. Définition 7
§ 2. Inversibles . . 8
§ 3. Représentations de A 8
§ 4. Topologies sur A . 9
§ 5. Support et support premier 11
§ 6. Logarithme et exponentielle 12
§ 7. Fonctions particulières 13
§ 8. Factorialité 17

Chapitre II. Les algèbres A_a

§ 1. Introduction 19
§ 2. L'algèbre A_e 22
§ 3. Multiplicatives et factorisables 22
§ 4. Endomorphisme déterminé par une factorisable 23
§ 5. Norme spectrale 23
§ 6. Idéaux maximaux 23
§ 7. Spectre . 25
§ 8. L'espace de support de A_e 26
§ 9. La frontière de Šilov . . 27
§ 10. Le groupe G_e des inversibles 28
§ 11. Diviseurs de zéro topologiques 30
§ 12. Inégalités 33
§ 13. Multiplicatives . 34
§ 14. Fonctions factorisables 35
§ 15. Exponentielle et logarithme . 38
§ 16. Fonctions additives et complètement additives 40
§ 17. Zéros . . 41
§ 18. Extension aux idéaux 46

Chapitre III. Les algèbres $\hat{A}_e$, S et E

§ 1. L'algèbre $\hat{A}_e$ . . 50
§ 2. L'algèbre S des fonctions convergentes 53
§ 3. Fonctions entrières 57

Chapitre IV. Fonctions analytiques

§ 1. Introduction . 59
§ 2. Connexion sur un ensemble 61
§ 3. Fonctions analytiques 63

Appendice I. Autres bases de A_e 68

Appendice II. Problèmes 71

Notations et Index terminologique 73

Bibliographie 74

Introduction

L'origine de ce travail se trouve dans un cours fait à Clermont-Ferrand par Monsieur Pierre Samuel qui n'a cessé de m'encourager et de me soutenir dans des moments difficiles: qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

Le but de ce travail est d'aborder l'étude des fonctions arithmétiques dans la mesure où celles-ci peuvent s'interpréter comme séries formelles en une infinité dénombrable d'indéterminées: le premier chapitre est consacré à des propriétés de caractère algébrique, le second étudie dans le cadre de l'analyse fonctionnelle le comportement local d'une fonction d'une infinité de variables complexes, le troisième a trait à des questions de caractère global, enfin, le quatrième propose une définition de fonction analytique d'une infinité de variables complexes.

De façon plus précise:

Chapitre I: les fonctions arithmétiques, applications de N^* dans C, forment avec le produit de convolution, un anneau qui est isomorphe à l'anneau $C[[X_i]]$, $i \in N$, des séries formelles. On énonce quelques propriétés algébriques et topologiques de cet anneau. Une place particulière est faite aux fonctions multiplicatives et aux fonctions additives dont on connaît l'importance en théorie des nombres. On termine sur des questions de factorialité.

Chapitre II: si a est une fonction complètement multiplicative, l'ensemble des fonctions arithmétiques f (toujours muni du produit de convolution) telles que $\sum |f(x)\,a(x)| < +\infty$ est une algèbre de Banach A_a. On étudie pour celle-ci les inversibles, l'espace de support, la frontière de Šilov, ce qui permet de considérer les fonctions $\hat{f}(a)$ qui généralisent les séries de Dirichlet. On apporte quelques précisions sur les diviseurs de zéro topologiques ainsi que sur les fonctions multiplicatives et les fonctions additives.

La partie, sans doute la plus intéressante, concerne les zéros avec l'agréable résultat que la nullité de $\hat{f}(a)$ sur un ouvert (et même sur un b-ouvert) entraîne $f \quad 0$. Les notions de zéro et de domaine d'inversibilité s'étendent naturellement aux idéaux.

Ces fonctions ont, en définitive, la plupart des bonnes propriétés qu'on est en droit d'attendre de fonctions de variables complexes.

Chapitre III: on caractérise d'abord les éléments de $\hat{A}_a$ complétée de l'algèbre A_a quand on munit cette dernière de la norme spectrale. On énonce ensuite quelques résultats au sujet de l'algèbre limite inductive des algèbres A_a qui est aussi l'algèbre $C\{\{X_i\}\}$, $i \in N$, des séries convergentes. C'est, en particulier, un anneau factoriel. On montre enfin que les fonctions entières d'une infinité de variables complexes ne sont en réalité fonctions que d'un nombre fini de variables, ce qui diminue ici leur intérêt.

Chapitre IV: ce qui précède ayant montré de bonnes propriétés locales et globales des fonctions arithmétiques, on propose une définition (parmi d'autres peut-être plus adaptées) de fonction analytique d'une infinité de variables complexes, de façon à donner un sens au prolongement analytique. Il était naturel de prendre les polydisques de C^N pour ensembles d'unicité et il a fallu, dans ces conditions, affaiblir la notion de connexité en celle de Δ-connexité.

Enfin de nombreux problèmes se posent de façon naturelle et nous en avons énoncé quelques-uns en appendice.

Beaucoup de résultats, surtout dans les chapitres I et II sont bien connus (les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie) mais souvent exprimés de diverses manières, avec diverses notations, en divers endroits: leurs démonstrations, souvent très simples, ont été récrites en se plaçant de notre point de vue.

Clermont-Ferrand — Novembre 1964

Chapitre I

L'algèbre A

§ 1. Définition. On appelle *fonction arithmétique* un élément de l'ensemble A des applications de N^* (entiers > 0) dans C (corps des complexes) muni de l'addition définie par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ pour tout entier $x > 0$ et f et $g \in A$, du produit externe défini par $(af)(x) = af(x)$ pour $a \in C$, $f \in A$, $x \in N^*$ et du produit de convolution défini par $(f*g)(x) = \sum f(d)g(x/d)$ où d parcourt les diviseurs > 0 de l'entier x. Ce produit s'écrit aussi $\sum f(d)g(\delta)$ somme étendue à tous les couples (d, δ) d'entiers positifs tels que $d\delta = x$ ([3]).

PROPOSITION 1. *A est une algèbre sur C, commutative, à élément unité et sans diviseur de zéro.*

L'unité est la fonction u définie par $u(x) = 1$ si $x = 1$ et $u(x) = 0$ si $x > 1$.

Si $f \in A$ on appellera *ordre de f* noté $\omega(f)$ le plus petit entier $x > 0$ tel que $f(x) \neq 0$ si f n'est pas la fonction nulle 0 et on pose $\omega(0) = +\infty$. On a les propriétés suivantes ([4]):

$$\begin{aligned} \omega(af) &= \omega(f) \quad \text{si le complexe } a \text{ est non nul,} \\ \omega(f+g) &\geqslant \operatorname{Min}\{\omega(f), \omega(g)\}, \\ \omega(f*g) &= \omega(f)\omega(g). \end{aligned}$$

Les deux premières propriétés sont immédiates. Pour vérifier la troisième, posons $n = \omega(f)\omega(g)$. On a

$$(f*g)(n) = f\big(\omega(f)\big)g\big(\omega(g)\big) + \sum f(d)g(\delta) = f\big(\omega(f)\big)g\big(\omega(g)\big)$$

puisque chaque terme de la somme est tel que l'un au moins des diviseurs d ou δ est inférieur à l'ordre de la fonction correspondante et donc est nul. Le fait que C est intègre, entraîne que $f\big(\omega(f)\big)g\big(\omega(g)\big)$ est non nul si f et g sont non nulles et donc que A est sans diviseur de zéro.

Remarque. C s'injecte canoniquement dans A par l'application $a \to a \cdot u$ et le produit af peut s'écrire $au*f$.

§ 2. Inversibles.

PROPOSITION 2 ([4]). *Pour que $f \in A$ soit inversible il faut et il suffit que son „terme constant" $f(1)$ soit $\neq 0$. L'ensemble des éléments non inversibles est un idéal $\mathfrak{m}$ et $A/\mathfrak{m}$ est isomorphe à C.*

En effet, s'il existe $g \in A$ tel que $f*g = u$ on a $f(1)g(1) = 1$ donc $f(1) \neq 0$. Réciproquement, en supposant $f(1) = 1$ ce qui est possible, on peut déterminer g tel que $f*g = u$. On calcule les valeurs $g(x)$ de proche en proche: on a $g(1) = 1$ et si $x > 1$ de l'égalité $0 = \sum f(d)g(\delta)$ on tire $f(1)g(x) = g(x) = -\sum f(d)g(\delta)$ où $d\delta = x$ et $\delta < x$ ce qui permet de calculer $g(x)$ connaissant $g(y)$ où $y < x$. La fonction $g = f^{*-1}$ ainsi définie est unique. Le fait que A soit un anneau local de corps des restes isomorphe à C est immédiat.

EXEMPLE. Soit μ la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(x) = 0$ si x a un facteur carré et $\mu(x) = \pm 1$ suivant que x est produit d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers distincts. Alors μ est inversible et son inverse est la fonction e définie par $e(x) = 1$ pour tout x: on a $\mu*e = u$. De l'égalité $F = e*f$ on tire $\mu*F = f$: c'est la formule d'inversion de Möbius (démontrée par Mertens [11]).

Remarque 1. Si B est l'anneau des fonctions arithmétiques à valeurs non plus dans C mais dans Z les idéaux maximaux $\mathfrak{m}_p$ de B sont formés des f telles que $f(1) \in (p)$ idéal premier de Z et l'on a $B/\mathfrak{m}_p \simeq Z/(p)$.

En effet $\mathfrak{m}_p$ est de façon triviale un idéal. Il est maximal car si $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_p$ et en est distinct, il existe $f \in \mathfrak{m}$ telle que $f(1)$ ne soit pas multiple de p. La fonction pu appartient à $\mathfrak{m}_p$ et d'après Bezout il existe deux entiers a et b tels que $(a \cdot pu + b \cdot f)(1) = 1$ et la fonction $ap \cdot u + b \cdot f$ qui est dans $\mathfrak{m}$ est inversible ($g(1) = \pm 1$ est la condition nécessaire pour que $g \in B$ soit inversible). Donc $\mathfrak{m} = B$ et $\mathfrak{m}_p$ est maximal.

Les idéaux m_p sont les seuls idéaux maximaux: si $\mathfrak{m}$ est maximal soit $f = a \cdot u + g$ où $\omega(g) > 1$ un élément de $\mathfrak{m}$ où a entier > 0 est choisi le plus petit possible: il existe sinon $\mathfrak{m}$ serait contenu dans tout $\mathfrak{m}_p$ donc non maximal. Alors si $f' = a' \cdot u + g' \in \mathfrak{m}$ on a a' multiple de a: s'il n'en était pas ainsi on pourrait trouver un entier k convenable tel que $0 < a' - ka < a$ et tel que $(a' - ka) \cdot u + g''$ appartienne à $\mathfrak{m}$ (où ici $\omega(g'') > 1$) ce qui est contradictoire. Enfin l'isomorphisme de $B/\mathfrak{m}_p$ avec $Z/(p)$ est immédiat.

Remarque 2. Ni A, ni B ne sont noetheriens.

§ 3. Représentations de A ([4]).

PROPOSITION 3. *L'algèbre A est isomorphe*

1° *à l'algèbre large sur C du demi-groupe N^*;*

2° *à l'algèbre sur C des séries formelles en une infinité dénombrable d'indéterminées;*

3° *à une sous-algèbre sur C de l'algèbre sur C des matrices à une infinité de lignes et colonnes.*

Démonstration. 1° L'algèbre large est l'ensemble des expressions $\sum a_n T^n$ où $n \in N^*$ et $a_n \in C$ où le produit est défini par $T^n T^m = T^{nm}$. Soit $u_n \in A$ définie par $u_n(n) = 1$ et $u_n(x) = 0$ si $x \neq n$. On a $u_1 = u$ et $f \in A$ s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) u_n(x).$$

Si l'on remarque ensuite que $u_n * u_m = u_{nm}$ il suffit d'écrire T^n au lieu de u_n pour constater l'isomorphisme indiqué.

2° L'anneau des séries formelles en une infinité dénombrable d'indéterminées X_i est l'ensemble des expressions

$$\sum_{(i)} a_{(i)} X_{i_1}^{n_1} \dots X_{i_s}^{n_s}, \qquad a_{(i)} \in C, \ n_k \in N,$$

somme infinie de monômes ne comprenant eux-mêmes qu'un nombre fini d'indéterminées. On associe à l'indéterminée X_i la fonction u_{p_i} où p_i est le nombre premier de rang i ($p_1 = 2, p_2 = 3$, etc.) et au monôme $X_{i_1}^{n_1} \dots X_{i_s}^{n_s}$ la fonction u_q où $q = p_{i_1}^{n_1} \dots p_{i_s}^{n_s}$. Enfin, à $a_{(1)}$ on associe $a \cdot u$. Le fait que Z soit factoriel entraîne que cet homomorphisme est bijectif. Il n'est bien entendu pas unique et dépend, en particulier, de l'ordre dans lequel ont été indexées les indéterminées X_i (qu'on indexera souvent par l'ensemble des nombres premiers plutôt que par N).

3° On considère les matrices $M = (M_{ij})$ où i (ligne) $= 1, 2, \dots$ et j (colonne) $= 1, 2, \dots$ A la fonction $f \in A$ on associe la matrice $M = (M_{ij})$ où $M_{ij} = f(i/j)$ quand j divise i et $M_{ij} = 0$ quand i/j, n'est pas un entier. On obtient ainsi des matrices triangulaires, à la somme de deux fonctions la somme des deux matrices associées et au produit $f * g$ de deux fonctions le produit habituel (ligne par colonne) des deux matrices associées.

§ 4. Topologies sur A. Il existe un certain nombre de topologies naturelles intéressantes sur A.

(a) *ω-topologie*: en posant $\varphi(f) = 1/\omega(f)$ on voit que φ est une valeur absolue valuative qui fait de A un espace ultramétrique. C'est la topologie linéaire engendrée par les idéaux $\omega_n = \{f \mid \omega(f) \geqslant n\}$, $n = 1, 2, \dots$, A ainsi topologisé est un espace métrique complet: si f_n est une suite de Cauchy dans A, pour tout $\varepsilon = 1/j$ on a $\omega(f_p - f_q) > j$ pourvu que p et q soient $> j_0$ ce qui revient à dire que $f_p(x) = f_q(x)$ pour $x \leqslant j_0$ et par conséquent f_n tend vers une fonction limite f définie par $f(x) = \lim_n f_n(x)$;

(b) *t-topologie*: Soit $t(x)$ la fonction de l'entier $x > 0$ définie par

$$t(x) = t(p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}) = a_1 + \quad + a_s, \qquad t(0) = 0.$$

On a $t(xy) = t(x)+t(y)$ quels que soient x et y. Si $f \in A$, on définit $t(f)$ comme le plus petit $t(x)$ tel $f(x) \neq 0$ et $t(0) = +\infty$. Si f considérée comme série formelle s'écrit $f = f_0+f_1+ \quad +f_n+ \dots$ où f_n est la partie homogène de degré n de f, alors $t(f)$ est le plus petit entier $k \geqslant 0$ tel que $f_k \neq 0$. La fonction $t(f)$ est une valuation et A muni de la distance associée est un espace métrique complet. Cette topologie est aussi définie par les idéaux $t_n = \{f \mid t(f) \geqslant n\}$, $n = 0, 1, \dots$ Pour tout n on a $t_n \subset \omega_n$ mais t_n ne contient aucun ω_n si $n > 1$ ce qui montre que la t-topologie est strictement plus fine que la ω-topologie;

(c) *Ces topologies sont des cas particuliers de topologies définies de la façon suivante*: Soit $a(x)$ une fonction positive de l'entier $x \geqslant 1$ telle que si d divise x alors $a(d) \leqslant a(x)$. Pour tout $f \in A$ définit $t(f) = \operatorname{Inf} t(x)$ où x tel que $f(x) \neq 0$. On pose $t(0) = +\infty$. Soit $a_n = \{f \mid a(f) \geqslant n\}$, $n = 0, 1, \dots$ C'est un sous-groupe additif de A car $a(f+g) \geqslant \operatorname{Min}\{a(f), a(g)\}$. D'autre part, si $f \in a_n$ et $g \in A$, on a $a(f*g) \geqslant n$ sinon il existerait x tel que $f*g(x) \neq 0$ et $a(x) < n$. Or $f*g(x) = \sum f(d)g(x/d)$ montre qu'il existerait d divisant x et tel que $f(d) \neq 0$ et comme $a(d) \leqslant a(x) < n$, on aurait $a(f) < n$, ce qui est contradictoire. Ainsi a_n est un idéal. On a $a_n \supset a_{n+1}$ et les idéaux a_n définissent une topologie linéaire sur A, séparée et qui est discrète si $a(x)$ est bornée. Exemples: Si $a = e$ la e-topologie est la topologie discrète. Si $a(x) = x$ la x-topologie est la ω-topologie. Si $a = N$ (où $N(x)$ = nombre de diviseurs de x) alors la N-topologie est identique à la t-topologie en vertu de l'inégalité $t(x) \leqslant N(x) \leqslant 2^{t(x)}$. Si φ est la fonction d'Euler la φ-topologie est la ω-topologie;

(d) $\mathfrak{m}$-*topologie*: c'est la topologie $\mathfrak{m}$-adique engendrée par les puissances de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Elle est plus fine que la t-topologie donc plus fine que la ω-topologie;

(e) *u-topologie*: engendrée par les idéaux principaux (u_n) qui forment une base de filtre car $(u_n) \cap (u_m) \supset (u_n)(u_m) = (u_{nm})$; elle est strictement plus fine que la ω-topologie.

Conséquences. Les propriétés topologiques suivantes sont des propriétés ω-topologiques. Le groupe G des inversibles de A est ouvert et ferme dans A et la topologie de A est compatible avec la structure de groupe de G qui est ainsi un groupe métrique complet.

Si $f \in A$ est inversible f peut s'écrire $a(u-g)$ où $a \in C$ et $\omega(g) > 1$ d'où une expression de l'inverse f^{*-1} sous la forme

$$f^{*-1} = a^{-1}(u+g+g^{*2}+ \dots +g^{*n}+ \dots)$$

avec $g^{*n} = g*g* \dots *g$, n fois, la série étant convergente. On peut encore écrire

$$f^{*-1} = a^{-1}(u+g)* \dots *(u+g^{*2^n})* \dots$$

produit infini convergent.

Autre conséquence: On peut munir le groupe G des inversibles de A d'une structure d'espace vectoriel sur R en posant, si $f = u + g \in A$ et $\varrho \in R$

$$f^{*\varrho} = u + \varrho g + \frac{\varrho(\varrho-1)}{2!} g^{*2} + \dots \qquad (\omega(g) > 1)$$

et si $f = af'$ où $f'(1) = 1$ en posant $f^{*\varrho} = a^\varrho f'^{*\varrho}$. Le produit de convolution joue alors le rôle de l'addition.

§ 5. Support et support premier.

DÉFINITION 1. Si $f \in A$ on appelle *support* de f et on note $s(f)$ l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$. On a $s(0) = \emptyset$.

DÉFINITION 2. Si $f \in A$ on appelle *support premier* de f et on note $s_1(f)$ l'ensemble des nombres premiers diviseurs d'un élément au moins de $s(f)$. Le support premier de f en tant que série formelle s'identifie à l'ensemble des indéterminées par rapport auxquelles f est non constante.

Propriétés. On a $s(f+g) \subset [s(f) \cup s(g)]$, $s(af) = s(f)$ si a est une constante non nulle, mais on n'a pas d'inclusion semblable pour le produit: on peut avoir $s(f*g) \cap [s(f) \cup s(g)] = \emptyset$ (exemple: $f = u_n$, $g = u_m$ avec $m > n > 1$). On a $s_1(f) = \emptyset$ si et seulement si $f = a \cdot u$ où $a \in C$. Ensuite $s_1(f*g) \subset s_1(f) \cap s_1(g)$ et il y a égalité si $f \neq 0$ ou si $g \neq 0$ et si $s_1(f)\, s_1(g) = \emptyset$ (on considère par exemple $p \in s_1(g)$ et $x = \omega(f)y$ où y est le plus petit multiple de p tel que $g(y) \neq 0$). On a encore $s_1(f^{*n}) = s_1(f)$ si $n \in N^*$ et si $s_1(f^{*-1}) = s_1(f)$ si f est inversible.

Ces dernières propriétés montrent que l'ensemble des fonctions à support premier fini, soit Φ_1, est une sous-algèbre locale de A qui vérifie l'implication suivante: si $0 \neq f \in \Phi_1$ et si $g \notin \Phi_1$, alors, $f*g \notin \Phi_1$. En effet, si $p \in s_1(g)$ et $p \notin s_1(f)$ et si p est le plus petit multiple de p contenu dans $s(g)$ on a $f*g(\omega(f)px) = f(\omega(f))g(px) \neq 0$. Toutefois, $f*g \in \Phi_1$ n'implique pas f ou $g \in \Phi_1$ (ex.: $g = f^{*-1}$).

PROPOSITION 4. *Φ_1 est algébriquement fermé dans A.*

En effet, soit $f \in A$ vérifiant l'équation suivante où les $g_i \in \Phi_1$; g_n et $g_0 \neq 0$

$$g_n * f^{*n} + g_{n-1} * f^{*n-1} + \dots + g_1 * f + g_0 = 0.$$

On peut supposer que le degré n ne peut pas être abaissé. Soit alors K la partie de l'ensemble des nombres premiers réunion des $s_1(g_i)$ et soit A_K l'anneau des séries formelles en les indéterminées X_k où $k \in K$. Pour tout i la trace de g_i sur A_K est g_i et la trace de f est $f_K \in \Phi_1$. On obtient donc l'équation

$$g_n * f_K^{*n} + \dots + g_1 * f_K + g_0 = 0$$

d'où par soustraction

$$(f - f_K) * (g_n * f^{*n-1} + g'_{n-1} * f^{*n-2} + \dots + g'_1 * f + g'_0) = 0.$$

Les fonctions g'_j, polynômes en les g_i et f_K sont à support premier fini donc f ne saurait satisfaire à l'équation obtenue sans être égale à f_K qui est à support premier fini ou vérifier une équation de degré $n-1$ qui est $< n$, ce dernier cas étant impossible par hypothèse.

COROLLAIRE. *Si les g_i sont des constantes complexes, K est vide et f est aussi de la forme $a \cdot u$ avec $a \in C$.*

Remarque 1. On pourrait espérer que toute fonction f est le produit d'une inversible par une fonction de Φ_1: il n'en est rien comme le montre l'exemple de la fonction $f = u_2 + u_3 + \quad + u_{p_i} + \quad$ où p_i est le nombre premier de rang i.

Remarque 2. Les fonctions à support fini — ou fonctions finies plus simplement — forment un sous-anneau Φ de Φ_1 qui s'identifie au sous-anneau des „polynômes" de l'algèbre large de N^*. Les seules inversibles de Φ sont les constantes, Φ n'est pas algébriquement fermé dans A et Φ est dense dans A (ω-topologie).

§ 6. Logarithme et exponentielle ([9], [10]). Si $f \in G$ et si $f = u + g$ où $\omega(g) > 1$ on définit $L(f)$ par

$$L(f) = g - \frac{g^{*2}}{2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{g^{*n}}{n} +$$

série convergente dans A. Si $f = af'$ où $a \in C$ est non nul et $f'(1) = 1$ on pose $L(f) = \mathrm{Log}(a) \cdot u + L(f')$ où $\mathrm{Log}(a)$ est la détermination principale du logarithme de a. La fonction L définit ainsi une application du groupe multiplicatif G dans A. Elle est injective. Restreinte au sous-groupe G_1 des f telles que $f(1) = 1$ la fonction L est un isomorphisme algébrique et topologique de G_1 sur l'idéal $\mathfrak{m}$ en tant que groupe additif.

EXEMPLE. $L(\mu)$ (μ = fonction de Möbius) est définie par $L(\mu)(1) = 0$, $L(\mu)(x) = 0$ si x n'est pas une puissance d'un nombre premier et $L(\mu)(p^n) = -1/n$ pour tout nombre premier p et tout entier $n > 0$.

Fonction exponentielle: si $f \in A$ on pose, quand $\omega(f) > 1$

$$\exp(f) = u + f + \ldots + \frac{f^{*n}}{n!} + \ldots$$

et quand $f = a \cdot u + g$ on pose $\exp(f) = e^a \cdot \exp(g)$. On a ainsi un homomorphisme de A sur G, non injectif, surjectif car $\exp\big(L(f)\big) = f$ et continu car

$$\omega\big(\exp(f) - \exp(g)\big) \geqslant \omega(f - g).$$

COROLLAIRE. *Si $\bar{f}$ est la conjuguée de f $\big(\bar{f}(x) = \overline{f(x)}\big)$ alors les solutions de $f * \bar{f} = u$ sont $f = \exp(ig)$ où g réelle.*

Remarque. On pourrait aussi définir les fonctions $\cos(f)$, $\sin(f)$, etc.

§ 7. Fonctions particulières.

DÉFINITION 1. Une fonction $f \in A$ est dite *multiplicative* si $f(xy) = f(x)f(y)$ quand $(x, y) = 1$ et si $f(1) = 1$.

EXEMPLES. Les fonctions φ d'Euler, $(-1)^t$ de Liouville, μ de Möbius, x^n, e, $u + u_p$ sont multiplicatives.

Si f_1 et f_2 sont multiplicatives $f_1 f_2$, $|f_1|$ sont multiplicatives, on a le résultat bien connu suivant:

PROPOSITION 5. *L'ensemble M des multiplicatives est un sous-groupe de G dans lequel il est fermé.*

PROPOSITION 6. *Si $m \in M$ alors m se décompose de façon unique en un produit (fini ou infini) convergent (pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A) de multiplicatives m_p à support premier ne comportant au plus qu'un élément p* ([6]).

On définit $m_p \in M$ où p est premier par $m_p(p^n) = m(p^n)$ et $m_p(x) = 0$ si x n'est pas une puissance de p. Le produit infini $m_2 * m_3 * \ldots * m_p * \ldots$ est convergent car $\omega(m_2 * \ldots * m_p - m_2 * \quad * m_{p+q}) > p$ et tend vers m car $m(x) = (m_2 * \ldots * m_p)(x)$ si $x < p$. Ainsi m s'écrit $\prod_p \big(1 + m(p)X_p + \ldots \ldots + m(p^n)X_p^n + \ldots\big)$ (p premier).

EXEMPLE.

$$e = \prod_p (1 + X_p + \ldots + X_p^n + \ldots) \quad \text{et} \quad \mu = \prod_p (1 - X_p),$$

$$x = \prod_p (1 + pX_p + \ldots + p^n X_p^n + \ldots) = \prod_p (1 - pX_p)^{-1}.$$

De même si φ est la fonction d'Euler

$$\varphi = x * \mu = \prod_p \big(1 + (p-1)X_p + \quad + (p^n - p^{n-1})X_p^n + \ldots\big).$$

COROLLAIRE 1. *Si $m \in M$ on a $L(m) = L(m_2) + \ldots + L(m_p) + \ldots$ La fonction $L(m)$ est nulle pour $x = 1$ et pour tout x qui n'est pas une puissance d'un nombre premier. Réciproquement, une telle fonction peut s'écrire sous la forme $\sum_p L(m_p)$ où $s_1(m_p) \subset \{p\}$ et c'est le logarithme d'une multiplicative.*

EXEMPLE. La fonction $\omega(x) = 1$ si x est premier, 0 si x n'est pas premier est le logarithme de $\Omega(x)$ telle que

$$\Omega(x) = \Omega(p_1^{a_1} \ldots p_s^{a_s}) = \frac{1}{a_1!} \ldots \frac{1}{a_s!} \quad \text{et} \quad \Omega(1) = 1.$$

COROLLAIRE 2. *Si $m \in M$ et si $\gamma \in R$ alors, $f^{*\gamma} \in M$.*

Remarque. Si m, m_1 et m_2 sont trois multiplicatives telles que $s_1(m_1) \cap s_1(m_2) = \emptyset$, alors, $m(m_1 * m_2) = mm_1 * mm_2$. $(mf(x) = m(x)f(x))$.

DÉFINITION 2. Une fonction $a \in A$ est dite *factorisable* si $a(xy) = a(x)\,a(y)$ quels que soient x et y, et si $a(1) = 1$. Une factorisable est multiplicative. Elle est complètement déterminée par les valeurs qu'elle prend pour $x = p$ premier. a s'écrit en tant que série formelle

$$\prod_p (1 + a(p)X_p + \ldots + a(p)^n X_p^n + \ldots) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - a(p)X_p}\right).$$

Les fonctions e, x, $(-1)^t = \prod_p (1 - X_p + X_p^2 - X_p^3 \ldots)$ sont factorisables. Le produit de deux factorisables n'est pas en général une factorisable: $e * e = N(x)$ nombre de diviseurs de x.

THÉORÈME 1. *Pour que a soit factorisable, il faut et il suffit que l'application $f \to af$ soit un endomorphisme de A* ([1]).

On vérifie trivialement que $a(f*g) = af*ag$ si f et $g \in A$. Réciproquement, si a est un endomorphisme, alors $a(u_n * u_m) = au_n * au_m$ donc $a(nm) = a(n)\,a(m)$. Une factorisable a est dite *jamais nulle* si $a(x) \neq 0$ pour tout x.

COROLLAIRE 1. *Pour que la factorisable a soit jamais nulle, il faut et il suffit que l'application $f \to af$ soit un automorphisme de A.*

COROLLAIRE 2. *Si a est factorisable, l'inverse a^{*-1} de a est μa (μ fonction de Möbius).*

En effet, d'après le théorème $a * \mu a = a(e*\mu) = au = u$.

EXEMPLE. L'inverse de $(-1)^t$ est $(-1)^t\mu = |\mu|$ c'est-à-dire $(-1)^t * |\mu| = u$, ce qui est trivial si l'on écrit $\prod_p (1 - X_p + X_p^2 - \ldots) \prod_p (1 + X_p) = 1$ (à noter $|\mu| = \mu * 2^{t_1}$ où $t_1(x)$ est le nombre de diviseurs premiers distincts de x car $1 + X = (1 - X)(1 + 2X + 2X^2 + \ldots)$).

COROLLAIRE 3. *Pour que a soit factorisable, il faut et il suffit que a soit multiplicative et que $a^{*-1} = \mu a$.*

Si $a \in M$ et $a * \mu a = u$, alors pour tout p premier et n entier > 0 on a $0 = a(p^n) - a(p^{n-1})\,a(p)$ d'où $a(p^n) = a(p)^n$.

COROLLAIRE 4. *$f \in A$ est inversible si et seulement si af est inversible quelle que soit a factorisable. En outre $(af)^{*-1} = af^{*-1}$.*

COROLLAIRE 5. *$L(af) = aL(f)$ quand $L(f)$ existe et $\exp(af) = a\exp(f)$.*

Remarque 1. On sait que si $f \in A$, on peut l'écrire comme matrice à une infinité de lignes et colonnes. Si a est une factorisable jamais nulle, l'automorphisme $f \to af$ peut s'écrire matriciellement $M \to PMP^{-1}$ où M est la matrice associée à f et P est la matrice diagonale d'éléments $P_{ii} = a(i)$.

