POLSKA AKADEMIA NAUK · INSTYTUT MATEMATYCZNY

# ROZPRAWY MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY
KAROL BORSUK redaktor
ANDRZEJ MOSTOWSKI MARCELI STARK
STANISŁAW TURSKI

XIII

K. URBANIK

## Własności graniczne procesów Markowa

WARSZAWA 1957
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

S. 7133

COPYRIGHT 1957
by
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA (Poland), ul. Miodowa 10

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced in any form, by mimeograph or any other means, without permission in writing from the publishers.

BIBLIOTEKA UNIWERSYTECKA W WARSZAWIE
18

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE–WARSZAWA 1957

Nakład 925+75 egz. Podpisano do druku 15.IX.1957 r.
Ark. wyd. 2,75 druk. 3 Druk ukończono 30. IX. 1957 r.
Pap. dr. sat. kl. III, 80 g, 70×100 Zamówienie nr 443/57 – F-14.
Cena zł 8,–

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

## Własności graniczne procesów Markowa

Zasadniczym tematem pracy jest badanie granic w nieskończoności i rozkładów maksymalnej wartości realizacji procesów stochastycznych typu Markowa. Wyniki w niej przedstawione wyrosły z zagadnień postawionych przez Profesorów Edwarda Marczewskiego i Hugona Steinhausa. Im też oraz Profesorowi Czesławowi Ryll-Nardzewskiemu zawdzięczam wiele cennych rad i wskazówek, za które składam serdeczne podziękowania.

Główne rezultaty pracy zostały przedstawione na VIII Kongresie Matematyków Polskich w Warszawie (wrzesień 1953), a twierdzenia dotyczące procesów z przeliczalną ilością stanów opublikowano bez dowodów w nocie [11].

Na początku każdej części pracy podano definicje pojęć w niej występujących oraz sformułowano twierdzenia i zasadnicze wnioski. Dowody twierdzeń i lematów są treścią osobnych ustępów.

**I.1.** W niniejszej pracy rozważamy procesy stochastyczne $\langle \Omega, B_\Omega, P \rangle$, spełniające następujące warunki:

1° Przestrzeń $\Omega$ realizacji procesu składa się z funkcji $\omega$ schodkowych (to znaczy przedziałami stałych i mających skończoną ilość skoków w każdym przedziale skończonym) określonych dla $t \geqslant 0$, przybierających wartości z przestrzeni $\mathfrak{X}$ metrycznej, ośrodkowej i lokalnie zwartej oraz mających w zerze ustaloną wartość $\omega(0) = x_0$.

2° $B_\Omega$ jest najmniejszym $\sigma$-ciałem podzbiorów przestrzeni $\Omega$ rozpiętym na zbiorach postaci

$$A(U, t) = \{\omega : \omega(t) \in U\}, \tag{1}$$

gdzie $U$ jest dowolnym podzbiorem otwartym przestrzeni $\mathfrak{X}$.

3° Proces $\langle \Omega, B_\Omega, P \rangle$ jest jednorodnym procesem Markowa, to znaczy istnieje funkcja $p(t, x, A)$, zwana *prawdopodobieństwem przejścia* od $x$ do $A$ w czasie $t$, określona dla $t \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{X}$ i wszystkich zbiorów borelowskich $A \subset \mathfrak{X}$, spełniająca warunki:

($\alpha$) $p(t, x, A)$ jest funkcją ciągłą argumentu $x$ przy ustalonych $t > 0$ i zbiorach $A$ otwartych, zawierających $x$.

($\beta$) $p(t, x, A)$ jest unormowaną $\sigma$-miarą na $\sigma$-ciele podzbiorów borelowskich przestrzeni $\mathfrak{X}$ przy ustalonych $t$ i $x$.

