POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ BIAŁYNICKI-BIRULA, BOGDAN BOJARSKI,
ZBIGNIEW CIESIELSKI, JERZY ŁOŚ, WIKTOR MAREK,
ZBIGNIEW SEMADENI

CXCV

ZYGMUNT CHARZYŃSKI
et
JANINA ŚLADKOWSKA-ZAHORSKA

Application de la méthode des fonctions algébriques à la représentation conforme

WARSZAWA 1982
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S.7133

PRINTED IN POLAND

© Copyright by Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1982

ISBN 83-01-01141-6 ISSN 0012-3862

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5
Notions préliminaires 7
I. Fonctions rationnelles spéciales 17
1. Interpolation locale. 17
2. Approximation des fonctions rationnelles spéciales 23
3. Approximation des arcs 27
II. Transformation par les fonctions algébriques spéciales 31
1. Étude de la fonction intérieure 31
2. Représentation avec une seule coupure 36
III. Théorèmes de Riemann et de Löwner. 38
1. Familles de Löwner 38
2. Démonstration du résultat fondamental 40
3. L'équation de Löwner pour les domaines spéciaux 53
Bibliographie 55

Introduction

Ce travail contient un développement nouveau de la méthode des fonction algébriques et certaines applications de cette méthode. Elle a été utilisée pour la première fois par Z. Charzyński dans [3] dans l'étude des problèmes extrémaux, ensuite dans [4], enfin par Z. Charzyński et J. Śladkowska dans [6] pour obtenir la variation intérieure. Dans le présent travail elle est développée dans la direction de la représentation de Riemann et de l'homotopie de Löwner.

L'idée essentielle de cette méthode consiste à opérer, non pas sur des domaines plans arbitraires, mais sur des domaines spéciaux, bornés par les lignes de niveau des parties imaginaires de certaines fonctions rationnelles, c'est-à-dire sur des domaines tels que sur leurs frontières s'annule la partie imaginaire de certaines fonctions rationnelles.

En limitant ainsi le genre des domaines considérés, on ne diminue pas essentiellement la généralité, car on peut approcher arbitrairement au sens du noyau une large classe de domaines plans par des domaines sur les frontières desquels s'annule la partie imaginaire d'une certaine fonction rationnelle; p. ex., on peut approcher chaque domaine G avec une coupure par un domaine analogue D, qui est borné par les lignes de niveau dè la partie imaginaire d'une fonction rationnelle R (v. [3], lemme 7, le lemme 1, 3, I de ce travail et une généralisation de [12], théorème 1). La construction de cette fonction rationnelle est simple et fondée en principe sur le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes et sur le théorème de Runge.

La partie imaginaire $\operatorname{Im} R$ de la fonction rationnelle mentionnée jouit alors de propriétés analogues à celles de la fonction de Green du domaine D: elle s'annule sur la frontière de D et elle est partout harmonique, à l'exception d'un nombre fini de points singuliers correspondant aux pôles de la fonction R (dans les considérations du présent travail tels sont les domaines $K(0, 1)\setminus H_t$, limités par les lignes de niveau $K^*(0, 1)\cup H_t$ de la partie imaginaire de la fonction $\Omega(w)$ avec une singularité polaire au point 0, v. pp. 38–40).

Enfin la représentation conforme A du cercle unité sur un domaine spécial avec une coupure satisfait à une équation algébrique de la forme $R(A(z)) = S(z)$, où S est également une fonction rationnelle liée à R par certaines relations arithmétiques (dans nos considérations cette représenta-

tion est donnée par la fonction $a(z, t)$, où le paramètre de propagation t est fixé pour le moment, et la relation mentionnée plus haut est $\Omega(a(z, t)) = \chi(z, t)$; les relations arithmétiques sont basées sur l'écartement des singularités, c'est-à-dire sur l'égalité des fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z, t)$ pour les racines des derivées correspondantes (v. 1, III, théorème fondamental, les relations (13), les notations (12) et les relations essentielles (8)). L'équation mentionnée est analogue à l'équation $\mathscr{F}(A(z)) = \log z$, qui lie la représentation conforme à la fonction de Green, en outre $\mathscr{F}$ signifie ici une fonction analytique multivoque, générée par la fonction de Green.

Le caractère de ce travail est monographique. Il comprend des notions préliminaires et trois chapitres, dont chacun peut être considéré comme une note séparée. Cependant, ayant en vue l'idée dominante commune on a jugé utile de le réunir en un tout plus étendu.

Ainsi, dans les notions préliminaires on trouvera les définitions et les résultats dont on profite dans la suite; les plus importants sont les résultats qui concernent les représentations locales des angles à l'aide de fonctions holomorphes, pp. 13–15, et ceux qui concernent les propriétés locales des fonctions implicites.

Le chapitre I traite, d'une part, de l'interpolation du type de Čebyšev, qui intervient déjà dans [3] et [4] chez Z. Charzyński, dans [6] chez Z. Charzyński et J. Śladkowska, et dans [10] chez J. Mycielski et S. Paszkowski dans des considérations concernant l'approximation. D'autre part, ce chapitre contient des lemmes sur l'approximation des fonctions rationnelles par des fonctions rationnelles de structure analogue, mais donées de propriétés complémentaires, et sur l'approximation des arcs de Jordan par des arcs qui sont lignes de niveau de la partie imaginaire de certaines fonctions rationnelles.

Le chapitre II contient l'étude des fonctions holomorphes dans le cercle unité, qui satisfont à une certaine équation algébrique et sont appelées fonctions algébriques spéciales; on trouve que ces fonctions sont bornées, univalentes et on détermine la forme de ces fonctions dans l'entourage des points ordinaires et singuliers de la circonférence unité.

Le chapitre III contient une démonstration du théorème de Riemann pour les domaines $K(0, 1)\setminus H_t$ mentionnés plus haut, qui revient à démontrer l'existence de la fonction représentante $a(z, t)$ comme solution de l'équation du type $\Omega(a(z, t)) = \chi(z, t)$. On y arrive en faisant varier continûment avec le paramètre t le second membre de cette équation, de façon à écarter les singularités; la fonction intérieure $a(z, t)$ varie avec le second membre de l'équation à partir de l'identité jusqu'à la représentation cherchée. Il importe de signaler le point délicat du cas (36), qui permet, quand $T = 0$, de passer du cercle entier au cercle avec une petite coupure, pp. 46–47. Le procédé qui suit est fondé sur l'appareil banal du théorème des fonctions implicites et de l'interpolation du type de Čebyšev. Le chaptire mentionné contient ensuite

une démonstration très courte du difficile théorème de Löwner. De cette façon, par un seul procédé on établit l'existence de la représentation conforme (Riemann) et son expression par la composition successive de représentations multiples, proches de l'identité, avec une petite coupure, de la forme

$$z-\varepsilon z\frac{1+z\varkappa}{1-z\varkappa}+o(\varepsilon),$$

c'est-à-dire en passant de l'identité à la représentation avec une grande coupure (Löwner). On observe le même fait sous une forme plus dissimulée dans la démonstration du théorème de Riemann due à Montel (v. [11], pp. 225–229); la fonction qui y figure, $F = F_3 \circ F_2 \circ F_1$, proche de l'identité, avec le paramètre a choisi proche de la circonférence du cercle, a une forme analogue à celle mentionnée plus haut (Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Dissertationes Math. 2, pp. 11–16) et, en fait, on obtient la représentation mayennant la composition multiple de telles fonctions, ce qui est caché par la prise de la borne supérieure m.

Ce travail, avec ceux que nous avons cités précédemment, achève une certaine étape dans les recherches basées sur l'idée présentée au début. Ils permettent de présenter sous un aspect uniforme les éléments principaux de la théorie classique et contemporaine des représentations conformes, tels que le théorème de Riemann, la variation intérieure et la paramétrisation de Löwner.

Les calculs sont longs, mais le procédé est simple, difficile à exprimer avec toute la précision voulue, mais facile à concevoir.

Signalons enfin au lecteur que dans ce travail les théorèmes, les lemmes et les formules d'une même partie sont cités en indiquant leurs numéros, ceux d'une même chapitre en indiquant leurs numéros et ceux de la partie correspondante, enfin ceux d'un autre chapitre en indiquant leurs numéros, ceux de la partie et du chapitre correspondants.

Notions préliminaires

Notations et définitions.

1. (a, b), $[a, b]$ et $\{a, b\}$ désigneront resp. un intervalle ouvert d'extrémités a et b, un intervalle fermé de mêmes extrémités et un intervalle d'extrémités a et b, dans le cas où l'on ne saura pas si les extrémités lui appartiennent ou non.

2. $[\overrightarrow{p, q}]$ désignera un segment orienté d'origine p et d'extrémité q, où p et q sont des nombres arbitraires complexes.

3. Dans le cas d'un ensemble plan E nous emploierons aussi les symboles E^*, E', E^0, $\bar{E}$ pour désigner respectivement la frontière, l'ensemble complémentaire dans le plan entier, l'intérieur, la fermeture de l'ensemble E.

4. $K(a, r)$ désignera le cercle de centre a et de rayon r, et sera appelé entourage du point a de rayon r.

5. $S(a, r)$ désignera l'entourage $K(a, r)$ excepté son centre a et sera dit voisinage du point a de rayon r.

6. Pour un point a situé sur l'axe réel les parties de l'entourage $K(a, r)$ située dans le demi-plan ouvert inférieur et supérieur, le point a étant compris ou non, seront appelées respectivement demi-entourage ou demi-voisinage inférieur et supérieur.

6'. Pour un point a situé sur la circonférence unité $K^*(0, 1)$ les parties de l'entourage $K(a, r)$ situées à l'intérieur et à l'extérieur de cette circonférence, le point a étant compris ou non, seront appelées respectivement demi-entourage ou bien demi-voisinage intérieur ou extérieur.

7. $\tilde{A}$ désignera l'ensemble symétrique de l'ensemble A par rapport à la circonférence unité $K^*(0, 1)$; en particulier, $\tilde{K}(0, 1)$ désignera l'extérieur du cercle unité.

8. $\varrho(x, y)$, $\varrho(x, A)$ et $\varrho(A, B)$ désigneront respectivement la distance des points x, y, la distance du point x à l'ensemble A, la distance des ensembles A, B.

9. Le nombre $h(A, B)$ défini par la formule

$$h(A, B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\varrho(a, b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\varrho(b, a)\}$$

s'appellera distance des ensembles A et B au sens de Hausdorff.

10. Nous admettons les notions concernant les courbes plans et les notions adoptées dans l'Introduction, § 12 de [11]. Outre le paramètre t d'une courbe parcourant un segment $[a, b]$, c'est-à-dire un segment de l'axe réel, nous utiliserons également un paramètre t parcourant un segment $[ai, bi]$.

11. Nous appellerons secteur circulaire l'ensemble des points du plan complexe de la forme $\zeta = \zeta_0 + \varkappa e^{i\tau}$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa^*$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $0 < \tau_2 - \tau_1 \leqslant 2\pi$, y compris le point ζ_0. Le point ζ_0 sera appelé centre, le nombre $\varkappa^*$ – rayon, les nombres τ_1, τ_2 – limites angulaires et la différence $\tau_2 - \tau_1$ – écart du segment considéré.

12. Nous adoptons les notions de noyau, une suite de domaines plans, de convergence et de limite au sens du noyau d'une suite de domaines plans définies dans [2].

13. Les points de la circonférence unité serons aussi notés sous la forme $e^{i\alpha}$ sans indiquer que α est réel.

14. Nous appellerons domaine avec une coupure ou domaine de Löwner le domaine simplement connexe contenu dans $K(0, 1)$, de la forme $B = K(0, 1) \setminus L$, où L est un arc de Jordan partant d'un point quelconque de la

circonférence $K^*(0, 1)$ à l'intérieur de $K(0, 1)$ et ne passant pas par le point 0; en même temps l'arc L sera dit coupure de Löwner.

15. Nous dirons que l'ensemble $E \subset \overline{K(0, 1)}$ remplit presque le cercle $K(0, 1)$, si la différence $\overline{K(0, 1)} \setminus E$ ne contient pas de points intérieurs.

16. Etant donnée une courbe C: $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, nous appellerons la fonction $\zeta(\tau)$ et l'ensemble des valeurs de cette fonction Γ respectivement représentation paramétrique et image géométrique de C.

Suivant le sens du contexte le terme C signifiera la représentation paramétrique, ou l'image géométrique de la courbe, ou encore les deux en même temps. Pareillement, étant donnée une fonction $f(\zeta)$ quelconque, définie sur l'image géométrique de la courbe, $f(C)$ signifiera la fonction composée $f(\zeta(\tau))$, ou l'image de l'ensemble $f(\Gamma)$, ou encore les deux à la fois. En particulier, lorsque $f(\zeta)$ est une fonction complexe, $f(C)$ représente également une courbe plane.

17. Nous appellerons distance habituelle de deux courbes de représentations C_1: $\zeta = \zeta_1(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, et C_2: $\zeta = \zeta_2(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, le nombre $\sup\limits_{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta} |\zeta_2(\tau) - \zeta_1(\tau)|$.

17'. Nous dirons qu'une suite de courbes C_n: $\zeta = \zeta_n(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $n = 1, 2, \ldots$, est convergente au sens paramétrique vers une courbe C: $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, si la distance habituelle des C_n à C tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

18. Etant donnée une fonction $f(\zeta)$, définie dans un ensemble D situé dans le demi-plan supérieur ou dans le cercle unité, nous désignerons par $\bar{f}(\zeta)$ ou $\tilde{f}(\zeta)$ la fonction définie dans l'ensemble symétrique correspondant par la formule

$$\bar{f}(\zeta) = \overline{f(\bar{\zeta})} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}(\zeta) = \left(\overline{f(\bar{\zeta}^{-1})}\right)^{-1}.$$

Si $f(\zeta)$ est holomorphe, alors $\bar{f}(\zeta)$ ou $\tilde{f}(\zeta)$ est holomorphe et réciproquement.

19. Les fonctions à arguments et à valeurs complexes seront appelées fonctions complexes ou, s'il n'y a pas de malentendu à craindre, simplement fonctions.

20. Une fonction sera appelée symétrique, si pour tout couple de points symétriques par rapport à l'axe réel ou à la circonférence unité elle est en même temps définie ou non et si elle y prend des valeurs symétriques par rapport à l'axe réel ou à la circonférence unité. Ainsi il existe quatre genres de fonctions symétriques selon le genre de la symétrie de la variable indépendante et dépendante. A deux d'entre eux sont liées les notations indiqués plus haut.

21. Une fonction sera appelée holomorphe en un point ζ_0, si elle est définie au point ζ_0, si ζ_0 est un point d'accumulation des arguments ζ, pour

lesquels la fonction en question est définie, et si l'on peut la prolonger à une fonction holomorphe dans ζ_0.

22. Nous dirons que la fonction $f(\zeta)$ prend en ζ_0 la valeur ω_0 avec la multiplicité γ, si $f(\zeta)$ peut être représentée dans un certain entourage du point ζ_0, partout où $f(\zeta)$ existe, par la formule $\omega_0+\omega_1((\zeta-\zeta_0)^\gamma)+\omega_2((\zeta-\zeta_0)^\gamma)^2+\ldots$, où γ est un exposant réel positif, $\omega_1 \neq 0$, et $(\zeta-\zeta_0)^\gamma$ est une certaine branche de la puissance; nous supposons que $f(\zeta)$ est définie en ζ_0.

23. Une fonction rationnelle $\delta(\zeta)$ ayant des pôles de mêmes multiplicités seulement aux points 0 et ∞ et réelle sur la circonférence-unité, c'est-à-dire de la forme

$$\delta(\zeta) = \frac{f_k}{\zeta^k} + \ldots + \frac{f_1}{\zeta} + f_0 + \bar{f}_1 + \ldots + \bar{f}_k\zeta^k, \quad k \geqslant 1,\ f_k \neq 0,\ f_0 - \text{réel},$$

sera appelée fonction rationnelle spéciale de degré $2k$.

24. Soit $\mathscr{J}$ un arc régulier (v. [11], pp. 91–92) de Jordan, contenu dans le cercle $K(0, 1)$, à l'exception de son origine qui est située sur la circonférence $K^*(0, 1)$, et qui ne passe pas par zéro. Soit ensuite $\delta(\zeta)$ une fonction rationnelle spéciale. Nous appellerons $\mathscr{J}$ arc spécial correspondant à la fonction $\delta(\zeta)$, si cette derniére prend sur celui-ci uniquement des valeurs réelles.

Dans la suite nous bornerons, sans l'indiquer chaque fois, aux arcs spéciaux orthogonaux à la circonférence-unité.

Il est évident que si $\delta(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale, alors $i\zeta\delta'(\zeta)$ l'est également, de même degré $2k$ et sans terme constant.

25. Nous appellerons domaine spécial un domaine de la forme $K(0, 1)\setminus\mathscr{J}$, où $\mathscr{J}$ est un arc spécial.

26. Nous appellerons proches deux fonctions $f_1(\zeta)$ et $f_2(\zeta)$ holomorphes dans un domaine D, si elles diffèrent peu dans un ensemble fermé contenu dans D, suffisamment grand.

On voit facilement que deux fonctions rationnelles spéciales de même degré sont proches, si leurs coefficients respectifs sont proches et réciproquement.

27. Nous mettons les fonctions de la variable τ à valeurs situées sur la circonférence-unité également sous la forme $e^{i\alpha(\tau)}$ sans indiquer que $\alpha(\tau)$ est constamment réel. Par continuité de la fonction prise sous cette forme nous comprendrons la continuité de $\alpha(\tau)$.

28. Nous dirons que la fonction

$$a(z) = a_1 z + \ldots, \quad a_1 > 0,\ z \in K(0, 1),$$

est une fonction algébrique spéciale, si elle satisfait dans le cercle unité à l'équation

$$\Omega(a(z)) = \chi(z),$$

où $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ sont des fonctions rationnelles spéciales. En même temps, nous appellerons les fonctions $\Omega(w)$ et $\chi(z)$ resp. déterminante et accommodée. Nous appellerons parfois la fonction $a(z)$ fonction intérieure.

29. Une fonction $f(z)$ de la forme

$$f(z) = b_1 z + \ldots, \qquad b_1 > 0,$$

holomorphe, univalente et satisfaisant à la condition

$$|f(z)| < 1$$

dans le cercle unité, sera appelée fonction de Löwner.