PROPOSITION 7. *Le sous-groupe F^* engendré dans G par l'ensemble F des factorisables est dense dans M.*

Soit $m_p \in M$, $s_1(m_p) = \{p\}$. Alors, on peut déterminer des factorisables $a_p^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, q$, telles que leur produit f_p vérifie $\omega(m_p - f_p) > q$. Autre-

ment dit, il existe des complexes x_i tels que pour $n = 1, 2, \ldots$ on ait $m_p(p^n) = (u - x_1 u_p) * \ldots * (u - x_q u_p)(p^n)$. En développant, on obtient les fonctions symétriques élémentaires des variables x_i. Il suffit alors de prendre pour x_i les racines de l'équation

$$z^q - a_1 z^{q-1} + \ldots + (-1)^q a_q^{\frac{1}{q}} = 0 \quad \text{où} \quad a_i = m_p(p^i).$$

Ceci étant fait pour tout p premier $\leqslant q$, on a l'inégalité si $m = m_2 * m_3 * \ldots$ $\ldots * m_{q'} * m'$ avec $q' \leqslant q$:

$$(1) \qquad \omega\left(m - \prod_p f_p^{*-1}\right) = \omega\left(m - \prod_p f_p^{*-1} * m' + \prod_p f_p^{*-1} * (m' - u)\right)$$
$$\geqslant \operatorname{Min} \omega(m_p - f_p^{*-1}) \geqslant q.$$

DÉFINITION 3. Une fonction $a \in A$ est dite *additive* si $a(xy) = a(x) + a(y)$ quand $(x, y) = 1$ et *complètement additive* (en abrégé c.a.) si $a(xy) = a(x) + a(y)$ quels que soient x et y.

Une fonction c.a. est additive. Les fonctions additives forment un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{m}$ contenant lui-même, comme sous-espace l'ensemble des complètement additives.

EXEMPLES. Les fonctions $t(x)$, $\log(x)$ sont c.a.

PROPOSITION 8. *Pour que $a \in A$ soit complètement additive, il faut et il suffit que l'application $f \to af$ soit une dérivation de l'algèbre A* [1].

C'est immédiat: $a(x)(f*g)(x) = a(x) \sum f(d) g(\delta) = a(d) + a(\delta) \sum f(d) g(\delta) = a(d) \sum f(d) g(\delta) + a(\delta) \sum f(d) g(\delta) = \sum a(d) f(d) g(\delta) + \sum f(d) a(\delta) g(\delta) = (af * g)(x) + (f * ag)(x)$ avec chaque fois $d\delta = x$.

Réciproquement, si $a \to af$ est une dérivation, on a en particulier $a \cdot (u_n * u_m) = a u_n * u_m + u_n * a u_m$ d'où $a(nm) = a(n) + a(m)$.

COROLLAIRE. *On a les formules:* $a * \mu = -e * a\mu$, $a\mu = -\mu^{*2} * a$, $\mu t = -t * \mu^{*2}$ $a \cdot a^{*2} = 2a^2 * a$, *si f est inversible* $af = -f^{*2} * af^{*-1}$, *etc.*

N.B. L'expression $[f, g] = af * g - f * ag$ vérifie l'identité de Jacobi si $a(p) = \pm 1$.

PROPOSITION 9. *Pour a soit additive, il faut et il suffit que $a = e * L(m)$ où m est multiplicative. De plus, on a $a = e * a \cdot L(e)$.*

Soit $y = p^n x$ avec $n > 0$ et $x > 1$. Il suffit de montrer que $\mu * a(y) = 0$ ce qui prouvera que $\mu * a$ est nulle si y n'est pas une puissance d'un nombre premier et est, par conséquent, la logarithme d'une multiplicative. On a $a * \mu(p^n x) = -e * a\mu(p^n x) = -\sum a\mu(d) - \sum a\mu(pd) - \sum a\mu(p^2 d) - \ldots$ en groupant les diviseurs de y suivant la puissance de p qui les divise, d parcourant les diviseurs de x (non multiple de p). Les sommes sont nulles à partir du troisième $\sum$ et il reste $-\sum a\mu(d) - \sum a(pd)\mu(pd) = -\sum a(d)\mu(d) - \sum a(d)\mu(pd) - a(p) \sum \mu(pd)$. Le premier et le troisième $\sum$ sont de signes opposés et le second est nul, si l'on remarque que $\mu(pd) = -\mu(d)$. Réci-

proquement, si $g(x) = 0$ pour tout x non puissance d'un nombre premier et si $g(1) = 0$, alors $e*g$ est additive. On voit que $L(m)(p^n) = a(p)$ de sorte que $L(m)$ s'écrit $a\cdot g$ où $g(p^n) = 1/n$ et $g(x) = 0$ si $x \neq p^n$.

En tant que série formelle g s'écrit

$$\sum_p \left(X_p + \frac{1}{2} X_p^2 + \quad + \frac{1}{n} X_p^n + \ldots\right)$$

$$= \sum_p -\mathrm{Log}(1-X_p) = -\mathrm{Log} \prod_p (1-X_p) = L(e)$$

(puisque e étant définie par $e(x) = 1\ \forall x$ s'écrit $\prod_p (1+X_p+\ldots+X_p^n+\ldots)$).

Remarque. A une fonction c.a. ne correspond pas nécessairement une factorisable.

Exemples. $a = e*L(e)$ est définie par $a(p^n) = 1+1/2+\ldots+1/n$. Si $a = t$, la multiplicative associée est $\exp\left(u_p*(u-u_p)^{*-1}\right)$. Si $a = \mathrm{Log}\,x$, on a $\mathrm{Log}\,x = e*\Lambda$ (où $\Lambda(p^n) = 1$ et $\Lambda(x) = 0$ si $x \neq p^n$). La multiplicative associée est

$$\prod_p \exp\left\{\mathrm{Log}\,p\cdot\frac{X_p}{1-X_p}\right\} = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(-1)}(-\log p)\,X_p^k$$

(où $L_k^{(-1)}$ = polynôme de Laguerre) (donc $\exp(\Lambda)(p^n) = L_n^{(-1)}(-\log p)$) qui s'écrit encore [en faisant $X \to X/(2X-1)$]

$$\prod_p \sum_{k=0} L_k^{(-1)}(\mathrm{Log}\,p)\left(\frac{X_p}{2X_p-1}\right)^k$$

Corollaire 1. *Pour que a soit c.a., il faut et suffit que $\mu*a(p^n) = \mu*a(p)$, p premier, n entier > 0 et $\mu*a(x) = 0$ si $x \neq p^n$.*

Corollaire 2. *Une fonction c.a. s'écrit sous la forme*

$$a = e*\sum_p a(p)\,u_p*(u-u_p)^{*-1} = \sum_p a(p)\,e*u_p*\varepsilon_p$$

ou encore

$$a = \prod_p \frac{1}{1-X_p} \sum_p \frac{a(p)X_p}{1-X_p}$$

où ε_p est la factorisable qui vaut 1 pour $x = p^n$ et 0 ailleurs.

Remarque. Considérons $f \in A$ comme série formelle et écrivons $\partial f/\partial p_i$ au lieu de $\partial f/\partial X_i$ et plus généralement

$$\frac{\partial^{l(n)} f}{\partial n} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial^{a_1+\ldots+a_s}(f)}{(\partial X_1)^{a_1}\ldots(\partial X_s)^{a_s}} \quad \text{avec} \quad n = p_1^{a_1}\ldots p_s^{a_s}.$$

Si a_p est la fonction c.a. définie par $a_p(p^n) = n$ et 0 ailleurs, et si a est c.a. alors, $af = \sum a(p) a_p u_p * \frac{\partial f}{\partial p}$.

Exemple. La fonction Ω définie précédemment (p. 13) est une fonction multiplicative qui s'écrit en tant que série formelle

$$\prod_p \left(1 + X_p + \ldots + \frac{1}{n!} X_p^n + \ldots\right) = \prod_p e^{X_p}.$$

Si α et β sont deux factorisables, on a $\Omega\alpha * \Omega\beta = \Omega\gamma$ où γ est la factorisable définie par $\gamma(p) = \alpha(p) + \beta(p)$ pour tout premier p. En particulier, l'inverse de Ω est $\Omega(-1)^t$ (où $t(x)$ est le nombre total de diviseurs premiers de x). De plus, si on définit un nouveau produit de convolution par

$$(f *' g)(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \sum_{d|x} \Omega(d) f(d) \Omega(x/d) g(x/d)$$

alors, le produit de deux factorisables est factorisable.

Pour toute fonction a complètement additive, on a l'égalité: $a\Omega = \Omega * a\omega$.

A la fonction Ω on associe la fonction C de deux variables entières définie par

$$C(x, y) = C(y, x) = \frac{\Omega(x)\Omega(y)}{\Omega(xy)}.$$

Elle est multiplicative par rapport à x pour tout y fixé et $C(x, y) = 1$ si $(x, y) = 1$.

La fonction C vérifie les identités suivantes:

$$\sum_{xy=s} C(x, y) = 2^{t(s)}$$

pour tout n, $\sum_{xy=s} (-1)^{t(x)} C(n, x) C(nx, y) = u(s)$ et, en particulier,

$$\sum_{xy=s} (-1)^{t(x)} C(x, y) = u(s).$$

§ 8. Factorialité. Il a été démontré, le théorème suivant ([4], [5])

Théorème. *Soit B un anneau tel que pour tout n entier $\geqslant 0$ l'anneau $B_n = B[[X_1, \ldots, X_n]]$ soit factoriel, $B_0 = B$. Alors l'anneau $B_\infty = B[[X_1, \ldots, X_n, \ldots]]$ en une infinité dénombrable d'indéterminées est, lui aussi, factoriel.*

Indiquons le principe de la démonstration. On munit B_∞ de la ω-topologie et on appelle e_n la factorisable définie $e_n(p_i) = 1$, si p_i est le nombre premier de rang $i \leqslant n$ et $e_n(p_j) = 0$ si $j > n$. On établit le lemme:

LEMME. *Si f non nulle $\in B_\infty$ est irréductible, alors il existe $N > 0$ tel que fe_n soit irréductible dans B_n pour $n \geqslant N$.*

Si n est grand, $fe_n \neq 0$. On suppose qu'il existe une infinité de n tels que $fe_{n_i} = g_{n_i} * h_{n_i}$ où $i = 1, 2, \ldots$ et $n_i < n_j$ si $i < j$ avec g_{n_i} premier dans B_{n_i} et h_{n_i} non inversible. D'où $\omega(g_{n_i}) > 1$ et $\omega(h_{n_i}) > 1$. On peut supposer g_{n_i} et h_{n_i} dans B_{n_i}. Le nombre $\pi(n_i)$ d'éléments irréductibles dans la décomposition de f_{n_i} est une fonction décroissante de i qui atteint son minimum $\geqslant 2$ si n_i est grand et on peut alors supposer que $g_{n_i} = g_{n_{i+1}} e_{n_i}$ et $h_{n_i} = h_{n_{i+1}} e_{n_i}$. Dans ces conditions, les suites g_{n_i} et h_{n_i} tendent vers g et $h \in B_\infty$ et l'on a $f = g * h$. Maintenant, si on considère deux décompositions de f en éléments irréductibles f_j et f'_k (en nombre fini, comme on peut le voir en considérant $\omega(f)$), alors il existe une infinité de n tels que, par exemple, $f_1 e_n$ soit associé à $f'_1 e_n$ d'où f_1 associé à f'_1.

Remarque. La réciproque du lemme est vraie.

COROLLAIRE 1. *A est factoriel.*

COROLLAIRE 2. *Le sous-anneau Φ_1 des fonctions à support premier fini est factoriel.*

Soit $f \in \Phi_1$ et soit $K = s_1(f)$. Dans l'anneau A_K des séries formelles en X_k ($k \in K$) qui est factoriel, f se décompose en produit d'éléments irréductibles dans A_K ($f \neq 0$). Ces éléments sont encore premiers dans A: Si f_i est un tel élément $= g_i * h_i$ où g_i et h_i ne sont pas inversibles, alors, la trace de f_i sur A_K (obtenue en remplaçant les indéterminées $X_j, j \notin K$ par 0) qui est f_i est le produit des traces de g_i et h_i et aucun de ces derniers éléments n'est inversible, ce qui n'est pas possible si f_i est premier. Donc, si on a deux décompositions de f en facteurs premiers, ceux-ci sont asssociés dans A. Ils le sont aussi dans Φ_1 car si, par exemple, $f_1 = g_1 * h_1$, alors f_1 ne saurait appartenir à Φ_1 si $h_1 \notin \Phi_1$.

Chapitre II

Les algèbres A_a

On étudie, du point de vue de l'analyse fonctionnelle en particulier, certaines sous-algèbres de A.

Rappelons que le produit de Dirichlet de deux séries à termes complexes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ est la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ où $c_n = \sum_{d\delta=n}^{\infty} a_d b_\delta$. En notation fonctionnelle $a_n = f(n)$, $b_n = g(n)$ et $c_n = (f*g)(n)$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$

Si les deux séries convergent absolument, la série produit de Dirichlet converge absolument et sa somme est le produit des sommes:

$$\sum_{x=1}^{\infty} (f*g)(x) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x) \sum_{x=1}^{\infty} g(x).$$

Rappelons aussi le théorème de Mertens pour le produit de Dirichlet: si $\sum f$ converge absolument et si $\sum g$ converge, alors $\sum f*g$ converge et sa somme est le produit des sommes. Toutefois, si $\sum f$ et $\sum g$ convergent, non absolument, alors $\sum f*g$ peut diverger.

§ 1. Introduction.

DÉFINITION. a étant une factorisable réelle et positive ($a(x) > 0$ pour tout x), on dira que $f \in A$ est *a-convergente*, si la série $\sum_{x=1}^{\infty} |f(x)|\, a(x)$ est convergente. On notera A_a l'ensemble des fonctions a-convergentes.

THÉORÈME 2. *A_a est une algèbre de Banach pour la norme* $\|f\|_a = \sum_{x=1}^{\infty} |f(x)|\, a(x)$ ([8]).

C'est une algèbre normée en vertu de l'inégalité $\|f*g\|_a \leqslant \|f\|_a \|g\|_a$ car pour tout x on a $|f*g(x)| \leqslant (|f|*|g|)(x)$.

Elle est complète, car elle est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'espace l_1.

COROLLAIRE. Si $A_{a_1}, \ldots, A_{a_n}$ *sont n algèbres de Banach correspondant aux factorisables $a_1, \ldots, a_n$, alors, $A_{a_1} \cap \ldots \cap A_{a_n}$ est aussi une algèbre de Banach pour la norme $\|f\| = \operatorname{Sup}_i \|f\|_{a_1}$ ou pour $\|f\| = \sum_i \|f\|_{a_i}$ équivalente. On*

remarque que cette algèbre contient l'algèbre A_a où a est définie par $a(p) = \operatorname{Sup}_i a_i(p)$ (p premier) et est contenue dans l'algèbre $A_{a'}$ avec $a'(p) = \operatorname{Inf}_i a_i(p)$.

Remarque 1. La topologie induite sur A_a par celle de A (ω-topologie) n'est évidemment pas comparable à la topologie de la norme.

Remarque 2. On vérifie trivialement l'équivalence suivante

$$f \in A_a \Leftrightarrow \operatorname{Sup}_x |fa| * e(x) < +\infty$$

et dans ces conditions:

$$\|f\|_a = \operatorname{Sup}_x |fa| * e(x) = \lim_x |fa| * e(x!)$$

par exemple.

De façon générale, si $\Psi \in A$, $\Psi(x) > 0$ quel que soit x, alors, l'ensemble des f telles que $|f| * \Psi(x) \leqslant k\Psi(x)$ quel que soit x pour une constante k convenable est une algèbre normée par $\|f\|_\Psi = \operatorname{Sup}_x \{|f| * \Psi(x)\}/\Psi(x)$ et l'ensemble des f telles que $|f * \Psi(x)| \leqslant k\Psi(x)$ est un module sur cette algèbre.

N.B.: Si Φ tel que $\Phi > 0$, $\Phi(xy) \leqslant \Phi(x)\Phi(y)$, alors $\{f \mid \sum |f|(x)\Phi(x) < +\infty\}$ est une algèbre (pour le produit $*$ de convolution).

Proposition 9. *Deux algèbres A_a et A_β sont isomorphes et isométriques.*

En effet, si $f \in A_a$ on lui fait correspondre $B(f) = \frac{a}{\beta} f$ où $\frac{a}{\beta}$ est la factorisable définie par $\frac{a}{\beta}(p) = \frac{a(p)}{\beta(p)}$. Cela définit bien un élément de A_β car $\sum \left| \frac{a}{\beta} f(x) \right| \beta(x) = \sum |af(x)|$ qui converge et B est un isomorphisme surjectif de A_a sur A_β. Enfin, l'isométrie est évidente car

$$\|B(f) - B(g)\|_\beta = \sum \left| \frac{a}{\beta} f - \frac{a}{\beta} g \right| \beta(x) = \sum |f - g|\, a(x) = \|f - g\|_a.$$

Remarque. Elles sont aussi isométriques pour la ω-topologie induite car $\omega\big(B(f) - B(g)\big) = \omega(f - g)$.

Proposition 10. *Pour que $A_a \subset A_\beta$ il faut et il suffit que $a \geqslant \beta$.*

On écrit $a \geqslant \beta$ pour $a(x) \geqslant \beta(x)$ pour tout x ($\Leftrightarrow a(p) \geqslant \beta(p)$ pour tout premier p).

La suffisance est triviale. Pour la nécessité, supposons que a ne soit pas $\geqslant \beta$. Alors, il existe p premier tel que $a(p) < \beta(p)$. Soit f égale à 0 si $x \neq p^n$ et égale à $\beta(p)^{-n}$ si $x = p^n$. Elle appartient à A_a puisque $\sum |fa|$ est une série géométrique de raison < 1 et n'appartient pas à A_a puisque le terme général de $\sum |f\beta|$ ne tend pas vers 0 et ceci contredit l'hypothèse $A_a \subset A_\beta$.

COROLLAIRE. $A_a = A_\beta$ *si et seulement si* $a = \beta$. *Il y a ainsi correspondance biunivoque entre les algèbres* A_a *et les factorisables positives* (> 0).

PROPOSITION 11. *Soit* $A_a \subset A_\beta$ *alors*:

(1) A_a *n'est pas ouvert dans* A_β *et y est partout dense.*

(2) *Sur* A_a *la topologie induite par celle de* A_β *est strictement moins fine que la topologie de la norme* $\| \ \|_a$.

A_a est dense puisque l'ensemble Φ des fonctions finies est dense. A_a n'est pas ouvert dans A_β car tout voisinage de zéro rencontre le complémentaire de A_a dans A_β. Soit V un voisinage de 0, il contient la boule $V_\varepsilon = \{f \mid \|f\|_\beta < \varepsilon\}$. Soit $a = a(p)/\beta(p) > 1$ et f définie par $f(p^n) = \varepsilon(p^k - 1)/\beta(p^n)p^{kn}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ avec $k > 0$ tel que $p^k < a$ et $f(x) = 0$ si $x \neq p^n$. On a $f \in V_\varepsilon$ car $\|f\|_\beta = \varepsilon$ et $f \notin A_a$ de façon évidente.

On démontre de même la partie 2.

Remarque. A_a étant donnée, par exemple A_e ($e(x) = 1 \ \forall x$), on peut se demander si l'intersection des algèbres A_σ qui contiennent strictement A_e est égale à A_e. La réponse est négative: Considérons la fonction égale à 1 sur son support et dont celui-ci est l'ensemble $p_1, p_1^2 p_2, p_1^3 p_2^2 p_3^1, \ldots$ $\ldots, p_1^n p_2^{n-1} \ldots p_{n-1}^2 p_n^1, \ldots$ (p_i nombre premier de rang i). Cette fonction n'appartient pas à A_e, bien entendu, mais appartient à tout A_σ qui contient A_e car alors, il existe un premier p tel que $|\sigma(p)| < 1$ et la série $\sum |f\sigma|$ est majorée à partir d'un certain rang par une série géométrique de raison < 1.

Cet exemple montre aussi en prenant f avec le même support mais égale à $1/n^2$ par exemple, que la réunion des algèbres A_a contenues strictement dans A_e n'est pas égale à A_e.

On peut préciser la nature d'un élément de $\bigcap_a A_a - A_e$ où les A_a contiennent strictement A_e.

Un tel élément a son support premier égal à l'ensemble de tous les nombres premiers: S'il n'en était pas ainsi, il existerait $p \notin s_1(f)$ et puisque $\sum |f\alpha_0|$ converge avec $\alpha_0 = 1$ partout sauf en p, on aurait $\sum |fe|$ convergente.

Deuxième propriété: *Quel que soit* x, *il existe un multiple de* x *dans le support de* f.

Soit $x = p_1^{n_1} \ldots p_s^{n_s}$ la décomposition de x en facteurs premiers. La fonction f peut s'écrire $f = f_0 + u_{p_1} * f_1 + \quad + u_{p_1}^{*n_1} * f_n$ avec $f_0, \ldots, f_{n-1}$ de supports premiers ne contenant pas p_1. Ces n fonctions appartiennent à $\bigcap_a A_a$ puisque chaque $\sum |f_i \alpha| \leqslant \sum |f\alpha|$ donc à A_e puisque $s_1(f_i) \neq P$ ensemble des premiers, $i = 1, \ldots, n-1$. Les u_q, où $q = p_i^{k_i}$ sont aussi dans A_e donc $f_n \notin A_e$. Cette fonction f_n n'est donc pas nulle et on peut la décomposer à son tour suivant les puissances de u_{p_2} et ainsi de suite jusqu'à u_{p_s}. En regroupant alors les différents termes obtenus, on voit que f se décompose sous la forme $f = f' + u_x * f''$ avec $f'' \neq 0$, ce qui prouve notre assertion.

§ 2. L'algèbre A_e. C'est l_1 en tant qu'espace vectoriel et $\|f\|_e$ qu'on notera $\|f\|$ est égale à $\operatorname{Sup}_x |f| * e(x) = \lim_x |f| * e(x!)$. Elle est normée aussi par $\|f\|_a$ où $|a| \leqslant e$ mais n'est pas complète si $|a| \neq e$ (complétée $= \hat{A}_a$ — Chap. III).

Remarque 1. Elle n'est pas normée par $\sup_x |f(x)|$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe f et $g \in A_e$ telles que $\operatorname{Sup}|f(x)| \cdot \operatorname{Sup}|g(x)| / \operatorname{Sup}|f*g(x)| < \varepsilon$, il suffit de prendre $f = g = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Dans ces conditions, $\operatorname{Sup}|f(x)| = \operatorname{Sup}|g(x)| = 1$ et $\operatorname{Sup}|f*g(x)| \geqslant \operatorname{Sup} N(x)$ pour $x \leqslant n$ quantité non bornée quand n croît.

Remarque 2. $f \in A_e$ s'écrit comme somme de la série normalement convergente $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) u_n(x)$, les u_n constituant une base de Schauder de A_e.

§ 3. Multiplicatives et factorisables. On a le résultat suivant bien connu:

Proposition 12. *Pour que m, multiplicative, appartienne à A_e il faut et il suffit que la série double $\sum_p \sum_{n \geqslant 1} m(p^n)$ converge. De plus, dans ces conditions, $\sum m(x) = \prod_p \big(1 + m(p) + \quad + m(p^n) + \ldots\big)$, le produit infini étant convergent* ([7]).

Puisque m est multiplicative $\sum m(x) = \prod \big(1 + m(p) + \ldots + m(p^n) + \ldots\big)$; il suffit de développer et la convergence de ce produit est équivalente à celle de la série double $\sum_p \sum_{n \geqslant 1} m(p^n)$. Le produit infini est alors convergent et égal à $\sum m(x)$ car

$$\Big|\sum m(x) - \prod_{i=1}^{n} \big(1 + m(p_i) + \ldots\big)\Big| \leqslant 2 \sum_{1+p_n}^{\infty} |m(x)| < \varepsilon$$

si n est grand. Notons que l'égalité du produit et de la somme n'est que la conséquence du fait qu'une multiplicative se décompose en produit de multiplicatives à support premier ne comportant qu'un élément.

Corollaire. *Pour que σ factorisable appartienne à A_e, il faut et il suffit que $\sum_p |\sigma(p)| < +\infty$ et que $|\sigma(p)| < 1$ pour tout p premier. En outre, si $\sigma \in A_e$ elle y est inversible* ([2]).

Nécessité évidente. Réciproquement, si les conditions sont vérifiées, alors la série $\sum |\sigma(p)| / \big(1 - |\sigma(p)|\big)$ converge et ceci équivaut à la convergence de $\sum_p \sum_{n \geqslant 1} |\sigma(p^n)|$ c'est-à-dire à celle de $\sum |\sigma(x)|$ puisque σ est multiplicative. Enfin, puisque l'inverse de σ est $\mu\sigma$, on a $\sum |\mu\sigma| \leqslant \sum |\sigma| < +\infty$. Notons alors que

$$\sum \sigma(x) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - \sigma(p)}\right) \quad \text{et} \quad \sum \mu\sigma = \prod \big(1 - \sigma(p)\big).$$

PROPOSITION 13. *$f \in A_e$ si et seulement si* $\operatorname{Sup} \sum |f\sigma| < +\infty$ *où les σ sont des factorisables de A_e à support premier fini.*

On a $\|f\| = \operatorname{Sup}_\sigma \|f\sigma\|$. Soit $a = \operatorname{Sup} \|f\sigma\|$ et supposons que $\sum_1^k |f(x)| > a$ pour un k assez grand. Soit $t_0 = \operatorname{Max} t(x)$, $x = 1, 2, \ldots, k$. Si l'on prend alors σ définie par $\sigma(p) = 0$ si $p > k$ et $\sigma(p) = 1 - \varepsilon$ quand $p \leqslant k$, $0 < \varepsilon < 1$, on a pour tout $x = 1, \ldots, k$, l'inégalité $\sigma(x) \geqslant (1-\varepsilon)^{t_0} \geqslant 1 - \varepsilon t_0$ et par suite, $\sum |f\sigma(x)| > (1 - \varepsilon t_0) \sum_1^k |f(x)| > a$ si ε est assez petit. La fonction σ appartient bien à A_e, donc $\|f\| \leqslant \operatorname{Sup} \|f\sigma\|$ et comme l'on a trivialement l'inégalité contraire, on en déduit $\|f\| = \operatorname{Sup} \|f\sigma\|$.

COROLLAIRE. *La même démonstration prouve que si f appartient à l'intersection des algèbres A_a qui contiennent A_e et si $t(x)$ est fini quand $x \in s(f)$, alors $f \in A_e$, mais c'est aussi une conséquence du fait qu'il existe un multiple de $x \in s(f)$ qui est aussi dans $s(f)$ si $f \in \bigcap A_a - A_e$. Cela montre aussi que si $f \in \bigcap A_a - A_e$, alors* $\operatorname{Sup} \|f\|_a = +\infty$.

§ 4. Endomorphisme déterminé par une factorisable. L'application $f \to f\sigma$ de A_e dans A_e est un endomorphisme si et seulement si $|\sigma| \leqslant e$ ($|\sigma(x)| \leqslant e(x) = 1$ pour tout x), c'est un automorphisme si et seulement si $|\sigma| = e$. Trivialement $\|f\sigma\| \leqslant \|f\|$ si $|\sigma| \leqslant e$ et $\|f\sigma\| = \|f\|$ si $|\sigma| = e$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal, $\sigma\mathfrak{a}$ est un idéal si $|\sigma| = e$.

§ 5. Norme spectrale. A_e étant une algèbre de Banach, la limite de $\|f^{*n}\|^{1/n}$ quand n augmente indéfiniment existe: c'est le *rayon spectral* ou *norme spectrale* $\nu(f)$. On a $\nu(f) = \operatorname{Inf}_n \|f^{*n}\|^{1/n}$, $0 \leqslant \nu(f) \leqslant \|f\|$, $\nu(f^{*n}) = \nu(f)^n$, $n = 0, 1, \ldots$ Ici, $\nu(f)$ est une norme: $\nu(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$. En effet, $\|f\| \geqslant |f(a)|$ si $a = \omega(f)$ et par suite $\|f^{*n}\| \geqslant |f(a)|^n$ d'où, à la limite, $\nu(f) \geqslant |f(a)|$. On a aussi

$$\nu(f) = \operatorname{Inf}_n \operatorname{Sup}_x [|f^{*n}| * e(x)]^{1/n}.$$

De plus $\nu(f_n) \leqslant \nu(f)$, si f_n est la partie homogène de $d^0 n$ de f.

§ 6. Idéaux maximaux.

PROPOSITION 14. *Les idéaux maximaux de A_e sont les idéaux de la forme $\mathfrak{m}_a = \{f \mid \sum_{x=1}^{\infty} fa(x) = 0\}$ avec a factorisable telle que $|a| \leqslant e$. Si $a \neq \beta$ alors $\mathfrak{m}_a \neq \mathfrak{m}_\beta$* ([12]).

Un idéal maximal $\mathfrak{m}$ étant fermé et $A_e/\mathfrak{m}$ étant isomorphe à C, il est le noyau d'un homomorphisme continu de A_e dans C. Soit φ cet homomorphisme. On a $\varphi(u) = 1$ puisque φ n'est pas identiquement nul. Posons $\varphi(u_n) = a(n)$. Comme $\varphi(u_n * u_m) = \varphi(u_{nm})$, on a $a(nm) = a(n)a(m)$ quels que soient m et $n \geqslant 1$, autrement dit a est factorisable. On a $|a| \leqslant e$: s'il

existe q tel que $|\alpha(q)|>1$ on a, en posant $|\alpha(q)|=c$, $f=\sum_{n=0}^{\infty} u_{q^n}/c^n \in A_e$ d'où

$$\varphi(f)=\varphi\Big(\sum_0^{n-1} u_{q^n}/c^n\Big)+\varphi\Big(\sum_N^{\infty} u_{q^n}/c^n\Big)=\varphi\Big(\sum_0^{n-1}\Big)+\varphi(u_{q^N}/c^N)\varphi(f)=N+\varphi(f)$$

ce qui n'est pas possible. Alors si $f \doteq \sum f(x)u_x$, on a $\varphi(f)=\sum f(x)\varphi(u_x)$ $=\sum f(x)\alpha(x)$ puisque φ est continue. Donc, le noyau $\mathfrak{m}_\alpha$ est idéal maximal. Si $\alpha \neq \beta$, il existe p tel que $\alpha(p)\neq\beta(p)$ et la fonction $f=\alpha(p)u-u_p$ appartient à $\mathfrak{m}_\alpha$ et non à $\mathfrak{m}_\beta$.

Il y a ainsi correspondance bijective entre les maximaux et les factorisables α telles que $|\alpha|\leqslant e$.

