

COMPUTATIONAL MATHEMATICS  
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 13  
PWN - POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS  
WARSAW 1984

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

М. П. САПАГОВАС

*Институт Математики и Кибернетики АН ЛССР,  
Вильнюс, СССР*

Наряду с классическими краевыми задачами для дифференциальных уравнений определенный интерес представляют задачи, в которых часть краевых условий заменена нелокальными условиями, т.е. условиями, заданными во всей области, а не только на ее границе. Примерами нелокальных условий могут быть условия нормировки, условия постоянной длины, постоянного объема и т.д. Для параболических дифференциальных уравнений такие задачи рассматривались в [1].

Другим примером дифференциальной задачи с нелокальным краевым условием является задача нахождения поверхности капли жидкости. Эта задача представляет особый интерес в связи с ее приложением—исследованием и изготовлением жидкometаллических электроконтактов [2].

**1. Формулировка задачи**

Пусть на горизонтальной плоскости находится капля жидкости заданного объема  $V$ . При этом часть поверхности капли соприкасается с плоскостью, другая часть поверхности, называемая свободной, подлежит определению. Из физических соображений симметрии, поверхность, где капля соприкасается с плоскостью, будем считать окружностью.

Уравнение свободной поверхности капли выводится исходя из принципа минимальной энергии [3]. Капля находится в равновесии (покое) при

$$\min(E_1 + E_2),$$

где  $E_1$  — энергия поверхностного натяжения,  $E_2$  — потенциальная

энергия силы тяжести (энергия в гравитационном поле). Дополнительным условием является

$$V = \text{const},$$

где  $V$  — объем капли.

Принимая во внимание симметричность капли, получаем выражения:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2\pi\sigma \int_0^a r \sqrt{1 + \left(\frac{du}{dr}\right)^2} dr, \quad E_2 = \pi g \varrho \int_0^a r u^2 dr, \\ V &= 2\pi \int_0^a r u dr, \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения (энергия поверхности натяжения на единицу площади),  $g$  — ускорение свободного падения,  $\varrho$  — плотность жидкости,  $a$  — радиус окружности соприкосновения капли с плоскостью,  $u = u(r)$  — уравнение искомой поверхности.

Записывая уравнение Эйлера для функционала  $E_1 + E_2 - \mu V$ , где  $\mu$  — множитель Лагранжа, получаем

$$(1) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sqrt{1 + (u')^2}} \frac{du}{dr} \right) - Ku + \lambda = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$K = g\varrho/\sigma, \quad \lambda = \mu/\sigma.$$

Заметим, что  $K > 0$ . К уравнению (1) добавляются два очевидных краевых условия:

$$(2) \quad u'(0) = 0, \quad u(a) = 0$$

и уже упомянутое нелокальное условие

$$(3) \quad 2\pi \int_0^a r u dr = V,$$

которое обязательно, так как в уравнении (1) введен неизвестный параметр (множитель Лагранжа)  $\lambda$ . Так как в уравнении (1) имеется еще другая неизвестная постоянная  $a$ , то необходимо еще одно дополнительное условие. Таким условием обычно является условие:

$$(4) \quad u'(a) = \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  — угол смачивания, устанавливаемый экспериментально.

В случае, когда капля жидкости рассматривается в качестве электроконтакта, постановка задачи должна быть несколько изменена. Именно, на плоскости круг радиусом  $a$  специальным образом обрабатывается (смачивается). Поэтому капля соприкасается с плоскостью кругом с заданным радиусом  $a$ . Угол  $\gamma$  в этом случае не известен. Таким образом, в формулировке дифференциальной задачи радиус  $a$  считается известным, и мы получаем следующую задачу:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sqrt{1+(u')^2}} \frac{du}{dr} \right) - Ku + \lambda = 0, \\ & u'(0) = 0, \quad u(a) = 0, \\ & 2\pi \int_0^a r u dr = V, \end{aligned}$$

где неизвестными являются функция  $u = u(r)$  и параметр  $\lambda$ .

