POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CCXXXVII

MANFRED KÖNIG

Zur Existenz klassischer Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

WARSZAWA 1987
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-01-06471-4 ISSN 0012-3862

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

INHALT

Einleitung 5
Präliminarien 6

§ 1. Die Problemstellung 8
§ 2. Die Äquivalenz der Randwertprobleme $Lu = f$, $u_{|\partial G} = g$ und $\Delta u = f$, $u_{|\partial G} = g$ . . 10
§ 3. Zusammenstellung von Existenzaussagen einer Lösung u des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u_{|\partial G} = g$ in beliebigen Gebieten G des $\boldsymbol{R}_n$ 15
§ 4. Die Regularität der Lösung u des Problems $\Delta u = f$, $u_{|\partial G} = g$ am Rande ∂G, falls G eine Kugel oder eine Halbkugel ist 16
§ 5. Die Regularität der Lösung u des Randwertproblems $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ und $u(x) = g(x)$ $(x \in \partial G)$ am Rande des Gebietes G 23
§ 6. Beweis von Satz 1 und Bemerkungen zu Satz 1 30
§ 7. Die Schauderschen a priori Abschätzungen 31
§ 8. Übersicht über den von J. Schauder stammenden Beweis des Satzes 1 36
§ 9. Anwendung der Schauderschen a priori Abschätzung und des Satzes 1 auf den Nachweis der Existenz einer Lösung u des ersten Randwertproblems einer quasilinearen elliptischen Differentialgleichung 40
§ 10. Das Maximalflächenproblem 46
Literatur 51
Anhang
A. Die Struktur des Beweises der Schauderschen a priori Abschätzungen
B. Die Struktur des Schauderschen Existenzbeweises einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Dirichletproblem $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$
C. Die Struktur des in dieser Arbeit gegebenen Existenzbeweises einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Dirichletproblems $Lu = f$, $u|_G = g$

bei den Einlagen auf der 3. Seite des Heftumschlages

DISSERTATIONES MATHEMATICAE
CCXXXVII

M. König, Zur Existenz klassischer Lösungen einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung

ERRATA

On page IV of the cover and on page 2 instead of

ISBN 83-01-06471-4

it should be

ISBN 83-01-05967-2

Einleitung

In einem Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ sei eine elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j} + au = f$$

gegeben.

In dieser Arbeit werden wir uns mit Fragen nach der Existenz von klassischen Lösungen dieser Differentialgleichung, d.h. von Lösungen, welche im Gebiet G zweimal stetig differenzierbar sind, beschäftigen.

Wir betrachten die obige Differentialgleichung in *kompakten* Gebieten des $\boldsymbol{R}_n$ und suchen dort solche Lösungen der Differentialgleichung, welche auf dem Rand der Gebiete vorgegebene Werte annehmen. Die Ergebnisse der § 1 bis § 9 sind nicht neu. Bis auf Teile des § 9 waren diese Ergebnisse schon J. Schauder bekannt und sind in seiner Arbeit [56] aus dem Jahre 1934 enthalten. Trotzdem halten wir es, fast ein halbes Jahrhundert nach dem Erscheinen dieser Arbeit, für nötig, diese Ergebnisse hier darzustellen. Dies hat folgende Gründe:

(1) Bis zum Erscheinen des Buches *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* von D. Gilbarg und N. S. Trudinger im Jahre 1977 war keine befriedigende Darstellung dieser Ergebnisse in Lehrbüchern zu finden. In diesem Buch wird der von J. Schauder stammende Beweis zum erstenmal vollkommen und daher verständlich in einem Lehrbuch dargestellt.

(2) Die in dieser Arbeit gegebene Darstellung betrachtet die Probleme aus einem etwas anderen Blickwinkel, indem sie die Frage nach der Existenz einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Dirichletproblems für den Laplaceoperator als die zentrale Frage in dem gesamten Problemkreis aufzeigt.

(3) Die in dieser Arbeit gegebene Darstellung verkürzt ingesamt den Beweis. Während der von J. Schauder gegebene Beweis nur in einer einsemestrigen Spezialvorlesung behandelt werden kann, ist es mit der in dieser Arbeit gegebenen Darstellung möglich, in einer viel kürzeren Zeitspanne die Schaudersche Theorie im Rahmen einer Spezialvorlesung vorzutragen. Die dadurch gewonnene Zeit kann z.B. dazu benutzt werden, die Studenten mit Ergebnissen der nichtlinearen Theorie vertraut zu machen und damit die

Kluft zwischen den in einer Vorlesung behandelbaren Fragen und Fragen der neueren Forschung zu verkleinern.

Daß gerade das letzte Argument sehr wichtig ist, zeigt die im *The Mathematical Intelligencer* in Volume I, Number 1, 2 und 3 (1978) zu findende Besprechung des Buches *Mathematics and the Dilemma of University Education* von M. Kline. Obwohl M. Kline, P. J. Hilten und H. Hochstadt sehr verschiedene Ansichten vertreten, so sind sie sich jedoch in einer Frage einig: Die Ergebnisse der Forschung dürfen nicht nur als isolierte Einzelergebnisse den Spezialisten zugänglich sein, sondern es muß nach Vereinfachungen der Beweise gesucht werden, um sie einem größeren Kreis von Mathematikern zugänglich zu machen. Diese Forderung ist sehr alt. In seinem Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Paris im Jahre 1900 zitierte D. Hilbert den Ausspruch eines alten französischen Mathematikers: „Eine mathematische Theorie ist nicht eher als vollkommen anzusehen, als bis du sie so klar gemacht hast, daß du sie dem ersten Manne erklären könntest, den du auf der Straße triffst".

Nun, wir sind mit der Vereinfachung der Schauderschen Theorie von der Erfüllung dieser Forderung noch sehr weit entfernt, jedoch hoffen wir, mit dieser Arbeit dazu beizutragen, diese Ergebnisse einem größeren Kreis von Mathematikern zugänglich zu machen.

In die Darstellung der Ergebnisse sind Bemerkungen eingeschoben, welche die Einordnung dieser Ergebnisse in einen größeren Zusammenhang vornehmen. Anstatt dies in dieser Einleitung zu tun, glauben wir, daß diese Kommentare an den relevanten Stellen für den Leser leichter zu verstehen sind. Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr Andrzej Granas für das besondere Interesse danken, daß er dieser Arbeit entgegenbrachte.

Präliminarien

Wir bezeichnen mit N die Menge der natürlichen Zahlen, $\boldsymbol{R}$ die Menge der reellen Zahlen und C die Menge der komplexen Zahlen.

Ist G ein Gebiet im n-dimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{R}_n$, so bezeichnen wir den Rand von G mit ∂G.

$\mathscr{C}_{0,0}(G \cup \Gamma)$, wobei $\Gamma \subset \partial G$ ist, bezeichnet die Menge aller auf $G \cup \Gamma$ stetigen Funktionen.

$\mathscr{C}_{k,0}(G \cup \Gamma)$, $k \in N$, bezeichnet die Menge aller in G k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k sich auf $G \cup \Gamma$ stetig fortsetzen lassen.

$\mathscr{C}_{k,\alpha}(G \cup \Gamma)$, $k \in N$ und $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, ist die Menge aller Funktionen $u \in \mathscr{C}_{k,0}(G \cup \Gamma)$, für die zu jedem Kompaktum $K \subset G \cup \Gamma$ eine Konstante existiert, mit

$$\sup_{x,y\in K}\frac{|D^\beta u(x)-D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}\leqslant \text{const}<\infty,\qquad |\beta|=k,$$

wobei $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in N_n$, $|\beta|=\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ und $D^\beta\cdot=\partial^{|\beta|}\cdot/\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_n^{\beta_n}$ ist.

$H_G^\alpha[f]$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, bezeichnet den Hölderkoeffizienten der Funktion f im Gebiet G, falls

$$H_G^\alpha[f]=\sup_{x,y\in G}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty$$

ist.

Mit $C_{k,\alpha}(G)$ bezeichnen wir den Banachraum, welcher dadurch definiert ist, daß wir zunächst $\mathscr{C}_{k,\alpha}(G)$ zu einem linearen Raum machen und diesen dann unter der Norm

$$\|u\|_{k,\alpha,G}=\sup_{x\in G}|u(x)|+\ldots+\sum_{|\beta|=k}\{\sup_{x\in G}|D^\beta u(x)|+H_G^\alpha[D^\beta u]\}$$

abschließen.

$\|u\|_{k,\alpha,G}$ wird die Höldernorm von $C_{k,\alpha}(G)$ genannt.

Wir sagen: ∂G gehört zur Klasse $\mathscr{C}_{k,\alpha}$, wenn zu jedem Punkt $x\in\partial G$ eine Umgebung $U(x)$ und eine eineindeutige Abbildung B_x: $U(x)\to K_1(0)=\{x|\ x\in R_n,\ |x|<1\}$ existiert mit $B_x\in\mathscr{C}_{k,\alpha}(U(x))$ und $B_x^{-1}\in\mathscr{C}_{k,\alpha}(K_1(0))$, so daß:

$$B_x(x)=0\quad\text{und}\quad B_x(U(x)\cap G)=H_1=\{x|\ x\in R_n,\ |x|<1,\ x_n=0\}$$

gilt.

Wir sagen: $\partial G\in C_{k,\alpha}$, wenn es eine Konstante K gibt, zu der für alle $x\in\partial G$ Umgebungen $U(x)$ und Abbildungen B_x so gefunden werden können, daß für alle $x\in\partial G$:

$$B_x\in C_{k,\alpha}(U(x)),$$

$$\|B_x\|_{0,\alpha,U(x)}\leqslant K,$$

$$B_x^{-1}\in C_{k,\alpha}(K_1(0))$$

und

$$\|B_x^{-1}\|_{k,\alpha,K_1(0)}\leqslant K$$

gilt.

§ 1. Die Problemstellung

In einem beschränkten Gebiet G des $\boldsymbol{R}_n$, $n \geqslant 2$, betrachten wir die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1.0) \qquad Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u_{x_j}(x) + a(x) u(x) = f(x).$$

Um das Dirichletproblem formulieren zu können, machen wir folgende Voraussetzungen: (1)

(1.1) Die Koeffizienten a_{jk}, a_j, a und die Funktion f seien in G stetige Funktionen.

(1.2) Der Differentialoperator L sei in G gleichmäßig elliptisch, d.h. es gibt ein $m > 0$, so daß für alle $v \in \boldsymbol{R}_n$ und alle $x \in G$ die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$$

gilt.

(1.3) Auf dem Rand ∂G des Gebietes G sei eine stetige Funktion g gegeben.

(1.4) *Das Dirichletproblem.* Läßt sich in jedem beschränkten Gebiet G des $\boldsymbol{R}_n$ zu jeder beliebig vorgegebenen rechten Seite f der Differentialgleichung (1.0) und zu beliebig vorgegebenen Randwerten g eine in $\bar{G}$ stetige Funktion u finden, welche im Gebiet G zweimal stetig differenzierbar ist, der Differentialgleichung $Lu = f$ genügt und auf dem Rand ∂G mit g übereinstimmt?

Zunächst wollen wir einige Eigenschaften der Lösung u der Differentialgleichung (1.0) bereitstellen. Aus diesen Eigenschaften werden wir dann ersehen, daß zu einer positiven Beantwortung des obigen Problems eine Verschärfung der Voraussetzungen (1.1) und (1.3) notwendig ist.

(1.5) *Das Maximum-Minimum-Prinzip.* (a) Ist $a(x) \leqslant 0$ und $f(x) \leqslant 0$ für alle $x \in G$, so nimmt jede nichtkonstante Lösung u der Differentialgleichung (1.0) ihr negatives Minimum, falls ein solches vorhanden ist, auf ∂G und nicht in G an.

(b) Ist $a(x) \leqslant 0$ und $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in G$, so nimmt jede nichtkonstante Lösung u der Differentialgleichung (1.0) ihr positives Maximum, falls ein solches vorhanden ist, auf ∂G und nicht in G an.

(1) Mit diesen Voraussetzungen können wir die Problemstellung formulieren. Zum Beweis der Existenz einer Lösung des Problems werden wir diese Voraussetzungen weiter verschärfen müssen.

Ist $u(x) \leqslant 0$ für alle $x \in G$, so folgt aus dem Maximum-Minimum-Prinzip: Das Randwertproblem $Lu = f$, $u_{|\partial G} = g$ besitzt höchstens eine Lösung.

Das Maximum-Minimum-Prinzip wurde von E. Hopf in [18] gegeben. Einen Beweis von (a) und (b) findet man in [16].

Um die Eindeutigkeit der Lösung des Randwertproblems $Lu = f$, $u_{|\partial G} = g$ zu gewährleisten, werden wir nur solche Differentialoperatoren L betrachten mit $a(x) \leqslant 0$ für alle $x \in G$.

H. Petrini hat in [50] ein Beispiel einer stetigen Funktion f gegeben, für welche die Differentialgleichung $\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = f$ keine zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt.

H. Niemeyer zeigte in [48] die Existenz einer stetigen Funktion k, so daß die Gleichung $\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x) + k(x) u(x) = 0$ keine von Null verschiedene Lösung $u(x)$ zuläßt, welche zweimal differenzierbar ist.

E. Hopf zeigte in [17], daß die Lösung u der Differentialgleichung $Lu = f$ zweimal hölderstetig differenzierbar ist, falls die Koeffizienten a_{jk}, a_j, a des Differentialoperators L und die rechte Seite f der Differentialgleichung hölderstetige Funktionen sind.

Wir werden daher eine positive Antwort auf das Problem (1.4) nur dann erwarten können, wenn wir die Voraussetzung (1.1) verschärfen. Daher werden wir die Bedingung (1.1) für unsere weiteren Betrachtungen durch die nachfolgende Bedingung (1.6) ersetzen.

(1.6) Die Koeffizienten a_{jk}, a_j, a und die Funktion f in der Differentialgleichung

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \cdot u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot u_{x_j} + a \cdot u = f$$

seien Funktionen aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ mit $0 < \alpha < 1$. Ferner gelte für alle $x \in \bar{G}$: $a(x) \leqslant 0$.

Weiter wollen wir aus Gründen, welche erst im § 2 verständlich werden, eine Verschärfung der Voraussetzung (1.3) an den Rand ∂G der betrachteten Gebiete G und an die auf ∂G definierten Randwerte g vornehmen. Wir ersetzen (1.3) durch:

(1.7) Die Gebiete G des $\boldsymbol{R}_n$, in welchen wir die Differentialgleichung (1.0) betrachten, seien beschränkt. Die dazugehörigen Ränder ∂G gehören zur Klasse $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$,

und

(1.8) Die auf ∂G definierten Randwerte g seien aus $C_{2,\alpha}(\partial G)$.

Wir können nun andererseits mit den schärferen Voraussetzungen (1.6), (1.7), (1.8) bessere Eigenschaften der Lösung u des Dirichletproblems erwarten, als wir in (1.4) formulierten. Unser Ziel ist, den nachfolgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. Vor.: (a) *Es sei* $0<\alpha<1$. (b) *G sei ein beschränktes Gebiet des* $\boldsymbol{R}_n$ *mit Rand* ∂G *aus* $\mathscr{C}_{2,\alpha}$. (c) *Es sei* $Lu=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}u_{x_jx_k}+\sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j}+au$ *ein beliebiger Differentialoperator, dessen Koeffizienten* (1.2) *und* (1.6) *erfüllen.*

Beh.: *Zu jedem* $(f,g)\in C_{0,\alpha}(\bar G)\times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *existiert genau eine Lösung* $u\in C_{2,\alpha}(\bar G)$ *des Randwertproblems* $Lu=f,\ u_{|\partial G}=g$.

Satz 1 wird im § 6 bewiesen. In § 2 bis § 5 werden die dazu notwendigen Hilfsmittel bereitgestellt.

Erste Bemerkung zu Satz 1. Wie wir den Paragraphen 9 und 10 noch näher darlegen werden, spielt dieser Satz im Beweis der Existenz einer Lösung v des nichtlinearen Randwertproblems

$$\sum_{j,k}^{n} a_{jk}(x, v(x), v_x(x))\,v_{x_jx_k}(x)=f(x, v(x), v_x(x)) \qquad (x\in G),$$

$$v(x)=g(x) \qquad (x\in\partial G)$$

eine Schlüsselrolle. Diese Anwendung des Satzes rechtfertigt den beweistechnisch hohen Aufwand, der nötig ist, um die Regularität der Lösung u am Rande des Gebietes G zu beweisen. Hier wird nicht Kunst der Kunst wegen gemacht! Ist man jedoch nur an der Existenz einer Lösung u des Problems $Lu=f,\ u_{|\partial G}=g$ interessiert, welche zur Klasse $C_{0,0}(\bar G)\cap\mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ gehört, so kann der Existenzbeweis der Lösung mit der Perronschen Methode wesentlich einfacher geführt werden. Auch lassen sich dabei die Voraussetzungen an den Rand des Gebietes G und an die Randwerte g stark abschwächen. Eine Darstellung dieses Beweises findet man in [12], weshalb wir hier auf diesen Beweis nicht eingehen.

§ 2. Die Äquivalenz der Randwertprobleme $Lu=f,\ u_{|\partial G}=g$ und $\Delta u=f,\ u_{|\partial G}=g$

In diesem Paragraphen beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 2. *Die folgenden Aussagen* (I) *und* (II) *sind äquivalent.*

(I) *Für jedes beschränkte Gebiet G des* $\boldsymbol{R}_n$ *mit* $\partial G\in\mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0<\alpha<1$ *gilt: Ist* $Lu=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}u_{x_jx_k}+\sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j}+au$ *ein beliebiger Differentialoperator, dessen Koeffizienten* (1.2) *und* (1.6) *erfüllen und ist* $(f,g)\in C_{0,\alpha}(\bar G)\times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *beliebig, so existiert ein* $u\in C_{2,\alpha}(\bar G)$, *welches das Randwertproblem* $Lu=f$, $u_{|\partial G}=g$ *löst.*

(II) *Für jedes beschränkte Gebiet* G *des* $\boldsymbol{R}_n$ *mit* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ *gilt:*
Ist $(f, g) = C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *beliebig, so existiert ein* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$, *welches das Randwertproblem*

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = f, \qquad u|_{\partial G} = g$$

löst.

Bemerkung. Die Aussage (II) wird in der Literatur auch als „Satz von Kellogg" bezeichnet.

Beweis. Während die eine Richtung des Beweises, nämlich der Schluß von (I) auf (II), trivial ist, benötigen wir zum Schluß von (II) auf (I) die nachfolgende Ungleichung (2.1). Dazu seien G ein Gebiet und L ein Differentialoperator, welche die Voraussetzungen von Aussage (I) erfüllen. Es sei $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}$.

Wir wählen G und L beliebig, aber für die nachfolgenden Betrachtungen fest.

Wir zeigen: Gilt (II), so existiert eine Konstante $k > 0$, so daß für alle t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ und für alle $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ die Ungleichung

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant k\,\{\|(1-t)\,\Delta u + Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\} \tag{2.1}$$

gilt.

Zum Beweis von (2.1) benötigen wir noch den Hilfssatz (2.2).

(2.2) Hilfssatz. Vor.: *Es gelte Aussage* (II) *und* $L_0 \cdot = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} \dfrac{\partial^2 \cdot}{\partial x_j\, \partial x_k}$ *sei ein Differentialoperator in* G, *dessen Koeffizienten* b_{jk} *konstant sind und* (1.2) *erfüllen.*

Beh.: *Für alle* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *besitzt das Randwertproblem* $L_0 u = f$, $u|_{\partial G} = g$ *genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$. *Es gilt die Abschätzung* $\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant k\,\{\|f\|_{0,\alpha,G} + \|g\|_{2,\alpha,\partial G}\}$. *Die Konstante* k *hängt von* G *und den Koeffizienten* b_{jk}, *aber nicht von* (f, g) *ab.*

Beweis von Hilfssatz (2.2). Da der Operator L_0 elliptisch ist, existiert eine nichtsinguläre lineare Abbildung $Y\colon \boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$, $Y(G) = Q$, so daß sich das Randwertproblem

$$L_0\, u(x) = f(x) \ (x \in G) \quad \text{und} \quad u(x) = g(x) \ (x \in \partial G) \tag{2.3}$$

in das Randwertproblem

$$\Delta v(x) = f(x) \ (x \in Q) \quad \text{und} \quad v(x) = g(x) \ (x \in \partial Q) \tag{2.4}$$

transformiert. Da aber Q wieder ein beschränktes Gebiet mit $\partial Q \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ ist, existiert nach Voraussetzung und dem Maximum-Minimum-Prinzip genau eine Lösung $v \in C_{2,\alpha}(\bar{Q})$ des Problems (2.4). Damit existiert genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Problems (2.3). Durch $(f, g) \to u$ wird ein linearer Operator

$$T\colon\ C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G) \to C_{2,\alpha}(\bar{G})$$

definiert. T ist bijektiv. Der zu T inverse Operator

$$T^{-1}\colon\ C_{2,\alpha}(\bar{G}) \to C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G),$$

definiert durch $u \to (L_0 u, u|_{\partial G})$, ist stetig. Nach dem Satz von Banach ist dann T stetig. Da T linear ist, existiert eine Konstante k von der in der-Behauptung angegebenen Art.

Nun können wir zum Beweis von (2.1) kommen. Es sei L der oben genannte elliptische Operator mit den Koeffizienten a_{jk}, a_j, a. Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ und $y \in \bar{G}$ ist durch

$$L_{t,y} \cdot = \sum_{j,k=1}^{n} \{(1-t) \cdot \delta_{jk} + t \cdot a_{jk}(y)\} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_j \, \partial x_k}$$

eine Schar elliptischer Operatoren mit konstanten Koeffizienten definiert. Somit existiert zu jedem $(x^0, t_0) \in \bar{G} \times I$, $I = [0, 1]$, eine Konstante $k(x^0, t_0)$ (Hilfssatz (2.2)), so daß für alle $v \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ die Abschätzung

$$\|v\|_{2,\alpha,G} \leqslant k(x^0, t_0) \{\|L_{t_0,x^0} v\|_{0,\alpha,G} + \|v\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt. Es sei

$$P(x^0, t_0) = \operatorname{Max} \{k(x^0, t_0) \cdot (n + \sum_{j,k=1}^{n} \|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}), 1\}$$

und

$$O(x^0, t_0) = \{(x, t) |\ (x, t) \in \boldsymbol{R}_{n+1}, |t - t_0| < (16 \cdot P(x^0, t_0))^{-1} \text{ und }$$
$$|x - x^0|^\alpha < (16 \cdot P(x^0, t_0))^{-1}\}.$$

Die Mengen $\{O(x, t)\}_{(x,t) \in \bar{G} \times I}$ bilden ein offenes Überdeckungssystem von $\bar{G} \times I$. Da $\bar{G} \times I$ eine kompakte Teilmenge des $\boldsymbol{R}_{n+1}$ ist, wird $\bar{G} \times I$ von einem endlichen Teilsystem $\{O(x^j, t_j)\}_{j=1,\ldots,M}$ überdeckt. Es sei nun $z_j \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$ $(j = 1, \ldots, M)$ mit $z_j(x) = 0$ für $|x - x^j|^\alpha > (4 \cdot P(x^j, t_j))^{-1}$ und $z_j(x) = 1$ für $|x - x^j|^\alpha < (8 \cdot P(x^j, t_j))^{-1}$.