Résultats auxiliaires. Nous indiquerons ici quelques simples faits qui nous seront utiles dans la suite.

30. Chaque fonction réelle $f(t)$, continue dans un intervalle $[0, T]$, peut être arbitrairement approchée par des polynômes pairs.

Pour le démontrer prenons dans l'intervalle $[0, T^2]$ la fonction

$$\hat{f}(\tau) = f(\sqrt{\tau})$$

et approchons-la suffisamment dans cet intervalle par un polynôme $\hat{P}(\tau)$. Alors, comme on le voit, le polynôme pair $P(t^2)$ approche arbitrairement $f(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$,

31. Chaque fonction $f(t)$, continue dans un intervalle fini $[0, T]$ et telle que $f(0) = 0$ peut y être approchée arbitrairement par des polynômes impairs.

Il suffit à cet effet de prendre la fonction continue

$$f^*(t) = \begin{cases} f(\delta)/\delta, & 0 \leqslant t \leqslant \delta, \\ f(t)/t, & \delta \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

où δ est un nombre arbitraire positif suffisamment petit et, en tenant compte de ce qui précède, de l'approcher suffisamment par un certain polynôme pair $P^*(t)$. Alors il est évident que le polynôme impair $tP^*(t)$ approchera $f(t)$ arbitrairement dans l'intervalle $[0, T]$.

32. Etant donnée une fonction $F(\zeta)$, holomorphe en un point ζ_0, qui ne se réduit pas à une constante et prend au point ζ_0 une valeur réelle r_0 avec une certaine multiplicité k, il existe un système de $2k$ arcs réguliers L_j^+, L_j^-, $j = 1, \ldots, k$, partant du point ζ_0 et, à l'exception de ce point, disjoints et tels que fonction $F(\zeta)$ est réelle sur ces arcs et seulement sur ces arcs dans chaque entourage suffisamment petit de ζ_0.

En effet, représentant la fonction donnée sous la forme $F(\zeta) = r_0 + (\zeta - \zeta_0)^k F_1(\zeta)$ et prenant dans un entourage suffisamment petit du point ζ_0 une branche arbitraire du radical $G(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)\sqrt[k]{F_1(\zeta)}$, nous vérifions facilement qu'on peut mettre les arcs demandés $L_j^\pm$ sous la forme para-

métrique $\zeta = \zeta_0 + G^{-1}(\varepsilon_j^{\pm} t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $j = 1, \ldots, k$, où T est un nombre positif suffisamment petit, et $\varepsilon_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, k$, sont les k-ièmes racines de ± 1 (v. [11], p. 165). Nous constatons aussi facilement qu'un tel système d'arcs est localement unique, ou bien, ce qui est le même, qu'il existe un entourage du point ζ_0 tel que tout arc le long duquel la fonction $F(\zeta)$ est réelle, partant de ζ_0 et contenu dans cet entourage, est compris dans un arc du système.

De ce qui précède nous déduisons facilement qu'étant donnés un arc régulier L et une fonction $F(\zeta)$ holomorphe sur L, qui ne se réduit pas à une constante sur L et qui est réelle sur L, il existe un arc régulier l, partant d'une extrémité de L et, à l'exception de ce point, disjoint avec lui, tel que F est également réelle sur l.

33. Soient $U(w)$ et $V(z)$ des fonctions holomorphes resp. aux points w_0 et z_0, qui y prennent leurs valeurs avec les multiplicités resp. r et s et telles que $U(w_0) = V(z_0)$; on suppose que z_0 est sur l'axe réel ou sur la circonférence-unité.

On vérifie que pour qu'il existe une fonction implicite $w = b(z)$ dans un demi-entourage du point z_0, telle que $U(b(z)) = V(z)$ et $b(z_0) = w_0$, il faut et il suffit que cette fonction ait la forme

$$b(z) = U_0^{-1}(V_0(z)),$$

où

$$U_0(w) = (w - w_0)\sqrt[r]{U_1(w)}, \qquad V_0(z) = \sqrt[r]{(z - z_0)^s}\sqrt[r]{V_1(z)},$$

où nous admettons

$$U(w) - U(w_0) = (w - w_0)^r U_1(w), \qquad V(z) - V(z_0) = (z - z_0)^s V_1(z)$$

et où il faut choisir les branches des radicaux convenables ou bien arbitraires.

Des faits analogues ont lieu pour l'entourage du point z_0, sous condition supplémentaire que s soit un multiple de r; $b(z)$ est alors évidemment holomorphe au point z_0 et y prend la valeur w_0 avec la multiplicité s/r.

Si en outre les fonctions données $U(w)$ et $V(z)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel et les points w_0 et z_0 sont sur cet axe, si $s = r$ et si pour les arguments appartenant au demi-plan donné les valeurs de $b(z)$ appartiennent, par exemple aussi à ce même demi-plan, alors $b(z)$ est également symétrique par rapport à l'axe réel et conserve le sens de cet axe au point z_0, c'est-à-dire $b'(z_0) > 0$.

Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence-unité.

34. Soit $b(z)$ une fonction holomorphe en un point z_0 sur l'axe réel, symétrique par rapport à cet axe et respectant son sens, c'est-à-dire telle que $b'(z_0) > 0$; alors pour les arguments z situés dans un entourage suffisamment petit du point z_0 les valeurs de la fonction $b(z)$ au-dessus de l'axe réel, sur l'axe réel et au dessous de l'axe réel sont situées d'une façon analogue. Par conséquent, si l'image par $b(z)$ d'un entourage λ_0 du point z_0 couvre d'une

façon univalente un entourage μ_0 du point w_0, alors les images des parties inférieure et supérieure de λ_0 couvrent respectivement les parties inférieure et supérieure de μ_0.

Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence-unité pour les demi-entourages intérieur et extérieur.

35. Soit une suite de fonctions $\{M_f(\zeta)\}$, holomorphes dans un entourage ω de rayon r d'une certain point ζ_0 et convergente dans celui-ci presque uniformément vers une certaine limite $M(\zeta)$, admettant une fonction inverse. Alors, appliquant le théorème de Hurwitz, nous obtenons facilement qu'il existe un entourage λ du point ζ_0 et entourage μ de l'image $\tau_0 = M(\zeta_0)$ tels que pour f suffisamment grands les fonctions $M_f(\zeta)$ admettent des fonctions inverses dans λ, les images $M_f(\lambda)$ couvrent μ et la suite des fonctions inverses $\{M_f^{-1}(\tau)\}$ tend dans μ presque uniformément vers $M^{-1}(\tau)$. La situation est analogue dans le cas où l'on remplace l'entourage par le voisinage et l'on suppose que les fonctions $M_f(\zeta)$ et $M(\zeta)$ ont en ζ_0 des pôles simples.

Nous obtenons une généralisation facile de ce qui précède en remplaçant pour les fonctions $M_f(\zeta)$ l'entourage constant ω par l'entourage variable ω_f de même rayon r et de centre ζ_f tendant vers ζ_0. Il suffit à cet effet de considérer la suite $\{M_f(\zeta-\zeta_0+\zeta_f)\}$ et d'appliquer ce qui précède.

On généralise encore facilement ce dernier résultat en supposant de plus que les points ζ_f et ζ_0 sont sur l'axe réel, que $M_f(\zeta)$ sont symétriques par rapport à cet axe et, par suite, que ω_0 est également réel et que la transformation $M(\zeta)$ respecte le sens de l'axe réel. Alors, nous pouvons remplacer les entourages λ et μ par les demi-voisinages inférieur et supérieur. Il suffit pour cela d'appliquer encore le théorème de Rouché. Il en est de même pour la symétrie par rapport à la circonférence.

On peut enfin remplacer dans ce qui précède les entourages par les voisinages et supposer que les fonctions $M_f(\zeta)$ et $M(\zeta)$ ont aux points ζ_f et ζ_0 des pôles simples. Il suffit pour cela de considérer les inverses de ces fonctions et de leur appliquer les considérations précédentes.

36. Soit une fonction de la forme

$$f(z) = w_0+w_1(z-z_0)+w_2(z-z_0)^2+\ldots$$

en un point z_0, qui y prend la valeur w_0 avec la multiplicité (1), soit en outre $\alpha = \arg w_1$. Soit ensuite $\mathscr{R}^*$ un secteur circulaire de centre z_0, composé des points de la forme $z = z_0+re^{i\varphi}$, où $0 \leqslant r < r^*$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, d'écart $\varphi_2-\varphi_1 \leqslant 2\pi/(1)$. Alors il existe des nombres $\varepsilon_0 > 0$ et $\sigma_0 > 0$, suffisamment petits, tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $0 < \sigma < \sigma_0$ existe un $\eta > 0$ tel que tout point du secteur circulaire S, composé des points $w = w_0+\varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \eta$, $(1)\varphi_1+\alpha+\sigma < \psi < (1)\varphi_2+\alpha-\sigma$, d'écart $\varphi_2-\varphi_1-2\sigma$, est admis d'une façon univalente exactement en un seul point du secteur partiel $\mathscr{R}$ contenu dans $\mathscr{R}^*$, composé des points $z = z_0+re^{i\varphi}$, où $0 < r < \varepsilon$, $\varphi_1 < \varphi$

$< \varphi_2$. En même temps il existe un $\sigma_{10} > 0$ tel que pour tout $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma_{10}$ et tout $\eta_1 > 0$ existe un $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ tel que l'image du secteur $\mathscr{R}_1$, contenu dans $\mathscr{R}^*$, composé des points $z = z_0 + re^{i\varphi}$, où $0 \leqslant r < \varepsilon_1$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, est contenue dans le secteur circulaire S_1, composé des points $w = w_0 + \varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \eta_1$, $(1)\varphi_1 + \alpha - \sigma_1 < \psi < (1)\varphi_2 + \alpha + \sigma_1$, d'écart $\varphi_2 - \varphi_1 + 2\sigma_1$. A cet endroit il faut introduire la restriction évidente $(1)(\varphi_2 - \varphi_1) < 2\pi$.

En effet, prenons comme ε_0 un nombre positif arbitraire, fixé dans la suite, assez petit pour que $f(z)$ admette une inverse dans l'entourage $v = \{|z - z_0| < \varepsilon_0\}$ et prenons comme σ_0 un nombre positif arbitraire, fixé dans la suite, plus petit que $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$. Posons $\tau = f(v)$ et désignons par $z = g(w)$, $w \in \tau$, la fonction inverse de $w = f(z)$, $z \in v$; il est évident que $z_0 = g(w_0)$. Etant donné que le quotient $\dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}$ est différent de zéro dans un entourage du point w_0, alors il y existe, comme on le voit facilement, une branche déterminée de la fonction

$$\log \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = L(w),$$

telle que

$$\operatorname{Im} L(w_0) = \arg g'(w_0) = \arg \frac{1}{f'(z_0)} = -\alpha.$$

Prenons maintenant $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $\sigma \leqslant \sigma_0$ arbitraires. De la continuité de la fonction $L(w)$ nous tirons qu'il existe un $\hat{\eta} > 0$ tel que pour $|w - w_0| < \hat{\eta}$ on a $|L(w) - L(w_0)| < \operatorname{Min}(\sigma, |L(w_0)|)$ et $w \in \tau$. Soit

$$\eta = \operatorname{Min}\left(\hat{\eta}, \frac{\varepsilon}{\exp 2|L(w_0)|}\right)$$

le nombre η demandé. Alors tout point du secteur correspondant $S \subset \tau$, mentionné plus haut, est, en vertu du théorème de Rouché, l'image exacte d'un seul point $z = g(w)$ de l'entourage v, en outre on a

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= |g(w) - g(w_0)| = |(w - w_0)\exp L(w)| \\ &\leqslant |w - w_0| \exp(|L(w_0)| + |L(w) - L(w_0)|) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\exp 2|L(w_0)|} \exp 2|L(w_0)| = \varepsilon \end{aligned}$$

et en même temps

$$\left|\arg \frac{z - z_0}{w - w_0} - (-\alpha)\right| = |\operatorname{Im} L(w) - \operatorname{Im} L(w_0)| < \sigma,$$

ou $|\arg(z - z_0) - \psi + \alpha| < \sigma$, donc

$$\varphi_1 < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \varphi_2$$

et de là définitivement $z \in \mathscr{R}$. Cela nous donne la première partie de la propriété annoncée. Pour obtenir la seconde il suffit d'étudier dans v une branche du

$$\log \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = L_1(z),$$

telle que $\operatorname{Im} L_1(z_0) = \alpha$, ensuite de choisir d'abord $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$|L_1(z)-L_1(z_0)| < \operatorname{Min}(\sigma_1, |L_1(z_0)|) \quad \text{pour} \quad |z-z_0| < \hat{\varepsilon}$$

et enfin de prendre

$$\varepsilon_1 = \operatorname{Min}\left(\hat{\varepsilon}_1, \frac{\eta_1}{2\exp|L(z_0)|}\right).$$

37. Nous obtenons une généralisation facile de ce qui précède en considérant dans $\mathscr{R}$ les fonctions de la forme

$$f(z) = w_0 + w_p((z-z_0)^{1/q})^p + w_{p+1}((z-z_0)^{1/q})^{p+1} + \ldots$$

où p et q sont des nombres naturels quelconques, $w_p \neq 0$. Alors nous obtenons un énoncé qui correspond directement au précédent en y remplaçant le symbole (1) par (p/q) et α par

$$\alpha + \left(p \arg(\hat{z}-z_0)^{1/q} - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} \cdot \frac{p}{q}\right),$$

où

$$\hat{z} = z_0 + \frac{r}{2} \exp\left(i \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right).$$

Pour cela il suffit de présenter la fonction $f(z)-w_0$ sous forme de la composition

$$(g((z-z_0)^{1/q}))^p, \quad \text{où} \quad g(\zeta) = \zeta(w_p + w_{p+1}\zeta + \ldots)^{1/p},$$

avec un choix arbitraire de la branche de la puissance $1/p$, et ensuite de profiter de ce qui précède pour $g(\zeta)$ et des propriétés des fonctions-puissances. A l'endroit correspondant il faut introduire la restriction évidente $(p/q)(\varphi_2-\varphi_1) \leqslant 2\pi$.

Remarquons de plus que dans le cas $(p/q)(\varphi_2-\varphi_1) > 2\pi$ on peut de même prouver que tout point de l'entourage de rayon η du point w_0 est admis d'une façon univalente au moins en un point du secteur correspondant $\mathscr{R}$.

38. Soit S^*: $w = w_0 + \varrho e^{i\psi}$, où $0 \leqslant \varrho < \varrho^*$, $\psi_1 < \psi < \psi_2$, $\psi_2 - \psi_1 \leqslant 2\pi$, un secteur circulaire. Soit ensuite H: $w = w(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\gamma$ ou, s'il y a lieu, $t_0-\gamma \leqslant t \leqslant t_0+\gamma$, $w(t_0) = w_0$, un arc régulier, partant de l'origine w_0, qui peut passer par w_0.

Alors ont lieu les propriétés suivantes relatives à la configuration du secteur S^* et de l'arc H.

Si l'écart du secteur S^* est plus grand que π et l'arc H passe par w_0, H doit avoir des points communs avec l'intérieur de S^*.

Si le secteur S^* est contenu dans le cercle $K(0, 1)$, excepté le centre w_0, qui est sur la circonférence $K^*(0, 1)$, et si l'écart du secteur est plus grand que $\pi/2$ et l'arc H part de l'origine w_0 orthogonalement à l'intérieur du cercle $K(0, 1)$, alors H doit avoir des points communs avec l'intérieur de S^*.

En effet, supposant que le nombre $d = \psi_2 - \psi_1 - \pi$ est positif, nous constatons facilement qu'au moins un des deux secteurs circulaires de centre w_0, de rayon ϱ^* et d'écart d, symétriques par rapport au point w_0, doit être contenu dans S^*. D'autre part, prenant deux tels secteurs, symétriques par rapport à la tangente à l'arc H au point w_0, par lequel cet arc passe, nous voyons immédiatement que chacun de ces secteurs contient des points de l'arc H différents de w_0.

La combinaison de ces faits donne la première des propriétés annoncées. Supposant ensuite que le nombre $d = \psi_2 - \psi_1 - \pi/2$ est positif, nous avons d'abord

$$\arg(-w_0) - \pi/2 < \psi_1 < \psi_2 < \arg(-w_0) + \pi/2,$$

lorsque l'intérieur de S^* est contenu dans $K(0, 1)$, d'où il s'ensuit que le secteur circulaire de centre w_0, de rayon ϱ^* et d'écart $\mathrm{Min}(\pi/4, d)$, symétrique par rapport à la direction $-w_0$, doit être contenu dans S^*. D'autre part, nous voyons immédiatement que ce secteur contient des points différents de w_0 de l'arc H, partant de w_0 orthogonalement à l'intérieur de $K(0, 1)$. Rapprochant ces faits on obtient la seconde des propriétés annoncées.

39. Soient L_0 une coupure de Löwner et B un domaine simplement connexe, contenu dans $K(0, 1)$, dont la frontière B^* est contenue dans $K^*(0, 1) \cup L_0$.

Alors B est un domaine de Löwner de la forme $K(0, 1) - L$, où l'arc L est une partie de l'arc L_0 de même origine.

En effet, prenant le point ζ de l'arc L_0 le plus éloigné de l'origine ζ_0 de ces arcs et appartenant à B^*, nous déduisons du fait que B^* et L_0 sont connexes que l'arc partiel L contenu dans L_0, joignant ζ_0 et ζ, est contenu dans B^* et, par conséquent, $B^* \subset K^*(0, 1) \cup L$. D'autre part, il est évident que $K^*(0, 1) \cup L \subset B^*$, car si, au contraire, un point ζ^* de la circonférence $K^*(0, 1)$ n'appartenait pas à B^*, donc à l'arc L_0, alors, prenant sur ce dernier le point ζ_0^* le plus proche de ζ^*, nous verrions qu'à l'intérieur du segment $[\overrightarrow{\zeta^*, \zeta_0^*}]$, donc à l'intérieur de $K^*(0, 1)$ et en dehors de L_0 il existerait des points de la frontière B^*, contrairement à l'hypothèse.

Comparant les inclusions précédentes on obtient l'énoncé demandé.

40. Soit $f(\zeta)$ une fonction holomorphe qui ne se réduit pas à une

constante dans un domaine D. Alors l'ensemble des points ζ, pour lesquels $\operatorname{Im} f(\zeta) = 0$, ne contient pas de points intérieurs.