## 2. Исследование дифференциальной задачи

Построим сначала априорную оценку для решения задачи (5). Наряду с задачей (5) рассмотрим задачу

$$(6) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sqrt{1+(u')^2}} \frac{du}{dr} \right) - Ku + \bar{\lambda} = 0, \\ & u'(0) = 0, \quad u(a) = 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{\lambda}$  — заданное число.

Задача (6) является частным случаем двухмерной задачи

$$(7) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - H(x, y, u) = 0, \\ & u|_{\Gamma} = 0, \end{aligned}$$

где  $\Gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $H = Ku - \bar{\lambda}$ ,  $\mu = \left\{ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\}^{1/2}$ . Задача (6) получается из (7), если (7) записать в полярных координатах и положить, что  $u(r, \varphi)$  не зависит от  $\varphi$ .

**Лемма 1.** Если  $|\bar{\lambda}|a^2 < 1$ , то для задачи (6) имеет место априорная оценка

$$(8) \quad |u| \leq M,$$

где  $M$  — некоторая постоянная, зависящая от  $a$  и  $\bar{\lambda}$ .

Оценка (8) следует непосредственно из результатов [4], § 15, доказанных для задачи (7). Аналогично устанавливается априорная оценка

$$(9) \quad |p| \leq N,$$

где  $p = du/dr$ . Из этих результатов следует существование и единственность классического решения задачи (6) и принадлежность его к классу  $C_{m,\delta}$  для любого  $m$  (более подробно см. [4]). В [5] априорная оценка (9) получена для более общей задачи при меньших ограничениях на  $H(x, y, u)$ .

Вернемся к задаче (5). Предположим, что решение  $(u, \lambda)$  этой задачи существует. Получим выражение для параметра  $\lambda$ . Выразим  $u$  из дифференциального уравнения (1) и подставим это значение в (3). После интегрирования с учетом краевых условий (2) получаем:

$$(10) \quad \lambda = \frac{VK}{\pi a^2} - \frac{2}{a} \frac{u'(a)}{\sqrt{1+u'(a)^2}}$$

или

$$(11) \quad 0 < \frac{VK}{\pi a^2} \leq \lambda \leq \frac{VK}{\pi a^2} + \frac{2}{a}.$$

Неравенство (11) является априорной оценкой для  $\lambda$ .

Далее всюду будем предполагать, что для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих неравенству (11), существует априорная оценка (8), (9) задачи (6).

### 3. Формулировка разностной задачи

Задачу (5) будем решать методом конечных разностей. Возьмем следующую разностную схему

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} \right) - Ky_i + \lambda_h &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}} &= \frac{h}{4} (Ky_0 - \lambda_h), \quad y_N = 0, \\ 2\pi h \sum_{i=1}^{N-1} r_i y_i &= V, \end{aligned}$$

где

$$hN = a, \quad v_{r,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \quad v_{r,i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}.$$

Заметим, что для аппроксимации краевого условия  $u'(0) = 0$  мы сначала записали это условие в другом виде

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{ru'(r)}{\sqrt{1+u'(r)^2}} = 0,$$

а затем при аппроксимации использовали предположение, что в точке  $r = 0$  справедливо дифференциальное уравнение. Такой способ аппроксимации для разных уравнений широко применялся в [6].

Непосредственно проверяется, что во всех точках  $i = 0, 1, \dots, N-1$  погрешность аппроксимации есть величина  $O(h^2)$ . Такая же погрешность получается и при замене интегрального условия. Следовательно, можно записать:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} u_{r,i}}{\sqrt{1+u_{r,i}^2}} \right)_r - Ku_i + \lambda &= R_i(h), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{u_{r,0}}{\sqrt{1+u_{r,0}^2}} &= \frac{h}{4} (Ku_0 + \lambda) + R_0(h), \quad u_N = 0, \\ 2\pi h \sum_{i=1}^{N-1} r_i u_i &= V + r_0(h). \end{aligned}$$

Здесь  $r_0(h)$ ,  $R_i(h)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  есть величины  $O(h^2)$ .