Mit

$$L_{t_j,x^j}(z_j u) = (t_j - t) \cdot \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk}(x^j) - \delta_{jk}) \cdot (z_j u)_{x_j x_k}$$
$$+ t \cdot \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk}(x^j) - a_{jk}(x)) \cdot (z_j u)_{x_j x_k} + L_{t,x}(z_j u)$$

haben wir die Abschätzung

$$\|z_j u\|_{2,\alpha,G} \leqslant k(x^j, t_j) \cdot \{|t-t_j| \cdot (n + \sum_{j,k=1}^{n} \|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}) \cdot \|z_j u\|_{2,\alpha,G}$$

$$+ (4 \cdot P(x^j, t_j))^{-1} \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \cdot \|z_j u\|_{2,\alpha,G}$$

$$+ \|L_{t,x}(z_j u)\|_{0,\alpha,G} + \|z_j u\|_{2,\alpha,\partial D} + 2 \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \cdot \|z_j u\|_{2,0,G}\}.$$

Mit der Ungleichung (siehe [31], Seite 117)

$$(2.5) \qquad \|w\|_{k,0,G} \leqslant \varepsilon \cdot \|w\|_{k,\alpha,G} + C_\varepsilon \cdot \|w\|_{0,0,G} \qquad (w \in C_{k,\alpha}(\bar{G}),\ \varepsilon > 0)$$

und der aus dem Maximum-Minimum-Prinzip folgenden Abschätzung

$$(2.6) \qquad \|z_j u\|_{0,0,G} \leqslant \text{const} \cdot (\|L_{t,x}(z_j u)\|_{0,0,G} + \|z_j u\|_{0,0,\partial G})$$

erhalten wir daraus für $|t-t_j| < (16 \cdot P(x^j, t_j))^{-1}$:

$$\|z_j u\|_{2,\alpha,G} \leqslant \hat{K}(x^j, t_j) \cdot (\|L_{t,x}(z_j u)\|_{0,\alpha,G} + \|z_j u\|_{2,\alpha,\partial G})$$

mit einer geeigneten Konstanten $\hat{K}(x^j, t_j)$, die sich noch durch $K = \operatorname{Max}_{j=1,\dots,M} \hat{K}(x^j, t_j)$ majorisieren läßt. Es sei τ beliebig aus I gewählt.

Ist $\Lambda = \{\lambda |\ \lambda \in \{1, \dots, M\},\ |t_\lambda - \tau| < (16 \cdot P(x^j, t_j))^{-1}\}$, dann ist $\{O(x^\lambda, t_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ein Überdeckungssystem von $\bar{G} \times \{\tau\}$. Umsomehr ist $\bar{G} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U(x^\lambda)$ mit $U(x^\lambda) = \{x |\ x \in G, |x - x^\lambda|^\alpha < (8 \cdot P(x^\lambda, t_\lambda))^{-1}\}$. Zu $x \in \bar{G}$ existiert $\lambda \in \Lambda$, mit $|x - x^\lambda|^\alpha < (16 \cdot P(x^\lambda, t_\lambda))^{-1}$. Damit gilt für jedes $y \in \bar{G}$ und beliebiges f unter Beachtung von $z_\lambda(x) = 1$ für $x \in U(x^\lambda)$:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} = \frac{|f(x) \cdot z_\lambda(x) - f(y) \cdot z_\mu(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

$$\leqslant \begin{cases} \sum_{j \in \Lambda} \|z_j f\|_{0,\alpha,G} & \text{falls } y \in U(x^\lambda), \\ r^{-1} \cdot \sum_{j \in \Lambda} \|z_j f\|_{0,0,G}, & \text{falls } y \notin U(x^\lambda), \end{cases}$$

wobei $r = \operatorname{Min}_{j=1,\dots,M} (16 \cdot P(x^j, t_j))^{-1}$ ist.

Damit erhalten wir weiter:

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant (1 + r^{-1}) \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} \|z_\lambda u\|_{2,\alpha,G}$$

und

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant (1 + r^{-1}) \cdot K \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} \{\|L_{\tau,x}(z_\lambda u)\|_{0,\alpha,G} + \|z_\lambda u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

$$\leqslant (1 + r^{-1}) \cdot K \cdot \{\|L_{\tau,x} u\|_{0,\alpha,G} \cdot \sum_{\lambda \in \Lambda} \|z_\lambda\|_{0,\alpha,G} +$$

$$+2\cdot\sum_{j,k=1}^{n}\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}\cdot\sum_{\lambda\in\Lambda}\|z_\lambda\|_{1,\alpha,G}\cdot\|u\|_{1,\alpha,G}$$

$$+\|u\|_{0,\alpha,G}\cdot\sum_{\lambda\in\Lambda}\|L_{\tau,x}z_\lambda\|_{0,\alpha,G}+2\cdot\|u\|_{2,\alpha,\partial G}\cdot\sum_{\lambda\in\Lambda}\|z_\lambda\|_{2,\alpha,\partial G}\Big\}.$$

Da $\Lambda\subset\{1,\ldots,M\}$ ist, erhalten wir daraus

$$\|u\|_{2,\alpha,G}\leqslant(1+r^{-1})\cdot K\cdot\Big\{\|L_{\tau,x}u\|_{0,\alpha,G}\cdot\sum_{j=1}^{M}\|z_j\|_{0,\alpha,G}$$

$$+2\cdot\sum_{j,k=1}^{n}\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}\cdot\sum_{j=1}^{M}\|z_j\|_{1,\alpha,G}\cdot\|u\|_{1,\alpha,G}$$

$$+\|u\|_{0,\alpha,G}\cdot\sum_{j=1}^{M}\Big(\|\Delta z_j\|_{0,\alpha,G}+\Big\|\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\cdot(z_j)_{x_jx_k}\Big\|_{0,\alpha,G}\Big)$$

$$+2\cdot\|u\|_{2,\alpha,\partial G}\cdot\sum_{j=1}^{M}\|z_j\|_{2,\alpha,\partial G}\Big\}.$$

Es existiert also eine Konstante $\tilde{K}$, welche nicht von τ abhängt, so daß die Abschätzung

$$\|u\|_{2,\alpha,G}\leqslant\tilde{K}\,\{\|L_{\tau,x}u\|_{0,\alpha,G}+\|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt. Daraus folgt für ein beliebiges $\tau\in I$:

$$\|u\|_{2,\alpha,G}\leqslant\tilde{K}\,\Big\{\|(1-\tau)\cdot\Delta u+\tau Lu\|_{0,\alpha,G}+\Big\|\sum_{j=1}^{n}a_j u_{x_j}+au\Big\|_{0,\alpha,G}$$

$$+\|u\|_{2,\alpha,\partial G}\Big\}.$$

Mit der Ungleichung (2.5) und dem Maximum-Minimum-Prinzip folgt daraus die Behauptung (2.1).

Zum Beweis, daß aus der Aussage (II) die Aussage (I) folgt, ist zu zeigen: Zu jedem $(f,g)\in C_{0,\alpha}(\bar{G})\times C_{2,\alpha}(\partial G)$ existiert eine Funktion $u\in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ mit $Lu=f$ und $u|_{\partial G}=g$. Dieser Nachweis wird mittels der Kontinuitätsmethode geführt. Dazu benötigen wir die Abschätzung (2.1).

(2.7) *Kontinuitätsmethode.* Es sei nun $(f,g)\in C_{0,\alpha}(\bar{G})\times C_{2,\alpha}(\partial G)$ beliebig, aber fest gewählt. Für $t\in[0,1]$ definieren wir uns folgende Schar gleichmäßig elliptischer Differentialoperatoren

$$L_t\cdot=t\cdot L\cdot+(1-t)\cdot\Delta\cdot.$$

Es sei

$A=\{t|\ t\in[0,1]$ und für alle $(\tilde{f},\tilde{g})\in C_{0,\alpha}(\bar{G})\times C_{2,\alpha}(\partial G)$ besitzt das Problem $L_t u=\tilde{f}$, $u|_{\partial G}=\tilde{g}$ eine Lösung $u(\cdot;t)\in C_{2,\alpha}(\bar{G})\}$.

Die Menge A ist nicht leer, denn nach Voraussetzung ist $t=0$ aus A.

Es sei $t_0 \in A$, k die Konstante aus hergeleiteten Abschätzung, $\varepsilon = [2k \cdot n(n+3)]^{-1} \cdot \underset{j,k=1,\ldots,n}{\mathrm{Max}} \{\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}, \|a_j\|_{0,\alpha,G}, \|a\|_{0,\alpha,G}\}$. Alle $t \in [0, 1]$ mit $|t - t_0| < \varepsilon$ gehören zu A, denn: Für $t \in [0, 1]$ und $|t - t_0| < \varepsilon$ und für jedes $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ ist

$$\hat{f}(\cdot, t) = (t - t_0) \cdot \{\Delta u - Lu\} + \tilde{f} \in C_{0,\alpha}(\bar{G}).$$

Das Problem $L_{t_0} v = \hat{f}(\cdot, t)$, $v|_{\partial G} = \tilde{g}$ hat genau eine Lösung $v \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$, da t_0 zu A gehört. Durch $u \to v$ wird damit eine Abbildung T_t: $C_{2,\alpha}(\bar{G}) \to C_{2,\alpha}(\bar{G})$ definiert. Für beliebiges u_1 und u_2 aus $C_{2,\alpha}(\bar{G})$ ist $T_t u_1 - T_t u_2$ Lösung des Randwertproblems:

$$L_{t_0}(T_t u_1 - T_t u_2) = (t - t_0) \cdot \{\Delta(u_1 - u_2) - L(u_1 - u_2)\},$$

$$(T_t u_1 - T_t u_2)|_{\partial G} = 0.$$

Daher gilt mit (2.1) für $T_t u_1 - T_t u_2$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|T_t u_1 - T_t u_2\|_{2,\alpha,G} &\leqslant k \cdot |t - t_0| \cdot \{\|\Delta(u_1 - u_2)\|_{0,\alpha,G} + \|L(u_1 - u_2)\|_{0,\alpha,G}\} \\ &\leqslant 2^{-1} \cdot \|u_1 - u_2\|_{2,\alpha,G}, \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung T_t ist kontrahierend. Somit existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ der Gleichung $T_t u = u$, d.h. t gehört zu A. Da ε nicht von t_0 abhängt, folgt damit auch: 1 gehört zu A. Somit existiert für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Problems $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$.

§ 3. Zusammenstellung von Existenzaussagen einer Lösung u des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ in beliebigen Gebieten G des R_n

Im § 2 hatten wir gesehen, zum Beweis von Satz 1 genügt es, die Aussage (II) zu beweisen. Es genügt also Satz 1 nur für den speziellen Operator $L = \Delta$ und nicht für einen allgemeinen elliptischen Operator L mit variablen Koeffizienten zu beweisen. Die Aussage (II) wird daher als das „einfachere" Problem angesehen. Die nachfolgende Aufstellung soll und kann keine vollständige Darstellung alle bekannten Ergebnisse sein. Sie stellt nur die für uns wesentlichen Ergebnisse aus der Literatur ohne Beweis bereit.

(3.1) Satz. *Für jedes beschränkte Gebiet $G \subset \boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ existiert zu jedem $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,0}(G)$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.*

Beachtet man, daß für $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ und $g \in C_{2,\alpha}(\partial G)$ zu jedem Punkt x_0 des Randes ∂G eine „barrier"-Funktion existiert, so läßt sich Satz (3.1) mit den von O. Perron [51] stammenden Methoden beweisen. Einen Beweis findet man in [12].

(3.2) SATZ (J. Schauder). *Ist G ein beschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand ∂G aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}$, so existiert zu jedem $(f, g) \in C_{0,\alpha}(G) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{1,\beta}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,0}(G)$, $0 < \beta < 1$, des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.*

Zum Beweis siehe [55].

(3.3) SATZ (N. M. Günther). *Für jedes beschränkte Gebiet $G \subset \boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, und für jedes $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ existiert genau eine Lösung $u \in C_{2,\beta}(\bar{G})$ mit $0 \leqslant \beta < \alpha$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.*

Zum Beweis siehe [15].

(3.4) SATZ (O. D. Kellogg). *Ist $S \subset \partial G$ mit $S \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $g|_S \in C_{2,\alpha}(S)$ und $f = 0$, so gilt in einer Umgebung $U(S)$ für die Lösung u des Randwertproblems $\Delta u(x) = 0$ $(x \in G)$ und $u(x) = g(x)$ $(x \in \partial G)$: $u|_{\bar{G} \cap U(S)} \in C_{2,\alpha}(\bar{G} \cap U(S))$.*

Dieser Satz ist in [22] enthalten.

(3.5) SATZ (E. Hopf). *Sind im Gebiete G die m-ten partiellen Ableitungen der Funktionen a_{jk}, a_j, a, f vorhanden und hölderstetig mit dem Exponenten α, so ist jede in G zweimal stetig differenzierbare Lösung von*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x)$$

daselbst $(m+2)$-mal hölderstetig — mit gleichem Exponenten α — differenzierbar.

Zum Beweis siehe [17].

Zum Beweis der Aussage (II) ist somit nur noch das Verhalten der Lösung u des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ am Rande des Gebietes G zu untersuchen. Der Beweis von Satz 1 hat sich damit auf diese Frage reduziert. Außgehend von den Sätzen von O. Perron bzw. von J. Schauder werden wir im § 5 die Regularität der Lösung u am Rande des Gebietes G untersuchen. Zuvor untersuchen wir in § 4 für die Spezialfälle $G =$ Kugel und $G =$ Halbkugel das Verhalten der Lösung u des Problems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ am Rande des Gebietes G.

§ 4. Die Regularität der Lösung u des Problems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ am Rande ∂G, falls G eine Kugel oder eine Halbkugel ist

Wir beginnen mit dem Spezialfall, daß das Gebiet G eine Halbkugel ist, also

$$G = K_1^+ = \{x | \; x \in \boldsymbol{R}_n, |x| < 1, \; x_n > 0\}.$$

Zunächst einige Bezeichnungen:

Es sei $r > 0$ und

$$K_r = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, |x| < r\},$$

$$K_r^+ = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, |x| < r, x_n > 0\},$$

$$H = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, x_n = 0\},$$

$$H_r = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, x_n = 0, |x| < r\}.$$

$C^*_{0,\alpha}(\bar{K}_r^+)$ sei der Banachraum, für dessen Elemente v $\operatorname{supp} v \subset \bar{K}^+_{2r/3}$ gilt. $C^*_{2,\alpha}(H_r)$ sei der Banachraum, für dessen Elemente v $\operatorname{supp} v \subset H_{r/2}$ gilt. Nun können wir den folgenden Satz beweisen.

(4.1) Satz. *Ist* $(f, g) \in C^*_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+) \times C^*_{2,\alpha}(H_1)$, *so existiert genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ *des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} &\Delta u(x) = f(x), \quad && x \in K_1^+, \\ (4.2)\qquad &u(x) = g(x), && x \in H_1, \\ &u(x) = 0, && x \in \partial K_1^+ \setminus H_1. \end{aligned}$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir noch drei Hilfssätze, welche wir zunächst bereitstellen wollen.

Aber zunächst noch einige Bezeichnungen:

Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}_n$, so wird mit $\bar{x}$ der an der Hyperebene H gespiegelte Vektor $(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ bezeichnet.

Für $x \neq y$ ist

$$G(x, y) = \big((n-2)\,\omega_n\big)^{-1} \cdot \{|x-y|^{2-n} - [1 - 2(x, y) + |x|^2 \cdot |y|^2]^{(2-n)/2}\}$$

die Greensche Funktion für die Kugel K_1. Durch Spiegelung an der Hyperebene H erhalten wir daraus die Greensche Funktion $\Gamma(x, y) = G(x, y) - G(\bar{x}, y)$, $x \neq y$, für die Halbkugel K_1^+.

(4.3) Hilfssatz. *h sei aus $C_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$, dann ist* $u(x) = -\int_{K_1^+} \Gamma(x, y) \cdot h(y)\, dy$ *aus* $C_{0,0}(\bar{K}_1^+) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+ \cup H_1)$ *und Lösung des Problems*

$$(4.4)\qquad \Delta u(x) = h(x)\ (x \in K_1^+) \quad \textit{und} \quad u(x) = 0\ (x \in \partial K_1^+).$$

Beweis. $u \in C_{0,0}(\bar{K}_1^+) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+)$ und Lösung des Randwertproblems (4.4) ist klar und kann hier übergangen werden. Es wird nur noch bewiesen, daß $u \in \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+ \cap H_1)$ ist.

Es sei $u = v + w$ mit

$$v(x) = -\big((n-2) \cdot \omega_n\big)^{-1} \cdot \int_{K_1^+} \{|x-y|^{2-n} - |\bar{x}-y|^{2-n}\} \cdot h(y)\, dy$$

und

$$w(x) = -\left((n-2)\cdot\omega_n\right)^{-1}\cdot \int_{K_1^+} \{[1-2(\bar{x}, y)+|\bar{x}|^2\cdot|y|^2]^{(2-n)/2}$$
$$-[1-2(x, y)+|x|^2\cdot|y|^2]^{(2-n)/2}\}\cdot h(y)\,dy.$$

w ist in K_1 harmonisch.

$$\psi(x, y) = \left((n-2)\cdot\omega_n\right)^{-1}\cdot\{|x-y|^{2-n}-|\bar{x}-y|^{2-n}\}, \qquad x \neq y.$$

Zunächst ist $v \in C_{1,0}(\bar{K}_1^+)$ (vgl. [16], Satz 2, Seite 186). Da für $j = 1, \ldots, n-1$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{K_1^+}\psi(x, y)\,dy = \int_{K_1^+}\psi_{x_j}(x, y)\,dy = -\int_{K_1^+}\psi_{y_j}(x, y)\,dy$$
$$= -\int_{\partial K_1^+\setminus H_1}\psi(x, y)\cdot\nu_j(y)\,do$$

gilt, ist v_{x_j} in $K_1^+ \cup H_1$ einmal hölderstetig differenzierbar und es gilt für $k = 1, \ldots, n$ und $x \in K_1^+ \cup H_1$ die Darstellung

$$v_{x_j x_k}(x) = -\int_{K_1^+}\psi_{x_j x_k}(x, y)\cdot[h(y)-h(x)]\,dy$$
$$-h(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_k}\int_{K_1^+}\psi_{x_j}(x, y)\,dy$$

(vgl. [16], Satz 3, Seite 187).

Zum Beweis der Hölderstetigkeit von $v_{x_j x_k}$ sei $x^1 \in K_1^+ \cup H_1$ beliebig aber fest gewählt, x^2 sei aus $K_1^+ \cup H_1$ und $d/2 = |x^1 - x^2|$, $Q = \{x|\ |x-x^1| < d\}$.

Zu zeigen ist:

$$\left|\int_{K_1^+}[h(y)-h(x^1)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^1, y)\,dy - \int_{K_1^+}[h(y)-h(x^2)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^2, y)\,dy\right|$$
$$\leqslant \text{const}\cdot|x^1-x^2|^\alpha.$$

Zunächst gilt:

$$\int_{K_1^+\setminus Q}[h(y)-h(x^1)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^1, y)\,dy - \int_{K_1^+\setminus Q}[h(y)-h(x^2)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^2, y)\,dy$$
$$= -\int_{K_1^+\setminus Q}[h(x^1)-h(x^2)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^1, y)\,dy$$
$$+\int_{K_1^+\setminus Q}[h(y)-h(x^2)]\cdot[\psi_{x_j x_k}(x^1, y)-\psi_{x_j x_k}(x^2, y)]\,dy,$$

$$I_1 = \int_{K_1^+\setminus Q}[h(x^2)-h(x^1)]\cdot\psi_{x_j x_k}(x^1, y)\,dy.$$

Für $x \in Q$, $j = 1, \ldots, n-1$, $k = 1, \ldots, n$ ist

$$\int\limits_{K_1^+ \setminus Q} \psi_{x_j x_k}(x, y)\, dy = \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{K_1^+ \setminus Q} \psi_{x_j}(x, y)\, dy = -\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{K_1^+ \setminus Q} \psi_{y_j}(x, y)\, dy$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{\partial K_1^+ \setminus H} \psi(x, y) \cdot \nu_j(y)\, do + \frac{\partial}{\partial x_k} \int\limits_{\partial(K_1^+ \cap Q) \setminus H} \psi(x, y) \cdot \nu_j(y)\, do$$

$$= -\int\limits_{\partial K_1^+ \setminus H} \psi_{x_k}(x, y) \cdot \nu_j(y)\, do + \int\limits_{\partial(K_1^+ \cap Q) \setminus H} \psi_{x_k}(x, y) \cdot \nu_j(y)\, do.$$

Also gilt:

$$\Big| \int\limits_{K_1^+ \setminus Q} \psi_{x_j x_k}(x^1, y)\, dy \Big| \leqslant \Big| \int\limits_{\partial K_1^+ \setminus H} \psi_{x_k}(x^1, y) \cdot \nu_j(y)\, do \Big|$$

$$+ \Big| \int\limits_{\partial(K_1^+ \cap Q) \setminus H} \psi_{x_k}(x^1, y) \cdot \nu_j(y)\, do \Big|$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot \Big(1 + \int\limits_{|y - x^1| = d} |x^1 - y|^{1-n}\, do\Big) \leqslant \mathrm{const}.$$

Mit $|h(x^1) - h(x^2)| \leqslant \mathrm{const} \cdot |x^1 - x^2|^\alpha$ folgt damit

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const} \cdot |x^1 - x^2|^\alpha,$$

$$I_2 = \int\limits_{K_1^+ \setminus Q} [h(y) - h(x^2)] \cdot [\psi_{x_j x_k}(x^1, y) - \psi_{x_j x_k}(x^2, y)]\, dy.$$

Es sei $P = \psi_{x_j x_k}(x^1, y) - \psi_{x_j x_k}(x^2, y)$ für $y \in K_1^+ \setminus Q$ und $x^1, x^2 \in Q$ definiert. Mit dem Mittelwertsatz läßt sich P zu $P = \sum_{i=1}^{n} (x_i^1 - x_i^2) \cdot \psi_{x_i x_j x_k}(\hat{x}, y)$ mit $\hat{x} = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$, $0 < \lambda < 1$, umformen. Ferner ist $|y - x^1| \geqslant d = 2 \cdot |x^1 - x^2|$, $|y - \hat{x}| \geqslant |y - x^1| - |x^1 - \hat{x}| \geqslant |y - x^1| - |x^1 - x^2| \geqslant \frac{1}{2}|y - x^1|$, $|y - x^2| \leqslant |y - x^1| + |x^1 - x^2| \leqslant \frac{3}{2}|y - x^1|$.