($\gamma$) $p(t, x, A)$ spełnia równanie Chapmana i Kołmogorowa

$$p(t+T, x, A) = \int_{\mathfrak{X}} p(t, y, A) p(T, x, dy)$$

z warunkiem początkowym

$$p(0, x, A) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \in A, \\ 0, & \text{gdy} \quad x \text{ non} \in A. \end{cases}$$

($\delta$) Jeżeli $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, to

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : \omega(t_i) \in A_i\}\Big) =$$

$$= \int_{A_{n-1}} \int_{A_{n-2}} \ldots \int_{A_1} p(t_n - t_{n-1}, y_n, A_n) \ldots p(t_2 - t_1, y_1, dy_2) p(t_1, x_0, dy_1)$$

(por. np. Doob [3], str. 255).

Warunki 1°, 2° i 3° na mocy twierdzenia Dooba ([3], str. 258-261) implikują istnienie granic

$$q(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - p\big(t, x, (x)\big)}{t}, \tag{2}$$

$$q(x, A) = \lim_{t \to 0+} \frac{p(t, x, A)}{t}, \tag{3}$$

gdzie $A$ jest dowolnym podzbiorem borelowskim zbioru $\mathfrak{X} - (x)$. Funkcje $q(x)$ i $q(x, A)$ nazywamy *intensywnościami*. Przyjmujemy dodatkowo warunek

4° Intensywności $q(x)$ i $q(x, A)$ są funkcjami ciągłymi zmiennej $x$, przy czym przy ustalonym $x$ intensywność $q(x, A)$ jest skończoną $\sigma$-miarą na podzbiorach borelowskich zbioru $\mathfrak{X} - (x)$.

Ze wzorów (2) i (3) wynika bezpośrednio równość

$$q(x) = q\big(x, \mathfrak{X} - (x)\big).$$

Stąd na mocy lokalnej zwartości i ośrodkowości przestrzeni oraz warunku 4° otrzymujemy wzór

$$q(x) = \sup q(x, A),$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich podzbiorach zwartych $A$ zbioru $\mathfrak{X} - (x)$, a więc po podzbiorach, na których intensywność $q(x)$ jest ogra-

niczona. Widzimy zatem, że intensywności $q(x)$ i $q(x, A)$ procesu spełniającego warunki 1°, 2°, 3° i 4° tworzą „*a standard pair of q-functions*" w sensie Dooba (por. [3], str. 265).

Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią dyskretną, na przykład przestrzenią liczb naturalnych (z dyskretną topologią), to wiadomo, że warunki 1°, 2° i 3° implikują warunek 4° (por. Doob [2], str. 468; Kołmogorow [8], str. 53).

Proces stochastyczny spełniający warunki 1°, 2°, 3° i 4° nazywamy w tej pracy krótko *procesem Markowa*.

**I.2.** Przypomnimy teraz znane własności procesów Markowa.

A. Jeżeli znamy intensywności procesu Markowa, to prawdopodobieństwa przejścia wyznaczamy z równania (por. Doob [3], str. 269)

$$(4)\qquad p(t, x, A) = \int_0^t ds \int_{\mathfrak{X}-(x)} \exp\big(-q(x)s\big)\, p(t-s, y, A)\, q(x, dy) + \exp\big(-q(x)t\big)\,\delta(x, A),$$

gdzie

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 1, & \text{gdy} \quad x \in A, \\ 0, & \text{gdy} \quad x \text{ non} \in A. \end{cases}$$

Z równania (4) wynika w szczególności ciągłość prawdopodobieństwa przejścia $p(t, x, A)$ względem argumentu $t$.

B. Dla każdego $x \in \mathfrak{X}$ zachodzi nierówność (por. Doob [3], str. 259)

$$(5)\qquad p\big(t, x, (x)\big) \geqslant \exp\big(-q(x)t\big) \qquad (t \geqslant 0).$$