#### 4. Исследование разностной задачи

В этом пункте будет доказано, что задача (12) всегда имеет единственное решение  $(y, \lambda_h)$ , где  $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ . Для этой цели наряду с задачей (12) рассмотрим следующую задачу

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} \bar{y}_{r,i}}{\sqrt{1+\bar{y}_{r,i}^2}} \right)_r - K\bar{y}_i + \bar{\lambda}_h &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{\bar{y}_{r,0}}{\sqrt{1+\bar{y}_{r,0}^2}} &= \frac{h}{4} (K\bar{y}_0 - \bar{\lambda}_h), \quad \bar{y}_N = 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{\lambda}_h$  — заданное число.

**Лемма 2.** Задача (14) для любого  $\bar{\lambda}_h$  имеет единственное решение  $\bar{y}_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ .

**Доказательство.** Запишем (14) в виде операторного уравнения

$$(15) \quad A\bar{y} = b.$$

Непосредственно проверяется, что оператор  $A$  является сильно монотонным оператором в конечномерном пространстве сглаживающих функций  $H_{N+1}$ . Следовательно, уравнение (15) имеет единственное решение. Лемма доказана.

**Лемма 3.** Для задачи (12) справедлива априорная оценка

$$|\lambda_h| \leq M,$$

где  $M$  — постоянная, зависящая лишь от  $V, K, a$ .

**Доказательство.** В задаче (12) подставляя  $y_i$  из первых уравнений ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ) в последнее суммарное равенство, получаем:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi h}{K} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} \right)_r + r_i \lambda_h \right\} = \\ &= \frac{2\pi h}{K} \left( -\frac{r_{1/2} y_{r,0}}{h\sqrt{1+y_{r,0}^2}} + \frac{r_{N-1/2} y_{r,N}}{h\sqrt{1+y_{r,N}^2}} + \frac{h+(N-1)h}{2} (N-1) \lambda_h \right) = \\ &= \frac{2\pi}{K} \left( -\frac{h}{2} \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}} + \frac{(a-h/2) y_{r,N}}{\sqrt{1+y_{r,N}^2}} + \frac{a(a-h)}{2} \lambda_h \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$(16) \quad \lambda_h = \frac{KV}{\pi a(a-h)} - \frac{2(a-h/2)}{a(a-h)} \frac{y_{r,N}}{\sqrt{1+y_{r,N}^2}} + \frac{h}{a(a-h)} \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}}.$$

Так как  $|a/\sqrt{1+a^2}| \leq 1$  для всех  $a$ , то

$$|\lambda_h| \leq \frac{KV}{\pi a(a-h)} + \frac{2}{a-h}.$$

Далее, так как  $h \leq a/2$ , то

$$(17) \quad |\lambda_h| \leq \frac{2KV}{\pi a^2} + \frac{4}{a}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Разностная задача (12) имеет единственное решение  $(y, \lambda_h)$ ,  $y = (y_0, y_1, \dots, y_N)$ .

**Доказательство.** Справедливость теоремы следует непосредственно из лемм 2 и 3. Действительно, так как  $\lambda_h$  согласно формулам (16), (17) определяется однозначно и принадлежит конечному интервалу,

то задача (12) эквивалентна задаче (14) с некоторым конкретным  $\tilde{\lambda}_h$  из того интервала. Применяя лемму 1 приходим к утверждению теоремы.