Remarque 1. A la factorisable u correspond l'idéal $\mathfrak{m}_u$ des f telles que $f(1)=0$ qui est l'intersection avec A_e de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Remarque 2. Si $|\alpha|=e$, on peut écrire $\mathfrak{m}_\alpha=\frac{1}{\alpha}\mathfrak{m}_e=\bar{\alpha}\mathfrak{m}_e$ où $\bar{\alpha}(x)=\overline{\alpha(x)}$.

Remarque 3. L'homomorphisme $f\to\sum f\alpha$ est uniformément continu et surjectif, ce qui prouve encore que le noyau est idéal maximal.

Remarque 4. Soient $n+1$ factorisables distinctes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Alors, elles constituent un système libre, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir α_0 $=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\ldots+\lambda_n\alpha_n$ avec les $\lambda_i\in C$.

On peut supposer $|\alpha_j|\leqslant e$ $\forall j=0,1,\ldots,n$. De plus $\forall j=1,\ldots,n$ il existe un premier p_j tel que $\alpha(p_j)\neq\alpha_j(p_j)$ et si l'on considère $f=\big(\alpha_1(p_1)u-$ $-u_{p_1}\big)*\ldots*\big(\alpha_n(p_n)u-u_{p_n}\big)$, on a $\sum f\alpha_j(x)=0$ $\forall j=1,\ldots,n$, mais, $\sum f\alpha(x)$ $=\prod_{j=1}^{n}\big(\alpha_j(p_j)-\alpha(p_j)\big)\neq 0$, ce qui serait contradictoire (autrement dit, on aurait $\bigcap_{j=1}^{n}\mathfrak{m}_{\alpha_j}=\mathfrak{m}_\alpha$, ce qui n'est pas).

Corollaire 1. *Si $f\in A_e$, si $f(1)\neq 0$ et si f^{*-1} est telle que $\sum f^{*-1}\alpha$ converge quel que soit α telle que $|\alpha|\leqslant e$, alors, $f^{*-1}\in A_e$.*

En effet, d'après le théorème de Mertens $\sum(f*f^{*-1})\alpha$ qui converge est égal à $\sum f\alpha\sum f^{*-1}\alpha=1$ puisque $\sum f\alpha$ converge. Donc $\sum f\alpha\neq 0$ quel que soit α et f n'appartenant à aucun idéal maximal est inversible.

Corollaire 2. *A_e est semi-simple* ([8]).

Le fait que l'intersection des idéaux maximaux est nulle est la conséquence du fait que ν est une norme. On peut l'établir aussi de la façon suivante: si $f\neq 0$, soit $a=\omega(f)$. On considère les factorisables σ telles que $\sigma(p)=0$ si p ne divise pas a et les séries de Dirichlet $\sum f\sigma$ sont des séries entières en un nombre fini (égal au nombre de diviseurs premiers de a) de variables complexes $z_1,\ldots,z_s$, convergentes dans le polydisque unité et nulles pour toutes valeurs des z_i dans le polydisque, ce qui est contradictoire.

Cela montre aussi que l'intersection des maximaux réels ($\mathfrak{m}_a$ où a réelle) est nulle ainsi que celle des maximaux à support premier fini ($\mathfrak{m}_a$ où a à support premier fini).

Remarque. Les idéaux maximaux qui sont des ensembles fermés sont rares.

COROLLAIRE 3. *Les idéaux maximaux de A_β (β factorisable > 0) sont les $\mathfrak{m}_\sigma$ où $|\sigma| \leqslant \beta$ et ceux de $A' = \bigcap A_{a_i}$ sont les $\mathfrak{m}'_{\sigma_i} = A' \bigcap \mathfrak{m}_{\sigma_i}$. Ce sont les seuls, car si f est inversible dans chaque A_{a_i}, elle est inversible dans A'. De même A' est semi-simple.*

§ 7. Spectre. A_e étant une algèbre de Banach à élément unité, le *spectre* $\mathrm{Sp}(f)$ de $f \in A_e$ est l'ensemble des $\sum_{x=1}^{\infty} f\sigma(x)$ où $|\sigma| \leqslant e$. C'est aussi l'ensemble des complexes λ tels que $\lambda u - f$ soit non inversible. Si l'on considère f comme fonction de variables complexes, c'est l'ensemble des valeurs $f(z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ où $|z_i| \leqslant 1$. (Voir [13]).

$\mathrm{Sp}(f)$ est un ensemble non vide (il contient $\sum fu = f(1)$) *compact* contenu dans le disque centré à l'origine de rayon $\|f\|$. En fait $\operatorname{Sup}_\sigma \left|\sum f\sigma\right| = \nu(f) = \lim_n \|f^{*n}\|^{1/n}$ et cette valeur est atteinte. Le spectre de f est réduit à un point ξ si et seulement si $f = \xi u$ et tout point de C est spectre d'une fonction. Si $f \neq \xi u$ le spectre de f contient plus d'un point et plus précisément a un *intérieur non vide*: en fixant toutes les valeurs d'une factorisable sauf une $\sigma(p)$ on a, en posant $\sigma(p) = z$, une série entière de la variable complexe z non constante si p est convenablement choisi.

EXEMPLE. $\mathrm{Sp}(u_n)$ est le disque de rayon 1.

De façon évidente $\mathrm{Sp}(\lambda f) = \lambda \mathrm{Sp}(f)$ si $\lambda \in C$, $\mathrm{Sp}(f+g) \subset \mathrm{Sp}(f) + \mathrm{Sp}(g)$ et $\mathrm{Sp}(f*g) \subset \mathrm{Sp}(f)\mathrm{Sp}(g)$. De plus, quelle que soit la factorisable a, on a $\mathrm{Sp}(af) \subset \mathrm{Sp}(f)$ et il y a égalité si $|a| = e$. On n'a pas toutefois $\mathrm{Sp}(f) = \bigcup_a \mathrm{Sp}(fa)$ où $|a| \neq e$, exemple: $f = \sum_i a_i u_{p_i}$ (p_i premier de rang i) avec a_i réel positif et $\sum a_i < +\infty$. En particulier $\mathrm{Sp}(f) \neq \bigcup_n \mathrm{Sp}(fe_n)$, mais de façon immédiate $\mathrm{Sp}(f) = \overline{\bigcup_n \mathrm{Sp}(fe_n)}$ (N. B. $\bigcap_a \mathrm{Sp}(af) = \{f(1)\}$).

Inégalité de Cauchy: $\operatorname{Sup}_x |f(x)| \leqslant \nu(f)$.

Soit a tel que $\operatorname{Sup}_x |f(x)| = |f(a)|$. En prenant σ telle que $\sigma(p) = 0$ si p ne divise pas a et en posant $\sigma(p_i) = z_i$ si p_i divise a, on obtient une série entière de n variables complexes $z_1, \ldots, z_n$ convergente sur le polydisque unité et sur sa frontière où le maximum atteint est $\leqslant \nu(f)$ en module, ce qui entraîne $|f(a)| \leqslant \nu(f)$.

Par suite, pour tout σ, $\operatorname{Sup}_x |f\sigma(x)| \leqslant \nu(f\sigma)$. On a $\operatorname{Sup}_n \operatorname{Sup}_x |f^{*n}(x)|^{1/n}$

$\leqslant \nu(f)$ en appliquant l'inégalité à f^{*n}. Rappelons enfin que $\mathrm{Sp}(f^{*-1}) = 1/\mathrm{Sp}(f)$ si f est inversible et qu'alors $1/\nu(f^{*-1}) \leqslant \lambda \leqslant \nu(f)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

PROPOSITION 15. *Si $f \in A_e$, alors* $\mathrm{Sp}(f)$ *est connexe par arcs.*

En supposant $f \neq \xi u$ soient a et $b \in \mathrm{Sp}(f)$ correspondant respectivement à α et β: $\sum f\alpha = a$ et $\sum f\beta = b$. Soit alors σ_x définie par $\sigma_x(p) = (1-x)\alpha(p) + x\beta(p)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$. On a $|\sigma_x(p)| \leqslant (1-x)|\alpha(p)| + x|\beta(p)| \leqslant 1$ donc $|\sigma_x| \leqslant e$. De plus $\sum f\sigma_0 = a$ et $\sum f\sigma_1 = b$. Les $\sum f\sigma_x$ sont des points du spectre et il suffit de montrer que la fonction $F(x)$ ainsi définie est continue en tout point x: on a

$$|F(x) - F(x_0)| = \Big|\sum f(\sigma_x - \sigma_{x_0})\Big| \leqslant \Big|\sum_1^{n-1} f(\sigma_x - \sigma_{x_0})\Big| + \Big|\sum_n^{\infty} f(\sigma_x - \sigma_{x_0})\Big|$$
$$\leqslant \Big|\sum_1^{n-1} f(\sigma_x - \sigma_{x_0})\Big| + 2\sum_n^{\infty} |f|.$$

Si n est grand $2\sum |f| < \varepsilon/2$ et le $\sum$ restant est $< \varepsilon/2$ si x est proche de x_0.

Remarque 1. On verra que $\mathrm{Sp}(f)$ peut ne pas être simplement connexe.

Remarque 2. On peut définir un spectre local de la façon suivante: Etant donnée une partie E de l'ensemble P des nombres premiers de complémentaire F, tout $f \in A$ s'écrit $\sum_i f_i T^i$ où $i \in E$ et f_i contenue dans l'algèbre large sur C du demi-groupe engendré par F dans N^* multiplicatif. Soit σ une factorisable, $|\sigma| \leqslant e$ et C_σ l'opérateur de A_e défini par

$$C_\sigma(f) = \sum_i f_i \sigma(i), \qquad i \in E.$$

C'est un endomorphisme continu de A_e: $\|C_\sigma(f-g)\| \leqslant \|f-g\|$. A toute fonction $f \in A_e$ on fait correspondre l'ensemble des $C_\sigma(f)$ où $|\sigma| \leqslant e$: spectre $\mathrm{Sp}_E(f)$ de f relatif à E. En particulier $\mathrm{Sp}_P(f) = \mathrm{Sp}(f)$.

$\mathrm{Sp}_E(f)$ est une partie compacte connexe de C contenue dans la boule de rayon $\|f\|$. Si $A_{e,F}$ désigne la sous-algèbre de A_e (fermée) des fonctions f à support premier dans F, on voit que A_e peut s'identifier à une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions continues sur la partie compacte $\mathfrak{M}_E$ de l'ensemble $\mathfrak{M}$ des factorisables α, $|\alpha| \leqslant e$ (topologie produit) à valeurs dans $A_{e,F}$ (voir ci-dessous).

§ 8. L'espace de support de A_e. L'ensemble $\mathfrak{M}_e$ — ou plus simplement $\mathfrak{M}$ — des idéaux maximaux de A_e (ou des factorisables α, $|\alpha| \leqslant e$) muni de la topologie la moins fine pour laquelle les fonctions $\sum f\alpha$ sont continues est *l'espace de support* de A_e. Sa topologie peut être définie par les voisinages $V_\varepsilon(\alpha_0, f_1, \ldots, f_n)$ de α_0 formés des α telles que $\big|\sum_x f_i(\alpha - \alpha_0)\big| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Les fonctions u et u_p (p premier) constituant un système

de générateurs de A_e (la plus petite sous-algèbre fermée les contenant est A_e), cette topologie est définie par la distance

$$d(\alpha,\beta) = \sum_{x=1}^{\infty} [\alpha(x)-\beta(x)]/2^x \leqslant 1.$$

L'espace $\mathfrak{M}$ est alors un espace *compact* isomorphe au produit K^N où K est le disque unité de C.

A_e s'identifie alors à une sous-algèbre de l'algèbre $C(\mathfrak{M})$ des fonctions continues sur $\mathfrak{M}$ à valeurs complexes, normée par $\nu(F) = \operatorname{Sup}_{\alpha} |F(\alpha)|$ si $F \in C(\mathfrak{M})$.

Algébriquement, $\mathfrak{M}$ est muni d'une structure de demi-groupe par $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$ définie par $\alpha\beta(x) = \alpha(x)\beta(x) \forall x$ commutatif à élément unité (la factorisable e) et élément zéro (la factorisable u).

Le groupe $\mathfrak{M}^1$ des éléments inversibles est formé des α telles que $|\alpha| = e$, c'est une partie compacte de $\mathfrak{M}$.

On notera $\mathfrak{M}^*$ le sous-demi-groupe des factorisables jamais nulles (c'est-à-dire telles que $\alpha(x) \neq 0$ quel que soit x): il est partout dense dans $\mathfrak{M}$, il n'y est pas ouvert.

Remarque. Dans $\mathfrak{M}_\sigma$ les factorisables α, $|\alpha| \leqslant \sigma$, ne forment pas un demi-groupe pour l'opération $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$ si σ n'est pas $\leqslant e$. Il l'est pour l'opération $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta/\sigma$.

§ 9. La frontière de Šilov. A_e étant de Banach, il existe un plus petit sous-ensemble fermé de $\mathfrak{M}$, soit $\mathfrak{M}'$, tel que $\operatorname{Sup}_{\alpha \in \mathfrak{M}} |\sum f\alpha| = \operatorname{Sup}_{\alpha \in \mathfrak{M}'} |\sum f\alpha|$: la frontière de Šilov.

PROPOSITION 16. *La frontière de Šilov de $\mathfrak{M}$ est $\mathfrak{M}^1$ ensemble des factorisables α telles que $|\alpha| = e$* ([13], [8]).

En effet, la frontière contient $\mathfrak{M}^1$: il suffit de considérer les $f \in A_e$ de la forme

$$f = u + \varrho_1 e^{i\varphi_1} u_{p_1} + \ldots + \varrho_n e^{i\varphi_n} u_{p_n} + \ldots$$

avec ϱ_i réel > 0, p_i nombre premier de rang i. Le maximum de $|\sum f\alpha|$ est atteint pour l'unique σ telle que $\sigma(p_n) = e^{-i\varphi_n}$.

De plus, s'il existait $\alpha \notin \mathfrak{M}^1$ telle que pour tout $\sigma \in \mathfrak{M}^1$ on ait $|\sum f\sigma| < |\sum f\alpha|$, on aurait encore si n grand $|\sum f e_n \sigma| < |\sum f e_n \alpha|$ ce qui n'est pas possible.

COROLLAIRE 1. *L'intersection des idéaux maximaux $\mathfrak{m}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{M}^1$, est nulle car si $f \in \mathfrak{m}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{M}^1$, alors $\nu(f) = 0$ donc $f = 0$.*

Remarque 1. L'intersection des maximaux réels de $\mathfrak{M}^1$ est non nulle: elle contient $f = u\left(\sum_p 2^{-p}\right) - \sum_p 2^{-p} u_p^{*2}$ (p premier).

Remarque 2. La frontière de $\mathrm{Sp}(f)$ qui est contenue dans l'ensemble des $\sum f\sigma$, $\sigma \in \mathfrak{M}^1$, lui est en général différente: on peut même avoir $\mathrm{Sp}(f)$ = ensemble des $\sum f\sigma$ où $\sigma \in \mathfrak{M}^1$ (exemple: $f = u_m + u_n$, $(m, n) = 1$).

COROLLAIRE 2. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. $\nu(f) = \|f\|$.
2. $f = c \cdot g\sigma$ *où* $c \in C$, $g \in A_e$ *réelle positive*, $\sigma \in \mathfrak{M}^1$.
3. $\|f^{*n}\| = \|f\|^n$ *pour tout entier* $n \geqslant 0$.
4. $|f^{*n}(x)| = |f|^{*n}(x)$ *pour tout* n *et tout* x.

$1 \Rightarrow 2$. Il existe $a \in \mathfrak{M}^1$ telle que $\left|\sum fa\right| = \sum |f|$. Soit $a = \omega(f)$. On peut poser $f = cf'$ de façon que $f'(a)a(a)$ soit réel > 0 (on suppose f non nulle) et on a toujours $\nu(f') = \|f'\|$. Ceci implique que pour tout $x > a$

$$|f'(a)a(a) + f'(x)a(x)| = |f'(a)a(a)| + |f'(x)a(x)|$$

donc $f'(x)a(x)$ est réel > 0 et on peut écrire $f'(x)a(x) = g(x)$ où $g \in A_e$ est > 0. Par suite $f' = g\bar{a} = g\sigma$ et $f = c \cdot g\sigma$.

$2 \Rightarrow 3$. Si $f = c \cdot g\sigma$ alors $f^{*n} = c^n \cdot g^{*n}\sigma$ d'où $f^{*n}(x) = c^n g^{*n}(x)\sigma(x) = (cg\sigma)^{*n}(x)$.

$3 \Rightarrow 4$ évident.

$4 \Rightarrow 1$ d'après la définition de $\nu(f)$.

Remarque. L'ensemble des f telles que $\nu(f) = \|f\|$ est fermé dans A_e. Si $\nu(f) = \|f\|$, alors pour tout a, $\nu(fa) = \|fa\|$, si S est une partie de N^* et si f_S est la restriction de f à S ($f_S(x) = 0$ si $x \notin S$), alors $\nu(f_S) = \|f_S\|$. On remarque encore que le spectre d'une fonction vérifiant les conditions du corollaire est symétrique par rapport à une droite passant par l'origine.

EXEMPLE. μx^{-s} (avec $\mathrm{Re}(s) > 1$) car $\mu = |\mu|(-1)^t$ vérifie les conditions du corollaire.

§ 10. Le groupe G_e des inversibles. Le groupe G_e — ou plus simplement G — des inversibles de A_e est ouvert dans A_e, l'inverse de $f = \lambda u - g$ où $\omega(g) > 1$ et $\lambda \neq 0$ est défini par $f^{*-1}(x) = \sum g^{*n}(x)/\lambda^n$ somme finie puisque $g^{*n}(x) = 0$ si $n >$ partie entière de $\mathrm{Log}(x)/\mathrm{Log}(\omega(g))$. Si $N(u-f) < 1$ ou même si $\nu(u-f) < 1$, alors f est inversible. En conséquence, si f est inversible et si $\|g-f\| < 1/\|f^{*-1}\|$, alors g est inversible et $\|g^{*-1} - f^{*-1}\| < \|f^{*-1}\|^2 \|g-f\|/Y$ où $Y = 1 - \|f^{*-1}\| \|g-f\|$. Chacune des applications $f \to f^{*-1}$ et $f \to fa$, $a \in \mathfrak{M}^1$ est *isomorphisme algébrique et topologique de G sur lui-même* ([13]).

Pour que f soit inversible dans A_e il faut et il suffit que fa soit inversible $\forall\, a \in \mathfrak{M}^1$. Cependant, il ne suffit pas, par exemple, que fa soit inversible pour tout a à support premier fini pour que f soit inversible: $f = \sum u_{p_n}/2^n$ (p_n = premier de rang n, $p_0 = 1$).

La topologie induite sur G par celle de A_e est compatible avec la structure de groupe de G qui, muni de ses structures uniformes est un

groupe *complet*. La topologie de G étant séparée et l'unité possédant un système dénombrable de voisinages, G est *métrisable*. Plus précisément, si l'on remarque que G est isomorphe au produit $U \times G^+$ où G^+ est l'ensemble des $f \in G$ telles que $f(1) > 0$ et U le groupe des complexes de module 1, alors si $f = e^{i\theta+2ik\pi}g$ avec $g \in G^+$, en posant

$$n(f) = \operatorname{Min}\{|\operatorname{Log}\|g\||,\ |\operatorname{Log}\|g^{*-1}\||\} + \operatorname{Inf}|\theta+2k\pi|$$

on a les propriétés suivantes pour la fonction $n(f)$:

$$n(f) \geqslant 0 \text{ et } n(f) = 0 \Leftrightarrow f = u,\ n(f*g) \leqslant n(f)n(g),\ n(f^{*-1}) = n(f).$$

En définissant la distance de f et $g \in G$ par $d(f, g) = n(f*g^{*-1})$ on a une structure uniforme sur G identique à la structure uniforme droite ou gauche de G.

L'adhérence $\bar{G}$ de G dans A_e (qui n'est pas A_e: $u_p \notin \bar{G}$) est multiplicativement stable: si f et $f' \in \bar{G}$ il existe g et $g' \in G$ telles que $\|g-f\| < \varepsilon/3\,\|f'\|$ et $\|g'-f'\| < \varepsilon/3\,\|f\|$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors $g*g'$ est inversible et l'on a $\|g*g'-f*f'\| = \|(g-f)*(g'-f')+f*(g'-f')+f'*(g-f)\| \leqslant \|g-f\|\|g'-f'\| + \|f\|\,\|g'-f'\| + \|f'\|\,\|g-f\| \leqslant \varepsilon^2/9\,\|f\|\,\|f'\| + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$ dès que $\varepsilon < 3\|f\|\,\|f'\|$, ce qui prouve que $f*f' \in \bar{G}$.

Rappelons qu'une condition suffisante d'appartenance à $\bar{G}$ est l'appartenance de 0 à la frontière du spectre de la fonction considérée.

PROPOSITION 17. *Le groupe G des inversibles est connexe.*

On va montrer qu'il est connexe par arcs.

Soient f et $g \in G$, on peut passer de façon continue de f à g en restant dans G de la manière suivante. On passe d'abord de f à $f_1 = f(1)^{-1}f$ et de g à $g_1 = g(1)^{-1}g$ en restant dans G, de façon continue c'est évident. On passe ensuite de f_1 à f_2 en considérant F_s (s réel > 0 par exemple) définie par $F_s = x^{-s}f_1$. On a $F_0 = f_1$ et puisque x^{-s} est factorisable F_s est inversible. On définit de même G_s. On prend alors s assez grand $\geqslant s_0$ pour que $\|F_{s_0}-u\| < 1$ et $\|G_{s_0}-u\| < 1$. Ceci est possible car l'on a par exemple $\|F_s-u\| < \|f\|/2^s$. Ces applications sont continues en vertu de l'inégalité:

$$\Big|\sum x^{-s}h - \sum x^{-s'}h\Big| \leqslant |s-s'|\,\|h\| \quad \text{pour tout } h.$$

Ceci fait, on définit H_γ par $H_\gamma = (1-\gamma)f_2 + \gamma g_2$ où $f_2 = F_{s_0}$ et $g_2 = G_{s_0}$, γ parcourant le segment $[0, 1]$. La fonction H_γ est une fonction continue de γ et est inversible car $H_\gamma(1) = 1$ et $\|H_\gamma-u\| \leqslant (1-\gamma)\|f_2-u\| + \gamma\|g_2-u\| < (1-\gamma)+\gamma \leqslant 1$ ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Soit G_1 le sous-groupe fermé des $f \in G$ telles que $f(1) = 1$. Le groupe G est isomorphe au produit des deux groupes G_1 et C^* des complexes non nuls et puisque A_e est intègre G_1 est sans torsion. Ceci dit, la même démonstration prouve que G_1 est, lui aussi, connexe.*

COROLLAIRE 2. *G et G_1 sont engendrés par chacun des voisinages de l'élément neutre. Ainsi, si $g \in G_1$, $g = u - g'$, $g'(1) = 0$ et si $c > 0$ il existe $g_1 = u - g_1'$, ..., $g_n = u - g_n'$ telles que $\|g_i'\| < c$ et $g = g_1 * \ldots * g_n$.*

Si l'on prend $c < 1$, alors, l'inverse de g_i est la somme de la série absolument convergente $\sum g'^{*n}$ et par suite l'inverse de g s'écrit

$$\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r_1+\ldots+r_n=q} g_1'^{*r_1} * \ldots * g_n'^{*r_n} = \sum_{q=0}^{\infty} F_q$$

série normalement convergente. Si $f \notin G_1$ on écrit $f = f(1)\, f_1$ où $f_1 \in G_1$.

Remarque. Soit $f \in G_1$, $\sigma \in \mathfrak{M}$ alors $f\sigma \in G_1$ et les sous-groupes $\sigma G_1 = \{f \mid f = \sigma g_1,\ g_1 \in G_1\}$ forment une base de filtre puisque $\alpha G_1 \cap \beta G_1 \supset \alpha\beta G_1$ et définissent une topologie d'espace séparé sur G_1.

EXEMPLE. Soit $f = u + a_1 u_2 + \ldots + a_n u_{p_n}$ avec $\sum |a_i| < 1$. Dans ces conditions f est inversible et l'inverse f^{*-1} est définie par

$$f^{*-1}(p_{i_1}^{\alpha_1} \ldots p_{i_s}^{\alpha_s}) = (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_s} a_1^{\alpha_1} \ldots a_s^{\alpha_s} \frac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_s)!}{\alpha_1! \ldots \alpha_s!}$$

ou encore $f^{*-1}(x) = (-1)^{t(x)} \Omega(x) \big(t(x)\big)!\, \sigma(x)$ avec $\sigma(p) = a_p$. Si $a_n = p_n^{-s}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$ on a

$$\frac{1}{1 + \sum_p 1/p^s} = \sum_{x=1}^{\infty} (-1)^{t(x)} x^{-s} t(x)!\, \Omega(x) \qquad \text{(cf. I § 7).}$$

§ 11. Diviseurs de zéro topologiques (cf. [13]). Soient r et ϱ les deux applications de A_e dans R_+ définies par

$$r(f) = \operatorname*{Inf}_{g \neq 0} \frac{\|f * g\|}{\|g\|} \quad \text{et} \quad \varrho(f) = \operatorname*{Inf}_{g \neq 0} \frac{\nu(f * g)}{\nu(g)}.$$

Elles possèdent les propriétés suivantes:

1. $|r(f) - r(g)| \leqslant \|f - g\|$.
2. $r(f) r(g) \leqslant r(f * g) \leqslant r(f) \|g\|$.
3. $r(f) \leqslant \nu(f) \leqslant \|f\|$.
4. $|\varrho(f) - \varrho(g)| \leqslant \nu(f - g)$.
5. $\varrho(f) \varrho(g) \leqslant \varrho(f * g) \leqslant \varrho(f) \nu(g)$.
6. $\varrho(f) \leqslant \nu(f)$.
7. $\varrho(f) = \operatorname*{Inf}_{\sigma} \left| \sum f\sigma \right|$ où $\sigma \in \mathfrak{M}^1$.

Remarque. $\varrho(f) = 0$ si et seulement si il existe $\alpha \in \mathfrak{M}^1$ telle que $\sum f\alpha = 0$ puisque $\mathfrak{M}^1$ est compact et $r(f) = 0$ si et seulement si l'idéal principal (f) n'est pas fermé.

On a en outre les propriétés suivantes:

PROPRIÉTÉ A. $\varrho(f) \geqslant r(f)$. En effet $\forall\, g \in A_e$ et n entier > 0, on a $r(f) \leqslant \|(f*g)^{*n}\|^{1/n} \|g^{*n}\|^{-1/n}$ qu'on obtient en écrivant $r(f) \leqslant \|f*g^{*n}\|/\|g^{*n}\|$, puis $r(f) \leqslant \|f*(f*g^{*n})\|/\|f*g^{*n}\|$, etc. et en multipliant ces expressions. En passant à la limite $r(f) \leqslant \nu(f*g)/\nu(g)$ et enfin $r(f) \leqslant \varrho(f)$.

DÉFINITIONS. $f \in A_e$ est dite *diviseur de zéro topologique fort* — en abrégé: dzt *fort* — si $r(f) = 0$. La fonction $g \in A_e$ est dite *diviseur de zéro topologique faible* — en abrégé dzt *faible* — si $\varrho(g) = 0$.

PROPRIÉTÉ B. *Soient $\bar{G}$ et $\bar{G}^\nu$ les adhérences de G dans la topologie forte et la topologie faible respectivement et soient Z et Z_ν les* dzt *forts et faibles respectivement. Alors $\bar{G} - G \subset \bar{G}^\nu - G \subset Z_\nu \subset Z$.*

Les première et troisième inclusions sont triviales. Si $\nu(f) < 1$, alors $u - f$ est inversible, en particulier si g est inversible et si $\nu(f-g) < 1/\nu(g^{*-1})$, alors f est inversible. Si une suite $\{f_n\}$ d'inversibles tend faiblement vers f et si $\nu(f_n^{*-1})$ est borné, alors, si n est grand $\nu(f - f_n) < 1/K$ si $K = \operatorname{Sup}_n \nu(f_n^{*-1})$ donc f est inversible. Soit $f \in \bar{G}^\nu - G$: il existe une suite $\{f_n\}$ d'inversibles qui converge faiblement vers f et d'après ce qui précède $\nu(f_n^{*-1})$ tend vers 0 donc $\varrho(f) = 0$.

PROPRIÉTÉ C. *Soit $f \in A_e$, $f \neq 0$, alors il existe $a \in \mathfrak{M}^*$ telle que $\varrho(fa) > 0$.*

Si $f(1) \neq 0$, c'est évident puisque fa est inversible, si a est assez petite dans $\mathfrak{M}^*$. Supposons donc $f(1) = 0$.

(a) $f \in A_e$ considérée comme série formelle est homogène de degré d. En vertu de l'inégalité $|r(F) - r(G)| \leqslant \|F - G\|$ $\forall F$ et $G \in A_e$, on aurait, si fa était dzt fort pour tout $a \in \mathfrak{M}^*$, l'inégalité $r(G) \leqslant \|fa - G\|$ $\forall G \in A_e$. Isolons alors une indéterminée du support premier de f qui peut donc s'écrire

$$f = X^{d-s} * f_s + X^{d-s-1} * f_{s+1} + \ldots + X * f_{d-1} + f_d$$

où $s \geqslant 0$, f_i homogène de degré i et $f_s \neq 0$ $(s < d)$ en conservant la notation $*$.

Soit a telle que $a(X) = 1$ et $a(X_t) = t \in]0, 1]$ pour $X_t \neq X$ et $G = X^{d-s} * g$. On a donc pour tout σ

$$\begin{aligned} r(X^{d-s} * g) = r(g) \leqslant \big\| \big(\sigma(x)^{d-s} X^{d-s} * f_s \sigma\big) t^s - X^{d-s} * g \big\| + \\ + t^{s+1} \big\| \big(X\sigma(X)\big)^{d-s+1} * f_{s+1} \sigma + \ldots + t^{d-1} (X * f_{d-1}) \sigma \big\| + t^d \|f_d \sigma\|. \end{aligned}$$

En faisant $g = t^s g'$ et $\sigma(X) = 1$ et en faisant tendre t vers 0, on a $r(g') \leqslant \|f_s \sigma - g'\|$ quels que soient σ et g'. Si f_s est constante (i.e. $s = 0$) non nulle par hypothèse, on a une contradiction quand g est cette constante. Si f_s n'est pas une constante, comme s est $< d$, on est ramené au problème précédent avec un degré d'homogénéité moindre, de sorte qu'on tombera sur une constante — au plus tard quand le degré sera 1 — et on aura

une contradiction. Si f est homogène, il existe donc α telle que $f\alpha$ ne soit pas dzt fort.