$|P|$ läßt sich daher durch

$$|P| \leqslant \mathrm{const} \cdot \frac{|x^1 - x^2|}{|y - x^2|^{n+1}} \leqslant \mathrm{const} \cdot \frac{|x^1 - x^2|}{|y - x^1|^{n+1}} \leqslant \mathrm{const} \cdot \frac{|x^1 - x^2|}{|y - x^2|^{n+1}}$$

abschätzen. Damit gilt:

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{K_1^+ \setminus Q} \mathrm{const} \cdot |y - x^2|^\alpha \cdot \frac{|x^1 - x^2|}{|y - x^2|^{n+1}}\, dy$$

$$\leqslant \mathrm{const} \cdot |x^1 - x^2| \cdot \{|x^1 - x^2|^{\alpha - 1} + \mathrm{const}\} \leqslant \mathrm{const} \cdot |x^1 - x^2|^\alpha.$$

Zum Beweis der Behauptung sind noch die beiden nachfolgenden Integrale abzuschätzen:

$$I_3 = \int_Q [h(y)-h(x^1)] \cdot \psi_{x_j x_k}(x^1, y)\,dy,$$

$$|I_3| \leqslant \int_{|x^1-y|\leqslant d} \text{const} \cdot \frac{|y-x^1|^\alpha}{|y-x^1|^n}\,dy \leqslant \text{const} \cdot d^\alpha \leqslant \text{const} \cdot |x^1-x^2|^\alpha,$$

$$I_4 = \int_Q [h(y)-h(x^2)] \cdot \psi_{x_j x_k}(x^2, y)\,dy,$$

$$|I_4| \leqslant \int_{|x^1-y|\leqslant d} \text{const} \cdot \frac{|y-x^2|^\alpha}{|y-x^2|^n}\,dy \leqslant \text{const} \cdot \int_{|y-x^2|\leqslant 2d} |y-x^2|^{\alpha-n}\,dy$$
$$\leqslant \text{const} \cdot |x^1-x^2|^\alpha.$$

Damit ist $v_{x_j x_k}$ für $j = 1, \ldots, n-1$, $k = 1, \ldots, n$ aus $\mathscr{C}_{0,\alpha}(K_1^+ \cup H_1)$ gezeigt.

In K_1^+ gilt $\Delta v = h$. Damit hat man in K_1^+ die Darstellung $v_{x_n x_n} = h - \sum_{i=1}^{n-1} v_{x_i x_i}$. Da die rechte Seite aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+ \cup H_1)$ ist, ist damit Hilfssatz (4.3) bewiesen.

(4.5) Hilfssatz. *Es sei* $B(y, r) = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, |x-y| < r\}$, $0 < r < 1$ *und* $y \in \boldsymbol{R}_n$ *beliebig mit* $|y|^2 = (1+r^2)$. Die Abbildung T: $\boldsymbol{R}_n \backslash \{0\} \to \boldsymbol{R}_n$ *sei durch* $x \to x/|x|^2$ *definiert.*

Dann gilt: T: $B(y, r) \to B(y, r)$ *und* T: $\partial B(y, r) \to \partial B(y, r)$.

Beweis. Es sei $x \in \overline{B(y, r)}$ beliebig, d.h $|x-y|^2 = |x|^2 - 2(x, y) + |y|^2 \leqslant r^2$ oder $-2(x, y) \leqslant r^2 - |y|^2 - |x|^2$. Damit gilt für $x \in B(y, r)$:

$$|Tx-y|^2 = \left|\frac{x}{|x|^2} - y\right|^2 = \frac{1}{|x|^2} - \frac{2}{|x|^2} \cdot (x, y) + |y|^2$$
$$< \frac{1}{|x|^2} + \frac{r^2-|y|^2-|x|^2}{|x|^2} + |y|^2 \leqslant \frac{1}{|x|^2} + \frac{r^2-|y|^2-|x|^2}{|x|^2} + 1 + r = r^2.$$

Für $x \in \partial B(y, r)$:

$$|Tx-y|^2 = \frac{1}{|x|^2} + \frac{r^2-|y|^2-|x|^2}{|x|^2} + 1 + r^2 = r^2.$$

(4.6) Hilfssatz. *Ist* $h \in C^*_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$, *so ist die Lösung* u *des Randwertproblems* (4.4) *aus* $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$.

Beweis. Mit Hilfssatz (4.3) ist $u \in \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+ \cup H_1)$.

(a) Da $\partial K_1^+ \backslash H \subset \partial K_1^+$, $u|_{\partial K_1^+} = 0$ und zu jedem $z \in \partial K_1^+ \backslash H$ eine Umgebung $U(z)$ existiert mit $\Delta u|_{U(z) \cap K_1^+} = 0$, läßt sich u mittels des Schwarzschen Spiegelungsverfahrens auf $\bar{K}_1^+ \backslash H$ harmonisch fortsetzen.

(b) Es sei $z \in \partial K_1^+ \cap \partial H_1$ beliebig, $r = 1/6$ und $y = (1+r^2)\cdot z$. Ferner sei $B(y, r) = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, |x-y| < r\}$, $\tilde{s}$: $\partial B(y, r) \cap \bar{K}_1 \to \boldsymbol{R}$ definiert durch

$$\tilde{s}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \bar{K}_1^+ \cap \partial B(y, r), \\ -u(\bar{x}), & \text{sonst}, \end{cases}$$

und s: $\partial B(y, r) \to \boldsymbol{R}$ definiert durch

$$s(x) = \begin{cases} \tilde{s}(x), & x \in \bar{K}_1 \cap \partial B(y, r), \\ -\tilde{s}(x/|x|^2)\cdot|x|^{2-n}, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Da $u|_{\partial K_1^+ \cap B(y,r)} = 0$ ist, ist s auf $\partial B(y, r)$ stetig. v sei Lösung des Randwertproblems

(4.7) $\quad \Delta v(x) = 0 \ \big(x \in B(y, r)\big) \quad$ und $\quad v(x) = s(x) \ \big(x \in \partial B(y, r)\big)$.

Es gilt dann:

(a) $v(x) = 0$ für $x \in H \cap \overline{B(y, r)}$, denn die Funktion $w(x) = -v(\bar{x})$ ist ebenfalls Lösung des Problems (4.7),

(b) $v(x) = 0$ für $x \in \partial K_1 \cap \overline{B(y, r)}$, denn die Funktion $z(x) = -v(x/|x|^2)\cdot|x|^{n-2}$ ist ebenfalls Lösung des Problems (4.7).

Damit ist $v|_{\bar{K}_1^+ \cap B(y,r)} = u|_{\bar{K}_1^+ \cap B(y,r)}$, d.h. u läßt sich auf $B(y, r)$ harmonisch fortsetzen.

Mit dem Hilfssatz (4.6) läßt sich nun Satz (4.1) beweisen.

Beweis von Satz (4.1). Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leqslant 1/2$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geqslant 2/3$. Da $g \in C_{2,\alpha}^*(H_1)$ ist, ist σ: $\bar{K}_1^+ \to \boldsymbol{R}$, definiert durch $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)\cdot g(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, aus $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ und $\Delta\sigma \in C_{0,\alpha}^*(\bar{K}_1^+)$. Ferner ist $\sigma|_{H_1} = g$ und $\sigma|_{\partial K_1^+ \setminus H_1} = 0$. Das Randwertproblem (4.2) besitzt für $h = f - \Delta\sigma$ $\big(h \in C_{0,\alpha}^*(\bar{K}_1^+)\big)$ eine Lösung $v \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ (Hilfssatz (4.6)). Die Funktion $u = v + \sigma$ ist aus $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ und Lösung des Randwertproblems (4.2).

Als nächstes betrachten wir das spezielle Gebiet G = Kugel, d.h. $G = K_1(0) = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n, |x| < 1\}$.

(4.8) Satz. *Ist $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1) \times C_{2,\alpha}(\partial K_1)$, so existiert genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ des Randwertproblems*

(4.9) $\quad \Delta u(x) = f(x) \ (x \in K_1) \quad$ *und* $\quad u|_{\partial K_1} = g$.

Zum Beweis von Satz (4.8) benötigen wir den nachfolgenden Hilfssatz.

(4.10) Hilfssatz. *Ist $f \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1)$, so existiert genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ des Randwertproblems*

(4.11) $\quad \Delta u(x) = f(x) \ (x \in K_1) \quad$ *und* $\quad u|_{\partial K_1} = 0$.

Beweis. Es sei G die Greensche Funktion für die Kugel K_1. Dann ist die durch $u(x) = -\int_{K_1} G(x, y)\cdot f(y)\,dy$ definierte Funktion die Lösung des Randwertproblems (4.11). Um die durch die Definition der Greenschen Funktion bedingten Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir $n > 2$ voraus. Der Fall $n = 2$ läßt sich analog behandeln. Aus der Darstellung der Greenschen Funktion für die Kugel K_1:

$$G(x, y) = \big((n-2)\cdot\omega_n\big)^{-1}\cdot\{|x-y|^{2-n} - [1 - 2(x, y) + |x|^2\cdot|y|^2]^{(2-n)/2}\}$$

für $x \neq y$, erhalten wir mit geeigneten Konstanten die Ungleichungen:

(1) $\quad |G(x, y)| \leqslant \text{const}\cdot|x-y|^{2-n}$,

(2) $\quad |G_{x_j}(x, y)| \leqslant \text{const}\cdot|x-y|^{1-n}, \quad j = 1, \ldots, n$,

(3) $\quad |G_{x_j x_k}(x, y)| \leqslant \text{const}\cdot|x-y|^{-n}, \quad j, k = 1, \ldots, n$.

Somit wissen wir mit [16], Satz 2, Seite 186: $u \in C_{1,0}(\bar{K}_1)$. Ferner gilt für jedes beliebige $x \in K_1$ die Darstellung:

$$u_{x_j x_k}(x) = -\int_{K_1} G_{x_j x_k}(x, y)\cdot\big(f(y) - f(x)\big)\,dy$$
$$-f(x)\cdot\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\int_{K_1} G(x, y)\,dy.$$

Betrachten wir nun die Funktion $v(x) = -\int_{K_1} G(x, y)\,dy$. Da G Greensche Funktion in K_1 ist, ist v Lösung des Randwertproblems $\Delta v(x) = 1$ $(x \in K_1)$ und $v(x) = 0$ $(x \in \partial K_1)$. Andererseits ist aber $w(x) = (2n)^{-1}\cdot(|x|^2 - 1)$ ebenfalls Lösung dieses Problems, somit gilt $v(x) = w(x)$ $(x \in \bar{K}_1)$. Damit ist aber $v_{x_j x_k}$ hölderstetig in K_1. Wir rechnen somit nach, daß $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ ist.

Beweis von Satz (4.8). Ist $g \in C_{2,\alpha}(\partial K_1)$, so wird durch $x \to g(x/|x|)$ eine Funktion $\tilde{g} \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1 \backslash K_{1/3}(0))$ definiert. Es sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \boldsymbol{R}_n \backslash K_{1/2}(0)$ und $\varphi(x) = 1$ für $|x| \geqslant 3/4$. Somit ist $\hat{g} = \varphi\cdot\tilde{g} \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$. Mit Hilfssatz (4.10) besitzt das Randwertproblem

$$\Delta v(x) = f(x) - \Delta\hat{g}(x) \quad (x \in K_1) \qquad \text{und} \qquad v|_{\partial K_1} = 0$$

eine Lösung $v \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$. Damit ist die Funktion $u = v + \hat{g}$ aus $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ und Lösung des Problems (4.9).

Bemerkung. Satz (4.8) wurde zurest von Ch. Müntz [47] bewiesen. Verbesserte Beweise stammen von P. S. Simoda [57] und N. Boboc und P. Mustată [9]. N. Boboc und P. Mustată benötigen jedoch die volle Schaudersche Beweistechnik zur Herleitung dieses Satzes, d.h. die a priori Abschätzungen, die Kontinuitätsmethode und die Existenz einer Lösung u aus $C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für das spezielle Gebiet $G =$ Halbebene.

§ 5. Die Regularität der Lösung u des Randwertproblems $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ und $u(x) = g(x)$ $(x \in \partial G)$ am Rande des Gebietes G

(5.1) Satz. *Es sei G ein beschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand ∂G aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ und (f, g) sei aus $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$. Ist $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ eine Lösung von*

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in G) \quad \text{und} \quad u(x) = g(x) \;\; (x \in \partial G),$$

so ist $u \in C_{1,\beta}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ mit $0 \leqslant \beta < 1$.

Zum Beweis von Satz (5.1) benötigen wir noch fünf Hilfssätze, welche wir zunächst bereitstellen.

(5.2) Hilfssatz. *E sei ein Banachraum. T: $E \to C_{k,\alpha}(G)$ sei eine lineare Abbildung und I: $C_{k,\alpha}(G) \to C_{0,0}(G)$ sei die Einbettung. Ist $I \circ T$: $E \to C_{0,0}(G)$ stetig, so ist T stetig.*

Beweis. Ist $\{u_j\}_{j>0}$ eine Folge in E mit $\lim\limits_{j\to\infty} u_j = u$ und $\lim\limits_{j\to\infty} Tu_j = y$, dann ist $Iy = \lim\limits_{j\to\infty} I \circ Tu_j = I \circ Tu$, da I stetig ist. Wegen der Injektivität von I ist $Tu = y$. Also ist T: $E \to C_{k,\alpha}(G)$ abgeschlossen und daher nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen stetig.

(5.3) Hilfssatz. *Es sei $(f, g) \in C^*_{0,\alpha}(\bar{K}^+_1) \times C^*_{2,\alpha}(H_1)$. Es existiert eine Konstante c, welche nicht von (f, g) abhängt, so daß für die Lösung u des Randwertproblems* (4.2) *die Abschätzung $\|u\|_{2,\alpha,K^+_1} \leqslant c\{\|f\|_{0,\alpha,K^+_1} + \|g\|_{2,\alpha,H_1}\}$ gilt.*

Beweis. Es sei T: $C^*_{0,\alpha}(\bar{K}^+_1) \times C^*_{2,\alpha}(H_1) \to C_{2,\alpha}(\bar{K}^+_1)$ definiert durch $(f, g) \to u$, wobei u die Lösung des Randwertproblems (4.2) ist. T ist linear. Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip folgt die Abschätzung $\|T(f, g)\|_{0,0,K^+_1} \leqslant \text{const} \cdot \{\|f\|_{0,0,K^+_1} + \|g\|_{2,\alpha,H_1}\}$. Damit ist $I \circ T$: $C^*_{0,\alpha}(\bar{K}^+_1) \times C^*_{2,\alpha}(H_1) \to C_{0,0}(\bar{K}^+_1)$ stetig, also ist T nach Hilfssatz (5.2) stetig, woraus die Behauptung folgt.

Der nachfolgende Hilfssatz (5.4) gestattet es, sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweis des Satzes (5.1) auf den Fall $g|_{\partial G} = 0$ zu beschränken.

(5.4) Hilfssatz. Vor.: *Es sei G ein beschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$.*

Beh.: (1) *Zu jeder Funktion $g \in C_{2,\alpha}(\partial G)$ existiert eine Funktion $v \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ mit $v|_{\partial G} = g$.*

(2) *Mit einer Konstanten k, welche nicht von g abhängt, gilt die Abschätzung $\|v\|_{2,\alpha,G} \leqslant k \cdot \|g\|_{2,\alpha,\partial G}$.*

Beweis. Da G ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ ist, existieren endlich viele Punkte $z_j \in \partial G$ $(j = 1, \ldots, M)$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem z_j gibt es eine Umgebung $U(z_j)$ und eine eineindeutige, in beiden Richtungen zweimal gleichmäßig hölderstetig mit Exponent α differenzierbare Abbildung $s_j\colon U(z_j)\to K_1(0)$, so daß $s_j(z_j)=0$, $s_j(\partial G\cap U(z_j))\subset H_1$ und $s_j(G\cap U(z_j))\subset K_1^+$ gilt.

(2) $\partial G\subset\bigcup_{j=1}^{M} s_j^{-1}(H_{1/2})$. Es existieren ferner Funktionen $q_j\in C^\infty(R_n)$ $(j=1,\dots,M)$, so daß $\operatorname{supp} q_j\subset s_j^{-1}(K_{1/2}(0))$ und für alle x gelte $0\leqslant q_j(x)\leqslant 1$ und $\sum_{j=1}^{M} q_j(x)=1$ (Zerlegung der Eins). Damit sind die Funktionen $\tilde g_j\colon H_1\to R$, definiert durch $\tilde g_j(x)=q_j(s_j^{-1}(x))\cdot g(s_j^{-1}(x))$, aus $C^*_{2,\alpha}(H_1)$. Mit Hilfssatz (4.1) existiert eine Lösung $\tilde v_j\in C_{2,\alpha}(\bar K_1^+)$ des Randwertproblems $\Delta\tilde v_j(x)=0$ $(x\in K_1^+)$, $\tilde v_j(x)=\tilde g_j(x)$ $(x\in H_1)$ und $\tilde v_j(x)=0$ $(x\in\partial K_1^+\backslash H_1)$. Die Ungleichung $\|\tilde v_j\|_{2,\alpha,K_1^+}\leqslant c\cdot\|\tilde g_j\|_{2,\alpha,H_1}$ folgt aus Hilfssatz (5.3). Somit ist die Funktion $\hat v_j=\tilde v_j\circ s_j\in C_{2,\alpha}(U(z_j)\cap\bar G)$ und es ist $\hat v_j|_{\partial G\cap U(z_j)}=g\cdot q_j$.

Es sei nun $\varphi_j\in C_0^\infty(R_n)$ mit $\operatorname{supp}\varphi_j\subset s_j^{-1}(K_{3/4}(0))$ und $\varphi_j(x)=1$ für $x\in s_j^{-1}(\bar K_{1/2}(0))$. Somit ist $v_j=\varphi_j\cdot\hat v_j$ aus $C_{2,\alpha}(\bar G)$ und $v_j|_{\partial G}=q_j\cdot g$. Ferner folgt aus der Konstruktion von v_j und der aus Hilfssatz (5.3) folgenden Ungleichung die Existenz einer Konstanten $c>0$, so daß $\|v_j\|_{2,\alpha,G}\leqslant c\,\|g\|_{2,\alpha,\partial G}$ gilt. Die Funktion $v=\sum_{j=1}^{M} v_j$ hat die behaupteten Eigenschaften.

(5.5) Hilfssatz. Vor.: *Es sei $r>0$ und $p=(4n+1)^{1/2}\cdot r\cdot(2n+1)^{-1}$, $H_p=\{x|\ x\in R_{n-1},\ |x|<p\}$, $w\colon H_p\to R$ sei definiert durch $w(x)=(r^2-|x|^2)^{1/2}-r$, $q\colon H_p\to R$ sei stetig mit $|q(x)|\leqslant -w(x)$ für alle $x\in H_p$, $S=\{(x,t)|\ x\in H_p,\ q(x)<t<r\cdot(2n+1)^{-1}\}$, $v\colon\bar S\to R$ sei definiert durch $v(x,t)=-t^2+rt\cdot(2n+1)^{-1}+(r-(r^2-|x|^2)^{1/2})\cdot(r\cdot(2n+1)^{-1}-t)$.*

Beh.: *Für alle $(x,t)\in\bar S$ gilt $v(x,t)\geqslant 0$ und $\sum_{j=1}^{n-1} v_{x_jx_j}(x,t)+v_{tt}(x,t)\leqslant -1$.*

Beweis. $v(x,t)\geqslant 0$ für alle $(x,t)\in\bar S$ folgt sofort aus der Darstellung $v(x,t)=(t-(r^2-|x|^2)^{1/2}+r)\cdot(r\cdot(2n+1)^{-1}-t)$. Differenzieren wir v, so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n-1} v_{x_jx_j}(x,t)+v_{tt}(x,t)$$
$$=-2+(r^2-|x|^2)^{1/2}\cdot(n-1+|x|^2\cdot(r^2-|x|^2)^{-1})\cdot(r\cdot(2n+1)^{-1}-t),$$

woraus für $(x,t)\in S$ weiter folgt:

$$\sum_{j=1}^{n-1} v_{x_jx_j}(x,t)+v_{tt}(x,t)$$
$$\leqslant -2+(2n+1)\cdot(2nr)^{-1}\cdot(n-1+(4n+1)\cdot(4n^2)^{-1})\cdot 2r\cdot(2n+1)^{-1}$$
$$\leqslant -1.$$

(5.6) HILFSSATZ. VOR.: (1) *Es sei* $0 < \alpha < 1$ *und* G *ein beschränktes Gebiet des* $\boldsymbol{R}_n$ *mit Rand* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$. *Für* $y \in \partial G$ *sei* $\nu(y)$ *die äußere Normale an* ∂G.

(2) *Es sei* $f \in C_{0,\alpha}(\bar{G})$ *und* $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ *sei Lösung des Randwertproblems* $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ *und* $u(x) = 0$ $(x \in \partial G)$.

Beh.: *Es existieren Konstanten* $a > 0$ *und* $c > 0$, *welche nur von* n *und* ∂G *abhängen, so daß für alle* $y \in \partial G$ *und alle* t *mit* $0 \leqslant t \leqslant a$ *die Abschätzung* $|u(y - t\nu(y))| \leqslant c \cdot \|f\|_{0,0,G} \cdot t$ *gilt.*

Beweis. Da der Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ ist, existiert zu jedem $z \in \partial G$ eine Kugel mit Radius $r(z) > 0$, welche ∂G nur im Punkte z berührt. Da ferner ∂G kompakt ist, existiert ein $r > 0$, so daß $r(z) \geqslant r$ für alle $z \in \partial G$ gilt.

Es sei nun $y \in \partial G$ beliebig aber fest gewählt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $y = 0$ und $\nu(y) = (0, \ldots, 0, -1)$. Diese spezielle Lage von y und ∂G läßt sich durch eine lineare Abbildung $Y: \boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$ erreichen. Aus der geforderten Glattheit des Randes folgt ferner für alle $x \in H_p$, $p = (4n+1)^{1/2} \cdot r \cdot (2n+1)^{-1}$, die Existenz einer zweimal hölderstetig differenzierbaren Funktion q, so daß $\{(x, t) |\ x \in H_p,\ t = q(x)\} \subset \partial G$ ist.