### 5. Сходимость метода конечных разностей для вспомогательной задачи

Используя задачи (12) и (13) можно записать систему разностных уравнений, которой удовлетворяет погрешность

$$z_i = y_i - u_i, \quad \mu = \lambda_h - \lambda.$$

Для сходимости метода конечных разностей достаточно было бы получить из этой системы априорную оценку типа

$$(18) \quad \max_{0 \leq i \leq N-1} |z_i| + |\mu| \leq C \cdot |\psi|,$$

где  $\psi$  — правая часть системы. Однако такую оценку получить не удалось. Из этой системы следует лишь тривиальная оценка

$$(19) \quad \max_{0 \leq i \leq N-1} |z_i| \leq C_1 |\mu| + C_2 \|\psi\|$$

(см. ниже п. 7). Поэтому для сходимости метода конечных разностей был разработан другой прием, основанный на идеи рассмотрения вспомогательной дифференциальной задачи (21). Согласно этому методу сначала устанавливается равномерная сходимость решения разностной задачи (12) к решению вспомогательной дифференциальной задачи. Затем дальнейшее исследование этой вспомогательной задачи позволяет оценить  $|\mu|$ , т.е. установить сходимость  $\lambda_h \rightarrow \lambda$  при  $h \rightarrow 0$ . После этого вступает в силу оценка (19).

Согласно этому плану доказательства сходимости метода конечных разностей приступим к рассмотрению вспомогательной дифференциальной задачи (21).

Пусть  $\lambda_h$  — точное значение параметра разностной задачи (12). Запишем две задачи — разностную и дифференциальную:

$$(20) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} \right) - Ky_i + \lambda_h = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \\ & \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}} = \frac{h}{4} (Ky_0 - \lambda_h), \quad y_N = 0; \\ & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sqrt{1+(w')^2}} \frac{dw}{dr} \right) - Kw + \lambda_h = 0, \end{aligned}$$

$$(21) \quad w'(0) = 0, \quad w(a) = 0.$$

Для фиксированного  $\lambda_h$  решение задачи (20) существует и единственно согласно лемме 2. Так как  $\lambda_h$  в задачах (12) и (21) совпадает, то непосредственно убеждаемся, что  $y_i$ , вычисленные из системы (20) автоматически удовлетворяют последнему суммарному уравнению системы (12), т.е. решение  $(y, \lambda_h)$  задачи (20) одновременно является и решением разностной схемы (12).

Далее, для фиксированного  $\lambda_h$  задача (21) также имеет единственное решение, для которого справедлива априорная оценка (9) и которое является достаточно гладким. Следовательно, разностная задача (20) аппроксимирует дифференциальную задачу (21) с точностью  $O(h^2)$ . Используя (20), (21), запишем задачу для погрешности  $v_i = y_i - w$

$$\frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} \right)_r - \frac{1}{r_i} \left( \frac{r_{i+1/2} w_{r,i}}{\sqrt{1+w_{r,i}^2}} \right)_r - K(y_i - w_i) = -R_i(h),$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$(22) \quad \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}} - \frac{w_{r,0}}{\sqrt{1+w_{r,0}^2}} - \frac{h}{4} K(y_0 - w_0) = -R_0(h),$$

$$y_N - w_N = 0,$$

где  $R_i(h) = O(h^2)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Из (22) получаем

$$(23) \quad -C_0 v_0 + B_0 v_1 = -\psi_0,$$

$$A_i v_{i-1} - C_i v_i + B_i v_{i+1} = -\psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$v_N = 0,$$

где

$$\psi_i = R_i(h), \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad \psi_0 = \frac{4}{h} R_0(h);$$

$$A_i = \frac{r_{i-1/2}}{h^2 r_i} (1 + \tilde{p}_{i-1}^2)^{-3/2}, \quad B_i = \frac{r_{i+1/2}}{h^2 r_i} (1 + \tilde{p}_i^2)^{-3/2},$$

$$C_i = A_i + B_i + K, \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$B_0 = \frac{4}{h^2} (1 + \tilde{p}_0^2)^{-3/2}, \quad C_0 = B_0 + K;$$

$$\tilde{p}_i = w_{r,i} + \theta_i (y_{r,i} - w_{r,i}), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1.$$

Определим скалярное произведение и нормы:

$$(u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{h}_i \varrho_i u_i v_i,$$

$$\|v\| = (v, v)^{1/2}, \quad \|v\|_C = \max_{0 \leq i \leq N-1} |v_i|,$$

где

$$\bar{h}_i = \begin{cases} h/2, & i = 0, \\ h, & i = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

$$\varrho_i = \begin{cases} h/4, & i = 0, \\ r_i, & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