En effet, cela résulte immédiatement du principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

I. Fonctions rationnelles spéciales

1. Interpolation locale. Soit à présent une fonction rationnelle spéciale de la forme

$$\chi(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + E_0 + \ldots + \bar{E}_L z^L \tag{1}$$

$$= \frac{\alpha_L + i\beta_L}{z^L} + \ldots + \alpha_0 + \ldots + (\alpha_L - i\beta_L) z^L,$$

$$E_L \neq 0,\ E_0 \text{ réel},\ L \geqslant 1.$$

Supposons que la dérivée $\chi'(z)$ de cette fonction ait toutes ses racines simples. Désignons celles d'entre elles qui sont dans $K(0, 1)$ et sur $K^*(0, 1)$, en distinguant parmi ces dernières une seule, respectivement par

$$z_k = \varrho_k e^{i\sigma_k}, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{2}$$

$$e^{i\varphi_l}, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{3}$$

$$e^{i\vartheta}. \tag{4}$$

Supposons ensuite que la fonction $\chi(z)$ prenne aux points (2) et (3) les valeurs

$$\zeta_k = p_k + iq_k, \tag{5}$$

$$v_l. \tag{6}$$

Supposons enfin que

$$\chi''(e^{i\vartheta}) e^{2i\vartheta} > 0. \tag{7}$$

Soit T un nombre positif arbitraire. Alors, on peut déduire le résultat suivant.

LEMME 1 (sur l'interpolation). *Pour tout paramètre t réel suffisamment proche de T il existe en même temps une fonction rationnelle spéciale déterminée d'une façon univoque*

$$\tilde{\chi}(z, t) = \frac{\tilde{E}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{E}_0(t) + \ldots + \overline{\tilde{E}_L(t)}\, z^L \tag{8}$$

$$= \frac{\tilde{\alpha}_L(t) + i\tilde{\beta}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{\alpha}_0(t) + \ldots + (\tilde{\alpha}_L(t) - i\tilde{\beta}_L(t)) z^L,$$

$$\tilde{E}_L(t) \neq 0,\ \tilde{E}_0(t) - \textit{réel},$$

BU W

arbitrairement proche de (1), *et un système de points, aussi univoquement déterminés*

(9) $$\tilde{z}_k(t) = \tilde{\varrho}_k(t)e^{i\tilde{\vartheta}_k(t)}, \quad k = 1, \ldots, Q,$$

(10) $$e^{i\tilde{\varphi}_l(t)} \quad l = 1, \ldots, R,$$

(11) $$e^{i\tilde{\vartheta}(t)},$$

arbitrairement proches respectivement de (2), (3) *et* (4), *tels que les conditions suivantes sont remplies*:

($\tilde{\text{i}}$) $$\tilde{\chi}(z, T) = \chi(z),$$
$$\tilde{z}_k(T) = z_k,$$
$$e^{i\tilde{\varphi}_l(T)} = e^{i\varphi_l},$$
$$e^{i\tilde{\vartheta}(T)} = e^{i\vartheta},$$

($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}$) $$\tilde{E}_L(t) = e^{L(t-T)}E_L,$$

($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}$) *les points* (9), (10) *et* (11) *sont racines de la dérivée de la fonction* (8) *et la fonction* (8) *elle-même prend aux points* (9) *et* (10) *respectivement les valeurs* (5) *et* (6), *c'est-à-dire*

(12) $$\tilde{\chi}(\tilde{z}_k(t), t) = \zeta_k,$$

(13) $$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = v_l,$$

(14) $$\tilde{\chi}'_z(\tilde{z}_k(t), t) = 0,$$

(15) $$\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = 0,$$

(16) $$\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \neq 0;$$

($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{v}}$) *les coefficients de la fonction* (8) *et les points* (9), (10) *et* (11) *sont les fonctions holomorphes du paramètre* t,

($\tilde{\text{v}}$) *la fonction*

(17) $$\varkappa(t) = \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t)$$

est croissante et, par conséquent, en vertu de la première et de la dernière des conditions ($\tilde{\text{i}}$), *elle vérifie l'inégalité*

(18) $$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \geqslant \chi(e^{i\vartheta}) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant T;$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $t = T$; *en outre on a constamment*

(17') $$\varkappa'(t) = 2\tilde{\chi}''_{zz}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t)e^{2i\tilde{\vartheta}(t)}.$$

Démonstration. Prenons

$$E_0 = \alpha_0, \quad E_s = \alpha_s + i\beta_s, \quad s = 1, \ldots, L.$$

Nous remarquons immédiatement que l'existence de la fonction (8) et des systèmes (10) et (11), remplissant les conditions ($\tilde{\text{i}}$)–($\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}\tilde{\text{i}}$), équivaut à

l'existence d'une solution unique du système d'équations réelles

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{L} (\dot\alpha_s \cos\dot\sigma_k s - \dot\beta_s \sin\dot\sigma_k s)\left(\frac{1}{\dot\varrho_k^s} + \dot\varrho_k^s\right) = p_k,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\dot\alpha_s \sin\dot\sigma_k s - \dot\beta_s \cos\dot\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\dot\varrho_k^s} + \dot\varrho_k^s\right) = q_k,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\dot\alpha_s \cos\dot\varphi_l s + \dot\beta_s \sin\dot\varphi_l s)\, 2 = v_l,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot\alpha_s \cos\dot\sigma_k s + \dot\beta_s \sin\dot\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\dot\varrho_k^s} + \dot\varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot\alpha_s \sin\dot\sigma_k s - \dot\beta_s \cos\dot\sigma_k s)\left(\frac{1}{\dot\varrho_k^s} + \dot\varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\dot\alpha_s \sin\dot\varphi_l s - \dot\beta_s \cos\dot\varphi_l s)(1+1) = 0,\\
&\dot\alpha_L = \alpha_L e^{L(t-T)},\\
&\dot\beta_L = \beta_L e^{L(t-T)}
\end{aligned}
$$

par rapport aux inconnues réelles

$$
(20)\qquad \dot\alpha_s,\ \dot\beta_s,\ s = 0, 1, \ldots, L, \qquad \dot\varrho_k,\ \dot\sigma_k,\ \dot\varphi_l,
$$

suffisamment proches des valeurs initiales respectives

$$
(21)\qquad \alpha_s,\ \beta_s,\ \varrho_k,\ \sigma_k,\ \varphi_l,
$$

avec t arbitraire, donné d'avance, suffisamment proche de T, et les inconnues (20) doivent être des fonctions holomorphes du paramètre t. Ces équations sont formées en remplaçant dans (12), (13), (14), (15) et (11) les inconnues (9) et (10) et les coefficients de la fonction (8) respectivement par

$$
\dot\varrho_k e^{i\dot\sigma_k},\ e^{i\dot\varphi_l},\ \dot\alpha_s + i\dot\beta_s,
$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires. Pour démontrer l'existence de la solution annoncée du système (19), il suffit de démontrer que le déterminant fonctionnel des premiers membres de (19) par rapport aux inconnues (20), calculé pour les valeurs initiales (21), est différent de zéro. Admettons que dans les lignes successives de ce déterminant figurent les dérivées partielles des premiers membres successifs de (19) par rapport aux inconnues (20). Pour la démonstration supposons, au contraire, que le déterminant ne soit pas différent de zéro. Il existerait alors un système de nombres ne

s'annulant pas simultanément

$$\Delta\alpha_0,\ \Delta\alpha_s,\ \Delta\beta_s,\ s = 1, \ldots, L, \tag{22}$$
$$\Delta\varrho_k,\ \Delta\sigma_k,\ k = 1, \ldots, Q, \quad \Delta\varphi_l,\ l = 1, \ldots, R,$$

tel que la somme des produits des éléments de chaque ligne du déterminant par ces nombres serait égale à zéro. Calculant à partir de (19) les éléments du déterminant et effectuant les calculs indiqués ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \cos\sigma_k s + \Delta\beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \sin\sigma_k s - \Delta\beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) = 0,\\
&\sum_{s=0}^{L} (\Delta\alpha_s \cos\varphi_l s + \Delta\beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2 = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \cos\sigma_k s + \Delta\beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(-\alpha_s \sin\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \sin\sigma_k s - \Delta\beta_s \cos\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right) +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \sin\sigma_k s - \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, Q,\\
&\sum_{s=1}^{L} s(\Delta\alpha_s \sin\varphi_l s - \Delta\beta_s \cos\varphi_l s)\cdot 2 +\\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\varphi_l s + \beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2\Delta\varphi_l = 0, \quad l = 1, \ldots, R,\\
&\Delta\alpha_L = 0,\\
&\Delta\beta_L = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

Considérons maintenant la fonction rationnelle spéciale de la forme

$$\sum_{s=0}^{L-1} [(\Delta\alpha_s + i\Delta\beta_s) z^{-s} + (\Delta\alpha_s - i\Delta\beta_s) z^s]. \tag{25}$$

Nous déduisons de (23), en tenant compte des deux dernières relations (24), que les nombres (2) et (3) sont racines de la fonction (25) et, étant donné que celle-ci est une fonction rationnelle spéciale de degré $2L-2$ et qu'elle possède $2L-1$ racines, elle est identiquement nulle. Donc

$$\Delta\alpha_s = 0, \quad \Delta\beta_s = 0, \quad s = 0, \ldots, L. \tag{26}$$

Vu les égalités précédentes, les égalités (24) prendront la forme

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=2}^{L} s^2(-\alpha_s \sin\sigma_k s + \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k + \\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \\
&\sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\sigma_k s + \beta_s \sin\sigma_k s)\left(\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\Delta\sigma_k + \\
&+ \sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \sin\sigma_k s - \beta_s \cos\sigma_k s)\left(-\frac{1}{\varrho_k^s} + \varrho_k^s\right)\frac{\Delta\varrho_k}{\varrho_k} = 0, \\
&\sum_{s=2}^{L} s^2(\alpha_s \cos\varphi_l s + \beta_s \sin\varphi_l s)\cdot 2\Delta\varphi_l = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Posons

$$\chi_2(z) = z\chi'(z) + z^2\chi''(z) = \sum_{s=2}^{L} s^2[(\alpha_s + i\beta_s) z^{-s} + (\alpha_s - i\beta_s) z^s]. \tag{28}$$

Multiplions maintenant les deux premières égalités (27) respectivement par ϱ_k et $\varrho_k i$ et ensuite additionnons-les membre à membre; nous obtiendrons alors, après un calcul facile, vu (28), les égalités

$$\chi_2(\varrho_k e^{i\sigma_k})(\Delta\varrho_k + \varrho_k i\Delta\sigma_k) = 0. \tag{29}$$

En même temps, d'après (28) et la définition des nombres (2), on a

$$\chi_2(\varrho_k e^{i\sigma_k}) = (\varrho_k e^{i\sigma_k})^2 \chi''(\varrho_k e^{i\sigma_k}), \tag{30}$$

et, comme les nombres (2) sont des racines simples de la dérivée $\chi'(z)$, les expressions (30) doivent être différentes de zéro. Ainsi (29) donne $\Delta\varrho_k = 0$, $\Delta\sigma_k = 0$. Pareillement nous déduisons que l'on a aussi $\Delta\varphi_l = 0$. Ainsi tous les nombres (22) devraient être nuls, contrairement à l'hypothèse. Donc le déterminant considéré plus haut doit être différent de zéro et, par conséquent, il existe une solution des équations (19) par rapport aux inconnues (20), déterminée d'une façon univoque, c'est-à-dire que la fonction et les

points demandés existent; comme point (11) nous prenons la racine manquante de la dérivée. En vertu des théorèmes correspondants, il résulte de (19) que les coefficients de la fonction (8) et les nombres (9) et (10) remplissent la condition ($\tilde{\text{iv}}$). De cette dernière condition et du fait que (11) est une racine simple de la dérivée $\tilde{\chi}'_z(z, t)$ résulte que cette racine est également une fonction holomorphe. Dérivant les relations (12), (13) et (17) membre à membre et tenant compte de (14), (15) et (16), nous obtenons les égalités

$$\tilde{\chi}'_t(\tilde{z}_k(t), t) = 0, \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{31}$$

$$\tilde{\chi}'_t(e^{i\tilde{\Phi}_l(t)}, t) = 0, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{32}$$

$$\tilde{\chi}'_t(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) = \varkappa'(t), \tag{33}$$

et évidemment

$$\tilde{\chi}'_t(z, t) = \sum_{s=0}^{L} \left(\frac{\tilde{E}'_s(t)}{z^s} + \overline{\tilde{E}'_s(t)}\, z^s \right), \tag{34}$$

et

$$\tilde{E}'_L(t) = L\tilde{E}_L(t).$$

En même temps remarquons que

$$\tilde{\chi}'_z(z, t)\, zi = \sum_{s=1}^{L} \left(\frac{-s\tilde{E}_s(t)\, i}{z^s} + \overline{s\tilde{E}_s(t)}\, iz^s \right). \tag{35}$$

De (31), (32) et (33) résulte que la fonction rationnelle spéciale (34) a les mêmes racines que la fonction analogue (35), à l'exception d'une seule (11). De cette façon

$$\tilde{\chi}'_t(z, t) = \tilde{\chi}'_z(z, t)\, zi \frac{z - e^{i\delta(t)}}{z - e^{i\tilde{\vartheta}(t)}}\, c(t), \tag{36}$$

où $e^{i\delta(t)}$ désigne une racine (34) non comprise dans (31) et (32) et $c(t)$ est une certaine constante. Mais, comparant les coefficients extrêmes de la fonction (34) et de la fonction (25), nous trouvons facilement que

$$c(t) = -i, \quad e^{i\delta(t)} = -e^{i\tilde{\vartheta}(t)}.$$

Prenant la valeur (34) au point $e^{i\tilde{\vartheta}(t)}$, nous obtenons de (33), vu (36), la formule (17'). De là et de (7) résulte immédiatement ($\tilde{\text{v}}$) pour t suffisamment proche de T.

Remarque. Supposons donné un point t_f suffisamment proche de T, tel que dans un entourage de celui-ci soient définis la famille de fonctions rationnelles spéciales

$$\chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + E_0(t) + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L \tag{37}$$

et les systèmes de fonctions

$$z_k(t), \quad k = 1, \ldots, Q, \tag{38}$$

$$e^{i\varphi_l(t)}, \quad l = 1, \ldots, R, \tag{39}$$

$$e^{i\vartheta(t)}, \tag{40}$$

analogues à (8), (9), (10) et (11) et remplissant les conditions (ii)–(iv) (que nous n'écrivons pas) analogues à ($\tilde{\text{ii}}$)–($\tilde{\text{iv}}$) et la condition (i'), énonçant que pour $t = t_f$ la fonction rationnelle spéciale (37) et les points (38), (39) et (40) sont suffisamment proches de la fonction (1) et des points (2), (3) et (4) respectifs; alors dans l'entourage mentionné du point t_f les fonctions (37), (38), (39) et (40) se confondent avec (8), (9), (10) et (11).

En effet, de la dernière condition (i') et de la continuité des fonctions (37)–(40) résulte que dans un petit entourage du point t_f elles sont aussi suffisamment proches de la fonction (1) et des points (2), (3) et (4). Par conséquent, de la forme analogue des équations ($\tilde{\text{ii}}$)–($\tilde{\text{iv}}$) et (ii)–(iv) et de l'unicité de leurs solutions par rapport aux inconnues (20) à proximité des valeurs initiales (21) pour t proches de T, résulte l'identité annoncée des fonctions mentionnées.

2. Approximation des fonctions rationnelles spéciales. Donnons ici un résultat sur l'approximation des fonctions rationnelles spéciales, mentionnées auparavant, par des fonctions analogues, d'une structure un peut plus simple.

LEMME 1 (sur l'écartement des racines de la dérivée). *Pour une fonction rationnelle spéciale arbitraire $\delta(\zeta)$ il existe une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$ qui lui est arbitrairement proche et dont la dérivée possède uniquement des racines simples.*

Démonstration. Soit ζ_0, $|\zeta_0| < 1$, une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$ au moins double; alors $1/\bar{\zeta}_0$ est également une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$ de même multiplicité que ζ_0 et $\delta'(\zeta)$ peut être représentée sous forme du produit

$$\delta'(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}(\zeta - \zeta_0)\left(\frac{1}{\zeta} - \bar{\zeta}_0\right)\delta_1(\zeta), \tag{1}$$

où $\delta_1(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale pour laquelle ζ_0 et $1/\bar{\zeta}_0$ sont des racines dont la multiplicité est plus petite de 1 que pour la dérivée $\delta'(\zeta)$. Démontrons qu'il existe un point $\dot{\zeta}_0$ suffisamment proche de ζ_0 et tel que la fonction

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}(\zeta - \dot{\zeta}_0)\left(\frac{1}{\zeta} - \bar{\dot{\zeta}}_0\right)\delta_1(\zeta) \tag{2}$$

est la dérivée d'une certaine fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, arbitrairement

proche de la fonction $\delta(\zeta)$, et que, la fonction $\eta(\zeta)$ possède les mêmes racines et de même multiplicité que la dérivée $\delta'(\zeta)$ à l'exception des racines ζ_0 et $1/\bar{\zeta}_0$, dont la multiplicité comme racines de la fonction $\eta(\zeta)$ est plus petite de 1, et, à l'exception des racines nouvelles $\dot{\zeta}_0$ et $1/\bar{\dot{\zeta}}_0$, qui sont déjà simples. En effet, à cause de (1) et (2) il est facile de voir que $\eta(\zeta)$ sera la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale, si dans son développement de Laurent le coefficient de ζ^{-1} sera nul. Posant

$$\delta_1(\zeta) = \frac{C_{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \ldots + \frac{C_1}{\zeta} + C_0 + \bar{C}_1\zeta + \ldots + \bar{C}_{n-1}\zeta^{n-1}, \tag{3}$$

où C_0 est réel, nous remarquons qu'il faut cela que $\dot{\zeta}_0$ vérifie l'équation

$$(1+\dot{\zeta}_0\bar{\dot{\zeta}}_0)C_0 - \dot{\zeta}_0 C_1 - \bar{\dot{\zeta}}_0\bar{C}_1 = 0. \tag{4}$$

Comme on aura à prouver dans la suite que $\eta(\zeta)$ est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, il faudra démontrer non seulement que l'équation (4), comme équation en l'inconnue $\dot{\zeta}_0$, possède une solution, mais aussi qu'elle a une solution arbitrairement proche du nombre ζ_0 et différente de ζ_0. Posons $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$, $C_1 = re^{i\alpha}$; l'équation (4) prendra alors la forme

$$(1+\dot{\varrho}_0^2)C_0 - 2r\dot{\varrho}_0\cos(\alpha-\dot{\theta}_0) = 0. \tag{5}$$

De (1) et (3) il résulte de plus que

$$(1+\varrho_0^2)C_0 - 2r\varrho_0\cos(\alpha-\theta_0) = 0. \tag{6}$$

Désignons le premier membre de (5) par $f(\dot{\varrho}_0, \dot{\theta}_0)$; alors, en vertu de (5) et (6),

$$f(\varrho_0, \theta_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'_{\dot{\varrho}_0}(\varrho_0, \theta_0) = \frac{C_0}{\varrho_0}(\varrho_0^2-1).$$

Si donc $C_0 \neq 0$, alors $f'_{\dot{\varrho}_0}(\varrho_0, \theta_0) \neq 0$ et du théorème des fonctions implicites il résulte que l'équation (5) possède une solution $\dot{\varrho}_0$, $\dot{\theta}_0$ arbitrairement proche du couple ϱ_0, θ_0, donc l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$ arbitrairement proche du nombre $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$. Si, au contraire, $C_0 = 0$, alors $f(\varrho_0, \theta_0) = -2r\varrho_0\cos(\alpha-\theta_0) = 0$, d'où $r = 0$ ou $\cos(\alpha-\theta_0) = 0$. Dans le premier cas l'équation (5) est satisfaite pour $\dot{\varrho}_0$, $\dot{\theta}_0$ arbitraires, donc l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$ arbitrairement proche de $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$, tandis que dans le second cas on a $f'_{\dot{\theta}_0}(\varrho_0, \theta_0) = -2r\varrho_0\sin(\alpha-\theta_0) \neq 0$ et, il résulte encore du théorème des fonctions implicites que l'équation (5) a une solution $\dot{\varrho}_0$, $\dot{\theta}_0$, arbitrairement proche du couple ϱ_0, θ_0, par conséquent l'équation (4) a une solution $\dot{\zeta}_0 = \dot{\varrho}_0 e^{i\dot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du nombre $\zeta_0 = \varrho_0 e^{i\theta_0}$.