Es sei $S = \{(x, t) |\ x \in H_p,\ q(x) < t < r \cdot (2n+1)^{-1}\}$ und v: $S \to \boldsymbol{R}$ die in Hilfssatz (5.5) definierte Funktion. Wir betrachten nun folgende Funktionen aus S: $u(x, t) + w(x, t)$ und $-u(x, t) + w(x, t)$ mit

$$\begin{aligned} w(x, t) = {} & \{(2n+1)^2 \cdot ((4n+1) \cdot r^2)^{-1} \cdot |x|^2 \\ & + (2n+1) \cdot r^{-1} \cdot (t + r - (r^2 - |x|^2)^{1/2})\} \cdot \|u\|_{0,0,G} \\ & + \{(n-1) \cdot (2n+1)^2 \cdot ((4n+1) \cdot r^2)^{-1} + (2n+1)^2 \cdot (2r^2)^{-1}\} \\ & \times 2 \cdot \|u\|_{0,0,G} \cdot v(x, t) + \|f\|_{0,0,G} \cdot v(x, t). \end{aligned}$$

Wie man sofort nachrechnet gilt mit Hilfssatz (5.5):

$$u(x, t) + w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{und} \quad -u(x, t) + w(x, t) \geqslant 0 \quad \text{für } (x, t) \in \partial S$$

und

$$\sum_{j=1}^{n-1} (u(x, t) + w(x, t))_{x_j x_j} + (u(x, t) + w(x, t))_{tt} \leqslant 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (u(x, t) + w(x, t))_{x_j x_j} + (-u(x, t) + w(x, t))_{tt} \leqslant 0$$

für alle $(x, t) \in S$. Damit folgt mit dem Maximum-Minimum-Prinzip $u(x, t) + w(x, t) \geqslant 0$ und $-u(x, t) + w(x, t) \geqslant 0$ für $(x, t) \in \bar{S}$, woraus durch Einsetzen des Argumentes $(0, t)$, $0 \leqslant t \leqslant a = r \cdot (2n+1)^{-1}$ mit einer geeigneten Konstanten c, welche nur von n und ∂G abhängt, die Behauptung folgt.

Beweis von Satz (5.1). Es sei v die zu $g \in C_{2,\alpha}(\partial G)$ gehörende Funktion aus Hilfssatz (5.4). Ist nun $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ eine Lösung des Problems $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ und $u(x) = g(x)$ $(x \in \partial G)$, so gilt für die Funktion $w = u - v$:

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v = f - \Delta v = F \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \quad \text{und} \quad w|_{\partial G} = u|_{\partial G} - v|_{\partial G} = 0.$$

Da $v \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ ist, besitzt u das gleiche Verhalten am Rande ∂G wie w. Zum Beweis des Satzes ist damit nur der Spezialfall $g = 0$ zu untersuchen. Wir nehmen nun an, daß $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ Lösung des Randwertproblems $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ und $u(x) = 0$ $(x \in \partial G)$ ist. Wir zeigen $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$, $0 \leqslant \gamma < 1$.

Es sei nun $z \in \partial G$ beliebig aber fest. Durch eine lineare Abbildung Y: $\boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$ läßt sich erreichen, daß $z = 0$ und $v = v(0) = (0, \ldots, 0, -1)$ gilt. Da $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ ist, existiert ein $r > 0$, so daß die Kugel $K_r(-rv)$ den Rand ∂G nur im Punkte $y = 0$ berührt.

Um die durch die Definition der Greenschen Funktion bedingte Fallunterscheidung zu vermeiden, setzen wir im weiteren Verlauf des Beweises $n > 2$ voraus. Der Fall $n = 2$ läßt sich analog behandeln.

Mit der Greenschen Funktion für die Kugel $K_r(-rv)$:

$$G(x, y) = \big((n-2) \cdot \omega_n\big)^{-1} \cdot \{|x-y|^{2-n} - [r^2 - 2(x+rv, y+rv) + r^{-2} \cdot |x+rv|^2 \cdot |y+rv|^2]^{(2-n)/2}\}, \qquad x \neq y,$$

erhalten wir für u in $K_r(-rv)$ die Darstellung:

$$u(x) = -\int_{K_r(-rv)} G(x, y) \cdot f(y)\, dy + (r^2 - |x+rv|^2) \cdot (r\omega_n)^{-1} \times \int_{|y+rv|=r} u(y) \cdot |x-y|^{-n} do.$$

Wie wir anhand der Definition von $G(x, y)$ sofort nachrechnen, gilt

(a) $|G(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot |x-y|^{2-n}$, $x \neq y$,

(b) $|G_{x_j}(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot |x-y|^{1-n}$, $x \neq y$, $j = 1, \ldots, n$,

(c) $|G_{x_j x_k}(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot |x-y|^{-n}$, $x \neq y$, $j, k = 1, \ldots, n$.

Somit ist

$$\int_{K_r(-rv)} G(x, y) \cdot f(y)\, dy \in C_{1,\gamma}(\bar{K}_r(-rv)), \qquad 0 \leqslant \gamma < 1.$$

Die lineare Abbildung T: $C_{0,\alpha}(\bar{K}_r(-rv)) \to C_{1,\gamma}(\bar{K}_r(-rv))$, definiert durch $f|_{K_r(-rv)} \to \int_{K_r(-rv)} G(\cdot, y) \cdot f(y)\, dy$, ist stetig (Hilfssatz (5.2)), da

$$\Big\| \int_{K_r(-rv)} G(x, y) \cdot f(y)\, dy \Big\|_{0,0,K_r(-rv)} \leqslant \text{const} \cdot \|f\|_{0,0,K_r(-rv)}$$

gilt. Somit existiert eine Konstante k, so daß

$$\Big\| \int_{K_r(-rv)} G(\cdot, y) \cdot f(y)\, dy \Big\|_{1,\gamma,K_r(-rv)} \leqslant k \cdot \|f\|_{0,\alpha,G}$$

ist. Es sei a die Konstante aus Hilfssatz (5.5) und $b=\operatorname{Min}\{a, r\}$. $S=\{x \mid x\in\partial K_r(-rv), \operatorname{dist}(x, \partial G)\leqslant 2\cdot|x_n|\leqslant b\}$. Die Funktion

$$v^{(1)}(x)=(r\omega_n)^{-1}\cdot(r^2-|x+rv|^2)\int\limits_{\partial K_r(-rv)\setminus S} u(y)\cdot|x-y|^{-n}\,do$$

ist in einer Umgebung $U(0)$ beliebig oft differenzierbar. Indem wir die lineare Abbildung, definiert durch $u|_{\partial K_r(-rv)\setminus S}\to v^{(1)}|_{U(0)}$ betrachten, erhalten wir mit Hilfssatz (5.2) die Abschätzung $\|v^{(1)}\|_{2,0,U(0)}\leqslant\text{const}\cdot\|u\|_{0,0,G}$. Wir betrachten nun die Funktion

$$v^{(2)}(x)=(r\omega_n)^{-1}\cdot(r^2-|x+rv|^2)\int\limits_S u(y)\cdot|x-y|^{-n}\,do.$$

In $K_r(-rv)$ ist $v^{(2)}$ harmonisch. Es ist

$$\begin{aligned}v^{(2)}_{x_j}(x)=&-(r\omega_n)^{-1}\cdot 2\cdot(x_j-r\cdot\delta_{jn})\cdot\int\limits_S u(y)\cdot|x-y|^{-n}\,do\\&-n\cdot(r\omega_n)^{-1}\cdot(r^2-|x+rv|^2)\cdot\int\limits_S u(y)\cdot(x_j-y_j)\cdot|x-y|^{-n-2}\,do.\end{aligned}$$

Da für alle $y\in S$ der Abstand $\operatorname{dist}(y, \partial G)\leqslant 2\cdot y_n\leqslant a$ ist, erhalten wir mit Hilfssatz (5.6) die Abschätzung $|u(y)|\leqslant c\cdot\|f\|_{0,0,G}\cdot 2\cdot y_n$. Da ferner für alle $y\in S$ die Ungleichung $\sum\limits_{j=1}^{n-1}y_j^2=(2r-y_n)\cdot y_n\geqslant(2r-r)\cdot y_n=r\cdot y_n$ gilt, ist somit $|u(y)|\leqslant\text{const}\cdot\|f\|_{0,0,G}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n-1}y_j^2$.

Für $x=-tv$, $0\leqslant t\leqslant r$, ist damit

$$\begin{aligned}\|v^{(2)}_{x_j}(-tv)\|\leqslant\text{const}\cdot\Big\{&\|f\|_{0,0,G}\cdot 2\cdot\delta_{jn}\cdot(t+r)\cdot\int\limits_S|y+tv|^{2-n}\,do\\&+\big(r^2-(r-t)^2\big)\cdot\int\limits_S|y+tv|^{1-n}\,do\,\|f\|_{0,0,G}\Big\}\leqslant\text{const}\cdot\|f\|_{0,0,G}.\end{aligned}$$

Weiter gilt für $k=1,\ldots,n-1$:

$$\begin{aligned}v^{(2)}_{x_jx_k}=(r\omega_n)^{-1}\cdot\Big\{&-2\cdot\delta_{jk}\cdot\int\limits_S u(y)\cdot|x-y|^{-n}\,do\\&+2n(x_j-r\cdot\delta_{jn})\cdot\int\limits_S u(y)\cdot(x_k-y_k)\cdot|x-y|^{-2-n}\,do\\&+2n\cdot x_k\cdot\int\limits_S u(y)\cdot(x_j-y_j)\cdot|x-y|^{-2-n}\,do\\&-n\cdot(r^2-|x+rv|^2)\cdot\int\limits_S u(y)\cdot\delta_{jk}\cdot|x-y|^{-2-n}\,do\\&+n(n+2)\cdot(r^2-|x+rv|^2)\cdot\int\limits_S u(y)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_k-y_k)\cdot|x-y|^{-4-n}\,do\Big\}.\end{aligned}$$

Für $x = -tv$, $0 \leqslant t \leqslant r$, erhalten wir daraus mit der obigen Abschätzung für $u(y)$:

$$|v^{(2)}_{x_j x_k}(-tv)| \leqslant \text{const} \cdot \|f\|_{0,0,G} \cdot \Big\{ \int_S |tv+y|^{2-n} do$$

$$+ \int_S |tv+y|^{1-n} do + (r\omega_n)^{-1} \cdot (r^2 - (r-t)^2) \cdot \int_S |tv+y|^{-n} do \Big\}$$

$$\leqslant \begin{cases} \text{const} \cdot \|f\|_{0,0,G}, & \text{für } j,\, k \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ \text{const} \cdot \|f\|_{0,0,G} \cdot \log(t), & \text{für } j = n \text{ und } k \in \{1, \ldots, n-1\}. \end{cases}$$

Da $v^{(2)}$ der Differentialgleichung $\Delta v^{(2)} = 0$ genügt, erhalten wir zusätzlich $|v^{(2)}_{x_n x_n}(-tv)| \leqslant \text{const} \cdot \|f\|_{0,0,G}$.

Somit sind in einer Umgebung des Randes ∂G die Funktionen u, u_{x_j} und $u_{x_j x_k} \cdot \log(\text{dist}(x, \partial\Omega))$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ beschränkt, d.h. aber $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$, $0 \leqslant \gamma < 1$.

(5.7) Satz. *Es sei G ein beschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ und (f, g) sei aus $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$. Ist $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ eine Lösung des Problems $\Delta u = f$ und $u|_{\partial G} = g$, so ist $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Zum Beweis von Satz (5.7) benötigen wir einen weiteren Hilfssatz, welchen wir zunächst bereitstellen wollen.

(5.8) Hilfssatz. Vor.: (a) *Der Operator $L \cdot = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \cdot$ mit $a_{jk} \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ sei in $\bar{K}_1^+$ elliptisch.*

(b) *Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$ mit $\varphi(x) = 1$ für $|x| \leqslant 1/3$ und $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geqslant 2/3$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.*

(c) *Es gelte: $\sum_{j,k=1}^{n} \varphi \cdot (a_{jk} - \delta_{jk})\|_{0,\alpha,K_1^+} \leqslant (2c)^{-1}$, wobei c die Konstante aus Hilfssatz (5.3) ist.*

(d) *Es sei $L_0 \cdot = \Delta \cdot + \varphi(x) \cdot \{L \cdot - \Delta \cdot\}$.*

Beh.: *Das Randwertproblem*

$$L_0 u(x) = f(x), \quad x \in K_1^+,$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in H_1,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial K_1^+ \setminus H_1,$$

besitzt für alle $(f, g) \in C^*_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+) \times C^*_{2,\alpha}(H_1)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$.

Beweis. Für jedes $v \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ ist $\Delta v(x) - L_0 v(x) + f(x) = 0$ für alle $x \in K_1^+ \setminus K_{2/3}^+$. Daher hat das Randwertproblem

$$\Delta w(x) = \Delta v(x) - L_0 v(x) + f(x), \quad x \in K_1^+,$$

$$w(x) = g(x), \quad x \in H_1, \tag{5.9}$$

$$w(x) = 0, \quad x \in \partial K_1^+ \setminus H_1,$$

wegen Satz (4.1) genau eine Lösung $w \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$. Durch $v \to w$ ist eine Abbildung T: $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+) \to C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ definiert und es genügt zu zeigen, daß T genau einen Fixpunkt besitzt. Für die Differenz zweier Lösungen $w_1 = Tv_1$ und $w_2 = Tv_2$ gilt $\Delta(w_1 - w_2) = \Delta(v_1 - v_2) - L_0(v_1 - v_2)$ $(x \in K_1^+)$ und $(w_1 - w_2)|_{\partial K_1^+} = 0$ und daher nach Hilfssatz (5.3) die Abschätzung:

$$\|w_1 - w_2\|_{2,\alpha,K_1^+} \leqslant c \cdot \|(\Delta \cdot - L_0 \cdot)(v_1 - v_2)\|_{0,\alpha,K_1^+}$$

$$\leqslant c \cdot \|v_1 - v_2\|_{2,\alpha,K_1^+} \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|\varphi(a_{jk} - \delta_{jk})\|_{0,\alpha,K_1^+}$$

$$\leqslant \frac{c}{2c} \cdot \|v_1 - v_2\|_{2,\alpha,K_1^+}.$$

Damit ist die Abbildung T kontrahierend. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert genau eine Lösung der Gleichung $Tu = u$.

Wir haben jetzt die Hilfsmittel bereitgestellt, um Satz (5.7) beweisen zu können.

Beweis von Satz (5.7). Es sei nun $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ eine Lösung des Randwertproblems $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in G)$ und $u(x) = g(x)$ $(x \in \partial G)$. Zu zeigen: $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.

Es sei x_0 ein beliebiger Punkt aus ∂G. Da der Rand zur Klasse $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ gehört, existiert zu x_0 eine Umgebung $U(x_0)$ und eine eineindeutige, zweimal gleichmäßig mit Exponent α hölderstetig differenzierbare Abbildung V_1: $U(x_0) \to \boldsymbol{R}_n$, welche

(a) $U(x_0) \cap \bar{G}$ in den Halbraum $\boldsymbol{R}_n^+$,

(b) $U(x_0) \cap \partial G$ in die Hyperebene H,

(c) x_0 in den Nullpunkt

abbildet. Durch V_1 wird der Ausdruck $\Delta u(x)$ in den Ausdruck

$$\sum_{j,k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}(z) \cdot \tilde{w}_{z_j z_k}(z) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(z) \cdot \tilde{w}_{z_j}(z)$$

transformiert. Durch eine weitere Abbildung V_2: $\boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$, welche linear und nicht singulär ist, läßt sich zusätzlich noch

$$\sum_{j,k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}(z) \cdot \tilde{w}_{z_j z_k}(z) \to \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(y) \cdot \hat{w}_{y_j y_k}(y)$$

mit $\hat{a}_{jk}(0) = \delta_{jk}$ erreichen.

φ sei die in Hilfssatz (5.8) definierte Funktion. Da $\hat{a}_{jk}$ aus $C_{1,0}(V_2 \circ V_1\, U(x_0))$ ist, existiert ein r mit $0 < r < 1/3$, so daß für die Halbkugel K_r^+ die Abschätzung

$$(5.10) \quad \|\varphi\|_{1,0,K_1^+} \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|\hat{a}_{jk} - \delta_{jk}\|_{0,\alpha,K_1^+} < (2c)^{-1}$$

gilt. Für $j, k = 1, \ldots, n$ sei nun $\hat{b}_{jk}$: $\bar{K}_1^+ \to \boldsymbol{R}$ durch

$$\hat{b}_{jk}(y) = \begin{cases} \hat{a}_{jk}(y), & y \in \bar{K}_r^+, \\ \hat{a}_{jk}\left(\dfrac{r}{|y|}\, y\right), & y \in \bar{K}_1^+ \setminus K_r^+ \end{cases}$$

definiert.

Die Koeffizienten $\hat{b}_{jk}$ sind aus $C_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ und mit (5.10) erfüllen sie die Voraussetzung (c) von Hilfssatz (5.8). Φ sei aus $C_0^\infty(\boldsymbol{R}_n)$ mit $\operatorname{supp}\Phi \subset K_{2r/3}(0)$ und $\Phi(y) = 1$ für $y \in K_{r/2}(0)$. Weiter sei F: $\bar{K}_1^+ \to \boldsymbol{R}$ definiert durch

$$F(y) = \Phi(y) \cdot \hat{f}(y) + 2 \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(y) \cdot \Phi_{y_j}(y) \cdot \hat{w}_{y_k}(y)$$

$$+ \hat{w}(y) \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(y) \cdot \Phi_{y_j y_k}(y) - \Phi(y) \cdot \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j(y) \cdot \hat{w}_{y_j}(y).$$

F ist aus $C_{0,\alpha}^*(\bar{K}_1^+)$, denn $\hat{w}$ ist aus $C_{1,\gamma}(\bar{K}_r^+)$ und $\operatorname{supp}\Phi \subset \bar{K}_r \subset \bar{K}_{2/3}$. Das Randwertproblem

$$\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(y) \cdot v_{y_j y_k}(y) = F(y), \qquad y \in K_1^+,$$

$$\text{(5.11)} \qquad v(y) = \Phi(y)\,\hat{w}(y), \qquad y \in H_1,$$

$$v(y) = 0, \qquad y \in \partial K_1^+ \setminus H_1,$$

mit $b_{jk} = \delta_{jk} + \varphi \cdot (\hat{b}_{jk} - \delta_{jk})$, besitzt nach Hilfssatz (5.8) genau eine Lösung $v \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$. Da $\operatorname{supp}\Phi \subset K_{2r/3}(0)$ ist, ist $\Phi \cdot \hat{w}$ ebenfalls eine Lösung des Problems (5.11), denn: $\Phi \cdot \hat{w}$ genügt in K_r^+ der Differentialgleichung $\sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(y) \cdot (\Phi(y) \cdot \hat{w}(y))_{y_j y_k} = F(y)$. Für $y \in K_r^+$ ist $\hat{a}_{jk} = b_{jk}$. In $K_1^+ \setminus K_r^+$ verschwindet $\Phi \cdot \hat{w}$ und F identisch. Also ist $v = \Phi \cdot \hat{w}$ in K_1^+ und mit $\Phi(y) = 1$ für $y \in K_{r/2}^+$ erhält man $\hat{w} \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_{r/2}^+)$. Damit existiert eine Umgebung $U'(x_0)$, so daß $u \in C_{2,\alpha}(U'(x_0) \cap \bar{G})$ ist.

§ 6. Beweis von Satz 1 und Bemerkungen zu Satz 1

Beweis von Satz 1. Zunächst beweisen wir die Aussage (II) aus Satz 2. Ist G ein beschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, so wissen wir mit Satz (3.1) (O. Perron) und dem Maximum-Minimum-Prinzip, daß das Randwertproblem

$$\Delta u(x) = f(x) \;\; (x \in G) \qquad \text{und} \qquad u(x) = g(x) \;\; (x \in \partial G)$$

für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \times \mathscr{C}_{2,0}(G)$ besitzt. Mit Satz (3.5) (E. Hopf) folgt weiter: $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \times \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$. Somit folgt mit Satz (5.1) zunächst $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ $(0 < \gamma < 1)$, woraus schließlich mit Satz (5.7) $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ folgt. Damit ist Aussage (II) aus Satz 2 bewiesen. Satz 1 folgt aus Satz 2.

Zweite Bemerkung zu Satz 1. Satz 1 wurde zuerst von J. Schauder in [56] bewiesen. Diese Arbeit ist sehr schwer zu verstehen. R. B. Barrar gab in [3] zum Verständnis der Schauderschen Arbeit hilfreiche Ergänzungen. Einen Überblick über den von J. Schauder stammenden Beweis geben wir in § 8. In diesem Beweis spielt die folgende Abschätzung, welche in der Literatur als „Schaudersche a priori Abschätzung" bekannt ist, eine zentrale Rolle.

(6.1) *Schaudersche a priori Abschätzung.* Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ die Ungleichung

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c \cdot \{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

In dem von uns gegebenen Beweis des Satzes 1 konnten wir auf die Herleitung der Abschätzung (6.1) verzichten. Wir benötigten nur die wesentlich einfacher zu gewinnende Abschätzung (2.1).

Andererseits bemerkte J. Schauder in [56] bereits, daß man (6.1) leichter mit dem Satz von Banach bekommen kann, falls man Satz 1 bereits bewiesen hat.

Die Abschätzung (6.1) und Satz 1 haben, wie wir in § 9 und § 10 sehen werden, eine fundamentale Bedeutung beim Nachweis der Existenz einer Lösung u der quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x, u(x), u_x(x)) u_{x_j x_k}(x) = f(x, u(x), u_x(x)).$$

Da wir darüberhinaus die Abschätzung (6.1) in Kapitel 2 für den Fall benötigen, daß das zugrundeliegende Gebiet G ein unbeschränktes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ ist, so wollen wir im § 7 einen weiteren Beweis der Schauderschen a priori Abschätzungen (6.1) geben, welcher unabhängig vom Beweis des Satzes 1 ist und der darüberhinaus die Gültigkeit der Abschätzung (6.1) auch für nichtkompakte Gebiete G des $\boldsymbol{R}_n$ zeigt.

§ 7. Die Schauderschen a priori Abschätzungen

Wir geben in diesem Paragraphen einen weiteren Beweis der Ungleichung (6.1), welcher nicht die bei der Herleitung von (2.1) gebrauchten, sehr starken Voraussetzungen über die Lösbarkeit des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$, benötigt. Ferner werden wir nicht die Kompaktheit von G voraussetzen. Wir beweisen folgenden Satz:

(7.0) Satz. Vor.: *Es sei*

(a) $0 < \alpha < 1$,

(b) *G ein Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit $\partial G \in C_{2,\alpha}$.*

(c) $L\cdot = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_j} + a(x)\cdot$

mit a_{jk}, a_j, a aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$. Ferner gebe es ein $m > 0$, so daß für alle $x \in G$ und alle $v \in \boldsymbol{R}_n$ die Ungleichung $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) v_j v_k \geqslant m|v^2|$ gilt.

Beh.: *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

Im Verlauf des Beweises benötigen wir einen weiteren Hilfssatz, welchen wir zunächst bereitstellen wollen.