Из определения непосредственно вычисляем, что

$$(24) \quad \|v\|_C \leq h^{-1} 2\sqrt{2} \|v\|.$$

**Лемма 4.** Для задачи (23) справедлива априорная оценка

$$\|v\| \leq \frac{1}{K} \|\psi\|.$$

**Доказательство.** Из (23) и (22) согласно определению скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned} (\psi, v) &= -h \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} \right)_r - \left( \frac{r_{i+1/2} w_{r,i}}{\sqrt{1+w_{r,i}^2}} \right)_r \right\} (y_i - w_i) - \\ &\quad - \frac{h}{2} \left( \frac{y_{r,0}}{\sqrt{1+y_{r,0}^2}} - \frac{w_{r,0}}{\sqrt{1+w_{r,0}^2}} \right) (y_0 - w_0) + K(v, v) = \\ &= h \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{r_{i+1/2} y_{r,i}}{\sqrt{1+y_{r,i}^2}} - \frac{r_{i+1/2} w_{r,i}}{\sqrt{1+w_{r,i}^2}} \right) v_r + K(v, v) = \\ &= h \sum_{i=0}^{N-1} \frac{r_{i+1/2}}{\sqrt{(1+\tilde{p}_i^2)^3}} v_r^2 + K(v, v) \geq K(v, v). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\|v\| \leq \frac{1}{K} \|\psi\|.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Справедлива оценка

$$\|v\| \leq Ch^2$$

где  $C$  не зависит от  $h$ .

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \|\psi\| &= \left( h \sum_{i=1}^{N-1} r_i \psi_i^2 + \frac{h^2}{8} \psi_0^2 \right)^{1/2} = \\ &= \left( h \sum_{i=1}^{N-1} r_i (R_i(h))^2 + \frac{h^2}{8} \left( \frac{4}{h} R_0(h) \right)^2 \right)^{1/2} = O(h^2), \end{aligned}$$

то  $\|v\| \leq Ch^2$ .

Следствие 2. Справедлива оценка

$$\|v\|_C \leq Ch,$$

где  $C$  не зависит от  $h$ .

Оценка следует из следствия 1 и из неравенства (24).

Следствие 3. Справедлива оценка

$$\|v_r\| \leq C,$$

где  $C$  не зависит от  $h$ .

Оценка получается из следствия 2 и из определения

$$v_r = (v_{i+1} - v_i)/h.$$

Лемма 5. Для задачи (20) для всех  $h \in (0, h_0]$  справедлива оценка

$$\|y_r\|_C \leq M,$$

где  $M$  не зависит от  $h$ .

Доказательство. Имеем

$$y_{r,i} = v_{r,i} + w_{r,i} = v_{r,i} + \left( \frac{dw}{dr} \right)_i + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 w(\tilde{r}_i)}{dr^2},$$

где  $\tilde{r}_i \in [r_i, r_{i+1}]$ .

Используя оценки

$$\|v_r\|_C \leq C, \quad \left| \frac{dw}{dr} \right| \leq N, \quad \left| \frac{d^2 w}{dr^2} \right| \leq M_2,$$

получаем

$$|y_r| \leq N + \frac{h^2}{2} M_2 + C,$$

откуда и следует справедливость леммы.

**Теорема 2.** *Решение разностной схемы (20) сходится к решению дифференциальной задачи (21), причем для всех  $h \in (0, h_0]$*

$$(25) \quad \|y - w\|_C \leq Ch^2,$$

где  $C$  не зависит от  $h$ .