Soit ensuite $e^{i\theta_0}$ une racine de la dérivée $\delta'(\zeta)$, au moins double, située sur la circonférence $K^*(0, 1)$; alors on peut représenter $\delta'(\zeta)$ sous forme du produit

$$\delta'(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}\left(e^{-i\frac{\theta_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\theta_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\delta_1(\zeta), \tag{7}$$

où $\delta_1(\zeta)$ est une fonction rationnelle spéciale de la forme (3), pour laquelle $e^{i\theta_0}$ ou bien n'est pas une racine, ou bien est une racine dont la multiplicité est plus petite de 2 que pour la dérivée $\delta'(\zeta)$. Démontrons que sur la circonférence $K^*(0, 1)$ il existe deux points distincts $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du point $e^{i\theta_0}$ et tels que la fonction

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{i\zeta}\left(e^{-i\frac{\dot{\theta}_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\dot{\theta}_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\left(e^{-i\frac{\ddot{\theta}_0}{2}}\sqrt{\zeta} - e^{i\frac{\ddot{\theta}_0}{2}}\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)\delta_1(\zeta) \tag{8}$$

est la dérivée d'une certaine fonction rationnelle spéciale $\delta(\zeta)$, arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, et que la fonction $\eta(\zeta)$ a les mêmes racines et de même multiplicité que la dérivée $\delta'(\zeta)$, à l'exception d'une racine de celle-ci, qui n'est pas une racine de la fonction $\eta(\zeta)$, ou bien en est une, mais dont la multiplicité est plus petite de 1 ou 2 que sa multiplicité en tant que racine de la fonction $\delta'(\zeta)$, et à l'exception d'une racine nouvelle ou de racines nouvelles, déjà simples, $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$. En effet, de (7) et (8) on déduit facilement que $\eta(\zeta)$ est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale, si dans son développement de Laurent le coefficient de ζ^{-1} s'annule, et pour cela il faut que les nombres $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$ vérifient l'équation

$$C_0\left(e^{i\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2}} + e^{-i\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2}}\right) - C_1 e^{-i\frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}} - \bar{C}_1 e^{i\frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}} = 0. \tag{9}$$

En outre, de même que dans le cas précédent, il faut démontrer qu'il existe des nombres $e^{i\dot{\theta}_0}$ et $e^{i\ddot{\theta}_0}$ qui non seulement remplissent l'équation (9), mais sont arbitrairement proches du nombre $e^{i\theta_0}$ et sont différents entre eux. Posons $C_1 = re^{i\alpha}$; l'équation (9) prendra la forme

$$r\cos\left(\alpha - \frac{\dot{\theta}_0+\ddot{\theta}_0}{2}\right) - C_0\cos\frac{\dot{\theta}_0-\ddot{\theta}_0}{2} = 0. \tag{10}$$

De (7) et (8) il résulte de plus que

$$r\cos(\alpha-\theta_0) - C_0 = 0. \tag{11}$$

Si à présent nous désignons le premier membre (10) par $f(\dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0)$, alors, en vertu de (10) et (11),

$$f(\theta_0, \theta_0) = 0, \qquad f'_{\dot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) = f'_{\ddot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) = \tfrac{1}{2}r\sin(\alpha-\theta_0).$$

Si donc $r \neq 0$ et $\sin(\alpha-\theta_0) \neq 0$, alors p. ex. $f'_{\dot{\theta}_0}(\theta_0, \theta_0) \neq 0$ et du théorème des fonctions implicites il résulte que l'équation (10) a une solution $\dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_0$, $\dot{\theta}_0 \neq \ddot{\theta}_0$, arbitrairement proche du couple θ_0, θ_0, donc l'équation (9) a une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du couple $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_0}$ et telle que

$e^{i\dot{\theta}_0} \neq e^{i\ddot{\theta}_0}$. Si par contre $r = 0$, alors il résulte de (11) que $C_0 = 0$ et que l'équation (9) a une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$, arbitrairement proche du couple $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_0}$ et telle que $e^{i\dot{\theta}_0} \neq e^{i\ddot{\theta}_0}$. Si, d'autre part, $\sin(\alpha-\theta_0) = 0$, alors $\cos(\alpha-\theta_0) = \pm 1$, d'où, envertu de (11), nous déduisons que $C_0 = \pm r$ et l'équation (10) prend la forme

$$\sin\frac{\theta_0-\dot{\theta}_0}{2}\sin\frac{\theta_0-\ddot{\theta}_0}{2} = 0.$$

Si donc $\dot{\theta}_0 = \theta_0$ et $\ddot{\theta}_0 \neq \theta_0$ est un nombre arbitrairement proche de θ_0, le couple $\dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta}_0$ est une solution de l'équation (10), donc dans ce cas aussi l'équation (9) possède une solution $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$.

De cette façon il a été démontré dans les deux cas que la fonction $\eta(\zeta)$, définie par la formule (2) ou (8), est la dérivée d'une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, pour un choix convenable des nombres $\dot{\zeta}_0$ ou $e^{i\dot{\theta}_0}$, $e^{i\ddot{\theta}_0}$; en outre, elle est arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$ et les racines de la fonction $\eta(\zeta)$ et de la dérivée $\delta'(\zeta)$ sont les mêmes et possèdent la même multiplicité, à l'exception d'une ou de deux racines multiples de la dérivée $\delta'(\zeta)$ qui ne sont pas racines de la fonction $\eta(\zeta)$, ou bien sont, mais telles que leur multiplicité est plus petite de 1 ou 2, et à l'exception d'une ou de deux racines simples qui sont racines de la fonction $\eta(\zeta)$ et ne sont pas racines de la dérivée $\delta'(\zeta)$.

Tenant compte de ce qui précède, on arrive, en répétant ce précède un nombre fini de fois, diminuant successivement la multiplicité des racines multiples de la dérivée $\delta'(\zeta)$, à une fonction $\dot{\delta}(\zeta)$ rationnelle spéciale, arbitrairement proche de la fonction $\delta(\zeta)$, dont la dérivée possède exclusivement des racines simples.

Il résulte de ce qui précède qu'étant donnée une fonction $\Pi(\zeta)$, symétrique par rapport à l'axe réel et possédant des pôles seulement aux points quelconques a et $\bar{a}$, respectivement au-dessus et au-dessous de cet axe, nous pouvons l'approcher arbitrairement par une fonction analogue, dont la dérivée a exclusivement des racines simples. Nous obtiendrons ce résultat à l'aide d'une transformation homographique transformant les points a et $\bar{a}$ en 0 et ∞, dans laquelle la fonction $\Pi(\zeta)$ se transforme en une fonction rationnelle spéciale.

Remarque. On peut observer que, si l'on se donne une fonction rationnelle spéciale $\dot{\delta}(\zeta)$, dont la dérivée a toutes ses racines simples, il existe une fonction analogue rationnelle spéciale $\breve{\delta}(\zeta)$, arbitrarement proche de $\dot{\delta}(\zeta)$, dont la dérivée a toutes racines simples, telle que les valeurs de $\breve{\delta}(\zeta)$ pour toutes les racines de la dérivée sont distinctes.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 1 (sur l'interpolation), [6], p. 15–16, en choisissant les valeurs (6), (7) de ce lemme de telle façon qu'elles soient distinctes.

3. Approximation des arcs. Les observations que nous allons faire sur les arcs seront nécessaires dans la suite.

LEMME 1 (sur l'approximation des arcs). *Chaque arc de Jordan partant orthogonalement d'un point quelconque de $K^*(0, 1)$ et en outre contenu entièrement à l'intérieur de $K(0, 1)$, ne passant pas par 0, peut être arbitrairement approché, dans le sens de la distance de Hausdorff, par un arc spécial analogue, correspondant à une fonction rationnelle spéciale $\Omega(w)$. De plus, la dérivée $\Omega'(w)$ a uniquement des racines simples, toutes situées en dehors de l'arc spécial cité, à l'exception d'un seul qui est l'origine de cet arc.*

Démonstration. Soit un arc quelconque J de Jordan du type mentionné plus haut, partant d'un point quelconque $e^{i\gamma}$ de la circonférence.

Considérons une transformation homographique $l(w)$ quelconque qui transforme le cercle unité en le demi-plan supérieur de façon que les points 0, ∞ et $e^{i\gamma}$ soient amenés respectivement en des points a, $\bar{a}$ et 0. L'arc J sera alors amené en un arc R de Jordan, partant orthogonalement du point 0, en outre entièrement contenu dans le demi-plan supérieur et ne passant pas par a.

Démontrons que cet arc R peut être arbitrairement approché par un arc analytique F analogue, ne passant pas par a, de représentation paramétrique

$$p(\tau i), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{1}$$

où $p(t)$ est une fonction holomorphe dans un ensemble ouvert contenant le segment I d'extrémités $-i$ et i, symétrique par rapport à l'axe réel. En effet, remarquons tout d'abord que par une approximation facile on peut admettre que J est un arc régulier, orthogonal à $K^*(0, 1)$ au point $e^{i\gamma}$ [5], et, par suite, R est un arc régulier, orthogonal à l'axe réel au point 0. Soit

$$r(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \tag{2}$$

une représentation de l'arc R. Posons en premier lieu pour chaque couple de paramètres τ', τ''

$$s(\tau', \tau'') = \begin{cases} \left|\dfrac{r(\tau'')-r(\tau')}{\tau''-\tau'}\right| & \text{pour} \quad \tau' \neq \tau'', \\ |r'(\tau')| = |r'(\tau'')| & \text{pour} \quad \tau' = \tau''. \end{cases} \tag{3}$$

Etant donné que la fonction (2) admet une fonction inverse et une dérivée continue et différente de zéro, (3) est une fonction positive, continue; sa borne inférieure m est donc positive. En outre la partie imaginaire de la dérivée $r'(\tau)$ est différente de zéro au point 0. Donc, posant

$$q(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Im}\{r(\tau)\}}{\tau} & \text{pour} \quad \tau \neq 0, \\ \operatorname{Im}\{r'(0)\} \neq 0 & \text{pour} \quad \tau = 0, \end{cases} \tag{4}$$

nous remarquons que la fonction continue (4) doit être constamment positive, car l'arc R est entièrement contenu, à l'exception de son origine, dans le demi-plan supérieur. Ainsi la fonction (4) possède une borne supérieure positive.

Appliquant maintenant (30, 31, *), nous pouvons trouver des polynômes $x_1(\tau)$ et $y_1(\tau)$ à coefficients réels, de degré resp. impair et pair, tels que

$$|x_1(\tau)+iy_1(\tau)-r'(\tau)| < m, \tag{5}$$

$$|y_1(\tau)-\operatorname{Im}\{r'(\tau)\}| < n, \tag{6}$$

et que, en même temps,

$$|x_1(\tau)+iy_1(\tau)-r'(\tau)| < \varepsilon, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{7}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitraire, suffisamment petit. Posant pour tout t complexes

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau)\,d\tau, \quad y(t) = \int_0^t y_1(\tau)\,d\tau, \tag{8}$$

et ensuite, prenant en considération le fait que les fonctions (8) sont impaires resp. paires, nous avons

$$x(t) = X(t^2), \quad y(t) = tY(t^2). \tag{9}$$

Prenons ensuite comme fonction holomorphe demandée (1) le polynôme

$$p(t) = X(-t^2)+tY(t^2). \tag{10}$$

Nous tirons alors de (9) et (10)

$$p(\tau i) = x(\tau)+iy(\tau). \tag{11}$$

De là, en intégrant (5) entre deux valeurs arbitraires du paramètre τ' et τ'', nous obtenons

$$\left|\frac{p(\tau'' i)-p(\tau' i)}{\tau''-\tau'} - \frac{r(\tau'')-r(\tau')}{\tau''-\tau'}\right| < m. \tag{12}$$

En même temps on peut écrire (12) sous la forme

$$\left|(p(\tau i))'_\tau - r'(\tau)\right| \leqslant m. \tag{13}$$

Etant donné que le nombre à soustraire dans (12) admet une valeur absolue au moins égale à m, le nombre dont on le soustrait dans (12) ne peut jamais s'annuler. Cela signifie que $p(\tau i)$ est une fonction admettant une fonction inverse. De même il résulte de (13) que la dérivée $(p(\tau i))'_\tau$ également ne s'annule jamais. Ainsi (11) représente un certain arc analytique F. Ensuite, en intégrant (6) entre 0 et une valeur arbitraire τ du paramètre, on obtient facilement

$$\left|\frac{\operatorname{Im}\{p(\tau i)\}}{\tau} - \frac{\operatorname{Im}\{r(\tau)\}}{\tau}\right| < n. \tag{14}$$

Comme le nombre à soustraire dans (14) admet une valeur absolue au moins égale à n, la valeur dont on le soustrait doit être toujours différente de zéro, dont le signe est le même que le signe du nombre à soustraire. Ainsi $\operatorname{Im}\{p(\tau i)\}$ est constamment positif pour τ différent de zéro, ce qui signifie que F est entièrement contenu, à l'exception peut-être de l'origine, dans le demi-plan supérieur. En même temps il résulte de (8) que 0 est l'origine de F. En outre, comme $x_1(\tau)$ est une fonction impaire, en vertu de (9) et (10), la dérivée de la représentation (11) au point 0 est purement imaginaire, ce qui montre que l'arc F part orthogonalement du point 0 de l'axe réel. Enfin de (7) et (8) il résulte en intégrant (7) entre 0 et une valeur arbitraire τ

$$|p(\tau i)-r(\tau)| < \varepsilon\tau \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Ainsi pour ε suffisamment petit F ne contient pas a. Récapitulant les observations précédentes, nous voyons que l'arc F représenté par (11) réalise l'approximation demandée. Remarquons aussi que de la symétrie de la fonction $p(t)$ par rapport à l'axe réel il résulte facilement que (11) représente un arc régulier dans l'intervalle $[-1, 1]$ du paramètre τ.

Démontrons ensuite que l'arc F peut être arbitrairement approché par un arc analytique C analogue ne passant pas par a et tel qu'il existe une fonction rationnelle $\Pi(\zeta)$ n'ayant des pôles qu'aux points a et $\bar{a}$, symétriques par rapport à l'axe réel, et prenant sur C des valeurs purement imaginaires. De plus, la fonction rationnelle mentionnée peut être choisie de telle façon qu'elle ait uniquement des racines simples, dont seulement une, à savoir 0, est sur C, et que sa dérivée ait aussi uniquement des racines simples, dont aucune n'appartient à C. Afin de le démontrer, considérons un rectangle arbitraire B, symétrique par rapport à l'axe réel, contenant le segment I mentionné plus haut, assez petit pour que la fonction (11) admette une fonction inverse dans B et que l'image $D = p(B)$ ne contienne pas les points a et $\bar{a}$. Il est évident que D est également symétrique par rapport à l'axe réel et contient F. Considérons dans D la fonction inverse $p^{-1}(\zeta)$. On voit qu'elle est aussi symétrique par rapport à l'axe réel. On sait par le théorème de Runge que pour $p^{-1}(\zeta)$ on peut trouver une fonction rationnelle $\Pi(\zeta)$, ayant des pôles uniquement aux points a et $\bar{a}$, symétrique par rapport à l'axe réel et arbitrairement proche de $p^{-1}(\zeta)$ dans un domaine fermé Q_0, contenu dans D et contenant F dans son intérieur. De même, en modifiant arbitrairement peu $\Pi(\zeta)$, nous pouvons obtenir, en vertu du lemme 1, 2, que toutes les racines de la dérivée $\Pi'(\zeta)$ soient simples. De plus, si l'approximation est suffisante, la valeur $\Pi(0)-p^{-1}(0) = \Pi(0)-0$ sera arbitrairement petite; ainsi la différence $\Pi_1(\zeta) = \Pi(\zeta)-\Pi(0)$ approche aussi arbitrairement la fonction $p^{-1}(\zeta)$ dans Q_0. En outre, modifiant arbitrairement la fonction $\Pi_1(\zeta)$ en y ajoutant une constante réelle, nous pouvons obtenir que cette fonction ait uniquement des racines simples. Il est connu que, si l'approximation est suffisante, alors $\Pi_1(\zeta)$ admettra une inverse dans Q_0 et l'image $E = \Pi_1(Q_0)$ contiendra dans son

intérieur l'image réciproque $p^{-1}(F) = I$. Prenant $\Pi_0(\zeta) = \Pi_1(\zeta)$ dans $\zeta \in Q_0$, nous voyons que le long de I la fonction inverse $\Pi_0^{-1}(t)$ est arbitrairement proche de $p(t)$. Considérons l'arc C de représentation paramétrique

$$z = \Pi_0^{-1}(\tau i), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{15}$$

De ce qui précède on déduit qu'il est analytique, arbitrairement proche de F, qu'il part du point 0 et qu'il est contenu dans Q_0, donc ne passe pas par a, et que la fonction $\Pi_0(\zeta)$ est purement imaginaire le long de C. En outre, comme la fonction $\Pi_0(\zeta)$ admet une fonction inverse dans $Q_0 \supset C$, sa dérivée ne peut pas avoir de racines sur C et possède elle-même exactement une racine réelle, égale à 0. Enfin, comme

$$\frac{\operatorname{Im} p\{\tau i\}}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1,$$

aune borne inférieure positive, avec une approximation suffisante il en sera de même pour la fonction

$$\frac{\operatorname{Im}\{\Pi_0^{-1}(\tau i)\}}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1,$$

et, par conséquent, nous aurons

$$\operatorname{Im}\{\Pi_0^{-1}(\tau i)\} > 0, \quad 0 < \tau < 1,$$

donc l'arc C est contenu, à l'exception de son origine, dans le demi-plan supérieur.