C. Niech $\mathfrak{A}(T)$ oznacza najmniejsze $\sigma$-ciało rozpięte na zbiorach postaci (1), gdzie $t \geqslant T$. Prawdopodobieństwa przejścia $p(t, x, A)$ określają jednoznacznie prawdopodobieństwo warunkowe

$$\mathrm{P}\big(A|\omega(T) = x\big) \quad \text{dla} \quad A \in \mathfrak{A}(T),$$

które jest unormowaną $\sigma$-miarą na $\mathfrak{A}(T)$, funkcją mierzalną zmiennej $x$ i spełnia warunki (por. Doob [3], str. 258)

$$(6)\qquad \mathrm{P}\big(A \cap \{\omega(T) \in B\}\big) = \int_B \mathrm{P}\big(A|\omega(T) = x\big)\, p(T, x_0, dx)$$

$$\text{dla} \quad A \in \mathfrak{A}(T) \quad \text{i} \quad B \subset \mathfrak{X},$$

$$(7)\qquad \mathrm{P}\big(A|\omega(T) = x\big) = \mathrm{P}\big(T_t A|\omega(T-t) = x\big),$$

gdzie $T_t\omega(s) = \omega(s-t)$, a symbolem $\{\omega(t) \in B\}$ oznaczamy zbiór $\{\omega\colon \omega(t) \in B\}$.

D. Jeżeli $x$ należy do wnętrza zbioru $A$ albo jeżeli $x$ nie należy do domknięcia zbioru $A$, to prawdopodobieństwo przejścia $p(t, x, A)$ jest

funkcją ciągłą zmiennej $x$ przy $t$ i $A$ ustalonych. Wynika to z równania (4) i ciągłości intensywności $q(x)$, $q(x, B)$ i funkcji $\delta(x, A)$ względem $x$.

**I.3.** Zajmiemy się teraz badaniem realizacji $\omega(t)$ procesu Markowa, gdy argument $t$ wzrasta nieograniczenie.

Punkt $x \in \mathfrak{X}$ nazywamy *punktem krytycznym procesu Markowa*, gdy dla każdego $t \geqslant 0$, z prawdopodobieństwem 1 zachodzi następująca implikacja:

$$\text{(8)} \qquad \text{Jeżeli} \quad \omega(t) = x, \quad \text{to} \quad \omega(T) = x \quad \text{dla} \quad T \geqslant t.$$

Dla punktów krytycznych procesu zachodzi więc równość $p(t, x, (x)) = 1$, która wobec wzoru (2) pociąga $q(x) = 0$. Jeżeli $q(x) = 0$, to z twierdzenia Dooba wynika implikacja (8) (por. Doob [3], str. 261). Otrzymujemy zatem charakteryzację punktów krytycznych za pomocą intensywności:

*Punkt $x \in \mathfrak{X}$ jest punktem krytycznym procesu wtedy i tylko wtedy, gdy $q(x) = 0$.*

Punkt $x$ nazywamy *punktem granicznym procesu*, gdy dla każdego otoczenia $U$ punktu $x$ zachodzi nierówność

$$\text{(9)} \qquad \lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \{\omega(T) \in U\}\Big) > 0.$$

Widzimy więc, że w każdym otoczeniu punktu granicznego procesu znajdują się z prawdopodobieństwem dodatnim wartości realizacji $\omega(t)$ dla dowolnie dużych $t$.

Zachodzi następujące twierdzenie, charakteryzujące niekrytyczne punkty graniczne procesu za pomocą prawdopodobieństw przejścia:

TWIERDZENIE 1. *Punkt niekrytyczny $x$ jest punktem granicznym procesu Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $U$ punktu $x$ zachodzi równość*

$$\int_0^\infty p(t, x_0, U)\,dt = \infty, \qquad \textit{czyli} \qquad \int_0^\infty \mathrm{P}\big(\omega(t) \in U\big)\,dt = \infty.$$

Dowód tego twierdzenia jest podany w ustępie I.6.