(7.1) Hilfssatz. *Es existiert eine Konstante $A(K_1)$, welche nicht von $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1) \times C_{2,\alpha}(\partial K_1)$ abhängt, so daß sich die die Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ des Randwertproblems* (4.9) *durch*

$$\|u\|_{2,\alpha,K_1} \leqslant A(K_1)\,\{\|f\|_{0,\alpha,K_1} + \|g\|_{2,\alpha,\partial K_1}\}$$

abschätzen läßt.

Beweis. Es sei T: $C_{0,\alpha}(\bar{K}_1) \times C_{2,\alpha}(\partial K_1) \to C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ definiert durch $(f, g) \to u$, wobei u die Lösung des Randwertproblems (4.9) ist. T ist linear. Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip folgt die Abschätzung

$$\|T(f, g)\|_{0,0,K_1} \leqslant \mathrm{const}\cdot \|f\|_{0,0,K_1} + \|g\|_{0,0,\partial K_1}\}\cdot$$

Damit ist $I \circ T$: $C_{0,\alpha}(\bar{K}_1) \times C_{2,\alpha}(\partial K_1) \to C_{0,0}(\bar{K}_1)$ stetig, also ist T nach Hilfssatz (5.2) stetig, woraus die Behauptung folgt.

Beweis des Satzes (7.0). (I) Es sei $y \in \partial G$. Es gibt daher zu y eine Umgebung $U(y)$ und eine eineindeutige, in beiden Richtungen zweimal gleichmäßig mit Exponent α hölderstetig differenzierbare Abbildung $\tilde{B}_1(y)$, welche

($\bar{\mathfrak{a}}$) $U(y) \cap \bar{G}$ in den Halbraum $\boldsymbol{R}_n^+ = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n,\ x_n > 0\}$,

($\bar{\mathfrak{b}}$) $U(y) \cap \partial G$ in die Hyperebene $H = \{x|\ x \in \boldsymbol{R}_n,\ x_n = 0\}$,

($\bar{\mathfrak{c}}$) y auf den Nullpunkt

abbildet. Ferner wird durch diese Abbildung der Ausdruck

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u_{x_j}(x) + a(x) u(x),$$

$x \in U(y) \cap G$, in den Ausdruck

$$\sum_{j,k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}(z)\tilde{u}_{z_j z_k}(z) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(z)\tilde{u}_{z_j}(z) + \tilde{a}(z)\tilde{u}(z)$$

transformiert. Durch eine weitere Abbildung $\hat{B}_1$: $\boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$, welche linear und nichtsingulär ist, läßt sich zusätzlich noch

$$\sum_{j,k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}(0)\tilde{u}_{z_j z_k}(z) \to \sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{z_j z_j}(z)$$

erreichen. Es sei nun $B_1 = \hat{B}_1 \circ \tilde{B}_1(y)$ und $K(y, r)$ sei eine Kugel mit Mittelpunkt y. Da $\partial G \in C_{2,\alpha}$ und $a_{jk} \in C_{0,\alpha}(\bar{G})$ ist, kann der Radius r unabhängig von y so gewählt werden, daß folgendes gilt:

(â) $K(y, r) \subset U(y)$.

(b̂) Die Abbildung B_1 bildet $K(y, r) \cap \bar{G}$ in die Halbkugel $K_{1/2}^{+}(0)$ und $K(y, r) \cap \partial G$ in $H_{1/2}$ ab.

(ĉ) $A(K_1^{+}) \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|\delta_{jk} - \hat{a}_{jk}\|_{0,0,B_1 K(y,r)} \leqslant 1/2$, wobei $A(K_1^{+})$ die in Hilfssatz (5.3) definierte Konstante ist.

Ist w: $K(y, r) \to \boldsymbol{R}$, so bezeichnen wir mit $\hat{w}$ die transformierte Funktion $\hat{w}(z) = w(B_1 x)$.

Für $s > 0$ sei $\zeta_s \in C_0^{\infty}(R_n)$ mit $\operatorname{supp}\zeta_s \subset K_s(0)$ und $\zeta_s(x) \equiv 1$ für $|x| \leqslant \frac{1}{2}s$.

Es sei ferner $v(x) = u(x) \cdot \zeta_r(x-y)$ und

$$F(x) = \zeta_r(x-y) \cdot Lu(x) + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot \{2 \cdot u_{x_j}(x) \cdot (\zeta_r)_{x_k}(x-y)$$
$$+ u(x) \cdot (\zeta_r)_{x_j x_k}(x-y)\} - a(x) \cdot u(x) \cdot \zeta_r(x-y) - \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x) \cdot \zeta_r(x-y).$$

Da $\operatorname{supp}\hat{v} \Subset B_1(K(y, r) \cap \bar{G})$ und $\operatorname{supp}\hat{F} \Subset B_1(K(y, r) \cap \bar{G})$ ist, läßt sich $\hat{v}$ und $\hat{F}$ auf $\bar{K}_1^{+}$ durch Null fortsetzen. Damit ist $\hat{v} \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^{+})$ und Lösung des Randwertproblems

$$\Delta\hat{v}(z) = \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} - \hat{a}_{jk}(z)) \cdot \hat{v}_{z_j z_k}(z) + \hat{F}(z) \qquad (z \in K_1),$$

$$\hat{v}(z) = 0 \qquad (z \in \partial K_1 \backslash H_1),$$

$$\hat{v}(z) = \widehat{(g \cdot \zeta_r)} \qquad (z \in H_1).$$

Da $\operatorname{supp}\hat{v} \subset \bar{K}_{1/2}^{+}$ und $\operatorname{supp}\hat{F} \subset \bar{K}_{1/2}^{+}$ ist, gilt mit Hilfssatz (5.3) die Abschätzung

$$\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_1} \leqslant A(K_1) \cdot \Big\{ \sum_{j,k=1}^{n} \|\delta_{jk} - \hat{a}_{jk}\|_{0,0,K_1} \cdot \|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_1}$$
$$+ \text{const} \cdot \|\hat{v}\|_{2,0,K_1} + \|\hat{F}\|_{0,\alpha,K_1} + \|\hat{v}\|_{2,\alpha,H_1} \Big\}.$$

Mit ($\hat{c}$) folgt daraus

$$\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_1^+} \leqslant 2A(K_1^+)\{\text{const}\,\|\hat{v}\|_{2,0,K_1^+} + \|\hat{F}\|_{0,\alpha,K_1^+} + \|\hat{v}\|_{2,\alpha,H_{1/2}}\}.$$

Durch Rücktransformation und mit $\operatorname{supp} v \subset K(y, r) \cap \bar{G}$ erhalten wir schließlich

$$\|v\|_{2,\alpha,G\cap U(y)} \leqslant \text{const}\,\{\|v\|_{2,0,G\cap U(y)} + \|F\|_{0,\alpha,G\cap U(y)} + \|v\|_{2,\alpha,\partial G}\}.$$

Beachten wir die Definition von F, so bekommen wir:

$$\|v\|_{2,\alpha,G\cap U(y)} \leqslant \text{const}\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}.$$

Berücksichtigen wir ferner: $\zeta_r(x-y) = 1$ für $x \in K(y, \frac{1}{2}r)$, so folgt $v(x) = u(x)$ für alle $x \in K(y, \frac{1}{2}r)$ und

(7.2) $$\|u\|_{2,\alpha,G\cap K_{r/2}(y)} \leqslant \text{const}\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}.$$

(II) y sei ein Punkt aus G mit $\operatorname{dist}(y, \partial G) \geqslant \frac{1}{4}r$.

Da a_{jk}, a_j, a aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ sind und für alle $(v, x) \in \boldsymbol{R}_n \times G$ ein $m > 0$ existiert, so daß $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\, v_j v_k \geqslant m|v|^2$ gilt, so gibt es zu jedem y eine lineare, nichtsinguläre Abbildung $B_2(y)$: $\boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$ mit den Eigenschaften:

(a) $y \to 0$.

(b) $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(y) \cdot u_{x_j x_k}(x) \to \sum_{j=1}^{n} \hat{u}_{z_j z_j}(z)$.

Da $a_{jk} \in C_{0,\alpha}(\bar{G})$ ist, kann der Radius s der Kugel $K(y, s)$ unabhängig von y so gewählt werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a*) Die Abbildung $B_2(y)$ bildet die Kugel $K(y, s)$ in die Kugel $K_{1/2}(0)$ ab.

(b*) $A(K_1) \cdot \sum_{j,k=1}^{n} \|\hat{a}_{jk} - \delta_{jk}\|_{0,0,B_2(y)(K(y,s))} \leqslant \frac{1}{2}$.

Dabei ist $A(K_1)$ die in Hilfssatz (7.1) definierte Konstante.

(c*) $0 < s \leqslant \frac{1}{4}r$.

Mit $v(x) \equiv u(x) \cdot \zeta_s(x-y)$ und

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \zeta_s(x-y) \cdot Lu(x) + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot \{u_{x_j}(x) \cdot (\zeta_s)_{x_k}(x-y) \cdot 2 \\ & + u(x) \cdot (\zeta_s)_{x_j x_k}(x-y)\} - \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x) \cdot \zeta_s(x-y) \\ & - a(x) \cdot u(x) \cdot \zeta_s(x-y) \end{aligned}$$

erhalten wir:

Die Funktionen $\hat{v}$ und $\hat{F}$ besitzen einen kompakten Träger in $B_2(y)K(y, s)$. Sie lassen sich daher durch Null zweimal hölderstetig auf K_1 fortsetzen. $\hat{v} \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ ist damit Lösung des Randwertproblems:

$$\Delta\hat{v}(z) \equiv \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} - a_{jk}(z))\hat{v}_{z_j z_k}(z) + \hat{F}(z) \qquad (z \in K_1),$$

$$\hat{v}(z) \equiv 0 \qquad (z \in \partial K_1).$$

Mit Hilfssatz (7.1) gilt daher die Abschätzung:

$$\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_{1/2}} \leqslant A(K_1)\Big\{\Big\|\sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} - a_{jk})\hat{v}_{z_j z_k}\Big\|_{0,\alpha,K_1} + \|\hat{F}\|_{0,\alpha,K_1}\Big\}.$$

Da $\operatorname{supp}\hat{v} \Subset B_2(y)K(y, s) \subset K_{1/2}(0)$ ist, erhalten wir

$$\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_{1/2}} \leqslant A(K_1)\Big\{\sum_{j,k=1}^{n} \|\delta_{jk} - a_{jk}\|_{0,0,B_2(y)K(y,s)}\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_{1/2}}$$

$$+ \text{const}\,\|\hat{v}\|_{2,0,K_1} + \|\hat{F}\|_{0,\alpha,K_1}\Big\}.$$

Mit (b*) folgt daraus:

$$\|\hat{v}\|_{2,\alpha,K_{1/2}} \leqslant 2A(K_1)\{\text{const}\,\|\hat{v}\|_{2,0,K_1} + \|\hat{F}\|_{0,\alpha,K_1}\}.$$

Durch Rücktransformation unter Berücksichtigung von $\operatorname{supp} v \subset K(y, s)$ erhalten wir schließlich:

$$\|v\|_{2,\alpha,K(y,s)} \leqslant \text{const}\,\{\|u\|_{2,0,K(y,s)} + \|Lu\|_{0,\alpha,G}\}$$

und

$$(7.3) \qquad \|u\|_{2,\alpha,K(y,\frac{1}{2}s)} \leqslant \text{const}\,\{\|u\|_{2,0,G} + \|Lu\|_{0,\alpha,G}\}.$$

Als nächstes schätzen wir für beliebiges $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ den Hölderkoeffizienten $H_G^\alpha |u_{x_j x_k}|$ ab. Dazu machen wir die folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $\operatorname{dist}(p, \partial G) < \frac{1}{4}r$.

Zu p existiert ein $y \in \partial G$, so daß $|p-y| < \frac{1}{4}r$. Damit erhalten wir für beliebiges $x \in G$:

$$\frac{|u_{x_j x_k}(p) - u_{x_j x_k}(x)|}{|p-x|^\alpha} \leqslant \begin{cases} \|u\|_{2,\alpha,G \cap K_{\frac{1}{2}r}(y)}, & |x-p| \leqslant \frac{1}{4}r, \\ 8 \cdot r^{-\alpha}\|u\|_{2,0,G}, & |x-p| \geqslant \frac{1}{4}r. \end{cases}$$

Fall 2: $\operatorname{dist}(p, \partial G) \geqslant \frac{1}{4}r$.

Für beliebiges $x \in G$ gilt:

$$\frac{|u_{x_j x_k}(x) - u_{x_j x_k}(p)|}{|x-p|^\alpha} \leqslant \begin{cases} \|u\|_{2,\alpha,G \cap K(p,\frac{1}{2}s)}, & |x-p| < \frac{1}{2}s, \\ 2^{1+\alpha} \cdot s^{-\alpha} \cdot \|u\|_{2,0,G}, & |x-p| \geqslant \frac{1}{2}s. \end{cases}$$

Somit erhalten wir mit (7.2) und (7.3) und der obigen Fallunterscheidung:

$$H_G^\alpha[u_{x_j x_k}] \leqslant \text{const}\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\},$$

woraus sofort die Ungleichung

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant \text{const}\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

folgt. Aus dieser Ungleichung erhalten wir aber mit der Ungleichung (2.5) durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ die Behauptung.

Bemerkungen. (1) Ist der Rand ∂G eine kompakte Teilmenge des R_n und ist $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, so ist $\partial G \in C_{2,\alpha}$.

(2) Verfolgen wir den obigen Beweis von Satz (7.0), so sehen wir, daß wir eine Konstante $c > 0$ finden konnen, welche nur von m, $\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G}$, $\|a_j\|_{0,\alpha,G}$, $\|a\|_{0,\alpha,G}$ und ∂G abhängt, mit der für alle $u \in C_{2,\alpha}(G)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

§ 8. Übersicht über den von J. Schauder stammenden Beweis des Satzes 1

In diesem Paragraphen geben wir einen Überblick über den von J. Schauder in [56] gelieferten Beweis des Satzes 1. Wir geben diesen Überblick, da viele Lehrbücher in ihren Darstellungen des Schauderschen Beweises wesentliche Beweisschritte *nicht* darlegen. Dadurch hat sich bei vielen Mathematikern die Ansicht gefestigt, *nur* die a priori Abschätzungen und die Kontinuitätsmethode waren Gegenstand der Arbeit [56] von J. Schauder. Es wird dabei übersehen, daß J. Schauder in dieser Arbeit *auch* einen Beweis der Aussage (II) (siehe § 2) lieferte. Aus den vorhergehenden Betrachtungen haben wir gesehen, daß gerade der Beweis der Aussage (II) der *wesentliche* Schritt in dem gesamten Beweis des Satzes 1 ist.

Bei unserer Darstellung des Beweisgedankens werden wir den gesamten Beweis in zehn Einzelschritte zerlegen, um ihn dadurch insgesamt übersichtlicher zu machen.

In diesem Paragraphen sei $0 < \alpha < 1$; G kompakt im R_n und $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$; $L\cdot \equiv \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_j\,\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial\cdot}{\partial x_j} + a(x)\cdot$ ein in G gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit Koeffizienten a_{jk}, a_j, a aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$. Ferner sei $a(x) \leqslant 0$ für alle $x \in G$.

1. Schritt. Die Schauderschen a priori Abschätzungen bis zum Rand des Gebietes. (²)

SATZ. *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

Beweis. Mit den Maximum-Minimum-Prinzip folgt dieser Satz aus Satz (7.0).

2. Schritt. Die Kontinuitätsmethode.

SATZ. *Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ sei $L_t\cdot \equiv t\Delta\cdot + (1-t)L\cdot$. Existiert ein t_0 aus $[0, 1]$, so daß das Randwertproblem $L_{t_0}u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ besitzt, so ist dieses Randwertproblem für alle t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ in $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ lösbar.*

Beweis. Siehe (2.7).

3. Schritt. Lösung des Dirichletproblems für die Poissongleichung $\Delta u = f$ in G mittels der Perronschen Methode.

SATZ. *Für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{0,0}(\partial G)$ existiert eine Lösung $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,0}(G)$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.*

Beweis. Siehe [51].

4. Schritt. Die Hölderstetigkeit der Lösung u des 3. Schrittes im Inneren des Gebietes G.

SATZ. *Die Lösung u aus Schritt 3 ist aus $C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$.*

Beweis. Siehe [17].

5. Schritt. Lösung des Dirichletproblems für die Poissongleichung $\Delta u = f$ in der Kugel.

SATZ. *Ist G = Kugel, so besitzt das Randwertproblem $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle (f, g) aus $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Beweis. Siehe Satz (4.8) oder [47], [57], [9].

6. Schritt. Lösung des Dirichletproblems für einen allgemeinen gleichmäßig elliptischen Differentialoperator L in der Kugel.

SATZ. *Ist G = Kugel, so besitzt das Randwertproblem $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle (f, g) aus $C_{0,0}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Beweis. Der Satz folgt aus den Schritten 1, 2 und 5.

(²) Zweckmäßigerweise wird man Schritt 1 und den noch folgenden Schritt 7 zusammen beweisen.

7. *Schritt.* Herleitung der „inneren Schauderschen a priori Abschätzungen" für das Gebiet $G =$ Kugel.

Für den Beweis genügt es, sich diese Abschätzungen nur für das spezielle Gebiet $G =$ Kugel herzuleiten. Aber bevor wir die inneren Schauderschen a priori Abschätzungen formulieren können, benötigen wir noch eine Definition.

(8.7.0) Definition. (a) Für $x \in K_r(y) = \{x| \; x \in \boldsymbol{R}_n, \, |x| < r\}$ sei $d(x) = r - |x-y|$.

(b) Für $u \in \mathscr{C}_{k,\alpha}(K_r(y))$, $k \in N$ und $\sigma \in \boldsymbol{R}$, sei

$$\|u\|^*_{(k,\sigma,\alpha,K_r(y))} = \sup_{x \in K_r(y)} (d(x))^\sigma \cdot |u(x)|$$
$$+ \sum_{|\beta| \leqslant k} \{ \sup_{x \in K_r(y)} (d(x))^{k+\sigma} \cdot |D^\beta u(x)| + \hat{H}_{\alpha,\sigma}[D^\beta u]\},$$

mit

$$\hat{H}_{\alpha,\sigma}[D^\beta u]$$
$$= \sup_{x,z \in K_r(y)} (\mathrm{Min}\,\{d(x), d(z)\})^{|\beta|+\sigma+\alpha} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(z)|}{|x-z|^\alpha}.$$

(c) Mit $D_{(k,\sigma,\alpha)}(K_r(y))$ bezeichnen wir den Banachraum, welchen wir durch Abschluß von $\mathscr{C}_{k,\alpha}(K_r(y))$ in der $\|\cdot\|^*_{(k,\sigma,\alpha,K_r(y))}$-Norm erhalten.

Mit dieser Definition lassen sich nun die inneren Schauderschen a priori Abschätzungen formulieren.

(8.7.1) Satz. Vor.: *Es gelte für die Koeffizienten des Differentialoperators* L: $a_{jk} \in D_{(0,0,\alpha)}(K_r(y))$, $a_j \in D_{(0,1,\alpha)}(K_r(y))$, $a \in D_{(0,2,\alpha)}(K_r(y))$.

Beh.: *Es existiert eine Konstante* $c > 0$, *so daß für* $u \in D_{(2,0,\alpha)}(K_r(y))$ *die Ungleichung*

$$\|u\|^*_{(2,0,\alpha,K_r(y))} \leqslant c \,\|Lu\|^*_{(0,2,\alpha,K_r(r))} + \|u\|_{0,0,K_r(y)}\}$$

gilt.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr aufwendig. Einen Beweis findet man in [12].

(8.7.2) Satz. Vor.: *Wie in Satz* (8.7.1). *Zusätzlich sei* U *ein Gebiet des* $\boldsymbol{R}_n$ *und* $\bar{S} \subset U \cap \partial K_r(y)$; G *ein Gebiet des* $\boldsymbol{R}_n$ *mit* $\bar{G} \subset S \cup K_r(y)$.

Beh.: *Es existiert eine Konstante* $c > 0$, *so daß für alle* $u \in D_{(2,0,\alpha)}(K_r(y))$ *mit* $u|_{(U \cap \partial K_r(y))} \in C_{2,\alpha}(U \cap \partial K_r(y))$ *die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c \,\{\|Lu\|^*_{(0,2,\alpha,K_r(y))} + \|u\|_{0,0,K_r(y)} + \|u\|_{2,\alpha,S}\}$$

gilt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [12].

8. Schritt. Lösung des Dirichletproblems für einen allg. elliptischen Differentialoperator in der Kugel, wenn die vorgegebenen Randwerte g nur stetige Funktionen sind.

(8.8.1) SATZ. *Für alle* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_r(y)) \times C_{0,0}(\partial K_r(y))$ *besitzt das Randwertproblem* $Lu \doteq f$, $u|_{\partial K_r(y)} = g$ *genau eine Lösung* $u \in C_{0,0}(\bar{K}_r(y)) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_r(y))$.

Man beweist diesen Satz mit Hilfe des 6. und 7. Beweisschrittes, indem man zunächst die Randwerte g durch Funktionen g_j aus $C_{2,\alpha}(\partial K_r(y))$ approximiert. Zu jedem g_j existiert eine Lösung u_j des Randwertproblems $Lv = f$, $v|_{\partial K_r(y)} = g_j$. Mit Satz (8.7.1) zeigt man dann, daß die Folge $\{u_j\}_{j>0}$ gegen die gewünschte Lösung u konvergiert.

(8.8.2) SATZ. Vor.: *Wie in Satz* (8.7.2).

Beh.: *Für alle* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(K_r(y)) \times (C_{0,0}(\partial K_r(y)) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(\partial K_r(y) \cap U))$ *besitzt das Randwertproblem* $Lu = f$, $u|_{\partial K_r(y)} = g$ *genau eine Lösung* $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup S)$.

Den Beweis führt man analog zum Beweis von Satz (8.8.1). Aus Satz (8.7.2) erhält man zusätzlich: Die im Beweis von Satz (8.8.1) verwendete Folge $\{u_j\}_{j>0}$ konvergiert gegen $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup S)$.

9. Schritt. Existenz der Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für beliebige Gebiete G.

SATZ. *Das Randwertproblem* $\Delta v = f$, $v|_{\partial G} = g$ *besitzt für alle* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.

Beweis. Mit dem vierten Schritt und dem Maximum-Minimum-Prinzip wissen wir: Es existiert genau eine Lösung $u \in C_{0,0}(G) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ des obigen Randwertproblems. Zum Beweis des Satzes verbleibt die Regularität der Lösung am Rande des Gebietes zu zeigen.

Sei nun y ein beliebiger Punkt des Randes ∂G. Da der Rand zur Klasse $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ gehört, existiert eine Umgebung $U(y)$ und eine eineindeutige, in beiden Richtungen zweimal hölderstetig differenzierbare Abbildung B mit den Eigenschaften:

(a) $B(U(y) \cap G) = K_1(0)$,

(b) $B(U(y) \cap \partial G) = S \subset \partial K_1(0)$.