Prenons maintenant l'arc H de représentation

$$w = l^{-1}(\Pi_0^{-1}(\tau i)), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{16}$$

On vois facilement de (15) que H est un arc analytique, partant de $e^{i\gamma}$ à l'intérieur de $K(0, 1)$, ne passant pas par 0; en outre, si les approximations mentionnées plus haut de l'arc R par F et ensuite de l'arc F par C sont suffisantes, H sera arbitrairement proche de J (v. [6], (36, *), pp. 13–14). En même temps, considérant la fonction $\Omega(w) = (\Pi(l(w)))^2$, nous déduisons facilement des raisonnement précédents que $\Omega(w)$ est rationnelle spéciale, que sa dérivée a uniquement des zéros simples situés en dehors de l'arc H, à l'exception d'un seul situé à l'origine $e^{i\gamma}$ de cet arc, et enfin que, conformément à (16), elle est réelle sur H, qui est par suite un arc spécial correspondant à la fonction $\Omega(w)$, donc que toutes les conditions de la conclusion sont réalisées.

Il résulte immédiatement de ce qui précède que, avec les notations employées plus haut, tout domaine de Löwner $K(0, 1)\setminus J$ est la limite dans le sens du noyau d'une suite de domaines spéciaux du type $K(0, 1)\setminus H$.

II. Transformations par les fonctions algébriques spéciales

1. Étude de la fonction intérieure. Nous donnerons ici quelques informations sur les fonctions algébriques considérées plus haut.

THÉORÈME 1. *Etant données une fonction intérieure* $w = a(z)$ *et les fonctions correspondantes: déterminante* $\Omega(w)$ *et accommodée* $\chi(z)$ *de* (28, $*$), *elles ont les propriétés suivantes:*

(i) $a(z)$ *se prolonge comme fonction finie et continue au cercle unité fermé.*

(ii) $a(z)$ *transforme* $K(0, 1)$ *en un domaine* G, *contenu dans* $K(0, 1)$, *de telle façon que son ensemble complémentaire dans la fermeture de* $K(0, 1)$ *ne contient pas de points intérieurs.*

(iii) $a(z)$ *est univalente dans* $K(0, 1)$.

(iv) *Pour tout point* z_0 *du cercle* $K(0, 1)$ *et pour son image* $w_0 = a(z_0)$ *la nullité de* $\chi'(z)$ *au point* z_0 *avec une certaine multiplicité équivaut à celle de* $\Omega(w)$ *au point* w_0 *avec la même multiplicité.*

(v) *La frontière* G^* *se confond avec l'image de la circonférence* $K^*(0, 1)$ *par* $a(z)$; *elle se compose des points pour lesquels* $\Omega(w)$ *est réelle et contient la circonférence* $K^*(0, 1)$.

(vi) *Pour tout point* z^* *situé sur la circonférence* $K^*(0, 1)$ *et pour son image* $w^* = a(z^*)$ *située sur la frontière* G^* *on a dans un certain demi-entourage intérieur du cercle du point* z^* *le développement*

$$a(z) = w^* + \alpha_p^* \left((z-z^*)^{1/q}\right)^p + \alpha_{p+1}^* \left((z-z^*)^{1/q}\right)^{p+1} + \alpha_{p+2}^* \left((z-z^*)^{1/q}\right)^{p+2} + \ldots,$$

où $p-1$ *et* $q-1$ *désignent respectivement les multiplicités de* z^* *et* w^* *comme racines des dérivées* $\chi'(z)$ *et* $\Omega'(w)$, $\alpha_p^* \neq 0$, $\alpha_{p+1}^*, \ldots$ *sont des coefficients et* $(z-z^*)^{1/q}$ *est une certaine branche du radical; en outre* $p \leqslant 2q$.

(vii) *Tout point* w^* *de la frontière* G^* *est l'image par* $a(z)$ *d'un nombre fini de points de la circonférence* $K^*(0, 1)$, *en outre la somme des multiplicités correspondantes avec lesquelles la valeur* w^* *est admise en ces points est* 2 *ou* 1 *suivant que* w^* *est à l'intérieur du cercle* $K(0, 1)$ *ou sur la circonférence* $K^*(0, 1)$.

Démonstration. La démonstration se composera de sept parties, qui correspondent aux propriétés mentionnées dans la conclusion.

ad (i). La propriété demandée résulte directement de (40, $*$).

ad (ii). Posons d'abord $\Gamma = a(K^*(0, 1))$. On déduit de ce qui précède que Γ est un ensemble borné et fermé. De plus, en vertu de (28, $*$), $\Omega(\Gamma) = \chi(K^*(0, 1))$, ce qui entraîne que la fonction $\Omega(w)$ est réelle sur Γ et que Γ ne contient pas le point 0, car la fonction $\chi(z)$ est réelle et bornée sur $K^*(0, 1)$ et $\Omega(w)$ est infinie au point 0. On voit aussi immédiatement que G^* est contenu dans Γ, car $a(z)$ est une fonction holomorphe dans $K(0, 1)$. Ainsi

G^* est un ensemble borné et, par suite, G est également borné. On peut ensuite démontrer que le continu Γ ne partage pas le domaine G. Supposons en effet, par le contraire, que la différence $G \setminus \Gamma$ ne soit pas connexe. Alors, outre la composante évidente de cette différence S_0, contenant le point 0, il existe une seconde composante analogue S; de plus, comme partie de G, elle est bornée. La frontière de cette composante est évidemment contenue dans la somme $G^* \cup \Gamma$, donc dans Γ. Par suite, conformément à ce qui précède, la fonction $\Omega(w)$, holomorphe dans le domaine borné S, aurait sur la frontière de ce domaine une partie imaginaire égale à zéro et, par conséquent, elle devrait se réduire à une constante, ce qui n'a pas lieu. Cela posé, on peut déjà démontrer que la propriété demandée a lieu. En effet, dans le cas contraire, l'une des différences $G \setminus \overline{K(0, 1)}$ ou $K(0, 1) \setminus \bar{G}$ serait, comme il est facile de le voir, un ensemble non vide, ouvert, borné, ne contenant pas 0, en outre la frontière de cet ensemble serait contenue dans $G^* \cup K^*(0, 1)$, donc à plus forte raison dans $\Gamma \cup K^*(0, 1)$; en étudiant la partie imaginaire de la fonction $\Omega(w)$, on aboutirait de même que precédémment à une contradiction.

ad (iii). Désignons maintenant par Z l'ensemble fini de tous les points z pour lesquels on a $z = 0$, ou $\chi'(z) = 0$, et par W l'ensemble fini de tous les points w pour lesquels $w = 0$, ou bien $\Omega'(w) = 0$, ou bien qu'il existe un $z \in Z$ tel que $\Omega(w) = \chi(z)$. Etant donné, d'après ce qui précède, que $G \setminus \Gamma$ est un domaine, $G \setminus (\Gamma \cup W)$ l'est aussi. Soit maintenant μ une courbe continue d'équation

$$w = w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1}$$

partant d'un point $w_0 \in G \setminus (\Gamma \cup W)$, entièrement contenue, à l'exception peut-être de son extrémité, dans l'ensemble $G \setminus (\Gamma \cup W)$. Soit ensuite $z_0 \in K(0, 1)$ un point tel que $a(z_0) = w_0$. Alors on peut démontrer qu'il existe exactement une courbe continue λ de représentation

$$z = z(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

partant du point z_0, contenue entièrement dans $K(0, 1) \setminus Z$ et telle que μ est l'image de λ par la transformation $a(z)$, c'est-à-dire que

$$w(t) = a(z(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3}$$

En effet, considérons la classe des intervalles $[0, b]$, contenus dans $[0, 1]$, pour lesquels il existe exactement une fonction continue du type (2) qui satisfait dans cet intervalle à la relation (3). On voit que cette classe est non vide, car l'intervalle $[0, 0]$ lui appartient. On voit en outre que les valeurs (2) sont situées en dehors de $K^*(0, 1)$ et de Z, car les valeurs (1) sont situées en dehors de Γ et W. Soit ensuite $[0, \beta]$ la somme des intervalles de

la classe considérée. Observons d'abord que dans l'intervalle $[0, \beta\}$ il existe exactement une courbe continue (2), du type décrit, qui remplit dans $[0, \beta\}$ la condition (3). Il suffit à cet effet de prendre pour chaque t la valeur commune de toutes les fonctions (2) de la classe considérée qui sont définies pour t. Nous observons en second lieu que β égale 1. Pour cela démontrons que si $\beta < 1$, il existerait un intervalle $[0, \beta^*]$ de la classe des intervalles mentionnée plus haut, effectivement plus large que $[0, \beta\}$. En effet, supposant $\beta < 1$, prenons une suite arbitraire de paramètres $\{t_n\}$, tendant vers β à gauche, et la suite correspondante des valeurs $\{z(t_n)\}$. Choisissant au besoin des suites partielles, on peut supposer que la dernière suite est convergente vers une limite ζ située dans $\overline{K(0, 1)}$. En même temps la suite $\{w(t_n)\}$ tend évidemment vers $\omega = w(\beta)$; en outre, en tenant compte de (3) et du fait que $a(z)$ peut être continûment etendue au cercle fermé, on obtient, vu (40, $*$),

$$\omega = a(\zeta) \tag{4}$$

et, par conséquent, d'après (28, $*$),

$$\Omega(w) = \chi(\zeta).$$

De $\beta < 1$ et des hypothèses faites sur μ il résulte que le point ω n'appartient ni à Γ ni à W, c'est-à-dire qu'il ne se confond avec aucune des racines de la dérivée $\Omega'(w)$; par conséquent, en vertu de (3) et (4), le point ζ n'est pas situé sur $K^*(0, 1)$, donc il est situé dans $K(0, 1)$, et il ne se confond ni avec zéro, ni avec aucune des racines de la dérivée $\chi'(z)$. Ainsi on tire facilement de (28, $*$) que la fonction $a(z)$ possède au point ζ une dérivée différente de zéro; nous voyons donc, en désignant cette fonction dans un petit entourage du point ζ par $a_0(z)$, que dans l'image de cet entourage, contenant à l'intérieur le point ω, il existe une fonction $a_0^{-1}(w)$, inverse de $a_0(z)$. De là nous concluons immediatement que dans un entourage suffisamment petit du point β, existe exactement une fonction continue

$$\hat{z}(t), \quad \beta - h \leqslant t \leqslant \beta + h, \tag{5}$$

qui y remplit la condition

$$w(t) = a(\hat{z}(t)) \tag{6}$$

et la condition initiale

$$\hat{z}(\beta) = \zeta, \tag{7}$$

définie par la formule

$$\hat{z}(t) = a_0^{-1}(w(t)).$$

En même temps on aura évidemment pour n suffisamment grands

$$\hat{z}(t_n) = a_0^{-1}(w(t_n)), \quad t_n > \beta - h,$$

et, par conséquent,

$$\hat{z}(t_n) = z(t_n).$$

Formons pour un tel n la fonction suivante

$$z^*(t) = \begin{cases} z(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_n, \\ \hat{z}(t) & \text{pour} \quad t_n \leqslant t \leqslant \beta^* = \beta + h. \end{cases} \tag{8}$$

Elle est continue et remplit la condition

$$w(t) = a(z^*(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*,$$

et, en vertu de la définition du μ, elle est entièrement contenue dans $K(0, 1) \setminus Z$. De plus, elle est la seule courbe continue remplissant dans cet intervalle la condition (3). En effet, prenant une fonction continue

$$z^{**}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*, \tag{9}$$

qui remplit la condition

$$w(t) = a(z^{**}(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta^*,$$

nous déduisons de l'hypothèse de l'unicité de la fonction (2) dans $[0, \beta\}$ qu'on doit avoir

$$z^{**}(t) = z^*(t) = z(t),$$

et, par conséquent, conformément à la définition de ζ,

$$z^{**}(\beta) = \zeta.$$

De là et de l'unicité de la fonction continue (5), introduite plus haut, qui remplit (6) et (7) dans $[\beta - h, \beta + h]$, résulte qu'on doit aussi avoir

$$z^{**}(t) = z^*(t) = z(t),$$

et (9) doit se confondre avec (8), et l'unicité annoncée a bien lieu. Donc dans l'intervalle $[0, \beta^*]$ il existerait une courbe λ du type décrit. Ainsi $\beta = 1$. Remarquons encore qu'en vertu de (3) et de (28, $*$) on a constamment

$$\Omega(w(t)) = \chi(z(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

De là il résulte en particulier que si μ aboutit au point 0, c'est-à-dire si $w(t) \to 0$ pour $t \to 1$, on a $\Omega(w(t)) \to \infty$, alors également $\chi(z(t)) \to \infty$, et enfin $z(t) \to 0$, c'est-à-dire que λ aboutit au petit 0.

De ce qui précède on déduit facilement que la propriété (iii) a lieu. Pour cela supposons le contraire, à savoir que deux points distincts z_0^* et z_0^{**} du

cercle $K(0, 1)$ soient amenés par la transformation $w = a(z)$ au même point $w_0^* \in G$. Effectuant une translation arbitrairement petite des points w_0^*, z_0^* et z_0^{**}, on peut supposer que w_0^* n'appartient pas à $\Gamma \cup W$, et z_0^* et z_0^{**} n'appartiennent pas à Z. De ce que le continu Γ ne partage pas le domaine G nous déduisons qu'il existe une courbe continue μ qui part de w_0^*, est entièrement contenue dans $G \setminus (\Gamma \cup W)$ à l'exception de son extrémité, et a son extrémité en 0. Par suite, en vertu de ce qui précède, la courbe citée est l'image par $w = a(z)$ de deux courbes analogues λ_1 et λ_2 qui partent respectivement des points z_0^* et z_0^{**} et aboutissent, conformément à ce qui précède, également au point 0 et qui n'ont, à l'exception de 0, aucun point commun. Cependant les points $w \in \mu$, suffisamment proches de zéro, seraient alors les images par $w = a(z)$ de deux points $z_1 \in \lambda_1$ et $z_2 \in \lambda_2$, distincts et arbitrairement proches de zéro, ce qui est impossible, car $a(z)$ admet das l'entourage de zéro une inverse.

ad (iv). De (28, $*$), prenant encore en considération l'univalence de $a(z)$, nous obtenons immédiatement la propriété demandée (iv).

ad (v). En vertu d'une observation précédente on a $G^* \subset \Gamma$, il suffit donc de démontrer que l'inverse a également lieu. En effet, si cela n'avait pas lieu, comme Γ est évidemment contenu dans $\overline{K(0, 1)}$, puisque $|a(z)| < 1$, Γ devrait avoir un point commun w_0 avec G. Autrement dit, il existerait des points $\zeta_0 \in K^*(0, 1)$ et $z_0 \in K(0, 1)$ tels que $a(\zeta_0) = a(z_0) = w_0$. Mais, puisque la fonction $a(z)$ est analytique dans z_0 et qu'elle n'est pas constante, l'image d'un certain entourage du point z_0 couvrirait un certain entourage de w_0, donc $a(z)$ étant continue dans ζ_0, elle aurait un point commun avec l'image analogue d'un demi-entourage intérieur du point ζ_0, ce qui est impossible, car $a(z)$ est univalente. De cette façon la première partie de la propriété demandée est établie. Ensuite, en vertu d'une autre observation précédente, la fonction $\Omega(w)$ est réelle sur Γ c'est-à-dire sur G^*. Enfin, avec une autre observation précédente, G est contenu dans $K(0, 1)$ et la fermeture de G contient $\overline{K(0, 1)}$, ce qui entraine immédiatement que la dernière partie de la propriété demandée a lieu.

ad (vi). De (28, $*$), de la continuité de $a(z)$ et (33, $*$) résulte directement la première partie de la propriété demandée; en outre, comme chaque demi-entourage intérieur du point z^*, suffisamment petit, contient un secteur circulaire de centre z^* et d'écart arbitrairement proche de π et comme $a(z)$ est univalente, il en résulte facilement, en vertu de (33, $*$), que la seconde partie de la propriété demandée est remplie. En effet, du fait cité plus haut et de (37, $*$) résulte que l'image par $a(z)$ de chaque demi-entourage intérieur du point z^*, suffisamment petit, couvre d'une façon univalente un secteur circulaire de centre w^* et d'écart arbitrairement proche de $\pi p/q$, et en même temps cette image est située dans un secteur analogue d'écart aussi arbitrairement proche de $\pi p/q$.

ad (vii). Prenons maintenant le point considéré w^* et désignons par $z_j, j = 1, \ldots,$ une suite finie arbitraire de points où $a(z)$ prend la valeur w^* et désignons par p_j/q_j les multiplicités avec lesquelles la valeur w^* est admise en z_j; conformément à ce qui précède nous constatons que les images des demi-entourages des points correspondants z_j, suffisamments petits, couvrent certains secteurs circulaires de centre w^* et d'écarts suffisamment proches de $\pi p_j/q_j$ et que ces images sont en même temps contenues dans les secteurs analogues; nous voyons maintenant, d'une part, en vertu des observations précédantes, comme la fonction $a(z)$ est univalente et que ses valeurs appartiennent à $K(0, 1)$, que les premiers des secteurs cités ne peuvent pas avoir de points communs, c'est-à-dire

$$\pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \leqslant \pi, \quad \text{soit} \quad \pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \leqslant 2\pi,$$

suivant la situation du point w^*. En particulier nous constatons, vu les inégalites évidentes $1 \leqslant p_j \leqslant 2L+1$, $1 \leqslant q_j \leqslant 2L+1$ et, par suite,

$$\frac{p_j}{q_j} \geqslant \frac{1}{2L+1},$$

que le nombre des points z_j est borné supérieurement par le nombre fini $2(2L+1)$, donc que le nombre de tous les points de la circonférence $K^*(0, 1)$ amenés par $a(z)$ en w^*, pour lesquels nous conservons les notations précédentes, est fini. D'autre part, en vertu des observations précédentes, comme les valeurs de $a(z)$ pour z appartenant à $K(0, 1)$ couvrent d'une façon dense $K(0, 1)$, nous trouvons que les seconds des secteurs cités plus haut doivent couvrir un demi-entourage ou un entourage du point w^*, suivant la situation de ce point, donc

$$\pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \geqslant \pi \quad \text{ou} \quad \pi\frac{p_1}{q_1} + \ldots \geqslant 2\pi.$$

Récapitulant les faits signalés dernièrement on obtient immédiatement la propriété demandée.