(b) Cas général: f peut s'écrire $f = f_q + f'$ où f_q est la partie homogène de degré q minimum de f, d'où $\alpha f = \alpha f_q + \alpha f'$ avec $r(\alpha f_q) = a_0 > 0$. Soit alors σ telle que $\sigma(p) = t \in]0, 1]\ \forall p$. On a $\sigma\alpha f = t^q \alpha f_q + t^{q+1} f''$. De l'inégalité

$$|r(\sigma\alpha f) - r(t^q \alpha f_q)| \leqslant \|t^{q+1} f''\| \leqslant t^{q+1} \|f\|$$

on déduirait, si $f\beta$ était dzt fort, l'inégalité

$$t^q r(\alpha f_q) \leqslant t^{q+1} \|f\| \quad \text{d'où} \quad 0 < a_0 \leqslant t \|f\| \ \forall t > 0,$$

ce qui est contradictoire. Il existe donc $\beta \in \mathfrak{M}^*$ tel que $f\beta$ ne soit pas dzt fort.

Corollaire. *La propriété A montre qu'il existe α telle que $\varrho(f\alpha) > 0$, $\alpha \in \mathfrak{M}^*$.*

En conséquence, si $f(1) = 0$, le spectre de f contient 0 ainsi que $\mathrm{Sp}(f\alpha)$ et comme $\mathrm{Inf}\left|\sum f\sigma\right| > 0$, $\sigma \in \mathfrak{M}^1$ le spectre de $f\alpha$ (donc celui de f qui le contient) contient le disque de centre 0 de rayon $r(f\alpha)$. Si $f(1) \neq 0$, $f = f(1)u + f'$ et $\mathrm{Sp}(f)$ contient un disque de centre $f(1)$ de rayon $r(f'\alpha) > 0$ pour un $\alpha \in \mathfrak{M}^*$ convenable.

Propriété D. *Si $f \in A_e$, non inversible et $f(1) \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathfrak{M}^*$ telle que $f\alpha$ soit* dzt *faible.*

Supposons $f(1) = 1$ pour simplifier. La fonction f' déduite de f en remplaçant u_{p_i} par $\varepsilon \neq 0$ et assez petit quand $i \geqslant i_0$ est proche de f et donc non dzt si f ne l'est pas. On peut supposer en outre que $f'(1) \neq 0$ ($f(1)$ a été modifié par l'apport d'ε). La fonction f' est série entière des variables $u_{p_1}, \ldots, u_{p_n}$ et si $\sigma \in \mathfrak{M}$ est telle que $\alpha(p_i) = \varepsilon$ si $i \geqslant i_0$ on a $\sum f\alpha = \sum f'\alpha$. Il s'agit donc de trouver $\alpha \in \mathfrak{M}^*$ telle que $\sum f'\alpha = 0$.

Prenons $\sigma \in Z(f') = \{\alpha \mid \sum f'\alpha = 0\}$ telle que $\lambda^{t(x)}\sigma(x)$ ne soit pas dans $Z(f')$ si $|\lambda| < 1$. Cela est possible car $Z(f')$ est fermé et $\sigma \neq u$ si $d(u, \sigma) = d\big(u, Z(f')\big)$. Soit σ' telle que $\sigma'(p) = \sigma(p)$ quand $\sigma(p) \neq 0$ et $\sigma'(p) = 1$ ailleurs.

La fonction $\sigma f'$ a un terme constant non nul et n'est pas inversible puisqu'elle a un zéro de la forme $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, 0, \ldots)$. La fonction F obtenue à partir de $\sigma f'$ en remplaçant u_p par t quand $\sigma(p) \neq 0$ et u_p par θ quand $\sigma(p) = 0$ est une fonction des deux variables t et θ: $F(t, \theta)$ à terme constant non nul s'annulant pour $t = 1$, $\theta = 0$. Si elle n'est pas dzt faible, alors, $F(at, \theta)$ où $|a| < 1$ est proche de F, à terme constant $\neq 0$ et non inversible car l'ensemble des g non inversibles et non dzt faibles est ouvert. Elle a donc un zéro $F(at_0, \theta_0)$ où $\theta_0 \neq 0$, sinon, $a^{t(x)}\sigma$ serait dans $Z(f')$ contrairement à l'hypothèse. Donc f' a un zéro $\in \mathfrak{M}^*$.

Remarque. L'hypothèse $f(1) \neq 0$ est essentielle: $f = u_p$.

Exemple de dzt. Soit $f_N = \sum_1^N u_n = f'_N + \sum_{p>N/2} u_p$ (p premier). Il existe $a \in \mathfrak{M}^1$ tel que

$$\Big|\sum_1^N f'_N a(x)\Big| \leqslant \Big\{\sum_1^N |f'_N(x)|^2\Big\}^{1/2} \leqslant N^{1/2} \quad \text{(cf. § 12)}.$$

D'autre part, quand $\beta \in \mathfrak{M}^1$, l'image de $\sum u_p \beta$ est un disque de rayon $\pi(N) - \pi(N/2) > N^{1/2}$ (ou $\pi(N)$ est le nombre de premiers $\leqslant N$). On peut donc choisir un tel β pour que l'on ait $\sum f'_N a + \sum \beta u_p = 0$, c'est-à-dire $\sum f_N \sigma = 0$ en prenant $\sigma(p) = a(p)$ quand $p \leqslant N/2$ et $\sigma(p) = \beta(p)$ quand $p > N/2$. De la même façon, $\sum_1^N \mu(n) u_n$, $\sum_1^N |\mu(n)| u_n$ sont dzt ainsi que $\sum_1^N n^{-s}$ où $\mathrm{Re}(s) > 1$ et pas trop grand et N assez grand (l'ensemble des valeurs de $\sum_{p>N/2}^N p^{-s}\beta(p)$ où $\beta \in \mathfrak{M}^1$ est une couronne circulaire qui rencontre l'ensemble des valeurs de $\sum n^{-s} f'_N a$ quand $a \in \mathfrak{M}^1$, d'où, puisque l'ensemble des $e^{it\log(x)}$ est dense dans $\mathfrak{M}^1$, $\operatorname{Inf}_{t \in R} \big|\sum_1^N x^{-s} e^{it\log(x)}\big| = 0$ si N grand et $\mathrm{Re}(s) > 1$ et pas trop grand).

§ 12. Inégalités. Pour $k \in N$ soit $|\mu_k| = \prod_p (u + \ldots + u_{p^k}) \in A$, multiplicative par définition. On a $|\mu_1| = |\mu|$. Soit $|\mu_k| A_e = \{f|\mu_k| \mid f \in A_e\}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de A_e et puisque $|\mu_{k+r}| \cdot |\mu_k| = |\mu_k|$ on a

$$|\mu_1| A_e \subset |\mu_2| A_e^2 \subset \ldots \subset |\mu_k| A_e \ldots$$

A la fonction $f \in A_e$ on associe sa projection $\pi_k(f) = f|\mu_k|$ sur $|\mu_k| A_e$. La suite $\pi_k(f)$ converge vers f. Soit v_k l'application de $|\mu_k| A_e$ dans $A_1 = \{f = \sum a_n z^n \mid a_n \in C, \sum |a_n| < +\infty\} = A_e e_1$, définie par $v_k(u_{p_n}) = z^{(k+1)^{n-1}}$ et $v_k(u_{xy}) = v_k(u_x) v_k(u_y)$. Si $f \in |\mu_k| A_e$, on a $v_k(f) = F_k = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) z^{v_k(n)} \in A_1$. L'application v_k est un isomorphisme algébrique et topologique de $|\mu_k| A_e$ sur A_1: il est en effet surjectif.

De plus, $\forall z$ tel que $|z| \leqslant 1$, $F_k(z) = \sum f a$ pour $a \in \mathfrak{M}$ convenable: $a(p_n) = z^{(k+1)^{n-1}}$ et le spectre de $F_k(z)$ est contenu dans le spectre de f. Pour tout $f \in A_e$, appelons *spectre frontière de f* l'ensemble des $\sum f a$ où $a \in \mathfrak{M}^1$ noté $\mathrm{Sp}_1(f)$. C'est une partie compacte d'intérieur non vide, en général, de $\mathrm{Sp}(f)$. Soit, de même $\mathrm{Sp}_1(F_k)$ l'ensemble des $F_k(e^{i\varphi})$, φ réel.

Proposition 18. *Si $f \in A_e$, à tout voisinage V de 0 dans C, correspond une fonction F_V de A_1 telle que*

$$\mathrm{Sp}_1(f) \subset \mathrm{Sp}_1(F_V) + V \quad \textit{et} \quad \mathrm{Sp}_1(F_V) \subset \mathrm{Sp}_1(f) + V.$$

Le voisinage V contient un disque centré à l'origine de rayon $\varepsilon > 0$ et si N est grand, on a $\|f-f_N\| < \varepsilon/2$ si $f_N = \sum_1^N f(n)u_n$. Soit q_0 le plus petit entier q tel que $\pi_q(f_N) = f_N$. Alors $v_q[\pi_q(f_N)] = v_q(f_N)$. Si $a \in \mathfrak{M}^1$, $a(p) = e^{2i\pi\theta}p$, θ_p réel et il suffit de montrer qu'il existe $z = e^{2i\pi x}$, x réel tel que $\forall p \leqslant N$ on ait $|e^{2i\pi\theta}p - e^{2i\pi x}|$ assez petit afin que $\left|\sum f_N a - F_q(z)\right| < \varepsilon/2$. Autrement dit il s'agit de trouver x tel que $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ (où $p_n \leqslant N$ et $p_{n+1} > N$) on ait $\{\theta_i - q^{i-1}x\}$ (partie fractionnaire) assez petite. Or θ_i s'écrit

$$\theta_i = \frac{\theta_i^{(1)}}{q} + \ldots + \frac{\theta_i^{(j)}}{q^j} + \ldots \quad \text{avec } 0 \leqslant \theta_i^{(j)} < q \text{ et } \theta_i^{(j)} \text{ entier.}$$

Il suffit alors de prendre pour $j^{\text{ème}}$ composante q-adique de x, $\theta_i^{(1)}$ pour que l'on ait $\{\theta_i - q^{i-1}x\} \leqslant 2/q$; si q est grand, on aura l'inégalité annoncée.

L'autre inclusion est évidente.

Autrement dit, le spectre frontière de f qui est un „morceau de plan" a tous ses points à une distance mondre que ε d'une ligne qui est le spectre frontière d'une fonction à une variable.

Corollaire. *De l'égalité et des inégalités*

$$\operatorname*{Inf}_{|z|=1} |F(z)| \leqslant \Big[\sum |a_n|^2\Big]^{1/2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqslant \operatorname*{Sup}_{|z|=1} |F(z)|$$

on déduit $\varrho(f) \leqslant \big[\sum |f(n)|^2\big]^{1/2} \leqslant \nu(f)$ *en passant à la limite.*

Remarques. (a) Il existe une infinité d'autres représentations obtenues en prenant d'autres fonctions que les u_k.

(b) Si f_n est la partie homogène de degré n de $f \in A_e$, alors, $\nu(f_n) \leqslant \nu(f)$, en particulier, $\sum_p |f(p)| \leqslant \nu(f)$ où p premier.

Soit $\sigma \in \mathfrak{M}$, $\sum f_i \sigma = a_i$, on a

$$\Big|\sum f\sigma z^{\mu(x)}\Big| = |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots| \leqslant \nu(f)$$

donc, $|a_n| \leqslant \nu(f)$, c'est-à-dire, $\forall \sigma \in \mathfrak{M}$, $\left|\sum (f_n\sigma)\right| \leqslant \nu(f)$ ou encore $\nu(f_n) \leqslant \nu(f)$. De plus, comme $\nu(f_1) = \|f_1\|$, on a $\sum |f(p)| \leqslant \nu(f)$.

(c) On en déduit l'inégalité de Schwarz $\nu(f\lambda^{i(x)}) \leqslant |\lambda|^n \nu(f)$, si n est le plus petit i tel que $f_i \neq 0$ (f_i = partie homogène de degré i).

§ 13. Fonctions multiplicatives. Rappelons qu'une multiplicative m se décompose en un produit de convolution de multiplicatives m_i à support premier ne comportant qu'un élément au plus: p_i. Puisque pour tout i on a $\sum_x |m_i(x)| = \sum_n |m_i(p_i^n)| \leqslant \sum |m(x)|$ les m_i sont dans A_e si $m \in A_e$. De plus, si $m_i = u + m_i'$, le produit infini $\prod \|m_i\| = \prod (1 + \|m_i\|)$ est con-

vergent et l'on a $\|m\| = \prod_i \|m_i\|$ (plus généralement si f et $g \in A_e$ sont telles que $s_1(f) \cap s_1(g) = \emptyset$, alors, $\|f*g\| = \|f\|\,\|g\|$) et le produit $\prod m_i$ converge vers m dans A_e. Ceci implique $\|m_i'\| < 1$ dès que i est assez grand et donc qu'il existe g multiplicative et inversible telle que $m*g$ soit à support premier fini.

Pour $\sigma \in \mathfrak{M}$ on a $\sum m\sigma = \prod_i (1+\sum m_i\sigma) = \prod_i \big(1+m(p)\sigma(p)+\ldots\big)$ et, en particulier, $\nu(m) = \prod \nu(m_i)$.

Soit M_e — ou simplement M — l'ensemble des multiplicatives de A_e. C'est un sous-ensemble fermé. Soit $M_1 = M \cap G = M \cap G_1$ le sous-groupe fermé de G_1 des multiplicatives inversibles.

Pour que $m \in M_1$ soit inversible, il faut et il suffit que $m\varepsilon_{i,a}$ soit inversible, $\forall i$ et a avec $\varepsilon_{i,a}$ factorisable définie par $\varepsilon_{i,a}(p_i) = a$, $|a| \leqslant 1$ et $\varepsilon_{i,a}(p_j) = 0$ si $j \neq i$.

Le groupe G_1 étant connexe, $m_i \in M_1$, $s_1(m_i) \subset \{p_i\}$ et m_i se décompose en un produit fini d'inversibles $(u+m_i^{(1)})*\ldots*(u+m_i^{(q_i)})$ telles que $\|m_j^i\| < c$ où $c > 0$ donné et $s_1(m_i^{(j)}) \subset \{p_i\}$. Ceci permet d'établir le fait suivant:

PROPOSITION 19. *Le groupe M_1 des multiplicatives inversibles est connexe.*

Soit $f \in M_1$ et $\prod f_i$ sa décomposition en multiplicatives f_i. Dès que i est assez grand $f_i = u+f_i'$ où $\|f_i'\| < 1$. Les autres f_i se décomposent en produits finis de fonctions $f_i^{(q_i)}$ de support premier $\subset \{p_i\}$ et vérifiant $\|f_i^{(q_i)} - u\| < 1$ et on peut écrire f sous la forme

$$f = \prod_{n=1}^{N} \prod_{m=1}^{q_n} (u+f_n'^{(m)}) \prod_{N+1}^{\infty} (u+f_n').$$

Si g est une autre fonction de M_1, on peut la décomposer de la même façon et s'arranger pour que les deux produits finis aient le même nombre de termes. Avec une autre notation, f s'écrit $\prod(u+f_n')$ avec $s_1(f_n')$ ne comportant qu'un élément et $\|f_n'\| < 1$; plusieurs f_n' pouvant avoir le même support premier. Soit alors $h_{n,\gamma} = u+h_{n,\gamma}' = (1-\gamma)f_n+\gamma g_n = u+ +(1-\gamma)f_n'+\gamma g_n'$. La fonction $h_{n,\gamma}$ dont le support premier a un seul élément est multiplicative et inversible puisque $\|h_{n,\gamma}-u\| < 1$. Considérons alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} h_{n,\gamma}$: il est absolument convergent car $\sum_n \|h_{n,\gamma}'\| < \sum_n (1-\gamma)\|f_n'\| + \gamma\|g_n'\| < +\infty$, donc convergent et définit $h_\gamma \in M_1$ puisque chaque $h_{n,\gamma}$ est inversible et continue par rapport à γ. Enfin $h_0 = f$ et $h_1 = g$, ce qui achève la démonstration.

§ 14. Fonctions factorisables. Rappelons que $\sigma \in A_e$ si et seulement si $\sum|\sigma(p)| < +\infty$ et $|\sigma(p)| < 1$, $\forall p$ premier et qu'alors elle est inversible d'inverse $\mu\sigma$. Notons que $\mu\sigma \in A_e \not\Rightarrow \sigma \in A_e$ sauf si $\mu\sigma \in G_e$.

Si $\sigma \in A_s$ elle s'écrit $\prod_n \left(u - \sigma(p_n) u_{p_n}\right)^{*-1} = (\mu\sigma)^{*-1}$.

On a $e^{\Sigma|\sigma(p)|} \leqslant \|\sigma\| = \nu(\sigma)$. De plus $\varrho(\sigma) = \prod_p \left(1 + |\sigma(p)|\right)^{-} = 1/\|\mu\sigma\| = 1/\nu(\mu\sigma)$ et $e^{-\Sigma|\sigma(p)|} \leqslant \varrho(\sigma) \leqslant 1/1 + \sum |\sigma(p)|$.

Propriétés immédiates des parties réelles et imaginaires:

Soit $\sigma \in A_s$, $\sigma = v + iw$ où v et $w \in A_s$, sont réelles, $v(1) = 1$ et $w(1) = 0$. La factorisabilité se traduit par les égalités

$$(1) \qquad \begin{aligned} v(x)v(y) - w(x)w(y) &= v(xy) \\ v(x)w(y) + v(y)w(x) &= w(xy) \end{aligned} \qquad \forall x, y > 0.$$

Réciproquement, 2 fonctions réelles v et w telles que $v(1) \neq 0$ et vérifiant les égalités (1) sont les parties réelles et imaginaires d'une factorisable. On a encore, en écrivant que $\sigma * \mu\sigma = u$

$$(2) \qquad v * \mu v = u + w * \mu w,$$

$$(3) \qquad v * \mu w = -w * \mu v,$$

$$(4) \qquad v = \mu v * (v^{*2} + w^{*2}),$$

$$(5) \qquad w = -\mu w * (v^{*2} + w^{*2}).$$

(2) et (3) impliquent que v est factorisable si et seulement si $w = 0$ et alors σ est réelle. D'après (3) et (4) puisque $v^{*2} + w^{*2} = \sigma * \bar{\sigma}$ est inversible, on a l'équivalence: v est inversible $\Leftrightarrow$ μv est inversible. De plus, v multiplicative $\Leftrightarrow$ $s_1(\sigma)$ a un seul élément. La suffisance est évidente. La nécessité vient de ce que, d'après (1) si $(x, y) = 1$, alors, $w(x)w(y) = 0$, donc $s(f)$ ne peut contenir que des puissances d'un même nombre premier p. De (2) il vient $s_1(v) = s_1(w)$ d'où $s_1(\sigma) \in \{p\}$. Dans ces conditions, v est inversible car $\mu v = u - (a + bi)u_p$ et $|a + bi| < 1$ donc $|a| < 1$ et $\mu v = u - au_p$ est inversible.

Remarquons enfin que si a est réelle, on a

$$\left|\sum \mu v a\right| \left|\sum w a\right| \leqslant 1/2 \quad \text{et} \quad \left|\sum \mu w a\right| \left|\sum v a\right| \leqslant 1/2.$$

Spectre d'une factorisable:

C'est l'ensemble des $\prod_p \left(1 - \sigma(p)\alpha(p)\right)^{-1}$ où $\alpha \in \mathfrak{M}$. En posant $\alpha(p) = z_p$ où $z_p \in$ le disque unité de C, on voit que l'image $\left(1 - \sigma(p)z_p\right)^{-1}$ est le disque D_p de centre

$$\omega_p = [1 - |\sigma(p)|^2]^{-1} \quad \text{de rayon} \quad R_p = \frac{|\sigma(p)|}{1 - |\sigma(p)|^2}$$

et $\mathrm{Sp}(\sigma)$ qui est symétrique par rapport à l'axe réel est le produit de ces disques. Ceux-ci forment un faisceau de cercles à points limites 0 et 1 d'axe radical $x = 1/2$ distincts si $\sigma(p) \neq \sigma(q)$ et intérieurs l'un à l'autre. Quand p tend vers l'infini, D_p a son centre qui tend vers 1 et son rayon vers 0. L'argument maximum entre 0 et 2π des points de D_p est φ_p

$= \operatorname{Arcsin}|\sigma(p)|$ et le module au point ζ_p d'argument φ_p est $[1-|\sigma(p)|^2]^{-1/2}$ de sorte que l'argument maximum de $\operatorname{Sp}(\sigma)$ est $\varphi = \sum \operatorname{Arcsin}|\sigma(p)| \leqslant \pi/2 \sum |\sigma(p)|$. Il y a alors un point dans $\operatorname{Sp}(\sigma)$ d'argument φ de module

$$\prod [1-|\sigma(p)|^2]^{-1/2} = \nu(\sigma)^{1/2}\nu(\mu\sigma)^{1/2} \geqslant 1.$$

Il s'ensuit que si $\varphi \geqslant \pi$ le spectre de σ n'est pas simplement connexe et prend en particulier une valeur négative de module $\geqslant 1$.

PROPOSITION 20. *Soit F_+^* le demi-groupe engendré par les factorisables $\sigma \in A_a$ et F_-^* le demi-groupe des inverses de F_+^*, alors, F_+^* et F_-^* sont denses dans M_1.*

Montrons d'abord que l'ensemble des $\mu\sigma$ (inversibles ou non) $\in A_a$ est dense dans M. Soit $f \in M$, $f = \prod_i f_i$ où $s_1(f_i) = \{p_i\}$. Si $n \geqslant n_0$ convenable, on a $\|f - \prod_1^n f_i\| < \varepsilon/2$. Il existe q_i factorisables a_i^j, $j = 1, \ldots, q_i$ telles que pour tout i on ait

(a) $s_1(a_i^j) = \{p_i\}$ $\forall i, j$;

(b) $f_i(p_i^n) = (\mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i})(p_i^n)$ $\forall n \leqslant q_i$;

(c) $(\mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i})(p_i^n) = 0$ si $n > q$

(voir chap. I, § 7). Si q_i est assez grand, on aura $\|f_i - \mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i}\| < \varepsilon/2n_0\|f\|$. Par suite,

$$\Big\|\prod_1^{n_0} f_i - \prod_1^{n_0} \mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i}\Big\| = \Big\|\prod_1^{n_0} f_i - \prod_1^{n_0} \delta_i\Big\| \leqslant \varepsilon H/2n_0\|f\|$$

où

$$H = \|f_2 * \ldots * f_{n_0}\| + \|\delta_1 * f_3 * \ldots * f_{n_0}\| + \ldots + \|\delta_1 * \ldots * \delta_{n_0-2} * f_{n_0}\| + \|\delta_1 * \ldots * \delta_{n_0-1}\|.$$

Il s'ensuit $\varepsilon H/2n_0\|f\| \leqslant n_0\|f\|\varepsilon/2n_0\|f\| = \varepsilon/2$. On en déduit

$$\Big\|f - \prod_1^{n_0} \mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i}\Big\| < \varepsilon.$$

Maintenant si f est inversible et si ε est assez petit, puisque G est ouvert $\prod_1^{n_0} \mu a_i^1 * \ldots * \mu a_i^{q_i}$ est inversible, ce qui montre que F_-^* est dense dans M_1. De plus, $\prod \delta_i$ étant inversible, ceci implique, puisque $\mu a_i^j = u - a_i^j u_{p_i}$ que $|a_i^j| < 1$, donc que a_i^j est inversible.

Finalement, si $f \in M_1$, alors $f^{*-1} \in M_1$ et il existe des δ_i tels que $\|f^{*-1} - \prod_1^{n_0} \delta_i\| < \varepsilon'$ et en vertu de l'inégalité

$$\|f - g\| \leqslant \|f\|^2 \|f^{*-1} - g^{*-1}\| / (1 - \|f\| \, \|f^{*-1} - g^{*-1}\|)$$

on a avec $\sigma_i = \delta_i^{*\,-1}$ l'inégalité $\|f - \prod_1^{n_0} \sigma_i\| < \varepsilon$, dès que $\varepsilon' < \varepsilon/[\varepsilon\|f\| + \|f\|^2]$.

§ 15. Exponentielle et logarithme.

1. On définit $\exp(f)$ par la série absolument convergente dans A_e si $f \in A_e$ (voir [13])

$$\exp(f) = u + f + \frac{1}{2!} f^{*2} + \ldots + \frac{1}{n!} f^{*n} + \ldots$$

Pour f et $g \in A_e$ on a $\exp(f+g) = \exp(f) * \exp(g)$ et comme $\exp(0) = u$, la fonction exp est une application de A_e dans G_e. Ce dernier étant connexe, exp est surjective et définit un homomorphisme de A_e sur G.

Elle est simplement périodique en ce sens que $\exp(f) = \exp(g) \Rightarrow$ $\Rightarrow f - g = 2ik\pi \cdot u$ (k entier). En effet, en écrivant $f = au + f'$ et $g = bu + g'$ avec $\omega(f') > 1$ et $\omega(g') > 1$ on a $\exp(au - bu) = \exp(f' - g')$, ce qui s'écrit

$$e^{(a-b)} u = u + (f' - g') + \frac{1}{2!}(f' - g')^{*2} + \ldots$$

d'où $\omega(f' - g') = 0$ et alors $f' = g'$ et $a - b = 2ik\pi \cdot u$

La fonction exp restreinte à $\mathfrak{m}_u$ est un homomorphisme surjectif du groupe additif $\mathfrak{m}_u$ sur G_1 car si $f \in G_1$ il existe $g \in A_e$ telle que $\exp(g) = f$, d'où $g(1) = 2ik\pi$ et $g' = g - 2ik\pi \cdot u \in \mathfrak{m}_u$ et vérifie $\exp(g') = f$. Il est aussi injectif et définit un isomorphisme de $\mathfrak{m}_u$ sur G_1.

Propriétés.

(a) exp est continue et $\exp(f\sigma) = \exp(f)\sigma$;

(b) $\sum \exp(f)\sigma = e^{\Sigma f\sigma}$;

(c) $\nu \exp(f) = e^{\operatorname{Sup}_\sigma \operatorname{Re}(\Sigma f\sigma)} \varrho\big(\exp(f)\big) = e^{\operatorname{Inf}_\sigma \operatorname{Re}(\Sigma f\sigma)}$.

Exemple. Soit $f = x^{-s}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$; on a

$$\exp(e)(p^r) = \frac{1}{r!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r+n-1)!}{n!(n-1)!} \qquad (r > 0)$$

et plus généralement

$$\exp(e)(p_1^r \ldots p_m^r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+r_1-1)! \ldots (n+r_m-1)!}{n!(n-1)!^m r_1! \ldots r_m!}$$

d'où l'expression de $\exp(x^{-s})$ en vertu de (a).

2. La fonction *logarithme* est définie comme solution $L(f)$ de l'équation $\exp(g) = f$. Il est nécessaire pour cela que g soit inversible et comme exp est surjective, cette condition est aussi suffisante; cette correspondance entre G et A_e n'est pas univoque: $\exp(g + 2ik\pi \cdot u) = \exp(g)$. Si $\nu(f - u) < 1$, une solution est donnée par la série absolument convergente

$$L(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (f - u)^{*n}.$$

Restreinte à G_1, la fonction L possède une valeur et une seule dans $\mathfrak{m}_u$ et définit ainsi un isomorphisme de G_1 sur $\mathfrak{m}_u$ ([13]).

PROPRIÉTÉS DE L.

(a) *G_1 étant connexe, il est engendré par chacun des voisinages de u et si $f \in G_1$, $f = u + f'$ où $\omega(f') > 1$ et il existe $f'_1, \ldots, f'_q$ d'ordres > 1 telles que $(u+f') = (u+f'_1) * \ldots * (u+f'_q)$ d'où une expression de $L(f)$*

$$L(f) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (f_1'^{*n} * \ldots * f_q'^{*n}).$$

(b) *Par suite, comme il y a encore convergence, $L(\sigma f) = \sigma L(f)$.*

(c) $\sum L(f)\sigma = \operatorname{Log}\left(\sum f\sigma\right)$ (détermination principale) *et, en général, égalité modulo $2ik\pi$.*

(d) $\|L(f)\| \geqslant \operatorname{Log}\|f\|$ *où* $f(1) = 1$.

PROPOSITION 21. *La fonction L: $G_1 \to \mathfrak{m}_u$ est un homéomorphisme de G_1 sur $\mathfrak{m}_u$.*

Il suffit de montrer qu'elle est continue: Si f et $g \in G_1$ et si $\|g-f\| < \varepsilon/\|f^{*-1}\|(1+\varepsilon)$, alors, en écrivant $g = f*(g*f^{*-1})$, on a

$$\|g*f^{*-1} - u\| \leqslant \|f^{*-1}\| \, \|g-f\| < \varepsilon/(1+\varepsilon) < 1,$$

donc,

$$\|L(g)\| < \|L(f)\| = \|L(g*f^{*-1})\| \leqslant \|(g*f^{*-1}-u)\| \left[1 + \frac{1}{2}\|g*f^{*-1}-u\| + \ldots\right]$$

$$\leqslant \frac{\|g*f^{*-1}-u\|}{1-\|g*f^{*-1}-u\|} \leqslant \frac{\|f^{*-1}\| \, \|g-f\|}{1-\|f^{*-1}\| \, \|g-f\|} < \varepsilon.$$

COROLLAIRE 1. *Le fait que les fonctions finies de $\mathfrak{m}_u$ sont denses dans $\mathfrak{m}_u$ se traduit par l'existence, pour tout $f \in G_1$ et tout $\varepsilon > 0$, d'un nombre fini n_0 de complexes a_{q_i} tels que*

$$\left\| f - \prod_{i=1}^{n_0} \left(u + a_{q_i} u_{q_i} + \frac{1}{2!} a_{q_i}^2 u_{q_i}^{*2} + \ldots + \frac{1}{n!} a_{q_i}^n u_{q_i}^{*n} + \ldots\right) \right\| < \varepsilon$$

d'où

$$\forall \sigma, \ \left| \sum f\sigma - e^{\Sigma a_q \sigma(q_i)} \right| < \varepsilon.$$

COROLLAIRE 2. *Dans le sous-groupe de $\mathfrak{m}_u$ des f telles que $f(x) = 0$ si x n'est pas une puissance d'un nombre premier* (log *des multiplicatives*), *le sous-groupe engendré par les fonctions de la forme*

$$a_p u_p + \frac{1}{2} a_p^2 u_p^{*2} + \quad + \frac{1}{n} a_p^n u_p^{*n} + \ldots \qquad (p \text{ premier})$$

est partout dense.