Durch diese Abbildung wird die Differentialgleichung $\Delta u(x) = f(x)$ in die elliptische Differentialgleichung

$$L\hat{u}(z) = \sum_{j,k=1}^{n} \hat{a}_{jk}(z)\,\hat{u}_{z_j z_k}(z) + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j(z)\,\hat{u}_{z_j}(z)$$

transformiert. Da $u \in C_{0,0}(\bar{G})$ ist, ist g und damit $\hat{g}$ stetig. Da ferner

$g|_{(\partial G \cap U(y))} \in C_{2,\alpha}(\partial G \cap U(y))$ ist, ist $\hat{g}|_S \in C_{2,\alpha}(S)$. Somit ist mit Satz (8.8.2) die Funktion $\hat{u} \in C_{0,0}(\bar{K}_1(0)) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(\bar{K}_1(0) \cup S)$, woraus durch Rücktransformation $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup (\partial G \cap U(y)))$ folgt.

Da $y \in \partial G$ beliebig war, gilt dies für alle $y \in \partial G$, d.h. $u \in \mathscr{C}_{2,\alpha}(\bar{G})$ und damit $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.

10. Schritt. Existenz der Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Randwertproblems $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$ für beliebige Gebiete G.

SATZ. *Das Randwertproblem $Lv = f$, $v|_{\partial G} = g$ besitzt für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Die Behauptung dieses Satzes folgt mittels der Kontinuitätsmethode (2. Schritt) aus dem vorangegangenen Satz (9. Schritt).

§ 9. Anwendung der Schauderschen a priori Abschätzung und des Satzes 1 auf den Nachweis der Existenz einer Lösung *u* des ersten Randwertproblems einer quasilinearen elliptischen Differentialgleichung

In einem beschränkten Gebiet $G \subset \boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, wird das folgende Randwertproblem betrachtet:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u(x), u_x(x))\, u_{x_i x_k}(x) = f(x, u(x), u_x(x)), \qquad x \in G, \\ &u(x) = g(x), \qquad x \in \partial G. \end{aligned} \tag{9.0}$$

Von den Randwerten g setzen wir voraus, daß sie zu $C_{2,\alpha}(\partial G)$ gehören.

Problemstellung. Welche Bedingungen müssen die Funktionen a_{ik} und f erfüllen, damit eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Problems (9.0) existiert?

In diesem Paragraphen zeigen wir auf, wie sich Satz 1 und Satz (7.0) anwenden lassen, um einen Weg zur Beantwortung der obigen Frage zu finden. Wir werden jedoch nur die Methode, welche eine Behandlung der Fragestellung gestattet, aufzeigen. Ferner werden wir die sich daraus ergebenden Probleme formulieren.

Die Herleitung hinreichender Bedingungen an die Funktionen a_{jk} und f, so daß eine Lösung u des Problems (9.0) existiert, würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Den interessierten Leser veweisen wir auf [31].

Mit den vorangegangenen Betrachtungen liegt es nahe, folgende Forderungen an die Koeffizienten a_{jk} und an f zu stellen:

(9.1) Voraussetzungen an die Koeffizienten a_{ik} und an f.

(a) Für $0 < \alpha < 1$ sei a_{ik} und f aus $C_{0,\alpha}(\bar{G} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_n)$.

(b) Es existiert ein $m > 0$, so daß für alle $(x, p, q) \in \bar{G} \times \boldsymbol{R}_n \times \boldsymbol{R}_n$ und für alle $v \in \boldsymbol{R}_n$ die Ungleichung $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, p, q) \cdot v_i v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ gilt.

Ist nun $v \in C_{1,\beta}(\bar{G})$ mit $0 < \beta < 1$, so ist mit (9.1, a) $a_{ik}(x, v(x), v_x(x))$ und $f(x, v(x), v_x(x))$ aus $C_{0,\alpha\cdot\beta}(\bar{G})$. Somit besitzt mit Satz 1 das Randwertproblem

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, v(x), v_x(x)) u_{x_i x_k}(x) = f(x, v(x), v_x(x)) \qquad (x \in G)$$

und

$$u(x) = g(x) \qquad (x \in \partial G)$$

für jedes $v \in C_{1,\beta}(\bar{G})$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha\cdot\beta}(\bar{G})$. Damit können wir durch $v \to u$ eine Abbildung

$$T\colon\ C_{1,\beta}(\bar{G}) \to C_{2,\alpha\cdot\beta}(\bar{G}) \subset C_{1,\beta}(\bar{G})$$

definieren.

Aus der Konstruktion von T ersehen wir sofort, daß ein Fixpunkt von T in $C_{1,\beta}(\bar{G})$, d.h. eine Lösung der Gleichung $Tu = u$, eine Lösung unseres ursprünglichen Problems (9.0) ist.

Damit stellt sich eine weitere Frage: Welche Fixpunktsätze lassen sich zum Nachweis eines Fixpunktes der Abbildung T heranziehen?

Es hat sich gezeigt, daß sich folgende Fixpunktsätze erfolgreich zur Lösung unseres Problems anwenden lassen:

(9.2) Fixpunktsatz von Schauder. *Es sei S eine kompakte konvexe Teilmenge des Banachraumes B und T sei eine stetige Abbildung in S. Dann besitzt T einen Fixpunkt in S.*

Für die Anwendung ist das folgende Korollar sehr nützlich:

(9.3) Korollar zu Satz (9.2). *Es sei S eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Banachraumes B. T sei eine vollstetige Abbildung in B, welche S in sich abbildet. Dann hat T einen Fixpunkt in S.*

(9.4) Satz. *Es sei B ein Banachraum und $T\colon B \to B$ eine vollstetige Abbildung. Existiert eine Konstante c, so daß für alle $(x, s) \in B \times [0, 1]$ mit $x = s \cdot Tx$ die Ungleichung $\|x\|_B \leqslant c$ gilt, so hat T einen Fixpunkt.*

(9.5) Fixpunktsatz von Leray–Schauder. *Es sei B ein Banachraum und $T\colon B \times [0, 1] \to B$ eine vollstetige Abbildung, so daß $T(x, 0) = 0$ für alle $x \in B$. Ferner existiere eine Konstante c, so daß für alle $(x, t) \in B \times [0, 1]$ welche $T(x, t) = x$ erfüllen die Ungleichung $\|x\|_B \leqslant c$ gilt. Dann besitzt die Abbildung $T_1 = T(\cdot, 1)\colon B \to B$ einen Fixpunkt in B.*

Bemerkung. Satz (9.4) ist ein Spezialfall von Satz (9.5).

Alle der hier aufgeführten Fixpunktsätze haben eines gemeinsam: Um sie zur Lösung des Problems (9.0) anwenden zu können, ist es nötig, die Vollstetigkeit der oben definierten Abbildung $T\colon C_{1,\beta}(G) \to C_{1,\beta}(G)$ zu zeigen. Dies erfolgt im folgenden Satz.

(9.6) SATZ. *Die oben definierte Abbildung T ist vollstetig.*

Beweis. Die Abbildung T ist stetig, denn sei $v \in C_{1,\beta}(\bar{G})$ beliebig aber fest gewählt und $w \in C_{1,\beta}(\bar{G})$ beliebig mit $\|v-w\|_{1,\beta,G} \leqslant 1$, so ist $Tv-Tw$ Lösung des Randwertproblems

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, v(x), v_x(x))\,(Tv-Tw)_{x_i x_k}(x)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \big(a_{ik}(x, w(x), w_x(x)) - a_{ik}(x, v(x), v_x(x))\big)\,(Tw)_{x_i x_k}$$

$$+f(x, v(x), v_x(x)) - f(x, w(x), w_x(x)) \qquad (x \in G)$$

und

$$(Tv-Tw)(x) = 0 \qquad (x \in \partial G).$$

Mit Satz (7.0) (a priori Abschätzungen von Schauder) und den Voraussetzungen (9.1) erhalten wir:

$$\|Tv-Tw\|_{2,\alpha\cdot\beta,G} \leqslant c(\|v\|_{1,\beta,G}) \cdot \|w-v\|_{1,\beta,G},$$

woraus die Stetigkeit von T folgt.

Aus der letzten Abschätzung ersehen wir ferner, daß T beschränkte Mengen aus $C_{1,\beta}(\bar{G})$ in beschränkte Mengen aus $C_{2,\alpha\cdot\beta}(\bar{G})$ abbildet. Somit ist mit dem Satz von Arzelà die Abbildung T präkompakt in $C_{1,\beta}(\bar{G})$. Damit ist die Vollstetigkeit von T bewiesen.

Kann man nun zeigen, daß für alle $s \in [0, 1]$ die Lösungen $u(\cdot, s)$ der Randwertprobleme

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u(x), u_x(x))\, u_{x_i x_k}(x) = sf(x, u(x), u_x(x)) \qquad (x \in G)$$

und

$$u(x) = s \cdot g(x) \qquad (x \in \partial G)$$

in der $C_{1,\beta}(\bar{G})$-Norm durch eine gemeinsame Konstante beschränkt sind, so folgt mit Satz (9.4) die Existenz eines Fixpunktes der Abbildung T. Da $s \in [0, 1]$ ist, genügt es dazu zu zeigen, daß die Lösungen des Randwertproblems (9.0) in der $C_{1,\beta}(\bar{G})$-Norm durch eine gemeinsame Konstante beschränkt sind. Somit hat sich unsere ursprüngliche Problemstellung auf die folgende Frage reduziert:

Welche Bedingungen müssen die Funktionen a_{ik} und f erfüllen, damit die $G_{1,\beta}(\bar{G})$-Normen der Lösungen des Problems (9.0) durch eine gemeinsame Konstante a priori beschränkt sind?

Es hat sich nun gezeigt, daß diese Frage im Allgemeinen zu schwierig ist, um geschlossen beantwortet zu werden. Es hat sich daher als nützlich erwiesen, diese Frage in die folgenden vier Teilprobleme zu zerlegen.

Unter welchen Bedingungen an a_{ik} und f lassen sich für die Lösungen des Problems (9.0) gemeinsame Konstanten finden, so daß

(1) $\|u\|_{0,0,G} \leqslant C_1 = \text{const}$,

(2) $\|u_{x_j}\|_{0,0,\partial G} \leqslant C_2(\|u\|_{0,0,G})$, $j = 1, \ldots, n$,

(3) $\|u_{x_j}\|_{0,0,G} \leqslant C_3(\|u\|_{0,0,G}, \|u_{x_k}\|_{0,0,\partial G})$, $j, k = 1, \ldots, n$,

(4) $H_G^\alpha[u_{x_j}] \leqslant C_4(\|u\|_{0,0,G}, \|u_{x_k}\|_{0,0,G})$, $j, k = 1, \ldots, n$

gilt?

Zum Schluß wollen wir noch einige Bemerkungen zu den Teilproblemen (1) bis (4) machen.

Das Teilproblem (1) läßt sich in einigen Fällen mit Hilfe des Maximum-Minimum-Prinzipes behandeln. Zum Beispiel:

(9.7) Satz. *Es sei* $u \in C_{2,0}(\bar{G})$ *Lösung des Randwertproblems* (9.0) *mit* $\partial f(x, t, s)/\partial t > b > 0$ *und* $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t, s) \cdot v_i v_k \geqslant 0$ *für alle* $(x, t, s) \in \bar{G} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}_n$ *und alle* $v \in \boldsymbol{R}_n$. *Dann gilt* $\|u\|_{0,0,G} \leqslant \operatorname{Max}\{\|g\|_{0,0,\partial G}, b^{-1} \cdot \|f(\cdot, 0, 0)\|_{0,0,G}\}$.

Beweis. Wir können die Differentialgleichung aus Problem (9.0) folgendermaßen umformen:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u(x), u_x(x)) u_{x_i x_k}(x)$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x, t \cdot u(x), t \cdot u_x(x)) dt + f(x, 0, 0),$$

oder

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{ik}(x, u(x), u_x(x)) u_{x_i x_k}(x)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f(x, tu(x), tu_x(x))}{\partial v_i} dt \right\} \cdot u_{x_i}(x)$$
$$- \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f(x, tu(x), tu_x(x))}{\partial v} dt \right\} \cdot u(x) = f(x, 0, 0).$$

Sehen wir nun diese Differentialgleichung als eine lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten für u an, so folgt die Behauptung aus dem Maximum-Minimum-Prinzip.

(9.8) Satz. $u \in C_{2,0}(\bar{G})$ *sei Lösung des Randwertproblems* (9.0) *und für* $v \in \boldsymbol{R}_n$ *sei* $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u, u_x) \cdot v_i v_k \geqslant 0$. *Existieren zwei positive Konstanten* c_1

und c_2, *so daß* $|f(x, q, v)| < c_2 \sum_{i=1}^{n} |v_i| \cdot |a_{ii}(x, u, q)|$ *für alle* q *und* v *mit* $|q| > c_1$ *und* $|v| > c_2$ *gilt. Dann ist* $\|u\|_{0,0,G} \leqslant c_1 + 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in G} \exp(c_2 |x_j|)\right)^2$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $v = -c_3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \exp(-c_2 x_i)$ mit $c_3 = \underset{\substack{i=1,\dots,n\\ x \in G}}{\operatorname{Max}} \exp(c_2 x_i)$.

Angenommen $w(x) = u(x) - v(x)$ nimmt in $x_0 \in G$ sein Maximum an, also $w(x_0) \geqslant w(x)$ für alle $x \in \bar{G}$. Dann ist $u_{x_i}(x_0) = v_{x_i}(x_0)$ für alle i und

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) \cdot u_{x_i x_k}(x_0)$$
$$\leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) \cdot v_{x_i x_k}(x_0).$$

Da aber

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) \cdot u_{x_i x_k}(x_0)$$
$$= f(x_0, u(x_0), u_x(x_0)) = f(x_0, u(x_0), v_x(x_0))$$

und mit der obigen Ungleichung somit

$$f(x_0, u(x_0), v_x(x_0)) \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), v_x(x_0)) \cdot v_{x_i x_k}(x)$$
$$= -c_2^2 \cdot c_3 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_0, u(x_0), v_x(x_0)) \cdot \exp(-c_2 x_i)$$
$$= -c_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_0, u(x_0), v_x(x_0)) \cdot v_{x_i}(x_0)$$

gilt, erhalten wir die Ungleichung

$$0 \leqslant c_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x_0, u(x_0), v_x(x_0)) \cdot |v_{x_i}(x_0)| \leqslant |f(x_0, u(x_0), v_x(x_0))|,$$

welche im Falle $|u| > c_1$ der Voraussetzung widersprechen würde. Daher ist $u(x) - v(x) \leqslant c_1 - v(x_0)$, woraus wir eine obere Schranke für $u(x)$ berechnen können. Um eine untere Schranke für u zu finden, betrachten wir $q = u + v$. Analoge Betrachtungen liefern uns dann die Behauptung.

(9.9) Satz. *Ist* $u \in C_{2,0}(\bar{G})$ *Lösung des Randwertproblems* (9.0) *und ist* $\operatorname{sign} t \cdot f(x, t, 0) > 0$ *für alle* $t > \|g\|_{0,0,\partial G}$, *dann gilt* $\|u\|_{0,0,G} \leqslant \|g\|_{0,0,\partial G}$.

Beweis. (a) u habe in $x_0 \in G$ ein positives Maximum, dann gilt in x_0:

$$0 \geqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), 0) \cdot u_{x_i x_k}(x_0) = f(x_0, u(x_0), 0),$$

also $u(x_0) \cdot f(x_0, u(x_0), 0) \leqslant 0$. Damit ist nach Voraussetzung $|u(x_0)| \leqslant \|g\|_{0,0,\partial G}$.

(b) u habe in $x_0 \in G$ ein negatives Minimum, dann gilt in x_0:

$$0 \leqslant \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x_0, u(x_0), 0) \cdot u_{x_i x_k}(x_0) = f(x_0, u(x_0), 0),$$

also $u(x_0) \cdot f(x_0, u(x_0), 0) \leqslant 0$. Damit ist nach Voraussetzung $-\|g\|_{0,0,\partial G} \leqslant u(x_0)$.

Aus (a) und (b) folgt die Behauptung.

Bemerkung zum Teilproblem (2). Es gilt der folgende Satz

(9.10) Satz. *Es sei $u \in C_{2,0}(\bar{G})$ eine Lösung des Problems* (9.0). *Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so daß $\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{0,0,\partial G} \leqslant C$ gilt.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [31], Seite 351. Die Beweisidee geht auf S. Bernstein [4] und [5] zurück. Obwohl S. Bernstein nur den Fall $n = 2$ behandelte, läßt sich seine Beweismethode auch auf den Fall $n > 2$ übertragen.

Das Problem (3) ist wesentlich schwieriger zu behandeln. Methoden von C. B. Morrey, welche für den Fall $n = 2$ eine Abschätzung von $\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{0,0,G}$ liefern, lassen sich nicht auf den Fall $n > 2$ übertragen. Ferner sind Methoden, die auf dem Maximum-Minimum-Prinzip beruhen, nicht für $n > 2$ zur Abschätzung von $\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{0,0,G}$ geeignet, denn der folgende Satz gilt nur für $n = 2$.

(9.11) Satz. *G sei ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$. Es sei $a_{ik} \in C_{0,\alpha}(\bar{G})$ und für alle $(x, v) \in \bar{G} \times \mathbf{R}_2$ gelte $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \cdot v_i v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ mit $m > 0$. Ist $u \in C_{2,0}(\bar{G})$ eine Lösung des Randwertproblems $\sum_{i,k=1}^{2} a_{ik}(x) \cdot u_{x_i x_k}(x) = 0$ und $u|_{\partial G} = g$, so nimmt $w(x) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x)$ sein Maximum auf ∂G an.*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [53].

Das nachfolgende Beispiel zeit nun, daß für $n > 2$ und nichtkonstante Koeffizienten a_{ik} der Satz (9.10) nicht mehr gilt.

(9.12) BEISPIEL. Es sei $n = 3$ und $G = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}_3, |x| < 10^{-1}\}$. Die Koeffizienten a_{ik} seien folgendermaßen definiert:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1,$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0,$$

$$a_{23} = a_{32} = x_1(3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1^2 - 5).$$

u: $G \to \boldsymbol{R}$ sei durch

$$u(x) = (x_1 - x_1^3) \cdot (1 - x_2^2 - x_3^2) - x_2 \cdot x_3$$

definiert.

Der Operator L ist in G gleichmäßig elliptisch, denn für alle $v \in \boldsymbol{R}_3$ gilt

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(x) \cdot v_i v_k = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

$$+ 2 \cdot x_1 \cdot (3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1^2 - 5) \cdot v_2 \cdot v_3 \geqslant \frac{|v|^2}{2}.$$

Die Funktion u ist Lösung der Differentialgleichung $Lu = 0$, denn es ist

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} + 2 \cdot a_{23} \cdot u_{x_2 x_3}$$

$$= -6 \cdot x_1 \cdot (1 - x_2^2 - x_3^2) - 4 \cdot (x_1 - x_1^3)$$

$$-2 \cdot x_1 \cdot (3 \cdot x_2^2 + 3 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1^2 - 5) = 0.$$

$u_{x_1}(x) = (1 - 3 \cdot x_1^2) \cdot (1 - x_2^2 - x_3^2)$ nimmt sein Maximum im Punkte $x_0 = 0$ und nicht auf dem Rande des Gebietes G an. Wie man sofort nachrechnet, besitzt die Funktion $v(x) = \sum_{i=1}^{3} u_{x_i}^2(x)$ ebenfalls im Punkte $x_0 = 0$ ein relatives Maximum.

Den an den Teilproblemen (3) und (4) interessierten Leser verweisen wir auf [31], da eine Behandlung dieser Probleme den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Als Abschluß unserer Betrachtungen des ersten Randwertproblems einer quasilinearen elliptischen Differentialgleichung wollen wir im § 10 ein spezielles nichtlineares Randwertproblem lösen, welches eine Anwendung in der Physik besitzt.

§ 10. Das Maximalflächenproblem

Physikalischer Hintergrund des Problems. Es sei M eine raumartige Hyperfläche mit Codimension 1 in einer Lorentz-Mannigfaltigkeit L^{n+1}, welche durch den Graphen der Funktion $x_{n+1} = u(x)$ $(x \in G)$ gegeben sei.

$$A(M) = \int_G \Big(1 - \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2(x)\Big)\,dx$$

sei das Minkowski-n-Maß von M.

Ist G ein beschränktes Gebiet und ist $u \in C_{1,0}(\bar{G})$, so ist $A(M) < \infty$.

Wir betrachten nun alle raumartigen Hyperflächen M, welche auf ∂G die gleichen Randwerte besitzen. Gibt es eine derartige Hyperfläche M_0, für die $A(M)$ maximal wird, so heißt M_0 Maximalfläche.

Die Frage nach der Existenz solcher Maximalflächen ist von großem physikalischen Interesse.

Das Maximalflächenproblem als Randwertproblem einer quasilinearen Differentialgleichung. In [12] hat F. J. Flaherty gezeigt, daß die Frage nach der Existenz einer solchen Maximalfläche äquivalent zu der Frage nach der Existenz einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ mit $\sup\limits_{x \in G}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} u_{x_j}^2(x)\Big)^{1/2} < 1$ des Randwertproblems

$$(10.0) \qquad (1 - |u_x(x)|^2) \cdot \Delta u(x) + \sum_{j,k=1}^{n} u_{x_j}(x) \cdot u_{x_k}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) = 0 \qquad (x \in G),$$

$$u(x) = g(x) \quad (x \in \partial G)$$

ist.

Setzen wir nun

$$a_{jk}(x, u, p) = (1 - |p|^2) \cdot \delta_{jk} + p_j p_k$$

so sehen wir, daß das Problem (10.0) ein Spezialfall des Problems (9.0) ist. Jedoch besteht zwischen dem Problem (10.0) und den in § 9 betrachteten Problemen ein wesentlicher Unterschied. Die Differentialgleichung aus Problem (10.0) erfüllt nicht die Voraussetzung (9.1), denn die Ungleichung

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, u, p) \cdot v_i v_k = \sum_{i,k=1}^{n} \big((1 - |p|^2)\,\delta_{ik} + p_i p_k\big) \cdot v_i v_k \geqslant 0$$

gilt nur für $|p| \leqslant 1$. Daher läßt sich die in § 9 definierte Abbildung T nicht auf ganz $C_{1,\beta}(\bar{G})$, sondern nur auf der konvexen Teilmenge

$$(10.1) \qquad D_m = \Big\{u \,\Big|\, u \in C_{1,\beta}(\bar{G}),\ \sup_{x \in G}\Big(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2(x)\Big)^{1/2} < 1 - m\Big\}$$

mit $m > 0$ definieren.

Dies hat zur Folge, daß die in § 9 aufgeführten Fixpunktsätze sich nicht auf das Problem (10.0) anwenden lassen. Jedoch läßt sich mit einer Arbeit von A. Granas [14] die folgende Verallgemeinerung des Satzes (9.4) beweisen.