2. Représentation avec une seule coupure. Nous allons maintenant compléter les considérations précédentes.

THÉORÈME 1. *Si avec les hypothèses précédentes la fonction $a(z)$ transforme le cercle $K(0, 1)$ en un domaine spécial $G = K(0, 1) \setminus H$, où H est un arc spécial correspondant à $\Omega(w)$, et si la dérivée $\Omega'(w)$ a toutes ses racines simples, situées en dehors de H, à l'exception d'une située à l'origine de H, les propriétés suivantes ont lieu:*

(j) *La dérivée $\chi'(z)$ a toutes ses racines simples.*

(jj) *Chaque point de la frontière G^* qui est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ située sur $K^*(0, 1)$, différente de l'origine de l'arc H, est l'image de multiplicité*

exactement 1 *d'un seul point de la circonférence* $K^*(0, 1)$ *qui est une racine de la dérivée* $\chi'(z)$, *et en ce point la dérivée de la fonction intérieure* $a(z)$ *s'annule.*

Démonstration. La démonstration se composera de deux parties, comme dans le paragraphe précédent.

ad (j). Considérons une racine arbitraire z^* de la dérivée $\chi'(z)$, située sur la circonférence $K^*(0, 1)$ et son image $w^* = a(z^*)$ sur la frontière G^* et admettons les notations (vi) du paragraphe précédent. Conformément aux hypothèses et au choix de z^* on a ici $q = 1$ ou 2 et $p \geqslant 2$. Considérons maintenant le premier cas $q = 1$, où w^* n'est pas une racine de la dérivée $\Omega'(w)$. En vertu de (vi) on doit avoir $p = 2$, donc z^* est une racine simple de la dérivée $\chi'(z)$. De plus, dans ce cas w^* doit être l'extrémité de l'arc H. En effet, nous déduisons facilement de (37, $*$) que l'image par $a(z)$ d'un demi-entourage intérieur du point z^*, arbitraire, suffisamment petit, couvre un secteur circulaire de centre w^* et d'écart arbitrairement proche de 2π. Par conséquent le point w^* ne peut pas être situé sur H, à l'exception de son extrémité, car en vertu de (38, $*$), l'image du demi-entourage mentionné plus haut devrait contenir des points de l'arc H. De même, il résulte de (38, $*$) que le point w^* ne peut être sur $K(0, 1)$; w^* est donc l'extrémité de H et, de plus, vu (vii), w^* ne peut être l'image d'aucun autre point de la circonférence $K^*(0, 1)$, différent de z^*. De cette façon le cas considéré peut avoir lieu tout au plus pour une seule des racines de la dérivée $\chi'(z)$, situées sur $K^*(0, 1)$. Considérant ensuite le second cas $q = 2$, où w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, nous constatons en premier lieu que w^* ne peut être sur l'arc H en dehors de son origine, car il n'existe pas de racines de la dérivée mentionnée. Ensuite, raisonant comme précédemment, nous constatons, en vertu de (37, $*$) et (38, $*$), que w^* ne peut être situé à l'origine de l'arc H, donc que dans le cas considéré le point w^* doit être sur $K^*(0, 1)$ en dehors de H. De plus, en vertu (vii), on doit avoir ici $p = 2$, donc z^* doit être une racine simple de la dérivée $\chi'(z)$ et alors le point w^* ne peut être l'image d'aucun point de la circonférence $K^*(0, 1)$ différent de z^*. Des observations précédentes il résulte en particulier que toutes les racines de $\chi'(z)$ situées sur $K(0, 1)$ sont simples et que, si $z^* \in K^*(0, 1)$, $\chi'(z^*) = 0$ et $w^* = a(z^*)$, alors w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, située en dehors de l'origine de H, ou bien w^* est l'extrémité de l'arc H; en outre w^* ne peut être l'image d'aucun point de la circonférence $K^*(0, 1)$ différent de z^*. En même temps les nombres des racines de $\chi'(z)$ et $\Omega'(w)$ situées sur $K(0, 1)$ doivant être évidemment égaux, donc les nombres des racines de ces dérivées situées sur $K^*(0, 1)$ doivent également être égaux, d'où nous déduisons évidemment que le point w^* est une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ pour toutes les racines de la dérivée $\chi'(z)$, situées sur $K^*(0, 1)$, à l'exception d'une seule pour laquelle w^* est l'extrémité de l'arc H. De plus, conformément à (28, $*$), toutes les racines de la dérivée $\chi'(z)$ situées dans $K(0, 1)$ sont amenées par $a(z)$, en respectant les multiplicités, en toutes les

racines de la dérivée $\Omega'(w)$ situées dans G, donc dans $K(0, 1)$; comme ces dernières sont simples par hypothèse, les racines de $\chi'(z)$ mentionnées, situées dans $K(0, 1)$, et évidemment celles dans $\tilde{K}(0, 1)$, doivent être simples. Récapitulant ces dernières considérations et les précédentes, nous obtenons la propriété demandée.

ad (jj). La première et la seconde partie de la propriété demandée résulte directement des raisonnements précédents, la troisième partie est une conséquence de ce qui précède et de (vii).

Dans les considérations ultérieures nous nous servirons, suivant le cas, de la fonction intérieure dans le cercle unité ouvert ou fermé.

III. Théorèmes de Riemann et de Löwner

1. Familles de Löwner. Soit

$$\Omega(w) = \frac{D_L}{w^L} + \ldots + \bar{D}_L w^L, \qquad D_L \neq 0, \; L \geqslant 1, \tag{1}$$

une fonction rationnelle spéciale, H – un arc lui correspond et enfin $G = K(0, 1) \setminus H$ – le domaine spécial correspondant.

Supposons en outre que la dérivée $\Omega'(w)$ possède uniquement des racines simples, situées en dehors de l'arc H, excepté son origine.

Désignons ensuite respectivement par

$$\begin{aligned} &w_k, && k = 1, \ldots, Q, \\ &e^{i\omega_l}, && l = 1, \ldots, R, \\ &e^{i\tau} \end{aligned} \tag{2}$$

toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ situées à l'intérieur de $K(0, 1)$, sur la circonférence $K^*(0, 1)$ et à l'origine de l'arc H. Admettons enfin que les valeurs

$$\Omega(w_k), \quad \Omega(e^{i\omega_l}), \quad \Omega(e^{i\tau}) \tag{3}$$

sont distinctes et que

$$\Omega''(e^{i\tau}) e^{2i\tau} > 0. \tag{4}$$

Nous allons déduire le résultat fondamental que voici.

THÉORÈME FONDAMENTAL. *Pour la fonction $\Omega(w)$ et l'arc H donnés plus haut il existe une famille de fonctions rationnelles spéciales*

$$\chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L \tag{5}$$

et une famille de points complexes

$$
\begin{aligned}
& z_k(t) \in K(0, 1), && k = 1, \ldots, Q, \\
(6) \qquad & e^{i\varphi_l}(t), && l = 1, \ldots, R, \\
& e^{i\vartheta}(t),
\end{aligned}
$$

qui dépendent du paramètre réel t, parcourant un intervalle fini $[0, T]$, telles que

1° *les relations suivantes ont lieu*

$$
\begin{aligned}
& \chi(z, 0) = \Omega(z), \\
& z_k(0) = w_k, \\
(7) \qquad & e^{i\varphi_l(0)} = e^{i\omega_l}, \\
& e^{i\vartheta(0)} = e^{i\tau}, \\
& E_L(t) = e^{Lt} D_L,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \chi'_z(z_k(t), t) = 0, \\
(8) \qquad & \chi(z_k(t), t) = \Omega(w_k), \\
& \chi'_z(e^{i\varphi_l(t)}, t) = 0, \\
& \chi(e^{i\varphi_l(t)}, t) = \Omega(e^{i\omega_l}),
\end{aligned}
$$

$$
(9) \qquad \chi'_z(e^{i\vartheta(t)}, t) = 0;
$$

si $T > 0$, la fonction $\varkappa(t) = \chi(e^{i\vartheta(t)}, t)$ est croissante et, par conséquent, en vertu de la première et dernière des conditions (7), elle vérifie l'inégalité

$$
(10) \qquad \chi(e^{i\vartheta(t)}, t) \geqslant \Omega(e^{i\tau})
$$

avec le signe d'égalité pour $t = 0$; en outre on a constamment

$$
(11) \qquad \varkappa'(t) = 2\chi''_{zz}(e^{i\vartheta(t)}, t) e^{2i\vartheta(t)} > 0;
$$

les points (6) sont tous distincts et de ce fait ils représentent toutes les racines de la dérivée $\chi'_z(z, t)$ et, comme on le voit, celles-ci sont simples; les fonctions (5) et (6) sont holomorphes par rapport à t.

*En même temps il existe une famille de fonctions de Löwner (29, *), liée à (5) et (6), de la forme*

$$
(12) \qquad a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots, \qquad z \in K(0, 1),
$$

définie dans l'intervalle précédent du paramètre t, telle que

2° *les relations suivantes ont lieu*

$$
(13) \qquad \Omega(a(z, t)) = \chi(z, t),
$$

$$a(z, 0) = z; \tag{14}$$

la fonction (12) *est holomorphe par rapport à* t;

3° *les relations suivantes ont lieu*

$$a(z_k(t), t) = w_k, \tag{15}$$

$$a(e^{i\varphi_l(t)}, t) = e^{i\omega_l}, \tag{16}$$

$$a'_z(0, t) = \alpha_1(t) = e^{-t}; \tag{17}$$

4° *les fonctions algébriques spéciales* $a(z, t)$ *représentent le cercle* $K(0, 1)$ *sur des domaines spéciaux* $G_t = K(0, 1) \setminus H_t$, *où* H_t *est un arc spécial contenu dans* H, *ayant avec lui une origine commune*;

5° *pour la valeur finie* $t = T$ *le domaine* G_t *se confond avec* G *et ainsi, en vertu de* 4°, *la fonction* $a(z) = a(z, T)$ *nous fournit la représentation conforme de Riemann du cercle* $K(0, 1)$ *sur le domaine spécial* G, *transformant le point* 0 *en le point* 0 *et possédant en ce point une dérivée positive.*

Dans le paragraphe suivant nous allons établir l'énoncé précédent.

2. Démonstration du résultat fondamental. Considérons la classe des intervalles $[0, T_1]$ dans lesquels on peut former, d'une façon unique, les familles de fonctions continues (5,1), (6,1) et (12,1), remplissant les conditions 1°–4°. Nous vérifions directement que la classe considérée n'est pas vide, car elle contient l'intervalle $[0, 0]$, dans lequel les familles (5,1), (6,1) et (12,1) sont définies univoquement par les conditions (7,1) et (14,1). Désignons par $[0, T\}$ le plus grand de ces intervalles, c'est-à-dire la somme de tous les intervalles de la classe considérée.

Remarquons que l'intervalle $[0, T\}$ doit être fini. En effet, pour les paramètres de cet intervalle, en vertu des conditions 2° et 4°,

$$\Omega(K^*(0, 1) \cup H) \supset \Omega(K^*(0, 1) \cup H_t) = \chi(K^*(0, 1), t),$$

ce qui prouve que les fonctions (1,5) sont uniformément bornées sur $K^*(0, 1)$; de ce fait les coefficients $E_L(t)$ doivent également être uniformément bornés; d'autre part, vu (1,8), le coefficient $E_L(t)$ égale $D_L e^{Lt}$; ces deux faits sont possibles uniquement dans le cas, où l'intervalle analysé est fini.

Etant donné ce qui précède il suffit de prouver que les familles des fonctions qui remplissent les conditions 1°–4°, considérées dans $[0, T\}$, pourront être étendues d'une façon continue à l'intervalle fermé $[0, T]$, en respectant également les conditions 1°–4°; en outre sera encore remplie la condition 5°.

Nous établirons ce résultat en quelques étapes.

A. Extension à l'intervalle $[0, T+\eta)$ en respectant les conditions 1°–4°. Prenons une suite arbitraire de paramètres $\{t_f\}$ tendant vers T de façon

que $t_f \leqslant T$, et, en même temps, telle que les suites correspondantes de fonctions resp. de nombres

$$\chi(z, t_f), \tag{1}$$

$$z_k(t_f), \tag{2}$$

$$e^{i\varphi_l(t_f)}, \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$e^{i\vartheta(t_f)}, \tag{4}$$

$$a(z, t_f), \tag{5}$$

sont convergentes vers certaines limites

$$\chi(z) = \frac{E_L}{z^L} + \ldots + \bar{E}_L z^L, \tag{6}$$

$$z_k, \tag{7}$$

$$e^{i\varphi_l}, \tag{8}$$

$$e^{i\vartheta}, \tag{9}$$

$$a(z). \tag{10}$$

Cela est possible car, comme on l'a remarqué plus haut, les coefficients de la fonction (1) sont uniformément bornés et les suites des nombres resp. des fonctions (2)–(4) et (5) sont bornées par l'unité. De ce fait, les conditions 1°–4° étant remplies à gauche de T, on aura pour les limites (6)–(10) les relations suivantes

$$\begin{aligned} &E_L = e^{LT} D_L \neq 0, \\ &\chi'(z_k) = 0, \\ &\chi(z_k) = \Omega(w_k), \\ &\chi'(e^{i\varphi_l}) = 0, \\ &\chi(e^{i\varphi_l}) = \Omega(e^{i\omega_l}), \\ &\chi'(e^{i\vartheta}) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\chi(e^{i\vartheta}) \geqslant \Omega(e^{i\tau}), \tag{12}$$

avec le signe d'égalité seulement pour $T = 0$, et les relations

$$\begin{aligned} &\Omega(a(z)) = \chi(z), \\ &a(z_k) = w_k, \\ &a(e^{i\varphi_l}) = e^{i\omega_l}, \\ &a'_z(0) = e^{-T}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ainsi la fonction (6) et les nombres (7)–(9) s'accordent quant aux notations et aux conditions qu'ils remplissent avec la fonction (1,1,I) et les nombres (2,1,I)–(4,1,I). De plus, pour la frontière $\tilde{G}^*$ du domaine $\tilde{G}$, sur laquelle la fonction (10) représente $K(0, 1)$, la relation suivante a lieu

$$\tilde{G}^* = a(K^*(0, 1)) \subset K^*(0, 1) \cup H. \tag{14}$$

En effet, les relations $\Omega(a(z, t_f)) = \chi(z, t_f)$, qui sont remplies en vertu de (1,13), et la convergence des suites (1) et (5) resp. vers les limites (6) et (10), vu les lemmes correspondants [3] (lemmes 2 et 3), entraînent la convergence uniforme $a(z, t_f)$ vers $a(z)$ dans la fermeture $\overline{K(0, 1)}$ et, en particulier, sur la circonférence $K^*(0, 1)$. Rapproché des relations résultant de 4° pour les frontières $G_f^* = a(K^*(0, 1), t_f) \subset K^*(0, 1) \cup H$, $f = 1, 2, \ldots,$ ceci donne immédiatement l'inclusion demandée. Enfin, les points (7), (8) et (9) sont tous distincts. En effet, il résulte des égalités centrales (11) et du fait que, par hypothèse, leurs seconds membres sont distincts, que les nombres (7) et (8) sont distincts. Il reste à prouver qu'ils sont différents du nombre (9). Or, si pour un k on avait $z_k = e^{i\vartheta}$, alors on devrait avoir

$$z_k(t_f) \to e^{i\vartheta}, \quad \frac{1}{\overline{z_k(t_f)}} \to e^{i\vartheta}, \quad e^{i\vartheta(t_f)} \to e^{i\vartheta};$$

en outre, vu les relations (1,6), (1,8) et (1,9),

$$z_k(t_f) \in K(0, 1), \quad \frac{1}{\overline{z_k(t_f)}} \in \tilde{K}(0, 1),$$

$$\chi_z'(z_k(t_f), t_f) = 0, \quad \chi_z'\left(\frac{1}{\overline{z_k(t_f)}}, t_f\right) = 0, \quad \chi_z'(e^{i\vartheta(t_f)}, t_f) = 0,$$

la dérivée $\chi'(z)$ de la fonction limite (6) devrait avoir au point $e^{i\vartheta}$ une racine au moins triple, contrairement à la conclusion du théorème 2,2,II. Le raisonnement est tout analogue dans le cas où $e^{i\varphi_l} = e^{i\vartheta}$ pour un certain l. Enfin, pour la fonction limite (6) et pour le point (9) a lieu l'inégalité

$$\chi''(e^{i\vartheta}) e^{2i\vartheta} > 0. \tag{15}$$

En effet, vu (11,1), on a constamment $\chi_{zz}''(e^{i\vartheta(t_f)}, t_f) e^{2i\vartheta(t_f)} > 0$, ce qui, en passant à la limite, donne d'abord une relation analogue à (15) avec le signe $\geqslant$, d'où, $e^{i\vartheta}$ étant une racine simple de la dérivée de la fonction (6), nous déduisons ensuite, que le premier membre de (15) est différent de zéro, et nous obtenons en définitive (15).