Remarque. Pour $f \in G$ et $\gamma \in C$, on définit $f^{*\gamma} = \exp\big(\gamma L(f)\big)$ fonction non uniforme en général restreinte à G_1; c'est une bijection de G_1 sur lui-même. Si m est multiplicative, alors, $m^{*\gamma}$ l'est aussi. Cette fonction est continue ainsi que sa fonction inverse $f^{*1/\gamma}$ si $\gamma \neq 0$ et définit un homéomorphisme de G_1 sur lui-même. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{M}$, on a $(\sigma f)^{*\gamma} = \sigma f^{*\gamma}$. Enfin, si $f = u + f'$ on a $f^{*\gamma} = u + \gamma f' + \frac{1}{2!}\gamma(\gamma-1)f'^{*2} + \ldots$ série absolument convergente et

$$\|f^{*\gamma}\| \leqslant 1 + |\gamma| \frac{\|f'\|}{1 - \|f'\|} \qquad (\|f'\| < 1).$$

§ 16. Fonctions additives et complètement additives. Une fonction additive n'appartient pas, en général, à A_e et une fonction c.a. appartient à A_e si et seulement si elle est nulle. Rappelons que si a est additive, alors, $a = e * b$ où $b(x) = 0$ si x n'est pas une puissance d'un nombre premier, $b(1) = 0$ et $b(p^n) = a(p^n) - a(p^{n-1})$. Si elle est c.a., alors, $b(p) = a(p)$. Donc, si par exemple $\sigma \in A_e$ et si $\sum |a(p)\sigma(p)|$ converge où a est c.a., alors $\sigma a \in A_e$ et l'on a

$$\sum_x a\sigma = \Big(\sum_x \sigma\Big)\Big(\sum_p \frac{a(p)\sigma(p)}{1-\sigma(p)}\Big) = \prod_p \big(1-\sigma(p)\big)^{-1} \cdot \sum_p \frac{a(p)\sigma(p)}{1-\sigma(p)}.$$

Ainsi, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a avec $\sigma = x^{-s}$ l'égalité $\sum a(x)x^{-s} = \zeta(s) \sum \frac{a(p)}{p^s - 1}$ d'où les formules bien connues

$$(1) \qquad -\zeta'(s) = \sum x^{-s}\mathrm{Log}(x) = \zeta(s) \sum_p \frac{\mathrm{Log}\, p}{p^s - 1},$$

$$(2) \qquad \sum x^{-s} t(x) = \zeta(s) \sum_p \frac{1}{p^s - 1} \qquad (p \text{ premier}).$$

Si f, $g \in A_e$ et si $\sum |a(x)\sigma(x)| < +\infty$, la formule $a(f*g) = af*g + f*ag$ entraîne si $\sigma \in \mathfrak{M}$

$$\sum a(x)(f*g)(x)\sigma(x) = \sum af\sigma(x) \sum g\sigma(x) + \sum ag\sigma(x) \sum f\sigma(x).$$

Exemple. $\sigma(x) = x^{-s}$ $(\mathrm{Re}(s) > 1)$ $f = x^{-s'}$, $g = \mu(x)x^{-s'}$ $(\mathrm{Re}(s') > 1)$ on obtient $0 = \sum x^{-(s+s')}a(x) + \sum x^{-(s+s')}a(x)\mu(x)\zeta(s+s')^2$ avec $a(x) = \mathrm{Log}(x)$ on a $\sum x^{-(s+s')}\mathrm{Log}(x) = -\zeta(s+s')^2 \sum x^{-(s+s')}\mu(x)\mathrm{Log}(x)$ et en posant $s + s' = k$ on a $\sum_p \frac{\mathrm{Log}(p)}{p^k - 1} = -\zeta(k) \sum \frac{\mu(x)\mathrm{Log}(x)}{x^k}$.

§ 17. Zéros. L'espace $\mathfrak{M}$ est un métrique compact, donc complet, muni de la distance $d(\alpha, \beta) = \sum_{x=1}^{\infty} |\alpha(x) - \beta(x)| 2^{-x}$ compatible avec sa structure uniforme.

LEMME. *La distance d est équivalente à la distance δ définie par*

$$\delta(\alpha, \beta) = \sum_p |\alpha(p) - \beta(p)| 2^{-p} \qquad (p \text{ premier}).$$

Trivialement $\delta \leqslant d$. Réciproquement, soit $x = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$ la décomposition de x en facteurs premiers. On a

$$\begin{aligned} &a(x) - \beta(x) \\ &= [\alpha(p_1)^{n_1} - \beta(p_1)^{n_1}] \alpha(p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}) + [\alpha(p_2^{n_2}) - \beta(p_2^{n_2})] \beta(p_1^{n_1}) \alpha(p_3^{n_3} \dots p_s^{n_s}) + \\ &\qquad \dots + [\alpha(p_s)^{n_s} - \beta(p_s)^{n_s}] \beta(p_1^{n_1} \dots p_{s-1}^{n_{s-1}}) \end{aligned}$$

d'où, puisque $|\alpha(x)|$ et $|\beta(x)| \leqslant 1$

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \beta(x)| &\leqslant |\alpha(p_1)^{n_1} - \beta(p_1)^{n_1}| + \dots + |\alpha(p_s)^{n_s} - \beta(p_s)^{n_s}| \\ &\leqslant n_1 |\alpha(p_1) - \beta(p_1)| + \dots + n_s |\alpha(p_s) - \beta(p_s)|. \end{aligned}$$

Soit alors la fonction c.a. définie par $a(p) = |\alpha(p) - \beta(p)|$ pour tout premier p. On a montré que $|\alpha(x) - \beta(x)| \leqslant a(x)$ pour tout x. Il vient alors $\sum |\alpha(x) - \beta(x)| 2^{-x} \leqslant \sum a(x) 2^{-x} \leqslant \sum a(x)/\sigma(x)$ où σ est la factorisable définie par $\sigma(p) = 2^p$. En effet, la dernière inégalité vient de ce que pour tout $n_i \geqslant 0$ et p_i premier, on a

$$n_1 p_1 + \dots + n_s p_s \leqslant p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}.$$

Si l'on remarque, alors, que $1/\sigma \in A_e$ et que $\sum |a(p)/\sigma(p)|$ converge, on peut écrire:

$$\sum a(x)/\sigma(x) = \sum 1/\sigma(x) \sum \frac{a(p)}{\sigma(p) - 1} \leqslant c \cdot \sum \frac{|\alpha(p) - \beta(p)|}{2^p - 1}.$$

DÉFINITION 1. Si $f \in A_e$, on dit que $\sigma \in \mathfrak{M}$ est un *zéro* de f si $\sum f\sigma = 0$. On note $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. Si l'on considère f comme fonction de variables complexes, un zéro de f est une suite $(z_1^0, \dots, z_n^0, \dots)$ de complexes z_i^0 tels que $f(z_1^0, \dots, z_n^0, \dots) = 0$ (avec $|z_i^0| \leqslant 1$).

EXEMPLE. $Z(u - u_p)$ est l'ensemble de toutes les factorisables de $\mathfrak{M}$ telles que $\alpha(p) = 1$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes:

(z_1) $Z(f) = \emptyset \Leftrightarrow f \in G$,

(z_2) $Z(f) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow Z(f) \supset \mathfrak{M}^1 \Leftrightarrow f = 0$,

(z_3) $Z(f * g) = Z(f) \cup Z(g)$,

(z_4) $Z(af+bg) \supset Z(f) \cap Z(g)$ où $a, b \in C$,

(z_5) $Z(\gamma f) = Z(f)$ si $\gamma \in C, \gamma \neq 0$,

(z_6) $\forall \alpha \in \mathfrak{M}$, on a $\alpha Z(\alpha f) \subset Z(f)$ et égalité si $\alpha \in \mathfrak{M}^1$,

(z_7) $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset \Leftrightarrow (f)+(g) = (u) = A_e$,

(z_8) $Z(f) \ni u \Leftrightarrow f(1) = 0$,

(z_9)] $Z(f) \subset Z(g) \Rightarrow Z(\alpha f) \subset Z(\alpha g)$ d'où $Z(f) = Z(g) \Rightarrow Z(\alpha f) = Z(\alpha g)$. De plus, $Z(f) \subset Z(\alpha f) \Leftrightarrow Z(f) \subset Z(\alpha f) \subset Z(\alpha^2 f) \subset \ldots Z(\alpha^n f)$ avec $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ et même équivalence en renversant les signes d'inclusion,

(z_{10}) $Z(\bar{f}) = \overline{Z(f)}$.

Topologiquement, $Z(f)$ qui est un compact de $\mathfrak{M}$ a son intérieur vide si $f \neq 0$:

PROPOSITION 22. *Soit $f \in A_e$. Si $\sum f\sigma$ est nulle sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathfrak{M}$, alors, $\sum f\sigma$ est identiquement nulle, c'est-à-dire $f = 0$.*

Supposons que $Z(f)$ contienne un ouvert Ω: Il existe α_0 telle que $\sum f\alpha_0 = 0$ et une boule ouverte $B(\alpha_0, r_0)$ de centre α_0 de rayon r_0 contenue dans Ω. L'ensemble $\mathfrak{M}^*$ des factorisables jamais nulles étant partout dense, on peut supposer $\alpha_0 \in \mathfrak{M}^*$. Si on pose $f\alpha_0 = f_0$, on se ramène au cas d'une fonction f telle que $\sum fe = \sum f = 0$. D'après (z_6) qui s'écrit encore $Z(\bar{\sigma} f) = \sigma Z(f)$ quand $\sigma \in \mathfrak{M}^1$ on voit que $B(\sigma, r) = \sigma B(e, r) \subset Z(f\bar{\sigma})$. Quand σ parcourt $\mathfrak{M}^1$, les boules $B(\sigma, r)$ recouvrent $\mathfrak{M}^1$ qui est compact. Il existe donc un nombre fini de ces boules qui recouvrent $\mathfrak{M}^1$: On a $\mathfrak{M}^1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\sigma_i, r)$ d'où $\mathfrak{M}^1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} Z(f\sigma_i) = Z(f\sigma_1 * \ldots * f\sigma_n)$ et d'après la propriété (z_2) on a $f\sigma_1 * \ldots * f\sigma_n = 0$, donc, il existe j tel que $f\sigma_j = 0$, donc, $f = 0$ puisque $\sigma_j \in \mathfrak{M}^1$. En revenant à la fonction initiale, on a $f\alpha_0 = 0$ et comme $\alpha_0 \in \mathfrak{M}^*$, on a $f = 0$.

COROLLAIRE. *Si f est constante sur un ouvert, alors, $f = a \cdot u$, $a \in C$.*

Remarque. On a vu (§ 10) que si $f(1) \neq 0$, alors, $Z(f) \cap \mathfrak{M}^* \neq \emptyset$ si f non inversible.

DÉFINITION 2. Si $f \in A_e$, on appelle *domaine d'inversibilité* de f et on note $I(f)$ l'ensemble des factorisables $\sigma \in \mathfrak{M}$ telles que $f\sigma$ soit inversible.

EXEMPLE. $I(u-2u_p) = \{\alpha \mid |\alpha(p)| < 1/2\}$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes:

(i_1) $I(f) = \emptyset \Leftrightarrow f(1) = 0$,

(i_2) $I(f) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow I(f) \cap \mathfrak{M}^1 \neq \emptyset \Leftrightarrow f \in G$,

(i_3) $I(f*g) = I(f) \cap I(g)$,

(i_4) $I(\gamma f) = I(f)$ si $\gamma \neq 0$, $\gamma \in C$,

(i_5) $\alpha I(\alpha f) \subset I(f) \subset I(\alpha f) \forall \alpha \in \mathfrak{M}$ et égalité si $\alpha \in \mathfrak{M}^1$ d'où $I(f) = \bigcap_\alpha I(\alpha f) = \bigcup_\alpha \alpha I(\alpha f)$,

(i_6) $I(\bar{f}) = I(f)$,

(i_7) $Z(f) \supset Z(g) \Rightarrow I(f) \subset I(g)$ et, en particulier, $Z(f) = Z(g) \Rightarrow I(f) = I(g)$.

Pour (i_7) remarquons que si $\sigma \in \mathfrak{M} \cap I(f)$, alors, $\sigma \in I(g)$, sinon $g\sigma$ ne serait pas inversible et il existerait β telle que $\sum g\sigma\beta = 0$, donc, $\sigma\beta \in Z(g)$ donc $\in Z(f)$ et $\sum f\sigma\beta$ serait nul, ce qui n'est pas possible puisque $f\sigma$ est inversible.

PROPOSITION 25. *Soit $f \in A_e$. Alors:*

(a) *$I(f)$ est ouvert,*

(b) *$I(f)$ est le plus grand des idéaux du demi-groupe $\mathfrak{M}$ qui ne rencontrent pas $Z(f)$,*

(c) $I(f) = \bigcap_\alpha \complement Z(\alpha f)$,

(d) $I(f) = \{\beta \mid \forall \alpha \in Z(f)\ \exists p$ *tel que* $|\beta(p)| < |\alpha(p)|\}$.

(a) Si $\alpha \in I(f)$, alors, $f\alpha \in G$ qui est ouvert et si $\|g - f\alpha\| < c$ où $c = c(f\alpha)$ est constante, g est inversible. Ces g comprennent les $f\beta$ où β est assez proche de α car si N est tel que $2 \sum_1^N |f(x)| < c/2$, il suffit de prendre β telle que $d(\beta, \alpha) < c/2 \sum_1^{N-1} 2^x |f(x)|$.

(b) $I(f)$ est idéal de $\mathfrak{M}$ puisque $f \in G \Rightarrow f\alpha \in G\ \forall \alpha \in \mathfrak{M}_0$. Si un idéal J ne rencontre pas $I(f)$ soit $\alpha \in J$, $\alpha \notin Z(f)$. Si $\alpha \notin I(f)$, $f\alpha$ n'étant pas inversible, il existe β avec $\sum f\alpha\beta = 0$ donc $\alpha\beta \in Z(f)$. Mais $\alpha\beta \in J$ puisque J est idéal, ce qui contredit $J \cap Z(f) = \emptyset$.

(c) Si $\beta \in I(f)$, alors $f\beta \in G$ et $\forall \alpha$, $f\beta\alpha \in G$ donc $\beta \notin Z(\alpha f)$, c'est-à-dire, $\forall \alpha$ on a $\beta \in \complement Z(\alpha f)$. Réciproquement, si $\beta \in \complement \bigcup_\alpha Z(\alpha f)$, alors, $\sum f\beta\alpha \neq 0\ \forall \alpha$, c'est-à-dire $\beta \in I(f)$.

(d) Si $\beta \in I(f)$, soit $\alpha \in Z(f)$. Si on avait $|\beta(p)| \geqslant |\alpha(p)|\ \forall p$, alors, $\alpha = \beta\gamma$ où $\gamma \in \mathfrak{M}$, d'où $\sum f\alpha = \sum f\beta\gamma \neq 0$, ce qui est contradictoire.

Réciproquement, si $\beta \geqslant \alpha$, $\forall \alpha \in Z(f)$ $(u \notin Z(f))$ alors, $\beta \in I(f)$ sinon $\sum f\beta\gamma = 0$ pour un γ convenable et on aurait $|\gamma(p)| > 1$, impossible.

COROLLAIRE. *En général $\overline{I(f)} \neq I(f)$ puisque $\mathfrak{M}$ est connexe, c'est d'autre part un idéal qui contient $I(f)$, il rencontre donc $Z(f)$: Il existe α tel que $\sum f\alpha = 0$ et tel que dans tout voisinage de α il existe β avec $f\beta$ inversible. De plus, pour que $\overline{I(f)} = \mathfrak{M}$ il faut et il suffit que $Z(f) \subset \mathfrak{M}^1$.*

Remarque 1. Pour tout $\lambda \in C$ soit $Z_\lambda(f) = Z(\lambda u - f)$. Si $\lambda \neq \lambda'$, alors $Z_\lambda(f) \cap Z_{\lambda'}(f') = \emptyset$ et quand λ parcourt le spectre de f, les $Z_\lambda(f)$ forment une partition de $\mathfrak{M}$ qui induit une relation d'équivalence S avec $\mathfrak{M}/S$ isomorphe à $\mathrm{Sp}(f)$.

Remarque 2. Soit $E_{p,a}$ l'ensemble des β telles que $|\beta(p)| < |a(p)|$ $\forall p$ premier, alors, $I(f) = \bigcap_{a \in Z(f)} \bigcup_{p} E_{p,a}$.

DÉFINITION 3. Si $f \in A_e$, on appelle *annulateur* de f, noté $A(f)$, l'ensemble des $a \in \mathfrak{M}$ tels que $fa = 0$. Ainsi, si $f = u_p$, $A(f) = \{a \mid a(p) = 0\}$.

Propriétés évidentes:

(a_1) $A(f) \subset Z(f)$,

(a_2) $A(f) = \emptyset \Leftrightarrow f(1) = 0$ et $A(f) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow f = 0$,

(a_3) $A(f*g) = A(f) \cup A(g)$,

(a_4) $A(f+g) \supset A(f) \cap A(g)$ et égalité si $s(f) \cap s(g) = \emptyset$. Ainsi, $A\left(\sum f(n) u_n\right) = \bigcap_n A(u_n)$ $(n \in s(f))$,

(a_5) $A(f) \subset A(fa)$ et égalité si $a \in \mathfrak{M}^*$,

(a_6) $A(f) = A(\bar{f}) = A(|f|)$.

PROPOSITION 26. *Soit $f \in \mathfrak{m}_u$. Alors*

1. *$A(f)$ est fermé,*
2. $\overset{\circ}{\widehat{A(f)}} = \emptyset$ *si* $f \neq 0$ *et* $\overset{\circ}{\widehat{A(f)}} = \mathfrak{M}$ *si* $f = 0$,
3. *$A(f)$ est le plus grand idéal du demi-groupe $\mathfrak{M}$ qui est contenu dans $Z(f)$,*
4. $A(f) = \bigcap_{\sigma} Z(\sigma f) = \bigcap_{a} Z(af)$ *où* $a \in \mathfrak{M}^1$,
5. $A(f) = \bigcap_{\lambda} I(\lambda u + f)$ *où* $\lambda \in C^*$.

La vérification est immédiate. Remarquons que $A(f) = \emptyset$ équivaut à l'existence d'un nombre fini n de factorisables $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}^1$ telles que $\bar{a}_1 Z(f) \cap \ldots \cap \bar{a}_n Z(f) = \emptyset$.

PROPOSITION 27. *Soit f non nulle $\in A_e$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *$Z(f)$ est un idéal du demi-groupe $\mathfrak{M}$,*
2. $Z(f) = A(f)$,
3. *$f = u_n * j$ où j est inversible dans A_e,*
4. *$\forall \sigma \in \mathfrak{M}$ l'idéal principal (f) contient $f\sigma$,*
5. *l'idéal principal (fa) est faiblement fermé pour tout a,*
6. *l'idéal principal (fa) est fortement fermé pour tout a.*

On va démontrer $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ et $3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 2$.

$1 \Rightarrow 2$: c'est une conséquence de la proposition précédente.

$2 \Rightarrow 3$: remarquons d'abord que f n'a pas de zéro dans $\mathfrak{M}^*$ et que pour tout a on a: $A(af) = Z(af)$: en effet, si $\beta \in Z(af)$, alors, $\beta a \in Z(f) = A(f)$ donc $\beta \in A(fa)$.

(a) f est à support premier fini. Soit s le nombre d'éléments de $s_1(f)$. Si $s = 0$, f est inversible et les propositions sont équivalentes. Si $s = 1$, f s'écrit en tant que série formelle $X^n(a_0 + a_1 X + \ldots)$ où $a_0 \neq 0$ et $a_0 + a_1 X + \ldots$ inversible, sinon on aurait un zéro $x_0 \neq 0$, donc un zéro dans $\mathfrak{M}^*$ qui n'appartiendrait pas à $A(f)$.

Supposons $s \geqslant 2$: f s'écrit: $f = X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s} f'(X_1, \ldots, X_s)$ en mettant en facteurs le plus de X_i possible.

On suppose f' non inversible. Alors f' est sans terme constant, sinon il existerait un zéro dans $\mathfrak{M}^*$. Considérons un zéro de f': $x = (0_1, \ldots, 0_q, x_{q+1}, \ldots, x_s)$ où les $x_i \neq 0$ et qui a le plus petit nombre possible de valeurs nulles, soit q. On a changé éventuellement l'ordre d'indéxation des indéterminées pour simplifier l'écriture. On a $q \geqslant 1$, sinon x serait un zéro de f dans $\mathfrak{M}^*$. On peut écrire:

$$f' = a_0(X_{q+1}, \ldots, X_s) + \sum a_{(i)}(X_{q+1}, \ldots, X_s) X_1^{i_1} \ldots X_q^{i_q}.$$

Si $q = s$, le terme a_0 est nul. Si $q < s$, de l'égalité $Z(f) = Z(af) \forall a \in \mathfrak{M}^*$, on déduit que a_0 est identiquement nul et f' est réduit au terme $\sum a_{(i)}(X_{q+1}, \ldots, X_s) X_1^{i_1} \ldots X_q^{i_q}$. On ne peut avoir $q = 1$, sinon X_1 serait en facteur, ce qui est exclu par hypothèse.

Considérons $x = (0, \ldots, x_k, \ldots, x_q, x_{q+1}, \ldots, x_s)$: ce n'est pas un zéro de f' si $x_k \neq 0$, sinon q ne serait pas le plus petit possible. On en déduit que pour tout $k = 1, \ldots, q$, il existe un monôme $X_k^{n_k}$, $n_k > 0$ à coefficient $a_{k,n}(X_{q+1}, \ldots, X_s)$ non identiquement nul et même tel que $a_{k,n}(x_{q+1}, \ldots, x_s) \neq 0$. Soit $g = f'(X_1, \ldots, X_q, x_{q+1}, \ldots, x_x)$. C'est une série en $X_1, \ldots, X_q$ avec des termes en $X_k^{n_k}$ pour tout $k = 1, \ldots, q$, non inversible puisque s'annulant pour $X_1 = \quad = X_q = 0$. Faisons ensuite $X_3, \ldots, X_q$ égaux à 0 si $q \geqslant 3$ avec $X_1 = X$ et $X_2 = Y$ on a une série $F_X(Y)$ non inversible s'annulant pour $X = Y = 0$ qui sem et sous la forme $F_X(Y) = b_0(X) + b_1(X) Y + \ldots + B_n(X) Y^n$ où l'un des b_i est une constante non nulle et où b_0 contient un terme en X^m. Pour $X = x \neq 0$ et $x \leqslant 1$ la fonction $F_x(Y)$ ne s'annulant pas est inversible et $F_0(Y)$ est limite non nulle d'une suite d'inversibles, donc, diviseur de zéro topologique en vertu de la propriété B du § 10 et a donc un zéro en Y de module 1, ce qui n'est pas possible: on aurait diminué q. Donc f' est inversible et $f = u_n * j$.

(b) Cas général: Pour tout i la fonction fe_i est à support premier fini et $Z(fe_i) = A(fe_i)$ donc $fe_i = u_{n(i)} * j_i$ où j_i inversible. On a $n(i) = \omega(fe_i) = \omega(f) = n(i) = n$ si i est grand, d'où, $fe_i = u_n * j_i$ et les inversibles j_i tendent vers une fonction j telle que $j(1) = f(n) \neq 0$. Elle est inversible, sinon il existerait $a \in \mathfrak{M}^*$ telle que fa soit dzt et f aurait un zéro dans $\mathfrak{M}^*$, ce qui n'est pas possible.

$3 \Rightarrow 4$: $(u_n * j)\sigma = \sigma(n) u_n * j\sigma = \sigma(n) u * u_n * j\sigma \in (u_n * j) = (u_n)$.

$4 \Rightarrow 1$: Soit $\alpha \in Z(f)$ et $\beta \in \mathfrak{M}$, on a $f\alpha = f * g_\beta$ pour un $g_\beta \in A_e$ convenable, donc, $f\beta\alpha = f\alpha * g_\beta \alpha$ et puisque $\sum f\alpha = 0$, on a $\sum f\alpha\beta = 0$, d'où, $\beta\alpha \in Z(f)$ $\in Z(f)$ et $Z(f)$ est un idéal.

$3 \Rightarrow 5$: Soit $g \in$ l'adhérence faible de l'idéal (u_n): g est limite faible de $g_i \in A_e$ avec $g_i = u_n * h_i$, $h_i \in A_e$. La suite h_i est de Cauchy car $\nu(g_i - g_j) = \nu(h_i - h_j)$ et tend vers h dans le complété de A_e (voir chapitre III). On a

$$\sum_1^N |u_n * h(x)| = \sum_1^{\left[\frac{N}{n}\right]} h(y) = \sum_1^N |f(x)| < +\infty$$

donc $h \in A_e$ et $g = u_n * h$ appartient à (u_n). Ensuite, pour tout α on a $(\alpha u_n) = (u_n)$ ou (0), donc $(f\alpha)$ est faiblement fermé.

$5 \Rightarrow 6$: Trivial.

$6 \Rightarrow 2$: On a $r(f\alpha) > 0$ quand $f\alpha \neq 0$ puisque $(f\alpha)$ est fermé, donc, $\varrho(f\alpha) > 0$ quand $f\alpha \neq 0$ puisque $\varrho \geqslant r$. Soit alors $\alpha \in Z(f)$, $\alpha \notin A(f)$: On a $\varrho(f\alpha) > 0$ puisque $\alpha \notin A(f)$ et d'autre part $\varrho(f\alpha) = \operatorname{Inf}\left|\sum f\alpha\sigma\right| = \left|\sum f\alpha e\right| = 0$ puisque $\alpha \in Z(f)$ ce qui est contradictoire, donc, $Z(f) = A(f)$.

Corollaire. Supposons qu'il existe f telle que $Z(f) = \{u\}$. Alors $Z(f) = A(f)$ et $f = u_n * j$ avec $n > 1$ et $j \in G$. Mais $Z(f) = Z(u_n)$ n'est pas réduit à $\{u\}$, ce qui est contradictoire. Autrement dit $\mathfrak{m}_u \subset \bigcup \mathfrak{m}_\sigma$ où $\sigma \neq u$. En particulier, si $Z(f)$ n'a qu'un élément, alors, $f(1) \neq 0$ et cet élément α appartient à $\mathfrak{M}^1$ c'est-à-dire f est dzt. Notons d'abord que $s_1(f)$ est l'ensemble de tous les premiers et $\alpha \in \mathfrak{M}^*$ car $Z(f)$ rencontre $\mathfrak{M}^*$. Si f n'est pas dzt faible et si le premier p_0 est grand, la fonction $f' = \sigma f$ où $|\sigma(p_0)| < |\alpha(p_0)|$ et $\sigma(p) = 1$ si $p \neq p_0$ n'est pas inversible puisque proche de f, elle a donc un zéro β, d'où $\alpha' = \beta\sigma$ est un zéro de f différent de α, ce qui n'est pas possible puisque f n'en a qu'un. Donc f est diviseur de zéro topologique.

Remarque. Une fonction n'ayant qu'un zéro dans $\mathfrak{M}$ peut exister: $f = u - \sum a_p u_p$ où les a_p sont par exemple des réels > 0 vérifiant $\sum a_p = 1$.

§ 18. Extension aux idéaux.

Définition 1. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A_e on note $Z(\mathfrak{a})$ l'ensemble $\bigcap Z(f)$ où f parcourt $\mathfrak{a}$. Ainsi $Z(\mathfrak{m}_\alpha) = \{\alpha\}$. On a les propriétés suivantes

(Z_1) $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{a} = A_e$ et $Z(\mathfrak{a}) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (0)$,

(Z_2) $Z(\mathfrak{a})$ est fermé et d'intérieur vide si $\mathfrak{a} \neq (0)$,

(Z_3) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow Z(\mathfrak{b}) \subset Z(\mathfrak{a})$,

(Z_4) $Z(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{b})$ et si $\mathfrak{a}_\lambda$ est une famille quelconque d'idéaux $Z\left(\bigcap_\lambda \mathfrak{a}_\lambda\right) \supset \bigcup_\lambda Z(\mathfrak{a}_\lambda)$,

(Z_5) $Z(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b})$ et, plus généralement, $Z\left(\sum \mathfrak{a}_\lambda\right) = \bigcap_\lambda Z(\mathfrak{a}_\lambda)$,

(Z_6) si $\mathfrak{a} = (f)$ principal, alors, $Z(\mathfrak{a}) = Z(f)$,

(Z_7) $Z(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{b}) = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{a}+\mathfrak{b} = A_e$.

DÉFINITION 2. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A_e, $Z(\alpha\mathfrak{a})$ où $\alpha \in \mathfrak{M}$ l'ensemble $\bigcap_f Z(\alpha f)$ où $f \in \mathfrak{a}$. On appelle *domaine d'inversibilité* de $\mathfrak{a}$, noté $I(\mathfrak{a})$, l'ensemble $\bigcap_\alpha \complement Z(\alpha\mathfrak{a}) = \bigcap_\alpha \bigcup_f \complement Z(\alpha f)$. Notons que $I(\mathfrak{a}) = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_u$ et $I(\mathfrak{a}) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = A_e$.

PROPOSITION 28. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A_e non contenu dans $\mathfrak{m}_u$. Alors,*

1. *$I(\mathfrak{a})$ est le plus grand idéal du demi-groupe $\mathfrak{M}$ qui ne rencontre pas $Z(\mathfrak{a})$,*
2. *$I(\mathfrak{a}) = \{\sigma \forall \alpha \in Z(\mathfrak{a})\ \exists p$ premier tel que $|\sigma(p)| < |\alpha(p)|\}$,*
3. *$I(\mathfrak{a})$ est ouvert et connexe,*
4. *$I(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} I(f) = \bigcup_f \bigcap_\alpha \complement Z(\alpha f)$.*

1. $I(\mathfrak{a})$ est un idéal: Si $\beta \in I(\mathfrak{a})$, alors, $\forall \alpha$ il existe $f \in \mathfrak{a}$ telle que $\sum f\alpha\beta \neq 0$. Soit $\gamma \in \mathfrak{M}$ et considérons $\beta\gamma$: Si on prend les α de la forme $\alpha'\gamma$, il existe pour tout α' un $f' \in \mathfrak{a}$ tel que $\sum f'\beta\alpha'\gamma \neq 0$, donc, quelle que soit α' il existe f' telle que $\sum (\beta\gamma)\alpha f' \neq 0$ d'où $\beta\gamma \in I(\mathfrak{a})$.

Ensuite, $I(\mathfrak{a}) \cap Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$ car $I(\mathfrak{a}) \subset \complement Z(\mathfrak{a})$. Soit I' un idéal de $\mathfrak{M}$ qui ne rencontre pas $Z(\mathfrak{a})$ et soit $\alpha \in I'$. Pour tout β on a $\alpha\beta \in I'$ et $\alpha\beta \notin Z(\mathfrak{a})$: Il existe donc $f_\beta \in \mathfrak{a}$ tel que $\sum \alpha\beta f_\beta \neq 0$, c'est-à-dire, $\alpha \in I(\mathfrak{a})$ ou encore $I' \subset I(\mathfrak{a})$.

2. L'ensemble $J = \{\sigma \mid \forall \alpha \in Z(\mathfrak{a})\ \exists p$ tel que $|\sigma(p)| < |\alpha(p)|\}$ est de façon évidente un idéal qui ne rencontre pas $Z(\mathfrak{a})$. D'autre part, si $\sigma \in I(\mathfrak{a})$ alors $\sigma \in J$, sinon il existerait $\alpha \in Z(\mathfrak{a})$ tel que $|\sigma(p)| \geqslant |\alpha(p)|$ pour tout p, donc, il existerait β telle que $\alpha = \beta\sigma \in I(\mathfrak{a})$, ce qui n'est pas possible.