Jeżeli przestrzeń $\mathfrak{X}$ wartości realizacji procesu jest dyskretna, to każdy punkt tej przestrzeni jest swoim otoczeniem. Wówczas punkt $n \in \mathfrak{X}$ jest punktem granicznym procesu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \{\omega(T) = n\}\Big) > 0.$$

Z definicji punktu krytycznego procesu otrzymujemy nierówność

$$\text{(10)} \qquad p(t, x_0, n) \leqslant p(T, x_0, n) \qquad (T \geqslant t;\ n \text{ — punkt krytyczny}).$$

Jeżeli istnieje $t_0$, dla którego $p(t_0, x_0, n) > 0$ i $n$ jest punktem krytycznym procesu, to z nierówności (10) otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t}\{\omega(T) = n\}\Big) \geqslant \lim_{t\to\infty} p(t, x_0, n) \geqslant p(t_0, x_0, n) > 0,$$

a zatem $n$ jest punktem granicznym procesu. Jeżeli natomiast $p(t, x_0, n) = 0$ dla każdego $t \geqslant 0$, to wobec schodkowości funkcji $\omega$ pociągającej inkluzję

$$\bigcup_{T\geqslant 0}\{\omega(T) = n\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega(t_i) = n\} \qquad (t_i\text{—ciąg gęsty})$$

mamy

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant 0}\{\omega(T) = n\}\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} p(t_i, x_0, n) = 0,$$

a zatem $n$ nie jest punktem granicznym. Widzimy więc , że jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią dyskretną, to punkt krytyczny $n$ wtedy i tylko wtedy jest punktem granicznym procesu, gdy

$$\int_0^{\infty} p(t, x_0, n)\,dt = \infty.$$

Twierdzenie 1 możemy więc w tym przypadku wzmocnić:

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią dyskretną, to punkt $n \in \mathfrak{X}$ wtedy i tylko wtedy jest punktem granicznym procesu, gdy*

$$\int_0^{\infty} p(t, x_0, n)\,dt = \infty, \qquad \textit{czyli} \qquad \int_0^{\infty} \mathrm{P}\big(\omega(t) = n\big)\,dt = \infty.$$

Można podać prostą interpretację probabilistyczną całek występujących w twierdzeniach 1 i 2. Niech $\nu_U(\omega)$ będzie czasem przebywania procesu w otoczeniu $U$, to znaczy

$$\nu_U(\omega) = \big|\{t\colon \omega(t) \in U\}\big|,$$

gdzie $|A|$ oznacza miarę Lebesgue'a zbioru $A$. Ponieważ realizacje procesu są funkcjami schodkowymi, więc $\nu_U(\omega)$ jest funkcją mierzalną parametru $\omega$, czyli zmienną losową. Przyjmijmy

$$\nu_{U,T}(\omega) = \big|\{t\colon \omega(t) \in U, t \geqslant T\}\big|;$$

wówczas

$$\nu_{U,T_1}(\omega) \leqslant \nu_{U,T_2}(\omega) \qquad \text{dla} \qquad T_1 < T_2$$

oraz

$$\lim_{T\to\infty} \nu_{U,T}(\omega) = \nu_U(\omega).$$

Stąd wynika równość (por. Halmos [7], § 27)

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\big(\nu_{U,T}(\omega)\big) = \mathrm{E}\big(\nu_U(\omega)\big), \tag{11}$$

gdzie $\mathrm{E}\big(f(\omega)\big)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej $f(\omega)$.

Niech $\chi(x)$ będzie funkcją charakterystyczną (w sensie teorii mnogości) otoczenia $U$. Określamy ciąg zmiennych losowych:

$$a_{n,T}(\omega) = (T/n)\sum_{k=0}^{n-1} \chi\big(\omega(kT/n)\big) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzi wówczas równość

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,T}(\omega) = \nu_{U,T}(\omega).$$

Stąd wobec nierówności $0 \leqslant a_{n,T}(\omega) \leqslant T$ na mocy twierdzenia Lebesgue'a (por. Halmos [7], § 27) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\big(a_{n,T}(\omega)\big) = \mathrm{E}\big(\nu_{U,T}(\omega)\big). \tag{13}$$

Uwzględniając wzór (12) mamy równość

$$\mathrm{E}\big(a_{n,T}(\omega)\big) = (T/n)\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}\big(\omega(kT/n) \in U\big).$$

A zatem wobec (13)

$$\mathrm{E}\big(\nu_{U,T}(\omega)\big) = \int_0^T \mathrm{P}\big(\omega(t) \in U\big)dt.$$