Du lemme 1,1,I (sur l'interpolation) il résulte maintenant que dans un entourage suffisamment petit $(T-\eta, T+\eta)$ du point T il existe des fonctions, définies d'une façon unique,

$$\tilde{\chi}(z, t) = \frac{\tilde{E}_L(t)}{z^L} + \ldots + \tilde{E}_0(t) + \ldots + \tilde{\tilde{E}}_L(t) z^L, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{z}_k(t), && k = 1, \ldots, Q, \\ &e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, && l = 1, \ldots, R, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}}(t), \end{aligned} \tag{17}$$

telles que

$\tilde{1}^\circ$ les relations suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}(z, T) = \chi(z), \\ &\tilde{z}_k(T) = z_k, \\ &e^{i\tilde{\varphi}_l(T)} = e^{i\varphi_l}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}(T)} = e^{i\vartheta}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}_L(t) = e^{Lt} D_L, \\ &\tilde{\chi}'_z(\tilde{z}_k(t), t) = 0, \\ &\tilde{\chi}(\tilde{z}_k(t), t) = \Omega(w_k), \\ &\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = 0, \\ &\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = \Omega(e^{i\omega_l}), \\ &\tilde{\chi}'_z(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

la fonction (16) et les points (17) sont holomorphes par rapport à t; la fonction $\tilde{\varkappa}(t) = \tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t)$ est croissante et, en vertu de la première et de la dernière des conditions (18), elle vérifie l'inégalité

$$\tilde{\chi}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) \geqslant \chi(e^{i\vartheta}) \tag{20}$$

pour $t \geqslant T$, avec le signe d'égalité seulement pour $t = T$, en outre on a constamment

$$\tilde{\varkappa}'(t) = 2\tilde{\chi}''_{zz}(e^{i\tilde{\vartheta}(t)}, t) e^{2i\tilde{\vartheta}(t)} > 0. \tag{21}$$

Nous démontrerons ensuite que pour η suffisamment petit il existe dans l'intervalle $[0, T+\eta)$ une famille de fonctions algébriques spéciales

$$\tilde{a}(z, t) = \tilde{\alpha}_1(t) z + \ldots, \qquad z \in K(0, 1), \tag{22}$$

liée uniformément à (16) et (17), telle que

$\tilde{2}^\circ$ les relations suivantes ont lieu

$$\Omega(\tilde{a}(z, t)) = \tilde{\chi}(z, t), \tag{23}$$

$$\tilde{a}(z, T) = a(z); \tag{24}$$

la fonction (22) est holomorphe par rapport à t.

Pour cela démontrons d'abord l'existence de la fonction (22). En effet, dans le cas contraire il existerait une suite de paramètres

$$\tilde{t}_f, \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

convergente vers T, pour lesquels les fonctions correspondantes (22) n'existeraient pas. Dans ce cas posons pour simplifier

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}_f(z) = \tilde{\chi}(z, t_f) = \frac{\tilde{E}_{Lf}}{z^L} + \ldots + \tilde{\bar{E}}_{Lf} z^L, \\ &\tilde{z}_{kf} = \tilde{z}_k(\tilde{t}_f) \in K(0, 1), \\ &e^{i\tilde{\Phi}_{lf}} = e^{i\tilde{\Phi}_l(\tilde{t}_f)}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}_f} = e^{i\tilde{\vartheta}(\tilde{t}_f)}. \end{aligned} \tag{26}$$

Il est évident que

$$\begin{aligned} &\tilde{\chi}_f(z) \to \chi(z), \\ &\tilde{z}_{kf} \to z_k, \\ &e^{i\tilde{\Phi}_{lf}} \to e^{i\varphi_l}, \\ &e^{i\tilde{\vartheta}_f} \to e^{i\vartheta}. \end{aligned} \tag{27}$$

Formons ensuite, vu (1,1), (26) et (19), dans certains entourages des points $w = 0$ et $z = 0$, les branches des radicaux suivants:

$$\Omega_L(w) = \sqrt[L]{\Omega(w)} = \frac{\sqrt[L]{D_L}}{w} + \ldots$$

et

$$\tilde{\chi}_{Lf}(z) = \sqrt[L]{\tilde{\chi}_f(z)} = \frac{\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}}{z} + \ldots,$$

de telle façon que le quotient des premiers coefficients $\sqrt[L]{D_L}$ et $\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}$ soit un nombre positif. Alors, comme il résulte des considérations précédentes, il existe pour tout f suffisamment grand, dans un certain entourage fixe du point $z = 0$ de rayon $\tilde{r}$, une fonction holomorphe

$$\tilde{a}_f(z) = \Omega_L^{-1}(\tilde{\chi}_{Lf}(z)) = \tilde{\alpha}_{1f} z + \ldots, \quad \tilde{\alpha}_{1f} = \frac{\sqrt[L]{D_L}}{\sqrt[L]{\tilde{E}_{Lf}}} = e^{-t_f}, \tag{28}$$

qui y remplit la condition

$$\Omega(\tilde{a}_f(z)) = \tilde{\chi}_f(z). \tag{29}$$

Soit r_f le rayon de convergence de la série du second membre de (28). Etant donné que la fonction (28) est holomorphe tout au moins dans l'entourage fixe considéré plus haut et que, vu la définition de la suite (25), elle ne peut

pas être holomorphe dans le cercle unité entier, on a

$$\tilde{r} \leqslant \tilde{r}_f < 1.$$

La série (28) remplit évidemment dans son cercle de convergence la condition (29); de plus, en vertu d'un résultat correspondant ([3], lemme 2) elle se prolonge d'une façon continue, en respectant (29), sur la circonférence de ce cercle. Ensuite, sur cette circonférence il doit exister un point $\tilde{y}_f$ où la fonction (28) n'est pas holomorphe. D'où il résulte que pour l'image

$$\tilde{x}_f = \tilde{a}_f(\tilde{y}_f) \tag{30}$$

on doit avoir

$$\Omega'(\tilde{x}_f) = 0, \tag{31}$$

car, dans le cas contraire, la fonction (28) serait, à cause de (29), holomorphe dans $\tilde{y}_f$. Extrayant au besoin des suites partielles, nous pouvons admettre l'existence des limites

$$\begin{aligned} &\lim_{f\to\infty} \tilde{r}_f = \tilde{r}_0 \geqslant \tilde{r}, \\ &\lim_{f\to\infty} \tilde{y}_f = \tilde{y}_0, \\ &\lim_{f\to\infty} \tilde{a}_f(z) = \tilde{a}_0(z), \end{aligned} \tag{32}$$

où le seconde membre de la dernière égalité de (32) est une fonction holomorphe dans le cercle $|z| < \tilde{r}_0$, qui y satisfait, à cause de (27) et (29), à l'équation $\Omega(\tilde{a}_0(z)) = \chi(z)$; en vertu de ce qui précède et de la première relation (13), la fonction $\tilde{a}_0(z)$ se confond avec la fonction $a(z)$ dans le cercle mentionné. De plus, à cause de [3], lemme 2, $\tilde{a}_0(z)$ et $a(z)$ se prolongent sur le cercle fermé $|z| \leqslant \tilde{r}_0$ et on déduit ensuite de (30) et de [3], lemme 3, la convergence

$$\lim_{f\to\infty} \tilde{x}_f = \tilde{a}_0(\tilde{y}_0) = a(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0, \tag{33}$$

d'où, en vertu de (31), résulte l'égalité

$$\Omega'(\tilde{x}_0) = 0.$$

De ce fait l'une des eventualités suivantes doit se présenter:

$$\tilde{x}_0 = w_k \quad \text{et} \quad \tilde{y}_0 = z_k, \tag{34}$$

ou bien

$$\tilde{x}_0 = e^{i\omega_l} \quad \text{et} \quad |\tilde{y}_0| = 1, \tag{35}$$

ou enfin

$$\tilde{x}_0 = e^{i\tau} \quad \text{et} \quad |\tilde{y}_0| = 1, \tag{36}$$

où k et l désignent resp. certains indices pris parmi les nombres $1, \ldots, Q$ et $1, \ldots, R$. Nous disons que dans le premier cas on doit avoir

$$\tilde{x}_f = w_k, \tag{37}$$

pour f suffisamment grand. En effet, si $\tilde{x}_f \neq w_k$ pour un nombre infini de f, la fonction $\Omega'(w)$ aurait, à cause de (31), deux racines distinctes w_k et $\tilde{x}_f \neq w_k$, tendant, d'après (33) et (34), vers la même limite w_k; ainsi le point w_k devrait être une racine au moins double de cette dérivée, ce qui n'a pas lieu. Nous en déduisons ensuite que l'on a également

$$\tilde{y}_f = \tilde{z}_{kf} \tag{38}$$

pour f suffisamment grand. En effet, si $\tilde{y}_f \neq \tilde{z}_{kf}$ pour un nombre infini de f, alors la fonction $\tilde{\chi}_f(z) - \Omega(\tilde{x}_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(w_k)$ aurait, vu (26) et (19), une racine double $\tilde{z}_{kf}$ et, en vertu de (29), (30) et (37), cette même fonction aurait également une racine $\tilde{y}_f$; étant donné que ces racines sont distinctes et tendent, en vertu de (27), (32), (33) et (34), vers une limite commune z_k, le point z_k devrait être une racine au moins triple de la fonction limite $\chi(z) - \Omega(w_k)$, c'est-à-dire au moins double de la dérivée $\chi'(z)$, ce qui n'a pas lieu. Donc on a bien (38). Mais, dans ce cas, vu que les nombres w_k et $\tilde{z}_{kf}$ sont, comme on le voit, des racines simples des dérivées $\Omega'(w)$ et $\tilde{\chi}'_f(z)$ et à cause de (29), (30), (37) et (38) la fonction (28) serait, conformément à l'information contenue dans (33, *), holomorphe au point $\tilde{y}_f$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi donc, le cas considéré est impossible. Nous disons que le cas (35) l'est également. En effet, raisonnant comme plus haut, nous constatons d'abord qu'on doit avoir

$$\tilde{x}_f = e^{i\omega_l}$$

pour f suffisamment grand. Ensuite, considérant la fonction

$$\tilde{\chi}_f(z) - \Omega(\tilde{x}_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(e^{i\omega_l}),$$

nous constatons, en vertu de (29) et (30), étant donné que le nombre à soustraire est un nombre réel, qu'elle a des racines distinctes $\tilde{y}_f$ et $1/\bar{\tilde{y}}_f$, tendant vers une limite commune $\tilde{y}_0$; de là, vu (27), nous déduisons que $\tilde{y}_0$ est une racine au moins double de la fonction limite $\chi(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, donc également une racine de la dérivée $\chi'(z)$, c'est-à-dire qu'on doit avoir $\chi(\tilde{y}_0) - \Omega(e^{i\omega_l}) = 0$ et $\chi'(\tilde{y}_0) = 0$. En même temps de (33), (13) et du théorème 1,2,II résulte que $\tilde{y}_0 = e^{i\varphi_l}$. Revenant maintenant aux fonctions $\tilde{\chi}_f(x) - \Omega(x_f) = \tilde{\chi}_f(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, nous déduisons de (27), (32) et (35) qu'elles ont trois racines distinctes $e^{i\Phi_{lf}}$, $\tilde{y}_f$ et $1/\bar{\tilde{y}}_f$, tendant vers la limite commune $e^{i\varphi_l}$. De ce fait le point $e^{i\varphi_l}$ devrait être une racine au moins triple de la fonction $\chi(z) - \Omega(e^{i\omega_l})$, donc – au moins double de la dérivée $\chi'(z)$, ce qui n'a pas lieu. Par conséquent ce cas est aussi impossible. Nous disons enfin que le cas (36) est également impossible. En effet, raisonnant comme plus-haut, nous obtenons

alors que

$$\tilde{x}_f = e^{i\tau} \tag{39}$$

pour f suffisamment grand. Démontrons que l'on aura

$$\tilde{y}_0 = e^{i\vartheta}. \tag{40}$$

En effet, raisonnant comme plus-haut, nous trouvons que $\tilde{y}_0$ est une racine double de la fonction $\chi(z)-\Omega(e^{i\tau})$, donc également une racine de la dérivée $\chi'(z)$. Donc si (40) n'avait pas lieu, on devrait avoir

$$\tilde{y}_0 = e^{i\varphi_l}$$

pour un certain l pris parmi les nombres $1, \ldots, R$; mais alors, vu (30), (33) et (13), nous aurions

$$\tilde{x}_f = \tilde{a}_f(\tilde{y}_f) \to a(\tilde{y}_0) = a(e^{i\varphi_l}) = e^{i\omega_l},$$

contrairement à (33) et (36); donc on doit avoir (40). Comme conséquence de (29) et (39) nous obtenons

$$\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) = \Omega(e^{i\tau}), \tag{41}$$

et, comme le second membre de (41) est réel, il en est de même de l'expression $\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f)$; en même temps $\tilde{y}_f$ est dans l'intérieur de $K(0, 1)$ et, vu (40), arbitrairement proche de $e^{i\vartheta}$ pour f suffisamment grand. Démontrons que pour de tels f l'inégalité suivante

$$\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) > \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) \tag{42}$$

a lieu. En effet, considérant les fonctions réelles $\tilde{\chi}_f(e^{ix})$ et $\chi(e^{ix})$, nous avons, à cause de (27), les convergences uniformes

$$\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \chi(e^{ix}), \quad \frac{d}{dx}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \frac{d}{dx}\chi(e^{ix}), \quad \frac{d^2}{dx^2}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \to \frac{d^2}{dx^2}\chi(e^{ix}); \tag{43}$$

en même temps, en vertu de la dernière relation (11) et (15), nous avons

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\chi(e^{ix})\right]_{x=\vartheta} = -\chi''(e^{i\vartheta})e^{2i\vartheta} - \chi'(e^{i\vartheta})e^{i\vartheta} < 0; \tag{44}$$

d'où, prenant ensuite un nombre arbitraire négatif q plus grand que le premier membre de (44), nous voyons qu'il existe un ε, arbitrairement petit, tel que pour f suffisamment grand on a

$$\frac{d^2}{dx^2}\tilde{\chi}_f(e^{ix}) < q \quad \text{pour} \quad x \in J, \tag{45}$$

où $J = (\tilde{\vartheta}_f - 2\arcsin(\varepsilon/2),\ \tilde{\vartheta}_f + 2\arcsin(\varepsilon/2))$ et, par conséquent, par une

intégration double, moyennant les relations

$$\left[\frac{d}{dx}\tilde{\chi}_f(e^{ix})\right]_{x=\tilde{\vartheta}_f} = 0,$$

qui résultent de (19), on trouve de même

$$\tilde{\chi}_f(e^{ix}) \leqslant \chi_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) + \tfrac{1}{2}q(x-\tilde{\vartheta}_f)^2 \quad \text{pour} \quad x \in J. \tag{46}$$

De cette dernière relation résulte encore qu'il existe un δ positif, arbitrairement petit, tel que toute valeur de l'intervalle fermé $[\tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})-\delta, \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})]$ est admise par la fonction $\tilde{\chi}_f(z)$ sur un arc de la circonférence unité $z = e^{ix}$, $x \in J$, au moins deux fois, y compris la multiplicité. De même, vu les convergences (32) et (40) et la première convergence (43), pour f suffisamment grand, on a $|\tilde{y}_f - e^{i\tilde{\vartheta}_f}| < \varepsilon$ et $|\tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f) - \tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f})| < \delta$. Si maintenant (42) n'avait pas lieu, le nombre $\zeta_f = \tilde{\chi}_f(\tilde{y}_f)$ appartiendrait à l'intervalle fermé mentionné. Mais, dans ce cas les fonctions $\chi_f(z)$ prendraient dans un entourage $|z-e^{i\tilde{\vartheta}_f}| < \varepsilon$ du point $e^{i\tilde{\vartheta}_f}$, arbitrairement petit, leurs valeurs ζ_f au moins trois fois, et cela deux fois sur l'arc correspondant de la circonférence unité: $z = e^{ix}$, $x \in (\tilde{\vartheta}_f - 2\arcsin(\varepsilon/2), \tilde{\vartheta}_f + 2\arcsin(\varepsilon/2))$ et une fois au point $\tilde{y}_f$ à l'intérieur du cercle unité; passant ensuite à la limite avec f, la fonction limite $\chi(z)$ prendrait alors dans un entourage arbitrairement petit du point limite $e^{i\vartheta}$ sa valeur $\zeta = \chi(e^{i\vartheta})$ au moins trois fois; cependant cela est contraire au fait qu'au point $e^{i\vartheta}$ la seconde dérivée $\chi''(z)$ est, vu (15), différente de zéro. Donc (42) a bien lieu. En même temps, conformément à (20) et (12), on a

$$\tilde{\chi}_f(e^{i\tilde{\vartheta}_f}) \geqslant \Omega(e^{it}). \tag{47}$$

Les relations (42), (47) et (41) sont contradictoires et de ce fait le cas considéré (36) est également impossible.

Ayant exclu tous les cas (34), (35) et (36) nous avons ainsi prouvé l'existence de la fonction (22) qui satisfait à l'équation (23).

L'univalence de la fonction (22) résulte de ce qui précède et du théorème 1,1,II.

Ensuite nous allons démontrer que la fonction (22) est holomorphe par rapport à t. En effet, cela résulte immédiatement du fait que cette fonction peut être représentée dans un certain entourage des arguments z_0, t_0 sous la forme

$$\tilde{a}(z, t) = \Omega_0^{-1}(\tilde{\chi}_0(z, t)),$$

ou bien

$$\tilde{a}(z, t) = \Omega_L^{-1}(\tilde{\chi}_L(z, t)),$$

analogue en essence et en notations à (33, $*$) ou à (28), et de l'analycité évidente de la fonction (16) et, par conséquent, de la fonction $\tilde{\chi}_0(z, t)$, ou de la fonction $\tilde{\chi}_L(z, t)$. De plus, l'analycité et, par suite, la continuité de la

fonction (22) par rapport aux arguments z, t entraînent, ce qu'on voit facilement, la convergence presque uniforme dans le cercle unité

$$\tilde{a}(z, t) \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} \tilde{a}(z, t_0), \quad t_0 \in [T-\eta, T+\eta].$$

Enfin, de la première relation (18), de (23) et de la première relation (13) résulte (24).