3. $I(\mathfrak{a})$ est ouvert: Soit $\delta \in I(\mathfrak{a})$; il existe p_α tel que $|\delta(p_\alpha)| < |\alpha(p_\alpha)|$, autrement dit $a(\alpha) = \operatorname{Sup}_p \{2^{-p}|\alpha(p)| - |\delta(p)|\} > 0$. La fonction définie sur $Z(\mathfrak{a})$ à valeurs réelles positives qui à α fait correspondre $a(\alpha)$ est continue: on a

$$|a(\alpha) - a(\alpha')| \leqslant d(\alpha, \alpha') \qquad \text{avec} \qquad d(\alpha, \alpha') = \sum 2^{-p}|\alpha(p) - \alpha'(p)|.$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\operatorname{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha'(p)| - |\delta(p)|] &= \operatorname{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha' - \alpha + \alpha| - |\delta|] \\ &\leqslant \operatorname{Sup}_p 2^{-p}|\alpha' - \alpha| + [|\alpha(p_\alpha)| - |\delta(p_\alpha)|]2^{-p_\alpha}\end{aligned}$$

où p_α réalise le maximum de $a(\alpha)$. Donc,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha'(p)| - |\delta(p)|] - [|\alpha(p_\alpha)| - |\delta(p_\alpha)|]2^{-p_\alpha} \\ &\qquad\qquad \leqslant \operatorname{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha'(p)| - |\alpha(p)|] \leqslant d(\alpha, \alpha')\end{aligned}$$

ou encore $a(\alpha')-a(\alpha)\leqslant d(\alpha,\alpha')$. Ensuite,

$$\begin{aligned} a(\alpha)-a(\alpha') &= 2^{-p_\alpha}[|\alpha(p_\alpha)|-|\delta(p_\alpha)|]-\operatorname*{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha'(p)|-|\delta(p)|] \\ &\leqslant 2^{-p_\alpha}[|\alpha(p_\alpha)|-|\delta(p_\alpha)|]+2^{-p_\alpha}[|\delta(p_\alpha)|-|\alpha'(p_\alpha)|] \\ &\leqslant 2^{-p_\alpha}[|\alpha(p_\alpha)-\alpha'(p_\alpha)|]\leqslant d(\alpha,\alpha') \end{aligned}$$

et finalement $a(\alpha)-a(\alpha')\leqslant d(\alpha,\alpha')$.

La fonction $a(\alpha)$ atteint donc son minimum $a_0=a(\alpha_0)>0$ pour $\alpha_0(p_0)$ puisque $Z(\mathfrak{a})$ compact. Si on prend alors δ' tel que $d(\delta,\delta')<a_0/2$, on a $\operatorname*{Sup}_p 2^{-p}[|\alpha(p)|-|\delta'(p)|]>a_0/2$, donc, il existe p tel que $|\alpha(p)|-|\delta'(p)|>0$ où p dépend de α et δ', ce qui montre que $I(\mathfrak{a})$ est ouvert.

N.B.: Si $E_{p,\alpha}=\{\sigma\in\mathfrak{M}|\ |\sigma(p)|<|\alpha(p)|\}$, on a $I(\mathfrak{a})=\bigcap_\alpha\bigcup_p E_{p,\alpha}$ où $\alpha\in Z(\mathfrak{a})$ et p parcourt l'ensemble des premiers; la démonstration prouve, de plus, que si $\delta\in I(\mathfrak{a})$, alors, il existe un ensemble fini F de premiers tel que $\delta\in\bigcap_\alpha\bigcup_{p\in F}E_{p,\alpha}$.

4. $I(\mathfrak{a})=\{\sigma|\ \exists a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{a}$ tel que $(\sigma a_1)+\dots+(\sigma a_n)=(u)\}$ autrement dit l'idéal engendré par le sous-groupe $\sigma\mathfrak{a}$ est A_e.

Si $\sigma\in I(\mathfrak{a})$ et $a\in\mathfrak{a}$, les $Z(\sigma a)$ n'ont pas de zéro commun α, sinon $\sum a\alpha\sigma=0\ \forall a\in\mathfrak{a}$, donc $\sigma\alpha\in Z(\mathfrak{a})$, or $\sigma\alpha\in I(\mathfrak{a})$ qui est un idéal. Donc, $\bigcap_\alpha Z(\sigma\alpha)=\emptyset$ ce qui implique l'existence d'un nombre fini d'éléments $a_1,\dots,a_n$ tels que

$$\bigcap_{i=1}^n Z(a_i\sigma)=\emptyset \quad \text{donc} \quad (\sigma a_1)+\dots+(\sigma a_n)=(u)=A_e.$$

Réciproquement, l'ensemble des σ qui vérifient la propriété est un idéal qui ne rencontre pas $Z(\mathfrak{a})$, donc, qui est contenu dans $I(\mathfrak{a})$. Montrons maintenant que $I(\mathfrak{a})=\bigcup I(f)=\bigcup_f\bigcap_\alpha Z(\alpha f)$.

Dans un sens, c'est trivial. Soit $\sigma\in I(\mathfrak{a})\cap\mathfrak{M}^*$ qui est $\neq\emptyset$ puisque $I(\mathfrak{a})$ est ouvert et $\mathfrak{M}^*$ partout dense. Il existe $a_1,\dots,a_n\in\mathfrak{a}$ et $f_1,\dots,f_n\in A_e$ tels que $\sigma a_1*f_1+\dots+\sigma a_n*f_n=u$. Si σ n'était pas dans $\bigcup_f I(f)$, $f\in\mathfrak{a}$, alors, en particulier, $\sigma(a_1*g_1+\quad+a_n*g_n)$ serait non inversible quels que soient les g_i dans A_e. Soit alors

$$\nu_0=\nu(\sigma a_1*f_1+\quad+\sigma a_n*f_n-\sigma a_1*\sigma g_1+\quad+\sigma a_n*\sigma g_n)\geqslant 1$$
$$\text{car}\quad \nu(u-F)<1\Rightarrow F\in G_e.$$

Or $\nu_0\leqslant\operatorname{Sup}\nu(\sigma a_i)\cdot\sum\nu(f_i-\sigma g_i)$. Prenons alors $\sigma g_i(x)=f_i(x)$ pour $x=1,\dots,N$ et $\sigma g_i(x)=0$ si $x>N$ où N est assez grand pour que $\sum_{i=1}^n\sum_{N+1}^\infty|f_i(x)|<\varepsilon/\operatorname{Sup}\nu(\sigma a_i)$ (ce qui est possible car $\sigma\in\mathfrak{M}^*$). On aurait alors $\nu_0\leqslant 1$, ce qui est contradictoire. Maintenant si σ n'est pas dans $\mathfrak{M}^*$, il existe un voisinage $V(\sigma)$ de σ, $V(\sigma)\subset I(\mathfrak{a})$ et $\alpha\in V(\sigma)\cap\mathfrak{M}^*$, plus précisément

$a \geqslant \sigma$. Alors, il existe $h \in \mathfrak{a}$ tel que ah soit inversible, ce qui implique σh inversible. Autres propriétés de $I(\mathfrak{a})$:

(I_1) $Z(\mathfrak{a}) \subset Z(\mathfrak{b}) \Rightarrow I(\mathfrak{b}) \subset I(\mathfrak{a})$ en particulier $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow I(\mathfrak{b}) \subset I(\mathfrak{a})$.

(I_2) $I(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \supset I(\mathfrak{a}) \cup I(\mathfrak{b})$ l'inclusion pouvant être stricte ($\mathfrak{m}_a + \mathfrak{m}_u$).

(I_3) $I(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = I(\mathfrak{a}) \cap I(\mathfrak{b})$ et en général $I\big(\bigcap_\lambda \mathfrak{a}_\lambda\big) \subset \bigcap_\lambda I(\mathfrak{a}_\lambda)$.

(I_4) $I(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = I(\mathfrak{a}) \cap I(\mathfrak{b})$.

(I_5) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal et si $\sigma \in \mathfrak{M}^1$ alors $\sigma\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $I(\sigma\mathfrak{a}) = I(\mathfrak{a})$. On a aussi $I(\mathfrak{a}) = I(\bar{\mathfrak{a}})$ où $\bar{\mathfrak{a}} = \{\bar{f} \mid f \in \mathfrak{a}\}$.

(I_6) $I(\mathfrak{a}) = \complement Z(\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{a} = A_e$ ou $\mathfrak{a} = (0)$.

Remarque. On peut définir aussi l'*annulateur* $A(\mathfrak{a})$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ comme l'ensemble $\bigcap_\mathfrak{a} \bigcap_f Z(\mathfrak{a}f) = \bigcap_f A(f)$ où f parcourt $\mathfrak{a}$. On a alors

(A_1) $A(\mathfrak{a}) = \mathfrak{M} \Leftrightarrow \mathfrak{a} = (0)$ et $A(\mathfrak{a}) = \emptyset \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_u$.

(A_2) $A(\mathfrak{a}) \subset Z(\mathfrak{a})$; il est fermé et d'intérieur vide si $\mathfrak{a} \neq (0)$.

(A_3) $A(\mathfrak{a})$ est un idéal de $\mathfrak{M}$ et le plus grand de ceux qui ne sont pas contenus dans $Z(\mathfrak{a})$.

(A_4) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow A(\mathfrak{b}) \subset A(\mathfrak{a})$ et même $Z(\mathfrak{a}) \subset Z(\mathfrak{b}) \Rightarrow A(\mathfrak{a}) \subset A(\mathfrak{b})$.

(A_5) $A(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = A(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = A(\mathfrak{a}) \cup A(\mathfrak{b})$ et en général $A\big(\bigcap_\lambda \mathfrak{a}_\lambda\big) \supset \bigcup_\lambda A(\mathfrak{a}_\lambda)$.

(A_6) Si $\mathfrak{a}_\lambda$ est une famille quelconque d'idéaux $A\big(\sum_\lambda \mathfrak{a}_\lambda\big) = \bigcap_\lambda A(\mathfrak{a}_\lambda)$.

(A_7) Si $\mathfrak{a} = (f)$ alors $A(\mathfrak{a}) = A(f)$.

(A_8) $A(\mathfrak{a}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} I(\lambda u + f)$, $\lambda \neq 0$.

N.B. — On peut avoir $A(\mathfrak{a}) = \{u\}$ contrairement aux $A(f)$ (exemple: $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_u$).

Chapitre III

Les algèbres $\hat{A}_e$, S et E

§ 1. L'algèbre $\hat{A}_e$. On a vu que A_e était normée par $\nu(f) = \operatorname{Sup}_a |\sum f\alpha|$. Munie de cette norme A_e n'est pas complète. On désigne sa complétée par $\hat{A}_e$: c'est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(\mathfrak{M})$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur le compact $\mathfrak{M}$. Les éléments de $\hat{A}_e$ sont caractérisés de la façon suivante:

THÉORÈME. *Soit $\mathfrak{M}_0$ l'ensemble des factorisables de $\mathfrak{M}$ qui sont dans A_e.*

1. *Si $\hat{f} \in \hat{A}_e$, il existe une suite de coefficients complexes $f(x)$, $x = 1, 2, \ldots$ tels que pour $\sigma \in \mathfrak{M}_0$ on ait $\hat{f}(\sigma) = \sum f(x)\sigma(x)$ et pour $\alpha \in \mathfrak{M}$ on ait $\hat{f}(\alpha) = \lim \sum f(x)\sigma(x)$ quand σ tend vers α en restant dans $\mathfrak{M}_0$.*

2. *si $\hat{f} \in C(\mathfrak{M})$ et s'il existe des coefficients $f(x)$ tels que $\forall \sigma \in \mathfrak{M}_0$, on ait $\hat{f}(\sigma) = \sum f(x)\sigma(x)$, alors, $\hat{f} \in \hat{A}_e$.*

3. *si $\hat{f} \in \hat{A}_e$, alors, $\sum |f(x)|^2 \leqslant \nu(f)^2 = \operatorname{Sup} |f(\alpha)|^2$ et par suite $f \in A_\alpha$ telles que $\alpha^2 \in A_e$.*

4. *$\hat{A}_e$ est la fermeture uniforme des fonctions finies.*

(1) On considère de façon habituelle l'ensemble des suites de Cauchy pour la topologie faible $f = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ d'éléments $f_i \in A_e$; deux suites étant équivalentes si $\nu(f_n - g_n)$ tend vers 0. Soit $\hat{f}$ une classe: comme $\nu(h) \geqslant \operatorname{Sup}_x |h(x)|$ $\forall h \in A_e$, on a $\operatorname{Sup}_x |f_n(x) - g_n(x)| < \varepsilon$ si n est grand. Il existe donc $f(x)$ limite uniforme des $f_n(x)$: on a, $\operatorname{Sup} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ dès que n est grand.

f est indépendante des représentants choisis dans la classe $\hat{f}$: si f et f' sont deux suites équivalentes, on a $\nu(f_n - f'_n) < \varepsilon$ si $n > N(\varepsilon)$. Il s'ensuit alors: $\operatorname{Sup}_x |f'(x) - f(x)| \leqslant \operatorname{Sup}_x |f'(x) - f'_n(x)| + \operatorname{Sup}_x |f'_n(x) - f_n(x)| + \operatorname{Sup}_x |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dès que n est assez grand, ε étant > 0 donné. On a donc $\operatorname{Sup}_x |f'(x) - f(x)| = 0$.

Les fonctions f_n sont équicontinues considérées comme applications de $\mathfrak{M}$ dans C: il faut montrer que $\sum |f_q\alpha - f_q\beta| < \varepsilon$ quel que soit q si

$d(\alpha, \beta) < \eta(\varepsilon)$. Soit $\varepsilon > 0$ et p et q assez grands $\geqslant N(\varepsilon)$ pour que $\nu(f_p - f_q) < \varepsilon/4$. Soit $d(\alpha, \beta)$ assez petit pour que

$$\operatorname{Max}\left\{\left|\sum f_1(\alpha-\beta)\right|, \left|\sum f_2(\alpha-\beta)\right|, \ldots, \left|\sum f_n(\alpha-\beta)\right|\right\} < \varepsilon/2$$

ce qui est possible puisque les $\sum f_i \sigma$ sont uniformément continues. Considérons alors $\sum f_q(\alpha-\beta)$. Si $q \leqslant N(\varepsilon)$ alors $|\sum f_q(\alpha-\beta)| < \varepsilon/2$ et si $q > N(\varepsilon)$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}\left|\sum f_q(\alpha-\beta)\right| &\leqslant \left|\sum (f_q - f_N)(\alpha-\beta)\right| + \left|\sum f_N(\alpha-\beta)\right| \\ &\leqslant \left|\sum (f_q - f_N)\alpha\right| + \left|\sum (f_q - f_N)\beta\right| + \left|\sum f_N(\alpha-\beta)\right| \\ &\leqslant 2\nu(f_q - f_N) + \left|\sum f_N(\alpha-\beta)\right| < 2\,\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \cap A_c$ est dense dans $\mathfrak{M}$. Soit $\alpha \in \mathfrak{M}$ et $V_\varepsilon(\alpha)$ le voisinage de α formé des σ telles que $d(\sigma, \alpha) = \sum 2^{-p} |\sigma(p) - \alpha(p)| \leqslant \varepsilon$. Si $p > p_0$ alors $\sum\limits_{p \geqslant p_0} 2^{-p} \leqslant \varepsilon/2$. Soit maintenant, pour tout p, le nombre $\alpha(p) = \varrho_p e^{i\varphi_p}$ où $\varrho_p = |\alpha(p)|$. Considérons $\sigma(p) = 0$ si $p > p_0$ et $\sigma(p) = (\varrho_p - s_p) e^{i\varphi_p}$ quand $p \leqslant p_0$ avec s_p réel positif et $\leqslant \operatorname{Min}\{\varrho_p/2, \varepsilon/2 \sum 2^{-p}\}$. Dans ces conditions $|\sigma(p)| < 1$ et $\sum |\sigma(p)|$ converge et $d(\sigma, \alpha) \leqslant \sum 2^{-p} \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\sum 2^{-p}\right)^{-1} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$.

Si $f = \lim f_n$ alors $\sum f(x)\sigma(x)$ converge $\forall \sigma \in \mathfrak{M}_0$: on a,

$$\sum |(f - f_p)\sigma| \leqslant \operatorname*{Sup}_x |f(x) - f_p(x)| \sum |\sigma| \leqslant \nu(f - f_p) \sum |\sigma|$$

donc $f - f_p$ est σ-convergente et puisque f_p l'est aussi, alors, f est σ-convergente.

$\sum f\sigma$ est uniformément continue sur $\mathfrak{M}_0$: si α et $\beta \in \mathfrak{M}_0$ on a,

$$\left|\sum f(\alpha-\beta)\right| \leqslant \left|\sum (f - f_p)\alpha\right| + \left|\sum (f - f_q)\beta\right| + \left|\sum (f_p - f_q)\alpha\right| + \left|\sum f_q(\alpha-\beta)\right|$$

et puisque les f_n sont équicontinues, si $d(\alpha, \beta) < \eta(\varepsilon)$ on a $|\sum f_q(\alpha-\beta)| < \varepsilon/4$ indépendamment de q. Il suffit de prendre alors $p > N_\alpha(\varepsilon)$ et $> N(\varepsilon)$ pour que $|\sum (f - f_n)\alpha| \leqslant \operatorname*{Sup}_x |f(x) - f_p(x)| \sum |\alpha|$ soit $< \varepsilon/4$ et $\left|\sum (f_p - f_q)\alpha\right| \leqslant \nu(f_p - f_q)$ soit $< \varepsilon/4$ et de prendre q de la même façon, ce qui entraînera $|\sum f(\alpha-\beta)| < \varepsilon$. D'après le théorème de prolongement des fonctions continues, la fonction définie pour tout σ convergente par $\sum f(x)\sigma(x)$, étant uniformément continue, elle se prolonge de façon unique en une fonction $\hat{f}$ de l'espace $C(\mathfrak{M})$. On a donc $\hat{f}(\alpha) = \lim \sum f\sigma$ quand σ tend vers α en restant dans $\mathfrak{M}_0 = \lim \sum f_q \alpha$ quand q augmente indéfiniment.

(2) Soit $\hat{f} \in C(\mathfrak{M})$ et $\{f(x)\}$ la suite associée telle que $\forall \sigma \in A_e$ on ait $\hat{f}(\sigma) = \sum f(x)\sigma(x)$. On a donc $\sum f\sigma$ uniformément continue sur $\mathfrak{M}_0$. Soit a_n une suite d'éléments de $\mathfrak{M}_0$ tendant vers e et soit $f_n = fa_n$. Les fonctions f_n sont dans A_e car $f(x)$ est borné: si $K = \nu(\hat{f})$, on a l'inégalité $|\sum f(x)e_q(x)x^{-s}| \leqslant K$ pour tout q et tout s complexe de partie réelle > 0, ce qui entraîne $\sum |f(x)|^2 e_q(x) \leqslant K^2$ et par suite $|f(x)| \leqslant K$. Ensuite, on a:

$$\nu(f_n - f_{n+p}) = \operatorname*{Sup}_{\sigma} \left|\sum (fa_n - fa_{n+p})\sigma\right| = \operatorname*{Sup}_{\sigma} \left|\sum f(a_n\sigma - a_{n+p}\sigma)\right|$$

$$= \operatorname*{Sup}_{\sigma} |\hat{f}(a_n\sigma - a_{n+p}\sigma)| < \varepsilon$$

si n est grand quel que soit p, en vertu de la continuité uniforme de f si l'on remarque que $d(a_n\sigma, a_{n+p}\sigma) \leqslant d(a_n, a_{n+p})$. La suite f_n définit donc une fonction $\hat{f}' \in \hat{A}_e$ qui coïncide avec $\hat{f}$ sur $\mathfrak{M}_0$, d'où $\hat{f}' = \hat{f}$.

(3) On a vu en (2) que $\sum |f(x)|^2 e_q(x) \leqslant \nu(\hat{f})^2$ quel que soit q, donc à la limite $\sum |f(x)|^2 \leqslant \nu(\hat{f})^2$.

N.B. On peut aussi passer à la limite dans les inégalités $\sum |f_n(x)|^2 \leqslant \nu(\hat{f})^2$ puisque l_2 est complet.

Remarque. On a $\nu(\hat{f}) \leqslant \operatorname*{Sup}_n \nu(\hat{f}_n)$.

(4) Il faut montrer que les polynômes en un nombre fini d'indéterminées sont denses dans $\hat{A}_e$.

Soit $\hat{f} \in \hat{A}_e$: on a par exemple $\hat{f} = \lim f_n$ où $f_n(x) = f(x)e_n(x)x^{-1/n}$. Si $\varepsilon > 0$ et si n est grand, on a $\forall \sigma$; $|\hat{f}(\sigma) - \sum \sigma f e_n x^{-1/n}| = |\hat{f}(\sigma) - \hat{f}(e_n x^{-1/n}\sigma)| < \varepsilon/2$. Maintenant, si $\varphi_N = \sum_{n=1}^{N} f(x)e_n(x)x^{-1/2}\, u_x$, il vient $|\sum f e_n x^{1/n}\sigma - \varphi_N(\sigma)| < 2\varepsilon/2 = \varepsilon$ dès que N est grand. Les fonctions φ_N tendent alors vers $\hat{f}$.

Remarques. (a) La fonction $\hat{f}$ définie par $\hat{f} \in \hat{A}_e$ est unique, autrement dit, $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$. De plus, $f+g$, $f*g$, γf correspondent respectivement à $\hat{f}+\hat{g}$, $\hat{f}*\hat{g}$ et $\gamma\hat{f}$.

(b) Si $\sigma \in \mathfrak{M}$, elle permet de définir un homomorphisme de $\hat{A}_e$, un automorphisme si $\sigma \in \mathfrak{M}^1$: si $\hat{f}$ est représentée par f, alors, $\hat{f}\sigma$ est représentée par $f\sigma$. Ces homomorphismes sont continus puisque $\nu(\hat{f}\sigma) \leqslant \nu(\hat{f})$.

(c) L'espace des maximaux de $\hat{A}_e$ est $\mathfrak{M}$: d'abord l'ensemble des $\hat{f} \in \hat{A}_e$ telles que $\hat{f}(a) = 0$ est un idéal maximal $\hat{\mathfrak{m}}_a$. Ensuite, si $\hat{f}(\sigma) \neq 0 \forall \sigma$, alors, $\sum fa \neq 0\ \forall a \in A_e \cap \mathfrak{M}$, donc fa est inversible dans A_e. Il s'ensuit que $\forall a \in A_e \cap \mathfrak{M}$, on a $\sum f^{*-1}a = \left(\sum fa\right)^{-1} = \left(\hat{f}(a)\right)^{-1}$ qui est continue dans $C(\mathfrak{M})$ donc $f^{*-1} \in A_e$. Ceci montre en particulier que la fonction associée à $\hat{f}^{*-1}$ est f^{*-1} quand elle existe.

(d) Les inégalités démontrées dans le § 12 montrent que si f_n est la partie homogène de f définissant $f \in A_e$, alors, f_n définit $\hat{f}_n \in \hat{A}_e$. De plus, si $\hat{f} \in \hat{A}_e$, alors, $\sum_p |f(p)| < +\infty$ (p premier).

Factorisables de $\hat{A}_e$: L'ensemble P des fonctions de la forme $f = cg\sigma$ où $c \in C$, g réelle $\geqslant 0$ et $\sigma \in \mathfrak{M}$ est fermé dans A_e. On a plus:

PROPOSITION 29. *P est fermé dans $\hat{A}_e$.*

Notons qu'il est fermé dans A_e pour la topologie induite (faible). D'après le lemme suivant: si f_n est une suite de Cauchy faible d'éléments de A_e et si $\|(f_n)\|$ est borné, alors, $\lim f_n = \hat{f} = f \in A_e$

$$\Big(\sum_1^N |f(x)| \leqslant \sum_1^N |(f-f_n)(x)| + \sum_1^N |f_n(x)| \leqslant \sum_1^N |(f-f_n)(x)| + \sum_1^\infty |f_n(x)|$$
$$\leqslant \varepsilon + \operatorname*{Sup}_n \sum |f_n(x)|\Big)$$

si $f_n \in P$, $\nu(f_n) = \|f_n\|$ est borné et la fonction limite appartient à $P \subset A_e$.

COROLLAIRE. *Une limite faible de factorisables est une factorisable de A_e.*

Réciproquement, si la fonction f associée à $\hat{f} \in \hat{A}_e$ est de la forme $cg\sigma$, alors, $\hat{f} = f \in A_e$. En effet,

$$\operatorname*{Sup}_\sigma |\hat{f}(\sigma)| \geqslant \operatorname*{Sup}_{n,s} \Big|\sum f e_n x^{-s}\Big| \geqslant \sum_1^n |f(x)|$$

ce qui montre que $\sum |f(x)|$ est convergente. En particulier, si on appelle factorisable de $\hat{A}_e$ une fonction $\hat{f}$ dont l'associée f est factorisable dans A, le corollaire montre qu'elle est dans A_e: il n'y a pas d'autres factorisables que celles de A_e.

§ 2. L'algèbre S des fonctions convergentes.

DÉFINITION 1. Si $f \in A$, on dit que f est *convergente* s'il existe a (jamais nulle) telle que f soit a-convergente i.e. $f \in A_a$. On note S l'ensemble des fonctions convergentes. S est donc la réunion des algèbres A_a (et aussi des $\hat{A}_a$) et aussi la limite inductive des A_a pour le système des injections canoniques de A_a dans A_β quand $A_a \subset A_\beta$. On note aussi $S = C\{\{x_i\}\}_{i \in N}$.

C'est une algèbre locale d'idéal maximal $\mathfrak{m} \cap S$: si $f(1) \neq 0$ et si a est assez petite, alors, dans A_a on a $\|f - f(1)u\|_a < 1$ et f est inversible dans A_a. On a les propriétes suivantes pour la plupart immédiates.

(S_1) $f \in S \Leftrightarrow \exists \sigma$ telle que $\sum f\sigma$ converge (σ jamais nulle).

(S_2) $f \in S \Leftrightarrow$ il existe une constante $c > 0$ et une factorisable $\sigma > 0$ telles que $|f(x)| \leqslant c\sigma(x)$ pour tout x.

(S_3) $f \in S \Leftrightarrow$ il existe une constante $c > 0$ et une factorisable $\sigma > 0$ telles que $|f * \sigma(x)| \leqslant c\sigma(x) \forall\ x$.

(S_4) si pour tout x on a $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ et si $g \in S$, alors, $f \in S$.

(S_5) $f \in S \Leftrightarrow f\sigma \in S \forall \sigma$, $f \in S \Leftrightarrow |f| \in S$, $f^n \in S \Leftrightarrow f \in S$.

(S_6) Si $f \in S$ et si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \neq 0$, si $|f(1)| < R$, alors, $\sum a_n f^{*n} \in S$.

(S_7) Soit $m = \prod m_i$ une multiplicative décomposée canoniquement, alors, $f \in S$ si et seulement si chaque $m_i \in S$.

On utilise (S_2): on a: $|m_i| \leqslant \sigma_i$ (la constante pouvant être prise égale à 1) et on considère σ telle que $\sigma(p_i) = \sigma_i(p_i)$ (p_i nombre premier n^o i). En particulier toute factorisable appartient à S.

(S_8) Une fonction complètement additive est convergente: on définit σ par $\sigma(p) = \mathrm{Max}\{2, |a(p)|\}$ d'où, pour tout $x > 0$: $|a(x)| \leqslant |\sigma(x)|$.

(S_9) Si $f \in A$ considérée comme série formelle est un polynôme par rapport à chaque indéterminée X_i (les degrés d_i pouvant augmenter indéfiniment), alors, f est convergente.

La condition équivaut à dire que pour tout premier p, il existe un entier $n(p) \geqslant 0$ tel que pour tout x on ait $f(p^n x) = 0$ si $n > n(p)$. On utilise (S_2) en supposant (ce qui ne change pas l'appartenance à S) que $f(1) = 0$, ce qui permettra de prendre la constante $c = 1$. On détermine les valeurs $\sigma(p)$ de proche en proche: il existe d'abord $\sigma(2) > 0$ tel que $\sigma(2^n) \geqslant |f(2^n)|$ quel que soit n. On considère ensuite les valeurs $f(2^n 3^m)$ où $n \geqslant 0$ et $m > 0$, elles sont en nombre fini $\leqslant n(3)\ [1 + n(2)]$ et on peut choisir $\sigma(3) \geqslant \mathrm{Max}_{n,m} [|f(2^n 3^m)|/\sigma(2)^n]^{1/m}$ et > 0. On procède de même avec les valeurs $f(2^n 3^m 5^q)$ et ainsi de suite.

En particulier: une fonction homogène est convergente.

(S_{10}) Soit $f \in A$ et f_n sa partie homogène de degré n: on a alors $f \in S \Leftrightarrow$ il existe $\alpha > 0$ telle que $\overline{\lim} \|f_n\|_\alpha^{1/n} < +\infty$.

Nécessité triviale.

Suffisance: si $0 < R < \overline{\lim}^{-1} \|f_n\|_\alpha^{1/n}$, alors, la série $\sum \|f_n\|_\alpha R^n$ est convergente et ce n'est autre que: $\sum_n \|f_n\|_\sigma = \|f\|_\sigma$ où σ est la factorisable définie par $\sigma(x) = R^{t(x)} \alpha(x)$.

(S_{11}) une fonction à support premier fini n'appartient pas nécessairement à S, de façon triviale. Pour que f à support premier fini soit convergente, il faut et il suffit qu'il existe 2 constantes a et $b > 0$ telles que pour tout x on ait, $|f(x)| \leqslant a \cdot b^{t(x)}$ (on rappelle que $t(p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$). En effet, si $a\sigma$ majore $|f|$ on prend $b = \mathrm{Max}\, \sigma(p_i)$ où $p_i \in s_1(f)$.

(S_{12}) si $fe_n \in S$ quel que soit n, on n'a pas nécessairement $f \in S$: exemple: on prend f telle que $f(2^n p_i) = p_i^n$ et 0 ailleurs. Dans ces conditions, on devrait avoir pour vérifier (S_2) l'inégalité $\sigma(2) \geqslant p_i\ \forall i$ ce qui est impossible. On a toutefois l'équivalence suivante:

f est convergente si et seulement si il existe $\alpha > 0$ telle que $fe_n \in A_\alpha$ pour tout n.

Supposons $f(1) = 0$, ce qui ne change rien. On a

$$fe_1 = a_1 X_1 + a_2 X_1^2 + \ldots + a_n X_1^n +$$

et

$$\|fe_1\|_\alpha = \sum |a_i| \alpha(p_i)^i = \sum |a_i| \alpha(2)^i.$$

On peut alors choisir une valeur $\sigma(2) > 0$ telle que $\sum a_i \alpha(2)^i \sigma(2)^i$ soit < 1. Considérons $fe_2 = fe_1 + f_1' X_2 + \quad + f_n' X_2^n + \ldots$ On a $\|fe_2\|_\alpha = \|fe_1\|_\alpha + \sum \|f_i'\|_\alpha \alpha(3)^i$. On peut choisir une valeur $\sigma(3) > 0$ telle que $\|fe_2\|_\alpha$ soit $< \|fe_1\|_\alpha + \frac{1}{2}$. Alors, on aura $fe_2\sigma$ de norme $< 1 + \frac{1}{2}$. De la même façon, on détermine $\sigma(5)$ et ainsi de suite et finalement on aura $\|fe_n\|_\sigma < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$, d'où $f\sigma \in A_\alpha$ et f est convergente.