**Доказательство.** Запишем задачу (23) в виде

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r} ((r+0,5h) b v_r)_r - dv &= -\psi, \quad 0 < r = ih < a, \\ \frac{4}{h} b_1 v_{1,0} - dv_0 &= -\psi_0, \quad v_N = 0, \end{aligned}$$

где

$$b = (1 + \tilde{p}_i^2)^{-3/2}, \quad \tilde{p}_i = w_{r,i} + \theta_i (y_{r,i} - w_{r,i}), \quad d = K, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1.$$

Согласно лемме 5 получаем, что

$$(27) \quad b \geq c_1 > 0,$$

где  $c_1$  не зависит от  $h$ . Следует отметить, что все выводы настоящего пункта и были направлены для получения оценки (27). При наличии такой оценки (27) для задачи (26) оценка

$$\|v\|_C = \|y - w\|_C \leq Ch^2$$

следует из [6] (см. п.4 § 5 гл. III).

Теорема доказана.

## 6. Оценка погрешности параметра

Приступим к доказательству сходимости разностной схемы (12). Сначала докажем, что  $\lambda_h \rightarrow \lambda$  при  $h \rightarrow 0$  и оценим погрешность  $|\lambda_h - \lambda|$ . Для этой цели возьмем решение  $w = w(r)$  задачи (21) и вычислим значение функционала

$$2\pi \int_0^a rw dr.$$

Применяя обобщенную формулу трапеций, а затем используя оценку (25) и последнее уравнение из системы (13), получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^a r w dr &= 2\pi h \sum_{i=1}^{N-1} r_i w_i - \frac{ah^2}{12} \frac{d^2 w(\tilde{r})}{dr^2} = \\ &= 2\pi h \sum_{i=1}^{N-1} r_i y_i + O(h^2) = V + O(h^2). \end{aligned}$$

Следовательно, решение  $w(r)$  задачи (21) удовлетворяет интегральному условию

$$(28) \quad 2\pi \int_0^a r w dr = \tilde{V},$$

где  $\tilde{V} = V + O(h^2)$  для всех  $h \in (0, h_0]$ .

Далее будем считать, что в задаче (21) параметр  $\lambda_h$  — произвольное число, удовлетворяющее неравенству (17), т.е. рассмотрим задачу

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{r}{\sqrt{1+(U')^2}} \frac{dU}{dr} \right) - KU + a = 0,$$

$$(29) \quad U'(0) = 0, \quad U(a) = 0,$$

где

$$(30) \quad |a| \leq \frac{2KV}{\pi a^2} + \frac{4}{a}.$$

Очевидно, что  $U = U(r, a)$  и

$$(31) \quad U(r, \lambda) = u(r), \quad U(r, \lambda_h) = w(r).$$

Обозначим

$$(32) \quad F(a) = 2\pi \int_0^a r U(r, a) da.$$

Из (5), (28) и (31) получаем

$$F(\lambda) - F(\lambda_h) = O(h^2)$$

или

$$F'(\tilde{\lambda})(\lambda - \lambda_h) = O(h^2),$$

где  $\tilde{\lambda}$  удовлетворяет неравенству (17). Из последнего равенства заключаем, что

$$|\lambda - \lambda_h| \leq \frac{Ch^2}{|F'(\tilde{\lambda})|},$$

если только  $F'(\tilde{\lambda}) \neq 0$ .

Докажем, что для всех  $a$ , удовлетворяющих (30),

$$(33) \quad F'(a) \geq c_2 > 0.$$

Тогда будем иметь

$$(34) \quad |\lambda - \lambda_h| \leq \frac{Ch^2}{c_2} = O(h^2).$$

Приступим к доказательству неравенства (33).