$\tilde{3}^{\circ}$ Démontrons maintenant les relations

$$\tilde{a}(\tilde{z}_k(t), t) = w_k, \qquad k = 1, \ldots, Q,$$
$$\tilde{a}(e^{i\tilde{\varphi}_l(t)}, t) = e^{i\omega_l}, \qquad l = 1, \ldots, R,$$
$$\tilde{a}'_z(0, t) = \tilde{\alpha}_1(t) = e^{-t}.$$

Dans ce but supposons, au contraire, qu'il existe un k parmi les nombres $1, \ldots, Q$, et une suite de paramètres du type (25) tels que

$$\tilde{a}(\tilde{z}_k(\tilde{t}_f), \tilde{t}_f) \neq w_k, \quad f = 1, 2, \ldots \tag{49}$$

Alors, en désignant les premiers membres de (49) par $\tilde{\zeta}_f$, nous tirons de la relation (49) et de la continuité des fonctions (17), (22), de (18) et (24), ainsi que de (13)

$$\lim_{f \to \infty} \tilde{\zeta}_f = a(z_k) = w_k; \tag{50}$$

en même temps, d'après (23) et (19), on a

$$\Omega(\tilde{\zeta}_f) = \tilde{\chi}(\tilde{z}_k(\tilde{t}_f), \tilde{t}_f) = \Omega(w_k). \tag{51}$$

Cependant il résulterait de (51), (50) et (49) que la fonction $\Omega(w)$ prend la valeur $\Omega(w_k)$ en un nombre infini de points $\tilde{\zeta}_f$ accumulés au point w_k, ce qui est impossible. Donc les premières relations (48) ont lieu et nous constatons d'une façon analogue que les secondes relations de (48) ont également lieu. Les dernières relations de (48) résultent immédiatement des premières relations de (19), de (1,1), (23) et (22).

Soit maintenant $\tilde{h}$, d'après (32, $*$), un arc arbitraire, partant de l'extrémité de H et en outre disjoint de H, le long duquel $\Omega(w)$ est encore réelle.

$\tilde{4}^{\circ}$ Démontrons que pour η suffisamment petit la fonction $\tilde{a}(z, t)$ représente le cercle $K(0, 1)$ sur le domaine $\tilde{G}_t = K(0, 1) \setminus \tilde{H}_t$, où $\tilde{H}_t$ est un arc contenu dans $H \cup \tilde{h}$, ayant avec lui l'origine commune. A cet effet nous remarquons d'abord que pour les η mentionnés on doit avoir pour les frontières $\tilde{G}_t^*$ des domaines mentionnés les relations

$$\tilde{G}_t^* \subset K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}. \tag{52}$$

En effet, en vertu de (23) et du théorème 1,1,II, nous avons évidemment

$$\tilde{G}_t^* = \tilde{a}(K^*(0, 1), t).$$

Supposons que, contrairement à l'assertion, il existe une suite de paramètres

$$\hat{t}_f, \quad f = 1, 2, \ldots,$$

plus grande que T et tendant vers T, telle que les frontières correspondantes $\tilde{G}^*_{\hat{t}_f}$ contiennent toujours les points

$$x_f = \tilde{a}(y_f, \hat{t}_f), \quad f = 1, 2, \ldots, \tag{53}$$

n'appartenant pas à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, situés dans $K(0, 1)$ et étant les images de certains points y_f de la circonférence $K^*(0, 1)$. En vertu de (29) et (53) et de la propriété des fonctions rationnelles spéciales on a

$$\operatorname{Im}\{\Omega(x_f)\} = \operatorname{Im}\{\tilde{\chi}_f(y_f, \hat{t}_f)\} = 0 \tag{54}$$

et, par conséquent,

$$\Omega(x_f) = \Omega(1/\bar{x}_f). \tag{55}$$

En même temps, $x_f \neq 1/\bar{x}_f$, car le point x_f n'appartient pas, d'après l'hypothèse, à $K^*(0, 1)$. Supposons, en extrayant au besoin une suite partielle, que sur la circonférence $K^*(0, 1)$ existe la limite

$$y_0 = \lim_{f \to \infty} y_f. \tag{56}$$

Alors, vu (53), (24), (56) et vu la continuité de la fonction (22), existe également la limite

$$x_0 = \lim_{f \to \infty} x_f = \lim_{f \to \infty} \tilde{a}(y_f, \hat{t}_f) = a(y_0). \tag{57}$$

De (14) et (57) résulte que le point x_0 appartient à la somme $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$. Mais il est facile de démontrer qu'il ne saurait appartenir à H. En effet, si cela avait lieu, nous aurions deux cas possibles:

$$x_0 = e^{i\tau}, \tag{58}$$

ou bien

$$x_0 \neq e^{i\tau}. \tag{59}$$

Dans le premier cas, d'après la définition de l'arc H, du fait que $e^{i\tau}$ est une racine simple de la dérivée $\Omega'(w)$ et de (32, $*$), nous déduisons que tous les points x suffisamment proches de x_0, remplissant la condition

$$\operatorname{Im}\{\Omega(x)\} = 0, \tag{60}$$

doivent être contenus dans la somme $H^*_- \cup H^*_+ \cup H \cup \tilde{H}$, où $\tilde{H}$ désignent l'arc symétrique de H par rapport à la circonférence unité et H^*_- et H^*_+ des arcs quelconques de cette circonférence, partant de x_0 dans le deux sens; ainsi, d'après (54) et (57), le point (53), situé à l'intérieur de $K(0, 1)$, devrait

appartenir pour f suffisamment grands à la some $K^*(0, 1) \cup H$, donc à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, contrairement à l'hypothèse. Dans le second cas, en vertu de (54), du fait que le point x_0 n'est pas une racine de la dérivée $\Omega'(w)$, car il n'y en a pas sur l'arc H excepté $e^{i\tau}$, et vu (32, $*$), tous les points en question x de (60) devraient être contenus dans la somme $H_-^0 \cup H_+^0$, où H_-^0 et H_+^0 désignent les parties de l'arc $H \cup \tilde{h}$, partant de x_0 dans les deux sens; de ce fait, comme ci-haut, à cause de (57), les points (53) devraient appartenir pour f suffisamment grands à $K^*(0, 1) \cup H \cup \tilde{h}$, contrairement à l'hypothèse. Donc, les deux cas sont impossibles. Par conséquent, le point x_0 doit appartenir à $K^*(0, 1)$, n'appartenant pas à H. Donc ce point, comme limite des suites de points x_f et $1/\bar{x}_f$ où $\Omega(w)$ prend les mêmes valeurs (55), doit être une racine de la dérivée $\Omega'(w)$ et cela, vu ce qui précède, différente de $e^{i\tau}$. Nous pouvons donc admettre que

$$x_0 = {}^{i\omega_l}, \tag{61}$$

où l est un certain indice pris parmi $1, \ldots, R$. D'après les relations démontrées (48), (23) et l'observation (33, $*$), nous voyons maintenant que pour f suffisamment grands la fonction $\tilde{a}(z, \hat{t}_f)$ est holomorphe au point $e^{i\tilde{\varphi}_l(\hat{t}_f)}$; en outre, vu (34, $*$), l'image d'un certain demi-entourage fixe intérieur de ce point couvre un demi-entourage analogue intérieur du point $e^{i\omega_l}$. Cela est impossible, car en vertu de l'hypothèse chaque demi-entourage ouvert de x_0 contient des points de la suite (53) qui n'appartiennent pas à l'image du cercle unité, donc à plus forte raison à l'image d'un certain demi-entourage intérieur du point $e^{i\tilde{\varphi}_l(\hat{t}_f)}$. Ainsi doivent avoir lieu les relations (52). Désignons maintenant par $\hat{w}^*(t)$ le dernier point, comptant à partir de $e^{i\tau}$ de l'arc $H \cup \tilde{h}$, qui appartient à la frontière (52). Alors tout une partie de cet arc, depuis l'origine $e^{i\tau}$ jusqu'à $\hat{w}^*(t)$, doit être contenue dans la frontière $\tilde{G}_t^*$ de (52). En effet, si sur $H \cup \tilde{h}$ il existait un point $\hat{w}$ précédant $\hat{w}^*(t)$ n'appartenant pas à $\tilde{G}_t^*$, ce point diviserait d'une façon évidente l'ensemble $\tilde{G}_t^*$ en deux ensembles fermés, ce qui n'est pas possible, car $\tilde{G}_t^*$ est connexe. Donc la partie mentionnée de l'arc $H \cup \tilde{h}$ doit être contenue dans $\tilde{G}_t^*$; désignant cette partie par $\tilde{H}_t$, nous obtenons immédiatement, vu (52), la propriété $\tilde{4}^\circ$.

Remarquons enfin que pour $T > 0$, η suffisamment petit et $t \in (T-\eta, T\}$ les fonctions (16), (17), (22) coïncident respectivement avec (5,1), (6,1), (12,1). En effet, à cause de la remarque 1,I, p. 22, cela résulte immédiatement des conditions (8,1), (19), (13,1), (23), des conditions (18), de la continuité des fonctions (16) et (17) et de la condition que pour f suffisamment grands les fonctions (16) et (17) sont arbitrairement proches des limites (6)–(9).

D'après ce qui précède les fonctions (5,1), (6,1) et (12,1) se prolongent à l'intervalle $[0, T+\eta)$, en respectant évidemment, à cause de $\tilde{1}^\circ$–$\tilde{4}^\circ$, les conditions 1°–4° avec la notation $H_t = \tilde{H}_t$, $T \leqslant t < T+\eta$; donc, en particulier, elles se prolongent à l'intervalle $[0, T]$.

B. Réalisation de la condition 5°.

Supposons en premier lieu que 5° n'ait pas lieu, donc, conformément à (14), que $H_T \subset H$ et $H_T \neq H$. Alors, de la convergence $a(z, t) \to a(z, T)$ sur la circonférence $K^*(0, 1)$ pour $t \to T$ à droite, de même que dans la preuve des relations (13), il résulterait, comme plus haut, que $G_t^* = K^*(0, 1) \cup \cup H_t \subset H$ pour t situés dans un certain entourage droit du point T, suffisamment petit. Mais il est facile de constater que pour les fonctions (5.1), (6,1), (12,1) les conditions 1°–4° seraient alors remplies dans un intervalle ouvert plus grand que $[0, T)$, contrairement à la définition de ce dernier. Donc la condition annoncée doit avoir lieu.

En résumant ce qui précède les fonctions (5,1), (6,1) et (12,1) sont définies tout d'abord dans l'intervalle $[0, T\}$ et ensuite, prolongées à l'intervalle $[0, T]$, elles réalisent toutes les conditions du théorème fondamental.

Les points 4° et 5° du théorème fondamental représentent le théorème de Riemann pour les domaines spéciaux du type $K(0, 1)\setminus H$, où H est un arc spécial correspondant à une fonction spéciale $\Omega(w)$. Le passage des domaines spéciaux aux domaines simplement connexes arbitraires s'effectue au moyen du théorème de Carathéodory sur le noyau en profitant successivement des convergences suivantes: tout de domaine de Löwner avec une seule coupure continue est la limite d'une suite de domaines spéciaux considérés plus haut (v. lemme 1,3,I); tout domaine simplement connexe, contenant 0 et contenu dans le cercle unité, limité par une ligne brisée fermée de Jordan de côtés parallèles aux axes de coordonées est la limite d'une suite de domaines de Löwner avec une seule coupure continue (v. [9], p. 106); tout domaine simplement connexe contenant 0 est la limite d'une suite de domaines qui sont formés par des transformation homothétiques de domaines simplement connexes, contenus dans le cercle unité, limités par des lignes brisées de côtés parallèles aux axes de coordonnées (v. [8], p. 107–108).

3. L'équation de Löwner pour les domaines spéciaux. Une conséquence immédiate du théorème fondamental de 1, III est le résultat suivant, qu'on peut considérer comme un cas particulier de celui de Löwner sur la paramétrisation des fonctions univalentes. Ce résultat a été obtenu par J. Janikowski dans [7].

THÉORÈME 1. *Soit $G = K(0, 1)\setminus H$ un domaine spécial qui correspond à une fonction rationnelle spéciale $\Omega(w)$. Nous supposons que toutes les racines de la dérivée $\Omega'(w)$ sont simples et situées en dehors de l'arc H à l'exception de son origine, qui est évidemment une racine de cette dérivée. Soit enfin*

$$a(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots, \quad z \in K(0, 1), \quad \alpha_1 > 0,$$

la fonction qui transforme d'une façon conforme $K(0, 1)$ en G. Alors il existe dans un intervalle $[0, T]$ une famille paramétrique de fonctions algébriques spéciales

$$a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots, \quad \alpha_1(t) > 0,$$

et une fonction $k(t)$, $|k(t)| = 1$, *holomorphe par rapport à* t *et vérifiant les conditions*

$$(1) \qquad a_t'(z, t) = -a_z'(z, t)\, z \frac{1+zk(t)}{1-zk(t)} \quad \textit{pour} \quad z \in K(0, 1),\ t \in [0, T],$$

$$(2) \qquad a(z, 0) = z, \quad a(z, T) = a(z).$$

Démonstration. En vertu du théorème fondamental (v. 1,III) il existe dans un intervalle fini $[0, T]$, $T > 0$, une famille de fonctions rationnelles spéciales

$$(3) \qquad \chi(z, t) = \frac{E_L(t)}{z^L} + \ldots + \overline{E_L(t)}\, z^L, \quad E_L(t) \neq 0,$$

une famille de points complexes

$$(4) \qquad \begin{array}{ll} z_k(t) \in K(0, 1), & k = 1, \ldots, Q, \\ e^{i\varphi_l(t)}, & l = 1, \ldots, R, \\ e^{i\vartheta(t)} & \end{array}$$

et une famille de fonctions algébriques spéciales

$$(5) \qquad a(z, t) = \alpha_1(t) z + \alpha_2(t) z^2 + \ldots,$$

telles que les relations (7,1)–(9,1) et (13,1)–(17,1) sont remplies. En outre les points (4) sont toutes les racines de la dérivée $\chi_z'(z, t)$ et elles sont simples; les fonctions (5) représentent le cercle $K(0, 1)$ sur des domaines spéciaux $G_t = K(0, 1) \backslash H_t$, où H_t est un arc spécial contenu dans H, ayant avec lui l'origine commune;

$$(6) \qquad a(z, T) = a(z);$$

de plus, les fonctions (3), (4), (5) sont holomorphes par rapport à t de l'intervalle $[0, T]$. En dérivant maintenant l'identité (13,1) successivement par rapport à z et t, on obtient les relations

$$(7) \qquad \Omega'(a(z, t))\, a_z'(z, t) = \chi_z'(z, t),$$

$$(8) \qquad \Omega'(a(z, t))\, a_t'(z, t) = \chi_t'(z, t).$$

D'autre part, en dérivant la troisième et la cinquième identité (8,1) par rapport à t et en tenant compte de la quatrième, on a

$$(9) \qquad \chi_t'(z_k(t), t) = 0, \quad k = 1, \ldots, Q,$$

$$(10) \qquad \chi_t'(e^{i\varphi_l(t)}, t) = 0, \quad l = 1, \ldots, R.$$

On voit aisément que $\chi_t'(z, t)$ est une fonction rationnelle spéciale de degré $2L$, car, en vertu de la première identité (8,1),

$$(11) \qquad E_L'(t) = Le^{Lt} D_L \neq 0.$$

De là et de (9), (10) résulte que les points $z_k(t)$, $1/\overline{z_k(t)}$, $e^{i\varphi_l(t)}$, $k = 1, \ldots, Q$, $l = 1, \ldots, R$, sont racines de la fonction $\chi_t'(z, t)$ et, comme $2L = 2Q+R+1$, il existe encore une racine de $\chi_t'(z, t)$ – désignons-la par $e^{i\vartheta_1(t)}$. En résumant ce qui précède, nous voyons que les fonctions rationnelles spéciales $iz\chi_z'(z, t)$ et $\chi_t'(z, t)$, de mêmes degrés $2L$, ont les mêmes racines à l'exception d'une; ces racines supplémentaires sont $e^{i\vartheta(t)}$ pour $iz\chi_z'(z, t)$ et $e^{i\vartheta_1(t)}$ pour $\chi_t'(z, t)$. En tenant compte de ce qui précède, on a l'identité

$$(z-e^{i\vartheta(t)})\chi_t'(z, t) = c(t)(z-e^{i\vartheta_1(t)})\chi_z'(z, t)iz. \tag{12}$$

En comparant les coefficients des plus grandes et des plus petites puissances de z des deux membres de (12), nous avons, à cause de la relation (11),

$$c(t) = i, \quad e^{i\vartheta_1(t)} = -e^{i\vartheta(t)}.$$

Posons

$$k(t) = e^{-i\vartheta(t)}. \tag{13}$$

En tenant compte de ce qui a été dit, nous pouvons mettre l'identité (12) sous la forme

$$\chi_t'(z, t) = -\chi_z'(z, t)z\frac{1+zk(t)}{1-zk(t)}. \tag{14}$$

Utilisant maintenant (7), (8) et (14), nous obtenons (1). Les relations (2) résultent de (6) et (14,1). L'analycité de $k(t)$ résulte de (13).

Bibliographie

[1] L. Bieberbach, *Lehrbuch der Funktionentheorie II*, Berlin 1927.

[2] C. Carathéodory, *Conformal representation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1966.

[3] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes algébriques bornées*, Dissertationes Math. 10 (1955), pp. 1–39

[4] — *Fonctions univalentes inverses. Polynômes univalents*, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, 9 (7) (1958), pp. 1–21.

[5] Z. Charzyński et J. Śladkowska, *Remarques sur l'approximation de l'arc simple par les arcs brisés, réguliers et arcs analytiques*, ibid. 17 (1) (1966), pp. 1–9.

[6] — — *Fonctions algébriques et variations analytiques des fonctions univalentes*, Dissertationes Math. 70 (1970), pp. 1–80.

[7] J. Janikowski, *Méthode algébrique et équation de Löwner*, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, 12 (16) (1961), pp. 1–9.

[8] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie I*, Springer Verlag, Berlin 1923.

[9] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*, Math. Ann. 89 (1923), pp. 103–121.

[10] J. Mycielski and S. Paszkowski, *A generalization of Chebyshev polynomials*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (7) (1960), pp. 433–438.

[11] S. Saks and A. Zygmund, *Analytic functions*, Warszawa 1965.

[12] J. Śladkowska, *Sur l'approximation de courbes arbitraires par les lignes de niveau des fonctions rationnelles*, J. Anal. Math. 14 (1965), pp. 409–431.