La proposition suivante (triviale dans le cas d'une indéterminée) montre qu'en quelque sorte les éléments de $A - S$ sont infiniment grands par rapport à ceux de S.

PROPOSITION 30. *Soit $f \in A$ convergente et non nulle, alors,*

$$f * g \in S \Rightarrow g \in S.$$

Autrement dit, l'intersection du corps des fractions de S avec A est S.

(1) Remarquons que la preuve est triviale si $f(1) \neq 0$ car alors $f^{*-1} \in S$ donc $f^{*-1} * f * g = g \in S$. On suppose donc que $f(1) = 0$ et pour simplifier que $g(1) = 1$, l'appartenance à S de $f * g$ et g étant équivalente à celle de $f * (\lambda u + g)$ et $\lambda u + g$. Il existe deux factorisables α et $\beta > 0$ telles que $f\alpha \in A_e$ et $(f * g)\beta \in A_e$, donc en prenant σ définie par $\sigma(p) = \mathrm{Min}[\alpha(p), \beta(p)]$, on a $f\sigma \in A_e$ et $(f * g)\sigma \in A_e$: d'après (S_5) il revient au même de supposer pour simplifier que f et $f * g \in A_e$. Ceci dit, on écrira $\|f\|$ au lieu de $\|f\|_e$.

(2) Considérés comme séries formelles f et g peuvent s'écrire: $f = f_q + f_{q+1} + \ldots$, $g = u + g_1 + g_2 + \ldots$ avec f_i et g_i parties homogènes de degré i de f et g respectivement et $q > 0$, comme on l'a supposé. La partie homogène $(f * g)_n$ de $f * g$ est égale à $\sum_{i=q}^{n} f_i * g_{n-i}$. On a $f_i \in A_e$ et $\|f\| = \sum_i \|f_i\|$. On peut ensuite supposer $\|f\| \leqslant 1/2$ et $\|f * g\| \leqslant 1/2$ en multipliant au besoin f par une constante convenable, l'appartenance à A_e n'étant pas changée. L'égalité $f * g = f_q + (f_{q+1} + f_q * g_1) + \ldots + (f * g)_n + \quad$ montre que $f_q * g_1 \in A_e$ (chaque terme entre parenthèses est dans A_e). De même, en considérant $(f * g)_{q+2}$, on voit que $f_q^{*2} * g_2 \in A_e$ et enfin, pour tout $n \geqslant 0$, on a $f_q^{*n} * g_n \in A_e$.

(3) On a $\|f_q^{*n} * g_n\| \leqslant \|f\|^{n-1}$ si $n \geqslant 1$. Récurrence:

Si $n = 1$,

$$\|f_q * g_1\| \leqslant \|(f * g)_{q+1}\| + \|f_{q+1}\| \leqslant \|f * g\| + \|f\| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \|f\|^0 = \|f\|^{n-1}.$$

On suppose l'inégalité vraie pour $i \leqslant n-1$ et on considère $f_q^{*n} * g_n$. On a

$$\|f_q^{*n} g_n\| \leqslant \|f_q^{*n-1} * (f*g)_{q+n}\| + \|\sum_{i=1}^{n} f_q^{*n-1} * f_{q+i} * g_{n-i}\|$$

$$\leqslant \|f_q^{*n-1}\| \, \|(f*g)_{q+n}\| + \sum_{1}^{n} \|f_q^{*i-1} * f_{q+i}\| \, \|f_q^{*n-i} * g_{n-i}\|$$

$$\leqslant \|f\|^{n-2} \|f*g\| \, \|f_q\| + \sum_{1}^{n-1} \|f_{q+i}\| \, \|f\|^{n-2} + \|f\|^{n-2} \|f_q * f_{q+n}\|$$

$$\leqslant \|f\|^{n-2} (\|f_q\| + \|f_{q+1}\| + \dots + \|f_{q+n}\|) \leqslant \|f\|^{n-1}.$$

(4) Les fonctions g_n appartiennent à A_e: on peut d'abord supposer (en vertu de (S_2) que f_q n'est pas dzt fort: on sait qu'il existe a telle que $r(fa) > 0$ et $a \in \mathfrak{M}^*$. L'ensemble des dzt forts étant fermé dans A_e, on voit que si k est grand, alors, $\|f_q - f_q e_k\| < \varepsilon$ et $f_q e_k$ n'est pas dzt. Il en est alors de même de f_q^{*n} et $f_q^{*n} e_k$. De plus, l'inégalité $|r(f_q^{*n} e_k) - r(f_q^{*n})| \leqslant \|f_q^{*n} e_k - f_q^{*n}\|$ montre que si k_n est assez grand, alors, $k \geqslant k_n$, on a $r(f_q^{*n} e_k) \geqslant r_n > 0$.

Considérons maintenant $g_n e_k$, c'est une fonction finie car c'est un polynôme homogène en k indéterminées, au plus, donc appartient à A_e. Il s'ensuit que $\|f_q^{*n} e_k * g_n e_k\| / \|g_n e_k\| \geqslant r(f_q^{*n} e_k) \geqslant r_n$ dès que k est assez grand pour que $k \geqslant k_n$ et $g_n e_k \neq 0$. On a donc pour un tel k:

$$\|g_n e_k\| \leqslant \frac{1}{r_n} \|(f_q^{*n} * g_n) e_k\| \leqslant \frac{1}{r_n} \|f_q^{*n} * g_n\|.$$

Ceci montre que $\|g_n\| < +\infty$ et donc que $g_n \in A_e$. Ensuite,

$$\|g_n\| \leqslant \frac{1}{r(f_q^{*n})} \|f_q^{*n} * g_n\| \leqslant \frac{1}{r(f_q^{*n})} \|f\|^{n-1} \leqslant \|f\| \left[\frac{\|f\|}{r(f_q)}\right]^n$$

(5) Soit alors $a \in \mathfrak{M}$ telle que $a(p) = t \in]0, 1]$ $\forall p$ premier et où t vérifie l'inégalité $t\|f\| < r(f_q)$. On a $\|ag\| = \sum \|ag_n\| = \sum t^n \|g_n\| < +\infty$, donc, $ag \in A_e$ et d'après (S_2) g est convergente.

Remarque 1. Il n'en est plus de même si l'on remplace S par A_a dans la proposition: en fait, l'ensemble des f telles qu'il existe $g \in A_a$ vérifiant $f*g \in A_a$ $(g \neq 0)$ est une sous-algèbre locale de S contenant A_a.

Remarque 2. Soit $\bar{S}$ l'ensemble des f telles que $\forall n$ on ait $fe_n \in S$ ou, ce qui revient au même, pour toute partie finie P de l'ensemble des premiers, on ait $fe_P \in S$ avec une notation évidente. L'algèbre $\bar{S}$ qui est la limite projective des algèbres $C\{\{X_i\}\}$, $i \in P$ (fonctions convergentes habituelles) est une sous-algèbre locale de A contenant S. L'algèbre $\bar{S}$ est encore l'adhérence dans A de S pour la topologie définie à partir des ensembles $E_n = \{f \mid fe_n = 0\}$ qui forment une base de filtre d'idéaux de A.

Cette topologie est strictement plus fine que la ω-topologie, strictement moins fine que la t_1-topologie et incomparable à la t-topologie (§ 4) et munit A d'une structure d'espace complet. $\bar{S}$ est factorielle: si $g \in \bar{S}$ est irréductible dans $\bar{S}$, alors, il existe un entier $n(g)$ tel que ge_n soit irréductible dans $C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ dès que $n \geqslant n(g)$ car si pour une infinité de n on avait $ge_n = he_n * fe_n$ où he_n irréductible dans $C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ et fe_n non inversible, on aurait $g = h*f$ dans $\bar{S}$. Maintenant, si on a deux décompositions d'un élément f

$$f = f_1^{*q_1} * \ldots * f_s^{*q_s} = g_1^{*r_1} * \ldots * g_t^{*r_t}$$

on prend $n \geqslant \operatorname{Max}_{i,j}[n(f_i), n(g_j)]$ et les $f_i e_n$ et $g_j e_n$ sont irréductibles dans $C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$. La fonction $g_1 e_n$ est associée par exemple à $f_1 e_n$ pour une infinité de n et finalement, $f_1 = g_1 * j_1$ avec j_1 inversible dans $\bar{S}$.

Corollaire. *L'anneau S est factoriel.*

D'abord tout $f \neq 0$ de S et non inversible est produit fini d'irréductibles pour la même raison qu'il l'est dans A.

Il s'agit de montrer ensuite que si f divise un produit, il divise l'un des facteurs. Or, si f divise $g*h$ dans S, alors, f divise $g*h$ dans A qui est factoriel donc f divise g par exemple et on peut écrire $g = f*g'$ et d'après la proposition g' est dans S donc f divise g dans S.

§ 3. Fonctions entières.

Définition. Une fonction $f \in A$ est dite *entière* si f est a-convergente pour tout $a > 0$. On note E l'ensemble des fonctions entières. C'est donc l'intersection des algèbres A_a et aussi leur limite projective. C'est une algèbre sur C qui n'est pas locale, elle contient les fonctions finies. On a les propriétés suivantes:

(E_1) $f \in E \Leftrightarrow \sum f\sigma$ converge $\forall \sigma$;

(E_2) $f \in E \Leftrightarrow \forall \sigma > 0$ il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(x)| \leqslant c\sigma(x)$ pour tout x;

(E_3) $f \in E \Leftrightarrow \forall \sigma > 0$ il existe $c > 0$ telle que $|f*\sigma(x)| \leqslant c\sigma(x) \forall x$;

(E_4) $f \in E \Leftrightarrow |f| \in E$;

(E_5) si $|f(x)| \leqslant |g(x)| \forall x$ et si g est entière, alors f est entière;

(E_6) $f \in E \Leftrightarrow \forall \sigma$, $f\sigma \in E$;

(E_7) si $f \in E$ et si $\sum a_n z^n$ est une fonction entière de la variable complexe z, alors $\sum a_n f^{*n}$ est entière. En particulier, si $f \in E$, alors $\exp(f) \in E$;

(E_8) si f et $g \in E$, alors $fg \in E$.

Proposition 31. *Si f est entière, alors, le support premier de f est fini.*

En effet, si f n'est pas à support premier fini, on peut trouver une suite infinie f' extraite de f dont le support est formé d'entiers $x_i \in s(f)$ possédant la propriété suivante: dans la décomposition en facteurs premiers

de x_n apparaît un nombre premier $p(n)$ qui ne divise aucun des x_i où $i < n$. On peut alors déterminer une factorisable σ telle que $f(x_i)\sigma(x_i) = 1$, par exemple, en procédant de proche en proche. Il s'ensuit que $f' \notin E$ donc que $f \notin E$.

Autrement dit, une série entière d'un nombre infini d'indéterminées qui est une fonction entière ne dépend en fait que d'un nombre fini d'indéterminées.

(E_9) soit $m = \prod m_i$ une multiplicative décomposée canoniquement. Alors, m est entière si et seulement si $m_i = u$ sauf pour un nombre fini de i et si $m_i \neq u$, alors $m_i \in E$. En particulier, la seule factorisable entière est u.

(E_{10}) la seule fonction entière complètement additive est 0;

(E_{11}) soit f à support premier fini et f_i sa partie homogène de degré i. On a $f \in E \Leftrightarrow \overline{\lim} \|f_n\|_e^{1/n} = 0$.

En effet, si $f \in E$ et si $a = a^{t(x)}$, alors $\sum |fa| = \sum a^n \|f_n\|_e$ qui converge quel que soit $a > 0$.

Réciproquement, si $\overline{\lim} \|f_n\|_e^{1/n} = 0$ et si $\sigma > 0$ est factorisable, il existe $a > 0$ tel que $\sigma(x) \leqslant a^{t(x)}$ pour tout $x \in s(f)$: il suffit de prendre $a = \operatorname{Max} \sigma(p)$ où $p \in s_1(f)$. Puisque $\sum a^{t(x)} \|f_{t(x)}\|_e$ converge alors $\|f\sigma\|_e = \sum \|f_{t(x)}\|_\sigma$ converge.

On en déduit l'équivalence suivante: si $s_1(f)$ est fini:

$$f \in E \Leftrightarrow \overline{\lim} \|f(x)\|^{1/t(x)} = 0.$$

La nécessité vient de ce qui précède puisque $|f(x)| \leqslant \|f_{t(x)}\|_e$. Réciproquement, soit $\sigma > 0$ et $a = \operatorname{Inf} \sigma(p)$, $p \in s_1(f)$. Pour tout $x \in s(f)$ on a $a^{t(x)} \leqslant \sigma(x)$. Comme il n'existe qu'un nombre fini de x tels que $|f(x)| > a^{t(x)}$, il n'en existe qu'un nombre fini $> \sigma(x)$. Il existe donc une constante c telle que $|f(x)| \leqslant c\sigma(x)$ pour tout x et f est entière. Si $K = \operatorname{Max} p_i$ où $p_i \in s_1(f)$ on a $t(x) \operatorname{Log} 2 \leqslant \operatorname{Log} x \leqslant t(x) \operatorname{Log} K$, donc,

$$f \in E \Leftrightarrow \overline{\lim} f(x)^{1/\operatorname{Log} x} = 0 \quad \text{si} \quad |f(x)| < 1 \text{ pour } x \text{ assez grand}.$$

Remarque. On n'a pas pour E l'analogue de la proposition 30: E n'est pas locale.

(E_{12}) si $f \in E$, alors $af \in E$ si a est c.a.: soit $\sigma > 0$, puisque $a \in S$ il existe $\alpha > 0$ telle que $|a| \leqslant \alpha$ et il existe $k \in R_+$ tel que $|f| \leqslant k\sigma/\alpha$ d'où $|af| \leqslant k\sigma$.

De même, $\partial f/\partial p \in E$ si $f \in E$ car si $f \in A_a$, alors $\partial f/\partial p \in A_{a'}$ où $a'(p) < a(p)$ et $a' \leqslant a$ ailleurs. De façon générale,

$$f \in E \Rightarrow \frac{\partial^{t(n)} f}{\partial n} \in E \qquad \forall n \text{ entier} > 0.$$

Chapitre IV

Fonctions analytiques

§ 1. Introduction. On se propose de donner une définition de fonction analytique d'une infinité de variables. Ce sont des fonctions définies sur l'ensemble C^N des suites de nombres complexes $(z) = (z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ On notera aussi ces suites conformément aux anciennes notations $a = \big(a(p_1), \ldots, a(p_i), \ldots\big)$ ou encore $(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ associant cette suite à la factorisable a.

Dire qu'une fonction $\hat{f}$ est analytique en un point $\omega \in C^N$ par exemple $O = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, c'est dire au moins qu'elle admet un développement en série absolument convergente dans un „voisinage" de 0 (développement taylorien):

$$\hat{f}(a) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x)\, a(x)$$

où $f(x)$ est une suite de coefficients complexes. Rappelons que si x est décomposé en facteurs premiers

$$x = p_{i_1}^{n_1} \ldots p_{i_s}^{n_s} \quad \text{alors} \quad a(x) = a(p_{i_1})^{n_1} \ldots a(p_{i_s})^{n_s} = z_{i_1}^{n_1} \ldots z_{i_s}^{n_s}.$$

En général, cette série est convergente absolument pour a telle que $|a(p)| < \sigma(p)$ pour tout p où $\sigma(p) > 0$ quel que soit p. Si l'on veut — ce qui est naturel — utiliser (pour f) toutes les fonctions de S et uniquement celles-ci, il est nécessaire de supposer que le polydisque $\{(z_i) |\ |z_i| < r_i = \sigma(p_i)\ \forall i\}$ est un voisinage de 0 dans C^N. On prendra donc sur C^N la „box-topology" ou b-topologie plus simplement, où un système fondamental de voisinages (ouverts) de 0 est constitué par l'ensemble des polydisques $\Gamma(o, \sigma) = \{a |\ |a(p)| < \sigma(p)\ \forall p\}$ correspondant à toutes les suites de réels > 0, $\sigma = (\sigma_i)$. Muni de cette topologie C^N est un espace séparé et un groupe topologique (mais pas evt, les voisinages de 0 n'étant pas absorbants).

Si l'on désigne par l_σ l'ensemble des a telles que $\operatorname{Sup}_p |a(p)|/\sigma(p) < +\infty$ où $\sigma(p) > 0$ $\forall p$, qui est un espace de Banach isomorphe à l^∞ ($= l_e$ où

$e(p) = 1\ \forall p$), comme $\bigcup_\sigma l_\sigma = C^N$, on voit que la topologie de C^N est définie par la famille des normes généralisées $\|a\|_\sigma = \operatorname{Sup}_p |a(p)|/\sigma(p)$ (et sa structure uniforme par les écarts correspondants). Bien entendu, la topologie limite inductive des topologies sur l_σ est moins fine que la b-topologie.

Dans ces conditions, la fonction $\hat{f}$ définie par $\hat{f}(a) = \sum f(x)\,a(x)$ dans un polydisque où il y a convergence absolue est une fonction continue de a dans ce polydisque.

Remarquons que si l'on considérait sur C^N la topologie produit habituelle, une suite $f(x)$ ne définirait une fonction continue $\hat{f}(a) = \sum f(x)\,a(x)$ dans un voisinage de zéro que si f était à support premier fini i.e. que si $\hat{f}$ n'était une fonction que d'un nombre fini de variables (Chap. II Prop. 31), ce qui est trop restrictif.

Remarquons aussi que si l'on imposait seulement à f de définir une fonction analytique, au sens habituel, d'un nombre fini de variables quel que soit le choix de ce nombre fini de variables (i.e. en remplaçant les autres par 0) on pourrait ne pas avoir de développement $\sum f(x)\,a(x)$ absolument convergent dans un voisinage de zéro (b-topologie): on a vu (Chap. III, § 2, (S_{12})) un exemple de fonction f telle que $fe_n \in S\ \forall n$ mais $f \notin S$. Ce qui n'est pas assez restrictif.

Le problème principal est la définition d'une fonction analytique sur un ouvert Ω de C^N de façon à conserver un certain sens à la notion de prolongement analytique.

Dire que $\hat{f}$ est analytique sur Ω, si elle est analytique en chaque point $\omega \in \Omega$, c'est-à-dire si sa valeur $\hat{f}(\omega + \sigma)$ dans un voisinage de ω est donnée par une série $\sum f_\omega(x)\,\sigma(x)$ absolument convergente si σ est assez proche de 0, est insuffisant pour éviter des anomalies de ce genre: on définit $\hat{f}$ par $\hat{f}(a) = 0$ si $|a(p)|$ tend vers 0 et $\hat{f}(a) = 1$ si $|a(p)|$ ne tend pas vers 0. Alors f est analytique dans C^N quand $p \to \infty$ et la notion de prolongement analytique n'a pas de sens (en réalité le développement n'est pas valable dans tout polydisque intérieur).

La raison essentielle de ce fait est l'absence d'ouverts connexes dans C^N: la composante connexe de 0 est l'ensemble des suites finies i.e. des suites (z_i) telles que $z_n = 0$ si n est grand et ainsi le polydisque $\{(z_i) |\ |z_i| < 1\ \forall i\}$ n'est pas connexe. La notion de prolongement analytique reposant sur les deux notions „d'analycité sur un ouvert Ω" et de „connexité de Ω" n'a plus de sens ici. Il y a cependant des notions plus faibles que celles de connexité — disons de sous-connexité — que l'on peut imposer à un ouvert de C^N, de sorte que si l'on renforce la notion „d'analycité sur un ouvert", pour rétablir l'équilibre, alors la notion de prolongement analytique aura un sens.

En gros, les polydisques ouverts seront sous-connexes et une fonction $\hat{f}$ définie dans un tel polydisque (par exemple de centre 0) sera entièrement déterminée par la donnée d'une fonction f_0 absolument convergente dans ce polydisque (par $\hat{f}(a) = \sum f_0(x)a(x)$). Autrement dit, les polydisques seront des ensembles d'unicité. On peut donc poser la définition suivante:

DÉFINITION. Une fonction $\hat{f}$ définie sur un ouvert Ω de C^N est dite *analytique dans* Ω, si on a dans tout polydisque ouvert, de centre $\omega \in \Omega$ [1] et contenu dans Ω

$$\hat{f}(\sigma) = \sum f_\omega(x)(\sigma-\omega)(x)$$

où $f_\omega(x)$ est une suite de coefficients complexes independante du polydisque et où la série est absolument convergente pour $\sigma-\omega$ dans un tel polydisque. Il revient au même d'écrire en posant $\sigma-\omega = a$

$$\hat{f}(\omega+a) = \sum f_\omega(x)a(x).$$

En vue d'étudier le prolongement analytique, on introduit la notion suivante:

§ 2. Connexion sur un ensemble.

DÉFINITION. Soit X un ensemble (non vide). Une famille non vide $\mathscr{C}$ de parties de X est une *connexion* si

$$A_i \in \mathscr{C} \text{ et } \bigcap_i A_i \neq \emptyset \quad \text{entraîne} \quad \bigcup_i A_i \in \mathscr{C}$$

(réunion quelconque). Un élément de $\mathscr{C}$ est appelé une „*chaîne*" ou un „*ensemble chaîné*".

EXEMPLES. $\mathscr{C} = \mathscr{P}(X)$ ensemble des parties de X, $\mathscr{C}$ = ensemble des parties de X qui contiennent (resp. sont contenues dans, rencontrent) un ensemble C_0 donné, $\mathscr{C}$ = ensemble réduit à un élément $C_0 \in \mathscr{P}(X)$ etc.

On a les propriétés et définitions suivantes:

(C_1) Si $A_n \in \mathscr{C}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et si $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

(C_2) $\mathscr{C}$ est un ensemble ordonné inductif (pour l'inclusion) ($\mathscr{C}$ peut avoir ou non des éléments minimaux pour la „déclusion").

(C_3) L'image $f(\mathscr{C})$ d'une connexion sur X par l'application $f\colon X \to Y$ n'est pas, en général, une connexion si f n'est pas injective.

(C_4) L'image réciproque par $f\colon X \to Y$ d'une connexion sur Y est une connexion sur X.

(C_5) Toute intersection de connexions est une connexion (si elle est non vide). La réunion de deux connexions n'est pas en général une con-

[1] ω est une factorisable et non pas la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres premiers.

nexion, de même l'ensemble des $A \cup A'$ (ou $A \cap A'$) où $A \in \mathscr{C}'$ et $A' \in \mathscr{C}'$ ne forme pas une connexion en général.

(C_6) On appelle *domaine de définition d'une connexion* l'ensemble $\bigcup_i A_i$ où $A_i \in \mathscr{C}$ et $A_i \neq X$. (On peut toujours rajouter X à une connexion sur X et obtenir ainsi une nouvelle connexion.) Par exemple $\mathscr{C} = \{\{x\} | \ x \in X\}$ est une connexion minimale parmi celles dont le domaine est X.

(C_7) *Connexion engendrée* par une famille de parties A_i de X: c'est la plus petite connexion sur X qui contient les A_i ou encore l'intersection des connexions qui contiennent les A_i (elle existe car $\mathscr{P}(X)$ en est une). On peut ainsi définir l'image d'une connexion par une application, la connexion produit, etc.;.

(C_8) *Connexion induite* sur une partie $E \subset X$: c'est la connexion (si elle existe) dont les éléments sont les ensembles $A_i \in \mathscr{C}$ tels que $A_i \subset E$. Elle est contenue dans la connexion formée des ensembles $A_i \cap E$ où $A_i \in \mathscr{C}$ qui est l'image réciproque par l'injection canonique de E dans X de la connexion sur X;

(C_9) *Composante chaînée*: élément maximal de $\mathscr{C}$. Les composantes chaînées forment une partition de X (si le domaine de $\mathscr{C}$ est X).

(C_{10}) Soit X un espace topologique qui possède une base B d'ouverts connexes, $\mathscr{C}$ la connexion engendrée par les éléments de cette base. Alors $\mathscr{C}$ est l'ensemble des ouverts connexes de X. En effet, si Ω est un ouvert connexe de X, il contient un élément de B et, par suite, un élément maximal $\Omega' \in \mathscr{C}$ (Zorn) qui est ouvert. Ensuite, $\Omega'' = \Omega - \Omega'$ est aussi ouvert sinon on pourrait agrandir Ω' par un voisinage ouvert $\subset \Omega$ d'un point frontière de Ω'. L'ensemble Ω'' est donc vide et $\Omega \in \mathscr{C}$. Réciproquement, un élément de $\mathscr{C}$ est un ouvert connexe.

Définition. Soient X un espace topologique, Λ une famille non vide de parties de X. Un ouvert $A \subset X$ est dit *Λ-connexe* s'il vérifie l'une des deux conditions suivantes:

1° il est connexe dans X,

2° quelle que soit la partition de A en deux ouverts non vides, il existe un ensemble (non vide) de Λ qui rencontre les deux parties et qui est contenu dans A.

Exemple. Si Λ est la famille des ouverts, ou encore $\mathscr{P}(X)$, les Λ-connexes sont les ouverts, si Λ est la famille des ouverts connexes ou encore $\{\{x\} | \ x \in X\}$ les ouverts Λ-connexes sont les ouverts connexes.

Si la famille des ouverts Λ-connexes est non vide, elle forme une connexion. En particulier, si A est Λ-connexe, si B est Λ-connexe et si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est Λ-connexe.

Soient A_i des ouverts Λ-connexes tels que $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ et $A = \bigcup_i A_i$. Si A est réunion disjointe de deux ouverts non vides Ω' et Ω'', alors l'un

au moins de A_i rencontre Ω' et Ω''. On a alors $A_i = (A_i \cap \Omega') \cup (A \cap \Omega'')$ et il existe un ensemble de Λ contenu dans A_i donc dans A et qui rencontre Ω' et Ω''.

Ainsi, la connexion des ouverts Λ-connexes contient la connexion des ouverts connexes et est contenue dans la connexion des ouverts.

N.B. Si les ensembles de Λ sont ouverts, on peut remplacer Λ par la connexion engendrée par Λ.

§ 3. Fonctions analytiques. Dans C^N on considérera la famille Δ formée des (poly)disques ouverts quelconques $\Gamma(\omega, \sigma) = \{(z_i) | \ |z_i - \omega_i| < \sigma_i \ \forall i\}$ de (poly)centre ω et de (poly)rayon $\sigma > 0$ de sorte qu'un ouvert sera Δ-connexe si, quelle que soit la partition en deux ouverts disjoints non vides, il existe un disque qui les rencontre et qui est contenu dans l'ouvert.

On remarque que la connexion des Δ-connexes contient la connexion engendrée par les disques ouverts car un disque ouvert est trivialement Δ-connexe (on pourrait plus généralement considérer la connexion plus grande des B_i tels que $A_i \subset B_i \subset \overline{A}_i$ où A_i est Δ-connexe). En fait, dans C^N les Δ-connexes coïncident avec la connexion engendrée par les disques. Soient Ω un Δ-connexe ouvert et C' un ensemble chaîné maximal parmi ceux qui sont contenus dans Ω. Si $C'' = \Omega - C'$ est non vide, il n'est pas ouvert, sinon $\Omega = C' \cup C''$ et C' ne serait pas maximal. En tout point $\omega'' \in C''$ il existe un disque de centre ω'' et contenu dans Ω. Puisque C'' n'est pas ouvert, l'un de ces disques D n'est pas dans C', comme il est dans Ω il rencontre C' et $C' \cup D$ n'est pas maximal, donc C'' est vide et les chaînes coïncident avec les Δ-connexes.

On remarque aussi que dans C^n, en vertu de (C_{10}), les ouverts Δ-connexes engendrés par les disques coïncident avec les ouverts connexes.

Exemple de Δ-connexe. Soit $\mathfrak{a} \neq (0)$ un idéal de A_e, $Z(\mathfrak{a})$ l'ensemble des zéros de $\mathfrak{a}$. C'est un ensemble fermé d'intérieur vide dans la topologie de $\mathfrak{M}_e$ (espace compact) et dans la b-topologie. Soit E = disque unité b-ouvert $- Z(\mathfrak{a}) = \{a \notin Z(\mathfrak{a}) | \ \forall p \ |a(p)| < 1\}$. Alors E est Δ-connexe. Supposons que E soit réunion de deux ouverts non vides disjoints Ω et Ω' et soient $\omega \in \Omega$ et $\omega' \in \Omega'$ Dans $\mathfrak{M}_e$ il existe un voisinage de ω: $V_{\mathfrak{M}_e}(\omega)$ qui ne rencontre pas $Z(\mathfrak{a})$. Ce voisinage contient le disque $\{\sigma | \ |\sigma(p_j) - \omega(p_j)| < r_j \ \forall j \leqslant n < +\infty\}$ donc, il contient le disque b-ouvert formé des σ telles que

$$|\sigma(p_j) - \omega(p_j)| < r_j \ \forall j \leqslant n \quad \text{et} \quad |\sigma(p_j)| < 1 \ \forall j > n.$$

Si ce disque rencontre Ω', c'est terminé, sinon, il ne rencontre pas Ω' et en particulier $\omega_n = \big(\omega(p_1), \ldots, \omega(p_n), 0, \ldots, 0, \ldots\big) \in \Omega$ et $\notin \Omega'$. De même, il existe $\omega'_m = \big(\omega'(p_1), \ldots, \omega'(p_m), 0, \ldots, 0, \ldots\big)$ qui ne rencontre pas Ω et on peut supposer que $m = n$. Donc on a $\omega_n \in \Omega$, $V(\omega_n) = \{\sigma | \ |\sigma(p_j) - \omega(p_j)| < r_j \ \forall j \leqslant n\}$ contenu dans Ω et $V'(\omega'_n) \subset \Omega'$ et ne rencontrant pas $Z(\mathfrak{a})$.

Par suite, il existe $g \in \mathfrak{a}$ tel que $g(\omega_n) = \sum g\omega_n(x) \neq 0$ et il existe $g' \in \mathfrak{a}$ tel que $g'(\omega'_n) \neq 0$. On peut supposer $g = g'$ (on prend $ag + a'g'$ où a et a' sont deux constantes convenables). En faisant varier les n composantes les unes après les autres $\big(\omega_n(p_j) \to (1-z)\,\omega_n(p_j) + z\omega'_n(p_j) \to \omega'_n(p_j)\big)$ on passe de ω_n à ω'_n par un chemin ne rencontrant pas $Z(\mathfrak{a})$ et qui est un compact. Il existe alors une famille finie de disques $D_i \subset \complement Z(\mathfrak{a})$ centrés sur ce chemin et tels que $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$ où g ne s'annule pas. Il s'ensuit que l'un des disques rencontre Ω et Ω' et E est Δ-connexe.