Из (32) получаем

$$(35) \quad F'(a) = 2\pi \int_0^a r \frac{\partial U(r, a)}{\partial a} dr.$$

Вычислим  $\partial U(r, a)/\partial a$ . Так как для решения  $U(r, a)$  задачи (29) при любом  $a$  удовлетворяющем (30), справедлива априорная оценка (9), то разность  $V = U(r, a_1) - U(r, a_2)$  удовлетворяет линейной дифференциальной задаче

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rk \frac{\partial V}{\partial r} \right) - KV &= -(a_1 - a_2), \\ V'(0) = 0, \quad V(a) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(37) \quad k \geq c_3 > 0.$$

Обозначим функцию Грина задачи (36) через  $-G(r, \xi)$ . Тогда

$$(38) \quad U(r, a_1) - U(r, a_2) = (a_1 - a_2) \int_0^a G(r, \xi) d\xi.$$

С учетом (37) можно записать

$$G(r, \xi) \geq 0,$$

$$\int_0^a r \int_0^a G(r, \xi) d\xi dr \geq c_2 > 0,$$

где  $c_2$  зависит лишь от  $K$ ,  $a$  и  $N$  из (9). Далее, из (38) получаем

$$\frac{dU(r, a_1)}{da} = \lim_{a_2 \rightarrow a_1} \frac{U(r, a_1) - U(r, a_2)}{a_1 - a_2} = \lim_{a_2 \rightarrow a_1} \int_0^a G(r, \xi) d\xi.$$

Подставляя это выражение в (35), заключаем, что

$$F'(a_1) = 2\pi \lim_{a_2 \rightarrow a_1} \int_0^a r \int_0^a G(r, \xi) d\xi dr \geq 2\pi c_2 > 0.$$

Неравенство (33) доказано, поэтому справедлива оценка (34).

## 7. Сходимость разностной схемы

Проведенные в предыдущих двух пунктах исследования дают основание доказать следующий основной результат работы.

**Теорема 3.** Решение  $(y, \lambda_h)$  разностной задачи (12) сходится к решению  $(u, \lambda)$  дифференциальной задачи (5), причем

$$|\lambda - \lambda_h| \leq Ch^2, \quad |y - u|_C \leq Ch^2,$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $h$ .

**Доказательство.** Первое из неравенств непосредственно доказано в п. 6. Обозначим  $z_i = y_i - u_i$ . Аналогично ранее записанным системам (22), (23), из (12) и (13) получаем, что  $z_i$  удовлетворяет системе (23) со следующими правыми частями

$$\psi_0 = \frac{4}{h^2} R_0(h) - (\lambda - \lambda_h),$$

$$\psi_i = R_i(h) - (\lambda - \lambda_h).$$

Согласно утверждению теоремы 2, получаем неравенство (19). Подставляя далее в (19) оценку  $\|\psi\| \leq Ch^2$  и (34), получаем

$$\|z\|_C \leq Ch^2.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что один из возможных итерационных методов решения системы нелинейных разностных уравнений (12), описан в [7], [8].

## Литература

- [1] Н. И. Иопкин, Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием, Дифференциальные уравнения 13.2 (1977), 294–304.

- [2] Г. А. Крухмалев, Ю. С. Путято, Е. А. Патрушов, И. З. Копп, *Пути решения основных проблем и разработок универсального эжидкокометаллического электрического контакта*, Межвуз. сб. *Герметизированные магнитоупримаемые контакты (герконы)*, вып. 5, Рязань 1979, 77–91.
- [3] А. Брайсон, Хо Ю.-ши, *Прикладная теория оптимального управления*, „Мир”, Москва 1972.
- [4] И. Я. Бакельман, *Геометрические методы решения эллиптических уравнений*, „Наука”, Москва 1965.
- [5] Н. Н. Уральцева, *Нелинейные красивые задачи для уравнений типа минимальных поверхностей*, Труды МИАН СССР, т. 66, Ленинград 1971, 217–226.
- [6] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, „Наука”, Москва 1977.
- [7] М. П. Сапаговас, *Определение формы свободной поверхности капли вариационно-разностным методом*. Сб. *Вариационно-разностные методы в математической физике*, Новосибирск 1978, 117–128.
- [8] Т. Вейдаите, П. Крутев, М. Сапаговас, А. Юркулинявичус, *Метод решения дифференциального уравнения, описывающего поверхность капли*, Литовский математический сборник 17, № 3 (1977), 168–169.

*Presented to the Semester  
Computational Mathematics  
February 20 – May 30, 1980*

---