(10.2) Satz. Vor.: (a) *Es sei B ein Banachraum und $X \subset B$ eine konvexe offene Teilmenge von B mit $0 \in X$.*

(b) *T: $X \to B$ sei eine vollstetige Abbildung.*

(c) *Es existiere eine Konstante c, so daß für alle $(x, s) \in X \times [0, 1]$ mit $x = s \cdot Tx$ die Ungleichung $\|x\|_B < c$ gilt.*

(d) *Für alle $(x, s) \in X \times [0, 1]$ mit $x = s \cdot Tx$ gilt: $x \notin \partial X$.*

Beh.: *T besitzt einen Fixpunkt in X.*

Wir betrachten, um Satz (10.2) anwenden zu können, für alle $s \in [0, 1]$ die folgenden Probleme:

$$\text{(10.3)}\quad \begin{aligned} &(1-|u_x(x)|^2)\cdot \Delta u(x) + \sum_{j,k=1}^{n} u_{x_j}(x)\, u_{x_k}(x)\, u_{x_j x_k}(x) = 0 \qquad (x \in G), \\ &u(x) = s \cdot g(x) \qquad (x \in \partial G). \end{aligned}$$

Definieren wir für $m > 0$ die Abbildung T: $D_m \to C_{1,\beta}(\bar{G})$ durch $v \to u$, und u Lösung des Randwertproblems

$$\text{(10.4)}\quad \begin{aligned} &(1-|v_x(x)|^2)\cdot \Delta u(x) + \sum_{j,k=1}^{n} v_{x_j}(x)\, v_{x_k}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) = 0 \qquad (x \in G), \\ &u(x) = g(x) \qquad (x \in \partial G), \end{aligned}$$

so wissen wir mit den Überlegungen aus § 9, daß T vollstetig ist. Ferner sind für alle $s \in [0, 1]$ die Lösungen der Gleichung $x = s \cdot Tx$ auch Lösungen von (10.3). Für $m > 0$ erfüllen somit D_m und T die Voraussetzungen (a) und (b) von Satz (10.2). Um die Voraussetzungen (c) und (d) nachweisen zu können, müssen wir über das Gebiet G und die auf ∂G definierten Randwerte g Voraussetzungen machen.

(10.5) G sei ein beschränktes konvexes Gebiet des $\boldsymbol{R}_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

(10.6) Definition. Q_m, $m > 0$, sei die Menge aller Funktionen $g \in C_{2,\alpha}(\partial G)$ (G erfülle (10.5)), welche die folgenden Eigenschaften haben: Für alle $x_0 \in \partial G$ gilt: Ist $t(x_0)$ die Tangente an g im Punkte $(x_0, g(x_0))$, so gibt es zwei Ebenen $x_{n+1} = E_1(x; x_0)$ und $x_{n+1} = E_2(x; x_0)$, welche sich in $t(x_0)$ schneiden, $|\operatorname{grad} E_1(x; x_0)| = |\operatorname{grad} E_2(x; x_0)| = 1 - 2m$ ist und $E_1(x; x_0) \leqslant g(x) \leqslant E_2(x; x_0)$ für alle $x \in \partial G$ gilt.

(10.7) Satz. *Es gelte* (10.5). *Ist $g \in Q_m$ mit $m > 0$, so existiert eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Randwertproblems* (10.0).

Beweis. Es sei $s \in [0, 1]$ und u erfülle $u = s \cdot Tu$. Dann gilt:

(1) u ist Lösung des Problems (10.3). Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip folgt:

$$|u(x)| \leqslant \operatorname*{Max}_{y \in \partial G} s\, |g(y)| \leqslant \|g\|_{0,0,\partial G} \cdot$$

(2) Es sei j aus $\{1, \ldots, n\}$ und $x_0 \in \partial G$ beliebig. Da die Funktion g aus Q_m ist, gibt es zu x_0 zwei Ebenen $x_{n+1} = E_1(x; x_0)$ und $x_{n+1} = E_2(x; x_0)$ mit $E_1(x; x_0) \leqslant g(x) \leqslant E_2(x; x_0)$ für alle $x \in \partial G$. Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip folgt nun $E_1(x; x_0) \leqslant u(x) \leqslant E_2(x; x_0)$ für alle $x \in \bar{G}$. Daher ist $|u_{x_j}(x_0)| \leqslant 1-2m$.

Nach dieser Vorbemerkung wollen wir nun zeigen, daß

$$\sup_{x \in G} \Big(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2(x)\Big)^{1/2} \leqslant 1-2m$$

gilt.

Durch Differentiation erhalten wir, daß $u_{x_j}(x)$ in G der Differentialgleichung

$$(1-|u_x|^2) \cdot \Delta(u_{x_j}) + \sum_{i,k=1}^{n} u_{x_i} \cdot u_{x_k} \cdot (u_{x_j})_{x_i x_k}$$

$$-\sum_{k=1}^{n} (2 \cdot \Delta u \cdot u_{x_k}) \cdot (u_{x_j})_{x_k} + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} 2 \cdot u_{x_k} \cdot u_{x_k x_i}\Big) \cdot (u_{x_j})_{x_i} = 0$$

genügt. Daher nimmt u_{x_j} sein Maximum oder sein Minimum auf ∂G an. Somit gilt $|u_{x_j}(x)| \leqslant \operatorname{Max}_{x \in \partial G} |u_{x_j}(x)| \leqslant 1-2m$ für alle $x \in \bar{G}$.

Wir rechnen ferner nach, daß die Differentialgleichung des Problems (10.0) invariant gegenüber orthogonalen Transformationen ist.

Es sei nun $y \in \bar{G}$ ein Punkt, in dem $v(x) = |u_x(x)|^2$ sein Maximum annimmt. Durch eine orthogonale Transformation P: $\boldsymbol{R}_n \to \boldsymbol{R}_n$ können wir mit $w(z) = u(Pz)$ und $y = Pz_0$ erreichen, daß $w_{z_1}^2(z_0) = \sum_{i=1}^{n} w_{z_i}^2(z_0) \geqslant \sum_{i=1}^{n} w_{z_i}^2(z)$ für alle $z \in P(\bar{G})$ gilt.

Daher ist mit den vorangegangenen Überlegungen

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} w_{z_k}^2(z)\Big)^{1/2} \leqslant 1-2m \qquad \text{für alle } z \in P(\bar{G}),$$

also auch

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2(x)\Big)^{1/2} \leqslant 1-2m \qquad \text{für alle } x \in \bar{G}.$$

Somit wissen wir, daß kein Fixpunkt von $s \cdot T$ auf dem Rand ∂Q_m liegt, d.h. wir haben gezeigt, daß die Voraussetzung (d) des Satzes (10.2) erfüllt ist.

Weiter folgt: $\sup_{x \in G} \Big(\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2(x)\Big)^{1/2} \leqslant 1-2m \leqslant \text{const}$.

(3) Mit Satz (1.1) aus [31], Seite 339, wissen wir nun, daß für $j = 1, \ldots, n$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt: $H_G^{\alpha}[u_{x_j}] < \text{const}$. Zusammen mit (1), (2) und

den Schauderschen a priori Abschätzungen (7.0) erhalten wir: $\|u\|_{1,\alpha,G} \leqslant \|u\|_{2,\alpha,G} <$ const, d.h. wir haben gezeigt, daß die Voraussetzung (c) des Satzes (10.2) erfüllt ist.

Das die Voraussetzungen (a) und (b) gelten, hatten wir bereits oben bemerkt.

Somit existiert mit Satz (10.2) ein Fixpunkt der Abbildung T, welcher Lösung von (10.0) ist.

Literatur

[1] Agmon, S., Douglis, A. and Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*, Commun. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623–727.

[2] Alber H. D., *Estimates for the asymptotic behavior of solutions of the Helmholtz equation with an application to second order elliptic differential operators with variable coefficients*, Math. Z. 167 (1979), 213–226.

[3] Barrar, R. B., *On Schauder's paper on linear elliptic differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 3 (1961), 171–195.

[4] Bernstein, S. N., *Sur la nature analytique des solutions de certaines équation aux dérivées partielles du second ordre*, Math. Ann. 59 (1904), 20–76.

[5] –, *Sur la généralisation du problème de Dirichlet*, Math. Ann. 62 (1906), 253–271; Math. Ann. 69 (1910), 82–136.

[6] –, *Sur les équations du calcul des variations*. Ann. Ec. N. Sup. 29 (1912), 431–485.

[7] Bloom, C. O., *Estimates for solutions of reduced hyperbolic equations of second order with a large parameter*, J. Math. Analysis Appl. 44 (1973), 310–332.

[8] – and Kazarinoff, N. D., *Short wave radiation problems in inhomogeneous media: asymptotic solutions*, Lecture Notes in Mathematics 522, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

[9] Boboc, N. and Mustata, P., *Remarks on the existence of solutions of the Dirichlet problem for strongly elliptic linear operators of second order*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie 10 (1966), 75–85.

[10] Choquet-Bruhat, Y., Fischer, A. and Marsden, J., *Maximal hypersurfaces and positivity of mass*, Preprint.

[11] Flaherty, F. J., *The boundary value problem for maximal hypersurfaces*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 76 (1979), 4765–4767.

[12] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 1977.

[13] Granas, A., *On some generalisation of the Leray-Schauder theory*, preprint.

[14] Graves, L. M., *The estimates of Schauder and their applications to existence theorems for elliptic differential equations*, Chicago Univ. Invest. Theory Partial Differential Equations Techn. Report 1 (1956).

[15] Günter, N. M., *Die Potentialtheorie und ihre Anwendungen auf Grundaufgaben der mathematischen Physik*, Teubner, Leipzig, 1957.

[16] Hellwig, G., *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1960.

[17] Hopf, E., *Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z. 34 (1932), 194–233.

[18] –, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, Sitzungsbericht Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Phys. Kl. 19 (1927), 147–152.

[19] Jäger, W., *Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Schwingungsgleichung*, Math. Z. 95 (1967), 299–323.

[20] –, *Zur Theorie der Schwingungsgleichung mit variablen Koeffizienten im Außengebiet*, Math. Z. 102 (1967), 62–88.

[21] –, *Das asymptotische Verhalten von Lösungen eines Typs von Differentialgleichungen*, Math. Z. 112 (1969), 26–36.

[22] Kellogg, O. D., *On the derivatives of harmonic functions on the boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 486–510.

[23] König, M., *Eine kritische Bemerkung zu Darstellungen der Schauderschen Beweistechnik für elliptische lineare Differentialgleichungen*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 80 (1978), 177–182.

[24] –, *Über das Verhalten der Lösung des Dirichletproblems am Rand des Gebietes, wenn der Rand zur Klasse $C^{2,\alpha}$ gehört*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 80 (1978), 163–176.

[25] –, *Zur Abschätzung der Lösung des Dirichletschen Außenraumproblems für die Schwingungsgleichung*, Math. Z. 158 (1978), 171–178.

[26] –, *Zur nichtlinearen Helmholtzschen Schwingungsgleichung in Außengebieten*, Erscheint im Pacific Journal.

[27] –, *Ein Stetigkeitsprinzip für lineare Abbildungen in $C^{1,\alpha}$ mit Anwendungen auf die Herleitung der a priori Abschätzungen von Schauder*, Dissertation (1969).

[28] –, *Bemerkung zum Maximumprinzip für den Gradienten einer elliptischen Differentialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten*, Arch. rat. Mech. Anal. 63 (1976), 87–88.

[29] Krasnosel'skii, M. A., *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, Oxford–London–New York, 1964.

[30] Kupradse, W. D., *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[31] Ladyzhenskaya, O. A. and Ural'tseva, N. N., *Linear and quasilinear elliptic equations*, Academic Press, London, 1968.

[32] Leis, R., *Über das Neumannsche Randwertproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung*, Arch. rat. Mech. Anal. 2 (1958), 101–113.

[33] –, *Über die Randwertaufgabe des Außenraumes zur Helmholtzschen Schwingungsgleichung*, Arch. rat. Mech. Anal. 9 (1962), 21–44.

[34] –, *Zur Eindeutigkeit der Randwertaufgaben der Helmholtzschen Schwingungsgleichung*, Math. Z. 85 (1964), 141–153.

[35] –, *Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Außenraumes der Schwingungsgleichung*, Math. Z. 90 (1965), 205–211.

[36] –, *Zur Monotonie der Eigenwerte selbstadjungierter Differentialgleichungen*, Math. Z. 96 (1967), 26–32.

[37] –, *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[38] –, *Zur Theorie elektromagnetischer Schwingungen in anisotropen Medien*, Math. Z. 106 (1968), 213–224.

[39] Lichnerowicz, A., *L' Integration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, J. Math. Pures Appl. 23 (1944), 37–63.

[40] Magnus, W., Oberhettinger, F. and Soni, R. P., *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Springer, Berlin, 1966.

[41] Michael, J. H., *A general theory for linear elliptic partial differential equations*, J. Diff. Equat. 23 (1977), 1–29.

[42] Meister, E., *Ein Eindeutigkeitsbeweis für ein gemischtes Randwertproblem der Schwingungsgleichung*, Math. Z. 77 (1961), 38–44.

[43] Miranda, C., *Sul problema misto per le equazioni lineari ellittiche*, Ann. di mat. pure ed appl. XXXIX (1955), 279–303.

[44] –, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[45] Morawetz, C. S. and Ludwig, D., *An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics*, Commun. Pure Appl. Math. 21 (1968), 187–203.

[46] Müller, Cl., *Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl*, Math. Z. 56 (1952), 80–83.

[47] Müntz, Ch., *Zum Randwertproblem der partiellen Differentialgleichungen der Minimalfläche*, J. Reine Angew. Math. 139 (1911), 52–79.

[48] Niemeyer, H., *Lokale und asymptotische Eigenschaften der Lösung der Helmholtzschen Schwingungsgleichung*, J.-ber. Deutsch. Math.-Verein 65 (1962), 1–44.

[49] O'Murchadha, N. and York, J. W., *Initial-value problem of general relativity, I. General formulation and physical interpretation*, Phys. Rev., D 10 (1974), 428–436.

[50] Petrini, H., *Sur l'existence des dérivées secondes du potential*, C. R. 130, 233–235.

[51] Perron, O., *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$*, Math. Z. 18 (1923), 42–54.

[52] Protter, M. H. and Weinberger, H. F., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Inc., 1967.

[53] Rellich, F., *Über das asymptotische Verhalten der Lösung von $\Delta u - \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten*, J.-ber. Deutsch. Math.-Verein 43 (1943), 57–65.

[54] Saito, Y., *The principle of limiting absorption for second-order differential equations with operator-valued coefficients*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A, 7 (1971–1972), 581–619.

[55] Schauder, J., *Potentialtheoretische Untersuchungen*, Math. Z. 33 (1931), 602–640.

[56] –, *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Z. 38 (1934), 257–282.

[57] Simoda, P. S., *Sur le théorème de Müntz dans la théorie du potentiel*, Osaka J. Math. 3 (1951), 65–75.

[58] Smarr, L. and York, J. W., *Kinematic conditions in the construction of spacetime*, Phys. Rev. D17 (1978), 2529–2551.

[59] Vogelsang, V., *Elliptische Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten in Gebieten mit unbeschränktem Rand*, Manuscripta Math. 14 (1975), 379–401.

[60] –, *Das Ausstrahlungsproblem für elliptische Differentialgleichungen in Gebieten mit unbeschränktem Rand*, Math. Z. 144 (1975), 101–124.

[61] Werner, P., *Zur mathematischen Theorie akustischer Wellenfelder*, Arch. rat. Mech. Anal. 6 (1960), 231–260.

[62] –, *Randwertprobleme der mathematischen Akustik*, Arch. rat. Mech. Anal. 10 (1962), 29–66.

[63] –, *Beugungsprobleme der mathematischen Akustik*, Arch. rat. Mech. Anal. 12 (1963), 155–184.

[64] –, *Über die Randwertprobleme der Helmholtzschen Schwingungsgleichung*, Math. Z. 85 (1964), 226–240.

[65] Widman, K. O., *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. 21 (1967), 17–37.

[66] Wloka, J., *Funktionalanalysis und Anwendungen*, de Gruyter, Berlin, 1971.

Anhang

A. Die Struktur des Beweises der Schauderschen a priori Abschätzungen

BEZEICHNUNGEN. Es sei G ein beschränktes Gebiet des $\mathbf{R}_n$, $d_x = \operatorname{dist}(x, \partial G)$ und $d_{x,y} = \operatorname{Min}(d_x, d_y)$. Für $u \in \mathscr{C}_{k,\alpha}(G)$ $(k \in N,$ $0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ definieren wir:

(a) $[u]^*_{k,0,G} = \sup\limits_{\substack{x\in G\\ |\beta|=k}} d_x^k \cdot |D^\beta u(x)|$; $k = 0, 1, 2, \ldots$

(b) $\|u\|^*_{k,0,G} = \sum\limits_{j=1}^{k} [u]^*_{j,0,G}$.

(c) $[u]^*_{k,\alpha,G} = \sup\limits_{\substack{x,y\in G\\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha} \cdot \dfrac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha}$, $\quad 0 < \alpha \leqslant 1$.

(d) $\|u\|^*_{k,\alpha,G} = \|u\|^*_{k,0,G} + [u]^*_{k,\alpha,G}$.

(e) $|u|^{(j)}_{0,\alpha,G} = \sup\limits_{x\in G} d_x^j \cdot |(x)| + \sup\limits_{x,y\in G} d_{x,y}^{j+\alpha} \cdot \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}$.

LEMMA 1. Vor.: *Es seien $K_r(x)$ und $K_{2r}(x)$, $r > 0$, zwei konzentrische Kugeln im $\mathbf{R}_n$, f aus $C_{0,\alpha}(\overline{K_{2r}(x)})$ $(0 < \alpha < 1)$ und $w(y) = -((n-2)\,\omega_n)^{-1} \cdot \int\limits_{K_{2r}(x)} |y-z|^{2-n} \cdot f(z)\,dz$.*

Beh.: *Es ist w aus $C_{2,\alpha}(\overline{K_r(x)})$ und es gilt die Ungleichung*

$$\|D^2 w\|_{0,0,K_r(x)} + r^\alpha \cdot H^\alpha_{K_r(x)}[D^2 w]$$

$$\leqslant \{\|f\|_{0,0,K_{2r}(x)} + r^\alpha \cdot H^\alpha_{K_{2r}(x)}[f]\},$$

wobei die Konstante c nur von r, n, α abhängt.

LEMMA 2. Vor.: *Es sei G ein Gebiet des $\mathbf{R}_n$, f aus $\mathscr{C}_{0,\alpha}(G)$ und die Funktion u sei aus $\mathscr{C}_{2,0}(G)$ und erfülle die Differentialgleichung $\Delta u = f$ in G.*

Beh.: *Es ist u aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$. Sind $K_1 = K_r(x)$ und $K_2 = K_{2r}(x)$, $r > 0$, zwei konzentrische Kugeln mit $K_2 \Subset G$, so gilt*

$$\|u\|_{2,\alpha,K_1} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,K_2} + r^2 \|f\|_{0,\alpha,K_2}\},$$

wobei die Konstante c nur von n und α abhängt.

LEMMA 3. Vor.: *Es sei G eine offene Menge des $\mathbf{R}_n$. Die Funktionen u aus $\mathscr{C}_{2,0}(G)$ und f aus $\mathscr{C}_{0,\alpha}(G)$, $0 < \alpha < 1$, erfüllen die Differentialgleichung $\Delta u = f$ in G.*

Beh.: *Dann gibt es eine Konstante $c = c(n, \alpha)$, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|^*_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,G} + |u|^{(2)}_{0,\alpha,G}\}$$

gilt.

LEMMA 4. Vor.: *Es sei G eine offene Menge des $\mathbf{R}_n$.*

Beh.: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $c(\varepsilon)$, so daß für alle u aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ die Ungleichungen*

$$[u]^*_{j,\beta,G} \leqslant c(\varepsilon) \cdot \|u\|_{0,0,G} + \varepsilon \cdot [u]^*_{2,\alpha,G}$$

und

$$\|u\|^*_{j,\beta,G} \leqslant c(\varepsilon) \cdot \|u\|_{0,0,G} + \varepsilon \cdot [u]^*_{2,\alpha,G}$$

gelten ($j = 0, 1, 2$; $0 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant 1$, $j + \beta < 2 + \alpha$).

SATZ (innere Schaudersche a priori Abschätzungen). Vor.: *Es sei G ein Gebiet des $\mathbf{R}_n$, u sei eine in G beschränkte Lösung der Differentialgleichung*

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \cdot u_{x_k}(x)$$

$$+ a(x) \cdot u(x) = f(x),$$

wobei f und die Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) *Es gibt ein $m > 0$, so daß $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ für alle x aus G und alle v aus dem $\mathbf{R}_n$ gilt.*

(b) *Es gibt eine Konstante A, so daß*

$$\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \leqslant A, \quad |a_j|^{(1)}_{0,\alpha,G} \leqslant A, \quad |a|^{(2)}_{0,\alpha,G} < A$$

gilt.

(c) *Es sei $|f|^{(2)}_{0,\alpha,G} < \infty$.*

Beh.: *Dann gibt es eine Konstante c, welche nicht von u abhängt, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,G} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,G}\}$$

gilt.

LEMMA 6. Vor.: *Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}_n^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}_n, x_n > 0\}$ mit $\partial G \cap \{x \mid x \in \mathbf{R}_n, x_n = 0\} = T \neq \emptyset$. Die Funktionen u aus $\mathscr{C}_{2,0}(G) \cap \mathscr{C}_{0,0}(G \cup T)$ und f aus $\mathscr{C}_{0,\alpha}(G \cup T)$ erfüllen die Differentialgleichung $\Delta u = f$ in G und $u|_T = 0$.*

Beh.: *Es existiert eine Konstante c, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G\cup T} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,G} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,G\cup T}\}$$

gilt.

LEMMA 6. Vor.: *Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}_n^+ = \{x \mid x \in \mathbf{R}_n, x_n > 0\}$ mit $\partial G \cap \{x \mid x \in \mathbf{R}_n, x_n = 0\} = T \neq \emptyset$. Die Funktionen u aus $\mathscr{C}_{2,0}(G) \cap \mathscr{C}_{0,0}(G \cup T)$ und f aus $\mathscr{C}_{0,\alpha}(G \cup T)$ erfüllen die Differentialgleichung $\Delta u = f$ in G und $u|_T = 0$.*

Beh.: *Es existiert eine Konstante c, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G\cup T} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,G} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,G\cup T}\}$$

gilt.