Proposition 32. *Soit $\hat{f}$ définie sur le disque ouvert $\Gamma = \{(z_i) \mid |z_i - c_i| < r_i\}$ par $\hat{f}(a) = \sum f(x)(a-c)(x)$ où la série est absolument convergente pour tout $a \in \Gamma$.*

Alors,

1° *$\hat{f}$ est analytique sur Γ,*

2° *si $\hat{f}$ est nulle sur un ouvert $\Omega \subset \Gamma$ alors $\hat{f}$ est identiquement nulle dans Γ.*

1° On peut se ramener — temporairement — au cas où le disque est de centre 0 de rayon $(1, 1, 1, \ldots)$. On a, si $\omega \in \Gamma$ et a petit,

$$\hat{f}(\omega + a) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x)(\omega + a)(x) = \sum f_\omega(x)\, a(x)$$

et il s'agit de calculer f_ω et de montrer que sa série est absolument convergente dans tout polydisque contenu dans Γ. En développant chaque terme sous la forme

$$(\omega + a)(p_{i_1}^{m_1} \ldots p_{i_q}^{m_q}) = [\omega(p_{i_1}) + a(p_{i_1})]^{m_1} \ldots [\omega(p_{i_q}) + a(p_{i_q})]^{m_q}$$

on a le coefficient de $a(x) = a(p_1)^{n_1} \ldots a(p_s)^{n_s}$ sous la forme

$$f_\omega(x) = \sum_{y=1}^{\infty} f(xy)\,\omega(y)\,C(x, y) \qquad \text{(cf. chapitre I § 7)}.$$

L'expression $f_\omega(x)$ est bien définie si $\omega \in \Gamma$ car si $\varepsilon > 0$ est assez petit, il existe une constante K telle que

$$|\omega(p_1^{a_1} \ldots p_s^{a_s} y')\,C(x, y)| < K\,|[\omega(p_1) + \varepsilon]^{a_1} \ldots [\omega(p_s) + \varepsilon]^{a_s}\,\omega(y')| = K\,|\sigma(y)|$$

avec $\sigma(p_i) = \omega(p_i) + \varepsilon$. En prenant ε assez petit, on aura $|\sigma(y)| < 1\ \forall y$, d'où

$$\sum_y |f(xy)\,\omega(y)\,C(x, y)| < \sum |f(xy)\,\sigma(y)|.$$

Or, on a $\sum |f(n)\gamma(n)| < +\infty$ si $\forall n$ on a $|\gamma(n)| < 1\ \big(\Leftrightarrow |\gamma(p)| < 1\ \forall p\big)$ donc $\sum |f(xy)\gamma(xy)| < +\infty$, d'où $|\gamma(x)| \sum |f(xy)\gamma(y)| < +\infty$ et $\sum |f(xy)\gamma(y)| < +\infty\ \forall \gamma$ tel que $|\gamma(p)| < 1\ \forall p$. Ceci montre, en prenant $\gamma = \sigma$, que

$f_\omega(x)$ est défini par une série absolument convergente. Montrons alors que $\sum |f_\omega(x)\sigma(x)|$ converge pour tout σ tel que $|\sigma(p)| < 1 - |\omega(p)|$.

$$\sum |f_\omega(x)\sigma(x)|$$
$$\leqslant \sum_x \Big|\sigma(x) \sum_y f(xy)\omega(y)C(x,y)\Big| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{xy=n} |f(xy)\sigma(x)\omega(y)C(x,y)|$$
$$= \sum_n |f(n)| \sum_{xy=n} |\sigma(x)\omega(y)C(x,y)| = \sum |f(n)|[|\sigma|+|\omega|](n) < +\infty$$

par hypothèse, si pour tout p on a $|\sigma(p)| + |\omega(p)| < 1$.

2° Supposons que $\hat{f}(a)$ soit nulle pour $a \in U$ ouvert dans Γ. Alors U contient un disque Γ_0 de centre ω de rayon r et $\hat{f}$ est nulle dans ce disque, autrement dit, avec $a = \sigma + \omega$ on a $\sum f_\omega(x)\sigma(x)$ nulle pour tout σ dans un disque ouvert qui est voisinage de zéro, donc, dans un disque fermé $\{\sigma|\ |\sigma| \leqslant \gamma, \gamma > 0\}$ contenu dans ce disque ouvert et sur lequel $\sum f_\omega(x)\sigma(x)$ est absolument convergente. Autrement dit, $f_\omega \in A_\gamma$ et nulle sur $\mathfrak{M}_\gamma$ et on a vu (Proposition 22) qu'alors $f_\omega = 0$ i.e. $f_\omega(x) = 0\ \forall x$. Considérons un élément β tel que $|\beta(p)| > |\omega(p)|\ \forall p$ et $\beta \in \Gamma$. La fonction $\hat{f}$ est définie par la fonction f qui appartient à A_β et on peut supposer en faisant éventuellement une homothétie de centre 0 de rayon $(b_1, \ldots$ $\ldots, b_n, \ldots)$ que $A_\beta = A_e$ et $\hat{f}$ est une fonction continue sur $\mathfrak{M}_e$ muni de la topologie produit (qui en fait un espace compact, chap. II).

L'ensemble F des $\omega \in \mathfrak{M}_e$ tels que $f_\omega = 0$ est un b-ouvert — non vide, on vient de le voir — (ouvert dans la „box-topology") car $f_{\omega+\varepsilon}(x)$ $= \sum f_\omega(xy)\varepsilon(y)C(x,y) = \sum 0 = 0\ \forall x$ si $\varepsilon \in C^N$. D'autre part, F est fermé dans $\mathfrak{M}_e$ pour la topologie produit car si $f_{a_n} = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ i.e. $\sum f(xy)a_n(y)C(x,y) = 0\ \forall x$ et $\forall n$ et si a_n tend vers a dans $\mathfrak{M}_e$, on a $\sum f(xy)a(y)C(x,y) = 0\ \forall x$ en vertu de la convergence absolue de $\sum f(xy)C(x,y)$ (provient de ce que $\sum |f(x)\gamma(x)| < +\infty$ où $|\gamma(p)| > 1\ \forall p$). On écrit, en effet, que

$$\sum |f(xy)a(y)C(x,y)|$$
$$\leqslant \sum_1^N |f(xy)C(x,y)|\,|a_n(y) - a(y)| + 2\sum_{N+1}^{\infty} |f(xy)C(x,y)|.$$

L'ensemble F est donc un compact de $\mathfrak{M}_e$ et la fonction continue sur F à valeurs dans R_+ qui à a fait correspondre $\sum |a(p)|/2^p$ atteint son minimum m pour un $a_0 \in F$. Or, F étant b-ouvert, si $a_0 \neq 0$ on peut trouver un a_0' dans un b-voisinage de a_0 tel que $|a_0'(p)| \leqslant |a_0(p)|$ pour tout p avec inégalité stricte pour au moins un p et m ne serait pas le minimum. Donc $0 \in F$ i.e. $f(x) = 0\ \forall x$ ou encore $\hat{f} = 0$.

N.B. 1. Pour que $\hat{f}$ définie sur Γ soit identiquement nulle, il faut et il suffit qu'il existe ω tel que $f_\omega = 0$.

N.B. 2. L'ensemble précédemment défini $Z(f)$ n'est pas b-ouvert dans $\mathfrak{M}_c$ si $f \neq 0$.

THÉORÈME. (*Principe du prolongement analytique*). *Soit $\hat{f}$ analytique sur un ouvert Δ-connexe Ω. Si $\hat{f}$ est nulle sur un ouvert $U \subset \Omega$, alors $\hat{f}$ est identiquement nulle sur Ω.*

En effet, si $\hat{f}$ est nulle sur U, il existe $\omega \in U$ tel que $\hat{f}(\omega+\sigma) = \sum f_\omega(x)\sigma(x) = 0$ pour tout σ assez petit. Donc $f_\omega = 0$. Soit Ω' l'ensemble des $\omega' \in \Omega$ tels que $f_{\omega'} = 0$. Il est ouvert car $f_{\omega'+\varepsilon}(x) = \sum f_\omega(xy)\varepsilon(y)C(x,y) = 0$ si $\varepsilon \in C^N$ est assez petit. L'ensemble $\Omega'' = \Omega - \Omega'$ est aussi ouvert car s'il est non vide et contient $\omega'' \neq 0$ i.e. $f_{\omega''}(x) \neq 0$ pour un x convenable, on en déduit $f_{\omega''}(x) = \sum f_{\omega''+\varepsilon}(xy)\varepsilon(y)C(x,y)$ où le coefficient constant $f_{\omega''}(x) \neq 0$ donc $f_{\omega''+\varepsilon}(x) \neq 0$ si $\varepsilon \in C^N$ est assez petit. Il existe donc un disque Γ ouvert de centre c ($\in \Omega'$ ou Ω'') contenu dans Ω et qui rencontre Ω' et Ω''. Dans Γ on a $\hat{f}(c+a) = \sum f_c(x)a(x)$ et $\hat{f}$ est nulle sur $\Gamma \cap \Omega'$, donc $f_c = 0$, d'où $\hat{f}$ est identiquement nulle sur Γ, ce qui contredit le fait que Γ rencontre Ω'', donc Ω'' est vide et $\hat{f}$ est identiquement nulle sur Ω.

Propriétés des fonctions analytiques:

(A_1) *Si $\hat{f}$ est analytique sur Ω, elle est analytique sur $\Omega' \subset \Omega$.*

(A_2) Soit $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω (Δ-connexe). Alors $A(\Omega)$ *est une algèbre commutative, à élément unité et intègre.* En effet, si $\hat{f}\hat{g} = 0$, alors dans un voisinage de $\omega \in \Omega$ on a $\sum f_\omega(x)\sigma(x)\sum g_\omega(x)\sigma(x) = 0$, i.e. $\sum(f_\omega * g_\omega)(x)\sigma(x) = 0$, donc, $f_\omega * g_\omega = 0$, donc $f_\omega = 0$ ou $g_\omega = 0$.

(A_3) *Si $\hat{f}(\omega) \neq 0$ sur Ω, alors $1/\hat{f}$ est analytique dans Ω*: on a en tout point $\omega \in \Omega$: $\sum f_\omega(x)\sigma(x) \neq 0$ dans tout disque Γ_ω, ouvert, contenu dans Ω. Donc, dans tout disque fermé contenu dans Γ_ω on a $\left[\sum f_\omega(x)\sigma(x)\right]^{-1} = \sum f_\omega^{*-1}(x)\sigma(x)$ où la série est absolument convergente. Comme la réunion des polydisques fermés contenus dans Γ_ω est Γ_ω, alors $\sum f_\omega^{*-1}(x)\sigma(x)$ est absolument convergente dans tout Γ_ω et les éléments f_ω^{*-1} définissent $\hat{f}^{-1}$ analytique sur Ω.

(A_4) *Une fonction analytique $\hat{f}$ vérifie la principe du maximum* car elle est représentée localement par des f_ω tels que $\sum f_\omega \sigma$ vérifient eux-mêmes le principe du maximum.

(A_5) Soit $\hat{f} \in A(\Omega)$ où Ω est Δ-connexe. Si pour un $a \in \Omega$ on a $s_1(f_a) \subset I \subset P$ (ensemble des premiers) alors, pour tout ω on a $s_1(f_\omega) \subset I$. Autrement dit: si au voisinage de a la fonction $\hat{f}$ ne dépend que des variables z_i, alors, au voisinage de tout point de Ω elle ne dépend que

des variables z_i. En effet, Ω étant Δ-connexe, on se ramène à un disque où l'on suppose que $f_\omega(px) = 0$ $\forall x (p \in P - I)$. Or, $f_\omega(px) = \sum f_0(pxy)\,\omega(y) C(px, y)$ $\forall x$ et $\forall \omega$ dans un b-ouvert, donc, $f_0(pxy) = 0$ $\forall x$ et y d'où $f(px) = 0$ $\forall x$.

(A_6) Sous les mêmes hypothèses $t(f_\omega) < +\infty$ en un point $\omega \in \Omega \Leftrightarrow t(f_\omega) < +\infty$ dans tout Ω. En particulier, f_ω est une fonction finie en un point si et seulement si elle l'est partout.

(A_7) Sous les mêmes hypothèses, il faut et il suffit qu'en un point f_ω soit le produit de fonctions à supports premiers distincts pour qu'elle le soit en tout point.

(A_8) Si on appelle *germes de fonction analytique en* ω les éléments de $\varinjlim A(\Omega)$ où $\Omega \ni \omega$, on voit que leur ensemble s'identifie à l'ensemble S défini dans le chapitre III qui est un anneau local intègre.

Appendice I. Autres bases de A_e

De même que l'on écrit $f = \sum f(n) u_n$, on peut écrire $f = \sum \lambda_n B_n$ où $\lambda_n = \lambda_n(f)$ est un coefficient qui dépend de f et B_n une suite donnée d'éléments de A_e.

On dit (cf. Schwartz, *Etude des sommes d'exponentielles réelles*) que le système B_n est total dans A_e, si le sous-espace engendré est dense dans A_e, qu'il est topologiquement libre, si aucun des B_n n'appartient à l'adhérence du sous-espace engendré par les autres. Un système libre et total est appelé une base topologique (ou base plus simplement). Pour que $\{B_n\}$ soit libre, il faut et il suffit qu'il existe des B'_n bornés i.e. $|B_n(x)| < b_n < +\infty$ $\forall x \forall n$ tel que $\sum_{x=1}^{\infty} B_n(x) B'_m(x) = \delta_{nm}$ (Kronecker). Alors, les composantes λ_n de f s'écrivent $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) B'_n(x)$ série absolument convergente et on a $f = \sum_{x=1}^{\infty} \lambda_n B_n$; cette série ne convergeant pas nécessairement dans A_e. D'autre part, on peut avoir $f \neq 0$, mais $\lambda_n(f) = 0$ $\forall n$.

On donne rapidement ici quelques exemples de bases:

1° $B'_n = u_n * \varphi$ où $\varphi \in A$ est bornée et $\varphi(1) = 1$. On a

$$\lambda_n = \sum_{x=1}^{\infty} f(nx)\varphi(x) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{\delta|n} u_\delta \varphi^{*-1}\left(\frac{n}{\delta}\right) \in A_e.$$

Si $\hat{g}(a) = \sum g(x) a(x)$, on a $\hat{f}(a) = \sum \lambda_n \hat{B}_n(a)$ quand cette série est convergente et $\hat{B}_n(a) = a * \varphi^{-1}(n)$. Le système $\{B_n\}$ est total; d'autre part $f(n) = \sum \lambda_{ny} \varphi^{*-1}(y)$. D'ailleurs, de façon formelle, on a:

$$G(n) = \sum_x F(nx^t) v(x) \Rightarrow \sum_y G(ny^t) w(y) = \sum_z F(nz^t)(v * w)(z)$$

et, en particulier avec $w = v^{*-1}$, on a $F(n) = \sum G(ny^t) v^{*-1}(y)$. Par exemple, si $\varphi = \sigma \in \mathfrak{M}_e$, on a

$$f = \sum_n \Big(\sum_{\delta|n} u_\delta \mu(n/\delta)\sigma(\delta)\Big)\Big(\sum f(nx)\sigma(x)\Big).$$

Si $f \neq 0$ les λ_n ne sont pas nuls quand $|\sigma(p)| \leqslant 1/2$ (on note que $x \to f(nx)/f(n)$ est multiplicative, si f est multiplicative et $f(n) \neq 0$).

Si f est factorisable, $f = \left(\sum_x f(x)\varphi(x)\right)\left(\sum_n \left[\sigma(n)\cdot \sum_{\delta|n} u_\delta \varphi^{*-1}(n/\delta)\right]\right)$ et $\lambda_n = \sigma(n)\cdot \sum f(x)\varphi(x)$ peut être identiquement nul.

2° De façon duale, si $B_n = u_n * g$ où $g \in A_c$ on a $B'_n = \sum_{\delta|n} u_\delta g^{*-1}(n/\delta)$ et

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n * g)\cdot \sum_{y|n} f(y) g^{*-1}(n/y) = \sum_n (g * u_n)\cdot(f * g^{*-1})(n).$$

D'autre part si $B_n = \sum_{\delta|n} u_\delta \varphi(\delta)$, on a $B'_n = \sum_{x=1}^{\infty} u_{nx}\mu(x)/\varphi(nx)$ où on suppose $|\varphi(x)| \geqslant c_0 > 0$, d'où $f = \sum_n B_n \cdot \sum_{x=1}^{\infty} f(nx)\mu(x)/\varphi(nx)$.

3° $B'_n = u_n * e'_n$ où $e'_n(x) = 1$ si x est composé des facteurs premiers qui divisent n et $e'_n(x) = 0$ ailleurs. Si $(n, m) = 1$, on a $B'_{n\cdot m} = B'_n * B'_m$. On a $\lambda_n = \sum_y f(ny) e'_n(y)$. Le calcul des B_n donne $B_1 = u$, $B_p = u_p$ si p est premier, $B_{p^n} = u_{p^n} - u_{p^{n-1}}$ si p premier et $n > 1$ et enfin

$$B_{p_1^{n_1}\ldots p_s^{n_s}} = B_{p_1^{n_1}} * \ldots * B_{p_s^{n_s}} = \prod_{n_j=1} u_{p_j} \cdot \prod_{n_i>1}(u_{p_i^{n_i}} - u_{p_i^{n_i-1}}).$$

Ainsi, si $f = x^{-s}$, on a $\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2} \dfrac{|\mu(n)|}{\prod_{p|n} p^s - 1}$ quand $\mathrm{Re}(s) > 1$.

4° $B'_n = u_n * aC(n, x)$ où a est une factorisable telle que $|a(p)| < 1\ \forall p$; $(B'_1 = a)$ on a

$$B_1 = u, \qquad B_n = B_{p_1^{n_1}} * \ldots * B_{p_s^{n_s}} \sum_{d|n} u_d a(n/d)(-1)^{t(n/d)} C(n/d, d)$$

d'où $\hat{B}_n(a) = 0$ si $n > 1$ et $\hat{B}_1(a) = 1$. On en déduit

$$\lambda_n = \sum_y f(ny)\, a(y)\, C(n, y)$$

et réciproquement,

$$f(x) = \Omega(x) \sum \lambda_{ny} a(y)\, \Omega(y)(-1)^{t(y)}/\Omega(ny).$$

Le système est total. De façon duale, on peut prendre $B_n = u_n * aC(n, x)$ à condition que $\sum |a(x)| < +\infty$.

5° Soit $\hat{\varphi}(z) = \varphi(0) + z\varphi(1) + \quad + z^n\varphi(n) + \quad$ avec $\varphi(0) \neq 0$ et $|\varphi(n)| \leqslant a < +\infty$ et $\hat{\psi}(z) = \psi(0) + \psi(1)\, z + \quad$ de façon que $\hat{\varphi}(z)\hat{\psi}(z) = 1$. Si on pose $B'_n = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi(x) u_{n+x}$, où $n \geqslant 1$, on a $B_n = \sum_1^n u_x \psi(n-x)$ le coefficient de u_n est non nul et le système est total et constitue, par suite, une base topologique.

On a $\lambda_n = \sum f(n+x)\varphi(x)$. Notons qu'on peut remplacer B'_n par $\sum \xi^x \varphi(x) u_{n+x}$ et B_n par $\sum_{x=1}^{n} u_x \xi^{n-x} \psi(n-x)$.

De façon duale, si $\sum|\varphi(n)| < +\infty$, si $B_n = \sum_1^\infty \varphi(x) u_{n+x}$ on a $B'_n = \sum_1^n u_x \psi(n-x)$ et $\lambda_n = \sum f(x)\psi(n-x) = \sum_{x+y=n} f(x)\psi(y)$.

Formellement, on a les formules suivantes:

$$G(n) = \sum_{x=0}^\infty F(n+kx)\, V(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{y=0}^\infty G(n+ky)\, W(y) = \sum_{z=0}^\infty F(n+kz) \sum_{x+y=z} V(x)\, W(y)$$

en particulier, si $\hat{W}(z) = W(0)+W(1)z+\ldots$ est l'inverse de $\hat{V}(z) = V(0)+ +V(1)z+\ldots$ on a, $F(n) = \sum_{z=0}^\infty G(n+kz)\, W(y)$.

Exemples. (a) $\hat{\varphi}(z) = 1/(1-z)$. On a $B_n = u_n - u_{n-1}$ et $B_1 = u_1$. Alors f s'écrit $\sum_{n=1}^\infty (u_n - u_{n-1}) \sum_{x=0}^\infty f(n+x) = \sum_{n=1}^\infty (u_n - u_{n-1}) \sum_n^\infty f(y)$ et la série converge dans A_e.

(b) $\hat{\varphi}(z) = e^{\xi z}$. On a $\varphi(n) = \xi^n/n!$ et $\psi(n) = (-1)^n \xi^n/n!$ d'où

$$f = \sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_1^n u_q \xi^{n-q}(-1)^{n-q}/q!\Big)\Big(\sum_{x=0}^\infty f(n+x)\, \xi^x/x!\Big).$$

6° $B_n = \sum_1^n \varphi(x) u_x$ où $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x$. Alors $B'_n = \dfrac{u_n}{\varphi(n)} - \dfrac{u_{n+1}}{\varphi(n+1)}$ et $f \in A_e$ s'écrit $\sum_{n=1}^\infty B_n \left(\dfrac{f(n)}{\varphi(n)} - \dfrac{f(n+1)}{\varphi(n+1)}\right)$. On a

$$\Big\| f - \sum_1^N \lambda_n B_n \Big\| = \frac{|f(N+1)|}{|\varphi(N+1)|} \sum_1^N |\varphi(n)|.$$

De façon duale si $B'_n = \sum_1^n \dot{\varphi}(x) u_x$, on a, $B_n = \dfrac{u_n}{\varphi(n)} - \dfrac{u_{n+1}}{\varphi(n+1)}$ et $\lambda_n \equiv 0 \Leftrightarrow f(n) = f(1)\varphi(n)/\varphi(1)$.

7° $B'_n = \sum_{q=n}^\infty u_q \binom{q}{n} (-1)^{q-n} e^{\lambda q}$ d'où

$$B_n = \sum_{q=1}^n \binom{n}{q} u_q e^{-\lambda q} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \sum_{x=n}^\infty f(x) \binom{x}{n} (-1)^{x-n} e^{\lambda x}.$$

8° On ne peut avoir une base avec représentation unique si on pose $B'_n = \alpha_n(x)$ où α_n est une factorisable.

Appendice II. Problèmes

J'énonce ici quelques problèmes qui se posent de façon naturelle et que je n'ai pas résolus (voir aussi l'introduction).

1. Les factorisables a (et leurs opposées $-a$) vérifient l'égalité $a*\mu a = u$. Ce ne sont pas les seules: par exemple, $f = u + u_n + u_n^{*2} + \ldots$ où n est sans facteur carré et produit d'un nombre impair de nombres premiers vérifie l'égalité. Comment ces fonctions se caractérisent-t-elles? On peut noter que $\mu\cdot(f*f) = \mu f*\mu f \Leftrightarrow f = \lambda u$.

2. Existe-t-il des analogues aux espaces l_p? A noter que $\sum|f*g(x)|^2 \leqslant \sum|f(x)|^2\cdot\sum|g(x)|^2$ n'est pas vrai en général.

3. On a vu que $r(f) = \|f\| \Rightarrow f = c\cdot g\cdot\sigma$. La réciproque est fausse. Sous quelles conditions a-t-elle lieu?

4. La factorisable $1/x$ possède la propriété que si $\sum f(x)$ converge alors $\sum f(x)x^{-s}$ converge si $\mathrm{Re}(s) > 0$. Quelles sont les autres factorisables qui possèdent cette propriété? Cette question est liée à des problèmes de sommabilité, par exemple: pour quelles factorisables a a-t-on $\sum|a(x) - a(x+1)| < +\infty$? Si $a(p) = 0$ pour un nombre premier p, alors, $\sum|a(x)| < +\infty$.

D'autre part, quel est le sous-espace engendré dans A par les factorisables de A_e? Si $a(p)\to 0$, a réelle > 0, quand a-t-on $\sum(-1)^x a(x)$ convergente?

5. Un zéro d'une fonction analytique d'un nombre fini de variables est d'ordre fini, en ce sens que si f est analytique dans un voisinage de $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et s'annule en z, c'est-à-dire $f\in\mathfrak{m}_z$ alors il existe n tel que $f\in\mathfrak{m}_z^n - \mathfrak{m}_z^{n+1}$ ou encore $\bigcap_n \mathfrak{m}_z^n = (0)$. Il en est de même pour un nombre infini de variables: dans A_e on a: $\bigcap \mathfrak{m}_u^n = (0)$ et si a vérifie $|a(p)| < 1$ $\forall p$ on a $\bigcap \mathfrak{m}_a^n = (0)$. Qu'en est-il si a ne vérifie pas la condition? Comment se caractérisent les $f\in A_e$ qui n'ont que des zéros simples? Que dire de f et $g\in A_e$ si on a $Z(f) = Z(g)$ ou $I(f) = I(g)$?

Quelle condition doit vérifier une famille a_i de factorisables pour que $\bigcap_i \mathfrak{m}_{a_i} = (0)$?

6. Il faudrait élucider les propriétés qui passent à la limite i.e. quand le nombre de variables tend vers l'infini. En particulier, quelles hypothèses

faut-il ajouter pour conclure à la convergence absolue de $\sum |f(x)\alpha(x)|$ si on suppose que $\sum f(x)\sigma(x)$ converge ($|\alpha(p)| < |\sigma(p)|\ \forall p$) cette propriété ayant lieu sans hypothèse supplémentaire si le nombre de variables est fini? Ce problème semble difficile mais une solution raisonnable permettrait de définir une fonction analytique d'une façon moins restrictive qu'on ne l'a fait (voir aussi 4: $\sum |\alpha(x) - \alpha(x+1)| < +\infty$).

7. Si f n'est pas convergente ($f \notin S$) existe-t-il g non nulle (nécessairement non convergente) telle que $f * g$ soit convergente?

8. Dans l'appendice I les propriétés des bases soulèvent des problèmes intéressants de sommabilité.

Notations et index terminologique

En général, la lettre p désigne un nombre premier et p_n le nombre premier de rang n; les lettres grecques telles que α, β, σ désignent des factorisables et $\prod f_j$ est mis pour $f_1 * f_2 * \ldots$

Additive 15
A 7
A_α 19
$A(f)$, Annulateur 44
A_e, $A(\mathfrak{a})$ 49
$\hat{A}_e$ 50
α-convergente 19
b-topologie 59
c.a. = complètement additive 15
chaîne 61
Connexion 61
$*$, convolution 7
$C(x, y)$ 17
d, δ 41
$\frac{\partial f}{\partial p_i}$, $\frac{\partial^{l(n)} f}{\partial n}$ 16
Δ-connexe 63
domaine d'inversibilité 42
dzt = diviseur de zéro topologique 30
E, entière 57
e, $e(x)$ 8
e_n, $e_n(x)$ 17
$\exp(f)$ 12
factorisable 14
fonction arithmétique 7
Φ 12
Φ_1 11
f^{*-1} 8
$\hat{f}$ 50
G 10
G_e 28
G_1 29
Inversible 8, 28
$I(f)$ 42
$I(\mathfrak{a})$ 47
Jamais nulle 14
$L(f)$, Logarithme 12
Λ-connexe 62
Multiplicative 13
M_1 35
M 13
M_e, 35
$\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^*$ 27
$\mathfrak{M}_e, \mathfrak{M}$ 26
$\mathfrak{m}$ 8
$\mathfrak{m}_\alpha$ 23
μ 8
ν, norme spectrale 23
$\|f\|_\alpha$, $\|f\|$ 19
$\omega(f)$ = ordre de f 7
ω 13
Ω 13
produit de Dirichlet 19
$r(f)$ 30
$\varrho(f)$ 30
S 53
$\bar{S}$ 56
$s(f)$ = support de f 11
$s_1(f)$ = support premier de f 11
$\mathrm{Sp}(f)$ = spectre de f 25
$\mathrm{Sp}_1(f)$ = spectre frontière de f 33
t 9
$t(f)$ 10
u 7
u_n 9
zéro 41
$Z(f)$ 41
$Z(\mathfrak{a})$ 46

Bibliographie

[1] S. A. Amitsur, *On arithmetical functions*, J. Analyse Math. 5 (1956/1957), p. 273.

[2] Berger, Ofversigt Vetenskaps Akad. Forhand Stockholm 55 (1898), p. 519–618.

[3] L. Carlitz, *Anneaux commutatifs, sans diviseurs de zéro, avecu nité*, Pacific J. Math. 14 (1964), p. 1165–1171.

[4] E. D. Cashwell and C. J. Everett, *The ring of number theoretic functions*, ibidem 9 (1959), p. 975–985.

[5] Chin Pi Lu, *Unique factorisation of number theoretic functions*, Illinois J. Math. 9.1 (1965), p. 40–46.

[6] L. Euler, Comm. Acad. Petrop. 9 (1737).

[7] L. Euler, *Opera Omnia* ser. 1 vol. 8, p. 284–312.

[8] E. Hewitt and H. S. Zuckermann, *The l_1-algebra of a commutative semi-group*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), p. 70–97.

[9] E. Hille, *On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra*, Math. Ann. 136 (1958), p. 46–57.

[10] E. Hille and R. S. Philips, *Functional analysis and semi-groups*, Ann. Math. Soc. Coll. Publ. 31 Providence (1957).

[11] F. Mertens, *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*, J. Reine Angew. Math. 77 (1874), p. 289–338, et 78 (1874), p. 53.

[12] W. Narkiewicz, *On a class of arithmetical convolutions*, Colloq. Math. 10 (1963), p. 81–94.

[13] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, Princeton 1960.

[14] L. Schwartz, *Etude des sommes d'exponentielles réelles*, Hermann, Paris 1959.

On peut aussi se reférer aux ouvrages suivants

N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series*, Pergamon Press, Oxford 1965.

S. Bochner and R. S. Martin, *Several complex variables*, Princeton 1948.

N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Livre II. Algèbre*, Hermann, Paris 1951.

—, *Eléments de Mathématique. Livre III. Topologie générale*, Hermann, Paris 1961.

H. Cartan, *Théorie élémentaire d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris 1961.

L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. I, II, III, reprinted by Chelsea, 1952.

L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, Princeton 1960.

A. Grothendieck, *Espaces vectorielles topologiques*, São Paulo 1961.

R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice Hall, Hemel Hempstead 1965.

G. H. Hardy, *Divergent series*, Oxford 1949.

G. H. Hardy and F. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge 1952.

M. Hervé, *Several complex variables. Local theory*, Oxford 1963.

E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Colloquium publications XXXI (1948).

K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Hemel Hempstead 1962.

M. Naimark, *Normed rings*, Noordhoff, Leyden 1952.

F. Riesz, *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Gauthier-Villars, Paris 1913.

P. Samuel, *Anneaux factoriels*, São Paulo 1963.

E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

A. I. Vinogradov, *Number theory*, Dover Publications 1954.

O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, Van Nostrand, Princeton 1958.