LEMMA 7. Vor.: *Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}_n^+ = \{x \in \mathbf{R}_n;\ x_n > 0\}$ mit $\partial G \cap \{x \mid x \in \mathbf{R}_n, x_n = 0\} = T \neq \emptyset$. Die Funktion u aus $\mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup T)$ sei in G eine beschränkte Lösung der Differentialgleichung*

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x)$$

$$+ a(x) \cdot u(x) = f(x),$$

deren Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) *Es existiert ein $m > 0$, so daß $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ für alle $x \in G$ und alle $v \in \mathbf{R}_n$ gilt.*

(b) *Es gibt eine Konstante A, so daß*

$$|a_{jk}|^{(0)}_{0,\alpha,G\cup T} \leqslant A, \quad |a_j|^{(1)}_{0,\alpha,G\cup T} \leqslant A, \quad |a|^{(2)}_{0,\alpha,G\cup T} \leqslant A$$

gilt.

(c) *Es sei $|f|^{(2)}_{0,\alpha,G\cup T} < \infty$.*

Beh.: *Es existiert eine Konstante $c = c(n, \alpha, m, A)$ welche aber nicht von u abhängt, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|^*_{2,\alpha,G\cup T} \leqslant c \cdot \{\|u\|_{0,0,G} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,G\cup T}\}$$

gilt.

SATZ (Schaudersche a priori Abschätzungen) Vor.: *Es sei G ein Gebiet des $\mathbf{R}_n$ und u eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in G, wobei f aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ ist und die Koeffizienten von L die nachfolgenden Bedingungen erfüllen:*

(a) *Es gibt ein $m > 0$, so daß für alle x aus G und alle v aus dem $\mathbf{R}_n$ $\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ gilt.*

(b) *Es existiert eine Konstante A, so daß*

$$\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \leqslant A, \quad \|a_j\|_{0,\alpha,G} \leqslant A \quad \text{und} \quad \|a\|_{0,\alpha,G} \leqslant A$$

gilt.

Ferner sei g aus $C_{2,\alpha}(\partial G)$ und $u|_{\partial G} = g$.

Beh.: *Es existiert eine Konstante $c = c(n, \alpha, m, A, G)$, welche aber nicht von u abhängt, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|f\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

B. Die Struktur des Schauderschen Existenzbeweises einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Dirichletproblems $Lu = f,\ u|_{\partial G} = g$

Bezeichnungen.
(a) *Für $x \in K_r(y) = \{x \mid x \in R_n, |x| < r\}$ sei $d(x) = r - |x - y|$.*
(b) *Für $u \in \mathscr{C}_{k,\alpha}(K_r(y))$, $k \in N$ und $\sigma \in R$ sei*

$$\|u\|^{*}_{k,\sigma,\alpha,K_r(y)} = \sup_{x \in K_r(y)} (d(x))^{\sigma} \cdot |u(x)|$$

$$+ \sum_{|\beta| \leqslant k} \Big\{ \sup_{x \in K_r(y)} (d(x))^{k+\sigma} \cdot |D^{\beta} u(x)| + \hat{H}_{\alpha,\beta}[D^{\beta} u] \Big\},$$

mit

$$\hat{H}_{\alpha,\sigma}[D^{\beta} u] = \sup_{x,z \in K_r(y)} (\operatorname{Min}\{d(x), d(z)\})^{|\beta|+\sigma+\alpha} \times \frac{|D^{\beta} u(x) - D^{\beta} u(z)|}{|x - z|^{\alpha}}$$

(c) *Mit $D_{(k,\sigma,\alpha)}(K_r(y))$ bezeichnen wir den Banachraum, welchen wir durch Abschluß von $\mathscr{C}_{k,\alpha}(K_r(y))$ in der $\|\cdot\|^{*}_{k,\sigma,\alpha,K_r(y)}$-Norm erhalten.*

Satz (Schaudersche a priori Abschätzungen). Vor.: *Es sei G ein Gebiet des R_n und u eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ in G, wobei f aus $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ ist und die Koeffizienten von L die nachfolgenden Bedingungen erfüllen:*
(a) *Es gibt ein $m > 0$, so daß für alle x aus G und alle v aus dem R_n $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ gilt.*
(b) *Es existiert eine Konstante A, so daß*

$$\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \leqslant A, \quad \|a_j\|_{0,\alpha,G} \leqslant A \quad \text{und} \quad \|a\|_{0,\alpha,G} \leqslant A$$

gilt.
Ferner sei g aus $C_{2,\alpha}(\partial G)$ und $u|_{\partial G} = g$.
Beh.: *Es existiert eine Konstante $c = c(n, \alpha, m, A, G)$, welche aber nicht von u abhängt, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|f\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|g\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.

Satz (innere Schaudersche a priori Abschätzungen). Vor.: *Es sei G ein Gebiet des R_n, u sei eine in G beschränkte Lösung der Differentialgleichung*

$$Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \cdot u_{x_k}(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x),$$

wobei f und die Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:
(a) *Es gibt ein $m > 0$, so daß $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot v_j v_k \geqslant m \cdot |v|^2$ für alle x aus G und alle v aus dem R_n gilt.*
(b) *Es gibt eine Konstante A, so daß $\|a_{jk}\|_{0,\alpha,G} \leqslant A$, $|a_j|^{(1)}_{0,\alpha,G} \leqslant A$, $|a|^{(2)}_{0,\alpha,G} < A$ gilt.*
(c) *Es sei $|f|^{(2)}_{0,\alpha,G} < \infty$.*
Beh.: *Dann gibt es eine Konstante c, welche nicht von u abhängt, so daß die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|u\|_{0,0,G} + |f|^{(2)}_{0,\alpha,G}\}$$

gilt.

Satz (Kontinuitätsmethode). *Für $0 \leqslant t \leqslant 1$ sei $L_t \cdot \equiv t\Delta \cdot + (1-t) L \cdot$. Existiert ein t_0 aus $[0, 1]$, so daß das Randwertproblem $L_{t_0} u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ besitzt, so ist dieses Randwertproblem für alle t mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ in $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ lösbar.*

Satz. Vor.: *Es sei $G = \{x \mid x \in R_n, x_n > 0\}$ und $H = \{x \mid x \in R_n, x_n = 0\}$.*
Beh.: *Für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(H)$ mit $\operatorname{supp} f \Subset R_n$ und $\operatorname{supp} g \Subset H$ besitzt das Problem $\Delta u = f$, $u|_H = g$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(G \cup H)$.*

Satz. Vor: *Es sei $G = \{x \mid x \in R_n, x_n > 0\}$ und $H = \{x \mid x \in R_n, x_n = 0\}$. L sei ein in G gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit variablen Koeffizienten. Außerhalb eines Kompaktums K sei $L = \Delta$.*
Beh.: *Für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(H)$ mit $\operatorname{supp} f \Subset R_n$ und $\operatorname{supp} g \Subset H$ besitzt das Problem $Lu = f$, $u|_H = g$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(G \cup H)$.*

Satz. Vor.: *Es sei $G = \{x \mid x \in R_n, x_n > 0\}$ und $H = \{x \mid x \in R_n, x_n = 0\}$. L sei ein G gleichmäßig eilliptischer Differentialoperator mit variablen Koeffizienten. Außerhalb eines Kompaktums K sei $L = \Delta$. U sei eine beschränkte offene Menge des R_n.*
Beh.: *Für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times (C_{0,0}(H) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(H \cap U))$ mit $\operatorname{supp} f \Subset R_n$ und $\operatorname{supp} g \Subset H$ besitzt das Problem $Lu = f$, $u|_H = g$ genau eine Lösung u aus $C_{0,0}(G \cup H) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup (H \cap U))$.*

Satz. *Ist G = Kugel, so besitzt das Randwertproblem $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle (f, g) aus $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in \mathscr{C}_{2,\alpha}(G) \cap C_{0,0}(\bar{G})$.*

(4.8) Satz (Müntz, Kellogg, Simoda, Babock-Mustaţă). *Ist $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1) \times C_{2,\alpha}(\partial K_1)$, so existiert genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1)$ des Randwertproblems*
(4.9) $\Delta u(x) = f(x)$ $(x \in K_1)$ *und* $u|_{\partial K_1} = g$.

(8.7.1) Satz. Vor.: *Es gelte für die Koeffizienten des Differentialoperators L: $a_{jk} \in D_{(0,0,\alpha)}(K_r(y))$, $a_j \in D_{(0,1,\alpha)}(K_r(y))$, $a \in D_{(0,2,\alpha)}(K_r(y))$.*
Beh.: *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für $u \in D_{(2,0,\alpha)}(K_r(y))$ die Ungleichung*

$$\|u\|^{*}_{(2,0,\alpha,K_r(y))} \leqslant c\,\{\|Lu\|^{*}_{(0,2,\alpha,K_r(y))} + \|u\|_{0,0,K_r(y)}\}$$

gilt.

(8.7.2) Satz. Vor.: *Wie in Satz (8.7.1). Zusätzlich sei U ein Gebiet des R_n und $\bar{S} \subset U \cap \partial K_r(y)$; G ein Gebiet des R_n mit $\bar{G} \subset S \cup K_r(y)$.*
Beh.: *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in D_{(2,0,\alpha)}(K_r(y))$ mit $u|_{(U \cap \partial K_r(y))} \in \mathscr{C}_{2,\alpha}(U \cap \partial K_r(y))$ die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leqslant c\,\{\|Lu\|^{*}_{(0,2,\alpha,K_r(y))} + \|u\|_{0,0,K_r(y)} + \|u\|_{2,\alpha,S}\}$$

gilt.

Satz. *Ist G = Kugel, so besitzt das Randwertproblem $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$ für alle (f, g) aus $C_{0,0}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

(3.1) Satz (O. Perron). *Für jedes beschränkte Gebiet $G \subset R_n$ mit Rand $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ existiert zu jedem $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ eine Lösung $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,0}(G)$ des Randwertproblems $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.*

(3.5) Satz (E. Hopf). *Sind im Gebiete G die m-ten partiellen Ableitungen der Funktionen a_{jk}, a_j, a, f vorhanden und hölderstetig mit dem Exponenten α, so ist jede in G zweimal stetig differenzierbare Lösung von*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x)$$

daselbst $(m+2)$-mal hölderstetig – mit gleichem Exponenten α – differenzierbar.

(8.8.2) Satz. Vor.: *Wie in Satz (8.7.2).*
Beh.: *Für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(K_r(y)) \times \big(C_{0,0}(\partial K_r(y)) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(\partial K_r(y) \cap U)\big)$ besitzt das Randwertproblem $Lu = f$, $u|_{\partial K_r(y)} = g$ genau eine Lösung $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G \cup S)$.*

Satz (O. D. Kellogg). *Das Randwertproblem $\Delta v = f$, $v|_{\partial G} = g$ besitzt für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

Satz. *Das Randwertproblem $Lv = f$, $v|_{\partial G} = g$ besitzt für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ genau eine Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.*

C. Die Struktur des in dieser Arbeit gegebenen Existenzbeweises einer Lösung $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ des Dirichletproblems $Lu = f,\ u|_{\partial G} = g$

BEZEICHNUNGEN. *Es sei $r > 0$ und*

$K_r = \{x \mid x \in R_n, |x| < r\}$,

$K_r^+ = \{x \mid x \in R_n, |x| < r, x_n > 0\}$,

$H = \{x \mid x \in R_n, x_n = 0\}$,

$H_r = \{x \mid x \in R_n, x_n = 0, |x| < r\}$.

$C_{0,\alpha}^{0}(\bar{K}_r^+)$ *sei der Banachraum für dessen Elemente* v $\operatorname{supp} v \subset \bar{K}_{2r/3}^+$ *gilt.*

$C_{2,\alpha}^{0}(H_r)$ *sei der Banachraum, für dessen Elemente* v $\operatorname{supp} v \subset H_{r/2}$ *gilt.*

Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$, *so wird mit* $\bar{x}$ *der an der Hyperebene* H *gespiegelte Vektor* $(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ *bezeichnet.*

Für $x \neq y$ *ist*

$$G(x, y) = ((n-2)\omega_n)^{-1} \cdot \{|x-y|^{2-n} - [1 - 2(x, y) + |x|^2 \cdot |y|^2]^{(2-n)/2}\}$$

die Greensche Funktion für die Kugel K_1. *Durch Spiegelung an der Hyperebene* H *erhalten wir daraus die Greensche Funktion* $\Gamma(x, y) = G(x, y) - G(\bar{x}, y)$, $x \neq y$, *für die Halbkugel* K_1^+.

(4.5) HILFSSATZ. *Es sei* $B(y, r) = \{x \mid x \in R_n, |x-y| < r\}$, $0 < r < 1$ *und* $y \in R_n$ *beliebig mit* $|y|^2 = (1 + r^2)$. *Die Abbildung* T: $R_n \setminus \{0\} \to R_n$ *sei durch* $x \to x/|x|^2$ *definiert.*

Dann gilt: T: $B(y, r) \to B(y, r)$ *und* T: $\partial B(y, r) \to \partial B(y, r)$

(4.3) HILFSSATZ. *h sei aus* $C_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$, *dann ist*

$$u(x) = -\int_{K_1^+} \Gamma(x, y) \cdot h(y)\,dy \text{ aus } C_{0,0}(\bar{K}_1^+) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(K_1^+ \cup H_1)$$

und Lösung des Problems

(4.4) $\Delta u(x) = (x)\ (x \in K_1^+)$ *und* $u(x) = 0\ (x \in \partial K_1^+)$.

(4.6) HILFSSATZ. *Ist* $h \in C_{0,\alpha}^{0}(\bar{K}_1^+)$, *so ist die Lösung u des Randwertproblems* (4.4) *aus* $C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$.

(4.1) SATZ. *Ist* $(f, g) \in C_{0,\alpha}^{0}(\bar{K}_1^+) \times C_{2,\alpha}^{0}(H_1)$, *so existiert genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ *des Randwertproblems*

$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in K_1^+$,

(4.2) $u(x) = g(x), \quad x \in H_1$,

$u(x) = 0, \quad x \in \partial K_1^+ \setminus H_1$.

(5.8) HILFSSATZ. Vor.: (a) *Der Operator* $L\cdot = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \times \times \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\cdot$ *mit* $a_{jk} \in C_{0,\alpha}(\bar{K}_1^+)$ *sei in* $\bar{K}_1^+$ *elliptisch.*

(b) *Es sei* $\varphi \in C_0^\infty(R_n)$ *mit* $\varphi(x) = 1$ *für* $|x| \leq 1/3$ *und* $\varphi(x) = 0$ *für* $|x| \geq 2/3$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

(c) *Es gelte:* $\sum_{j,k=1}^{n} \|\varphi(a_{jk} - \delta_{jk})\|_{0,\alpha,K_1^+} \leq (2c)^{-1}$, *wobei c die Konstante aus Hilfssatz* (5.3) *ist.*

(d) *Es sei* $L_0\cdot = \Delta\cdot + \varphi(x) \cdot \{L\cdot - \Delta\cdot\}$.

Beh.: *Das Randwertproblem*

$L_0 u(x) = f(x), \quad x \in K_1^+$,

$u(x) = g(x), \quad x \in H_1$,

$u(x) = 0, \quad x \in \partial K_1^+ \setminus H_1$.

besitzt für alle $(f, g) \in C_{0,\alpha}^{0}(\bar{K}_1^+) \times C_{2,\alpha}^{0}(H_1)$ *genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{K}_1^+)$.

(3.5) SATZ (E. Hopf). *Sind im Gebiete G die m-ten partiellen Ableitungen der Funktionen* a_{jk}, a_j, a, f *vorhanden und hölderstetig mit dem Exponenten* α, *so ist jede in G zweimal stetig differenzierbare Lösung von*

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \cdot u_{x_j x_k}(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot u_{x_j}(x) + a(x) \cdot u(x) = f(x)$$

daselbst $(m+2)$*-mal hölderstetig — mit gleichem Exponenten* α *— differenzierbar.*

(5.5) HILFSSATZ. Vor.: *Es sei* $r > 0$ *und* $p = (4n+1)^{1/2} \cdot r \cdot (2n+1)^{-1}$, $H_p = \{x \mid x \in R_{n-1}, |x| < p\}$, w: $H_p \to R$ *sei definiert durch* $w(x) = (r^2 - |x|^2)^{1/2} - r$, q: $H_p \to R$ *sei stetig mit* $|q(x)| \leq -w(x)$ *für alle* $x \in H_p$, $S = \{(x, t) \mid x \in H_p, q(x) < t < r \cdot (2n+1)^{-1}\}$, v: $\bar{S} \to R$ *sei definiert durch*

$v(x, t) = -t^2 + rt \cdot (2n+1)^{-1} + (r - (r^2 - |x|^2)^{1/2}) \times (r \cdot (2n+1)^{-1} - t)$.

Beh.: *Für alle* $(x, t) \in \bar{S}$ *gilt*

$v(x, t) \geq 0$ *und* $\sum_{j=1}^{n-1} v_{x_j x_j}(x, t) + v_{tt}(x, t) \leq -1$.

(5.6) HILFSSATZ. Vor.: (1) *Es sei* $0 < \alpha < 1$ *und G ein beschränktes Gebiet des* R_n *mit Rand* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$. *Für* $y \in \partial G$ *sei* $\nu(y)$ *die äußere Normale an* ∂G.

(2) *Es sei* $f \in C_{0,\alpha}(\bar{G})$ *und* $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ *sei Lösung des Randwertproblems* $\Delta u(x) = f(x)\ (x \in G)$ *und* $u(x) = 0\ (x \in \partial G)$.

Beh.: *Es existieren Konstanten* $a > 0$ *und* $c > 0$, *welche nur von n und* ∂G *abhängen, so daß für alle* $y \in \partial G$ *und alle t mit* $0 \leq t \leq a$ *die Abschätzung* $|u(y - t\nu(y))| \leq c \cdot \|f\|_{0,0,G} \cdot t$ *gilt.*

(5.2) HILFSSATZ. *E sei ein Banachraum.* T: $E \to C_{k,\alpha}(G)$ *sei eine lineare Abbildung und* I: $C_{k,\alpha}(G) \to C_{0,0}(G)$ *sei die Einbettung. Ist* $I \circ T$: $E \to C_{0,0}(G)$ *stetig, so ist T stetig.*

(5.3) HILFSSATZ. *Es sei* $(f, g) \in C_{0,\alpha}^{0}(\bar{K}_1^+) \times C_{2,\alpha}^{0}(H_1)$. *Es existiert eine Konstante c, welche nicht von* (f, g) *abhängt, so daß für die Lösung u des Randwertproblems* (4.2) *die Abschätzung* $\|u\|_{2,\alpha,K_1^+} \leq c\,\{\|f\|_{0,\alpha,K_1^+} + \|g\|_{2,\alpha,H_1}\}$ *gilt.*

(5.4) HILFSSATZ. Vor.: *Es sei G ein beschränktes Gebiet des* R_n *mit Rand* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$.

Beh.: (1) *Zu jeder Funktion* $g \in C_{2,\alpha}(\partial G)$ *existiert eine Funktion* $v \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ *mit* $v|_{\partial G} = g$.

(2) *Mit einer Konstanten k, welche nicht von g abhängt, gilt die Abschätzung* $\|v\|_{2,\alpha,G} \leq k \cdot \|g\|_{2,\alpha,\partial G}$.

(3.1) SATZ (O. Perron). *Für jedes beschränkte Gebiet* $G \subset R_n$ *mit Rand* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ *existiert zu jedem* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *eine Lösung* $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,0}(G)$ *des Randwertproblems* $\Delta u = f$, $u|_{\partial G} = g$.

(5.1) SATZ (J. Schauder). *Es sei G ein beschränktes Gebiet des* R_n *mit Rand* ∂G *aus* $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ *und* (f, g) *sei aus* $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$. *Ist* $u \in C_{0,0}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ *eine Lösung von* $\Delta u(x) = f(x)\ (x \in G)$ *und* $u(x) = g(x)\ (x \in \partial G)$, *so ist* $u \in C_{1,\beta}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ *mit* $0 \leq \beta < 1$.

(5.7) SATZ. *Es sei G ein beschränktes Gebiet des* R_n *mit Rand* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$ *und* (f, g) *sei aus* $C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$. *Ist* $u \in C_{1,\gamma}(\bar{G}) \cap \mathscr{C}_{2,\alpha}(G)$ *eine Lösung des Problems* $\Delta u = f$ *und* $u|_{\partial G} = g$, *so ist* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$.

SATZ 2. *Die folgenden Aussagen* (I) *und* (II) *sind äquivalent.*

(I) *Für jedes beschränkte Gebiet G des* R_n *mit* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ *gilt:*

Ist $Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j} + au$ *ein beliebiger Differentialoperator, dessen Koeffizienten* (1.2) *und* (1.6) *erfüllen und ist* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *beliebig, so existiert ein* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$, *welches das Randwertproblem* $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$ *löst.*

(II) *Für jedes beschränkte Gebiet G des* R_n *mit* $\partial G \in \mathscr{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ *gilt:*

Ist $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *beliebig, so existiert ein* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$, *welches das Randwertproblem*

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = f, \quad u|_{\partial G} = g$$

löst.

SATZ 1. Vor.: (a) *Es sei* $0 < \alpha < 1$.

(b) *G sei ein beschränktes Gebiet des* R_n *mit Rand* ∂G *aus* $\mathscr{C}_{2,\alpha}$.

(c) *Es sei* $Lu = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j u_{x_j} + au$ *ein beliebiger Differentialoperator, der die Bedingungen:*

(1.2) *Der Differentialoperator L sei in G gleichmäßig elliptisch, d.h. es gibt ein* $m > 0$, *so daß für alle* $v \in R_n$ *und alle* $x \in G$ *die Ungleichung* $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) v_j v_k \geq m \cdot |v|^2$ *gilt,*

(1.6) *Die Koeffizienten* $a_{j,k}$, a_j, a *seien Funktionen aus* $C_{0,\alpha}(\bar{G})$ *mit* $0 < \alpha < 1$. *Ferner gelte für alle* $x \in \bar{G}$: $a(x) \leq 0$

erfüllt.

Beh.: *Zu jedem* $(f, g) \in C_{0,\alpha}(\bar{G}) \times C_{2,\alpha}(\partial G)$ *existiert genau eine Lösung* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{G})$ *des Randwertproblems* $Lu = f$, $u|_{\partial G} = g$.

SATZ (Schaudersche a priori Abschätzung bis zum Rand des Gebietes). Vor.: *Es sei G ein beschränktes Gebiet des* R_n, *dessen Rand zur Klasse* $\mathscr{C}_{2,\alpha}$ *gehört.*

$$L\cdot = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial\cdot}{\partial x_j} + a(x)\cdot$$

sei ein in G gleichmäßig elliptischer Differentialoperator mit Koeffizienten a_{jk}, a_j, a *aus* $C_{0,\alpha}(\bar{G})$.

Beh.: *Es existiert eine Konstante* $c > 0$, *so daß für alle u aus* $C_{2,\alpha}(\bar{G})$ *die Ungleichung*

$$\|u\|_{2,\alpha,G} \leq c\,\{\|Lu\|_{0,\alpha,G} + \|u\|_{0,0,G} + \|u\|_{2,\alpha,\partial G}\}$$

gilt.