W oparciu o wzór (11) wynika stąd równość

$$\mathrm{E}\big(\nu_U(\omega)\big) = \int_0^\infty \mathrm{P}\big(\omega(t) \in U\big)dt.$$

Widzimy więc, że całka $\int_0^\infty \mathrm{P}\big(\omega(t) \in U\big)dt$ jest średnim czasem przebywania procesu w otoczeniu $U$, co pozwala sformułować twierdzenia 1 i 2 w następującej postaci:

TWIERDZENIE 1'. *Punkt niekrytyczny $x$ wtedy i tylko wtedy jest punktem granicznym procesu, gdy średni czas przebywania procesu w dowolnym otoczeniu punktu $x$ jest nieskończony.*

TWIERDZENIE 2'. *Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią dyskretną, to punkt $n \in \mathfrak{X}$ wtedy i tylko wtedy jest punktem granicznym procesu, gdy średni czas, w którym proces ma wartość $n$, jest nieskończony.*

**I.4.** Podamy teraz kilka przykładów zastosowania twierdzeń 1 i 2. Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią liczb całkowitych nieujemnych z dyskretną

topologią, to zgodnie z przyjętym zwyczajem symbolem $P_n^k(t)$ oznaczamy prawdopodobieństwo przejścia od stanu $n$ do stanu $k$ w czasie $t$. Dla intensywności przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$a_n^k = \lim_{t\to 0+} \frac{P_n^k(t)}{t} \quad \text{dla} \quad k \neq n,$$

$$a_n^n = \lim_{t\to 0+} \frac{1-P_n^n(t)}{t}.$$

Jeżeli znamy intensywności procesu, to prawdopodobieństwa przejścia wyznaczamy z równań Kołmogorowa (por. [4], str. 64):

$$\frac{d}{dt} P_n^k(t) = a_k^k P_n^k(t) + \sum_{s\neq k} a_s^k P_n^s(t) \tag{14}$$

z warunkami początkowymi

$$P_n^k(0) = \delta_n^k. \tag{15}$$

a. Rozpatrzmy kaskadę fizyczną w ośrodku jednorodnym złożoną z cząstek jednego rodzaju (na przykład kaskadę nukleonową w promieniowaniu kosmicznym), w której rozpad cząstek jest zjawiskiem losowym. Kaskadę taką uważa się za proces Markowa, dla którego $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią liczb całkowitych nieujemnych (ilości cząstek w kaskadzie) traktowaną dyskretnie. Intensywności tego procesu spełniają warunki

$$a_n^k = n a_1^{k-n+1} \quad (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{16}$$

(por. Kołmogorow i Dmitriew [1], str. 7; Feller [6], str. 409).

Równania Kołmogorowa (14) przyjmują wówczas postać

$$\frac{d}{dt} P_n^k(t) = -k a_1^1 P_n^k(t) + \sum_{s=1}^{k-1} s a_1^{k-s+1} P_n^s(t) + (k+1) a_1^0 P_n^{k+1}(t). \tag{17}$$

Przyjmijmy, że proces jest niebanalny, to znaczy $a_1^1 \neq 0$. Z równań (17) otrzymujemy wzory

$$P_k^1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_1^0} \cdot \dfrac{d}{dt} P_k^0(t), & \text{gdy} \quad a_1^0 \neq 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{a_1^1} \cdot \dfrac{d}{dt} P_k^1(t), & \text{gdy} \quad a_1^0 = 0, \end{cases} \tag{18}$$

$$P_k^{n+1}(t) \leqslant \begin{cases} \dfrac{dP_k^n(t)/dt + n a_1^1 P_k^n(t)}{(n+1) a_1^0}, & \text{gdy} \quad a_1^0 \neq 0, \\[2ex] \dfrac{\sum_{s=1}^{n} s a_1^{n+2-s} P_k^s(t) - dP_k^{n+1}(t)/dt}{(n+1) a_1^1}, & \text{gdy} \quad a_1^0 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Ze wzoru (18) wynika całkowalność funkcji $P_k^1(t)$ na półprostej dodatniej. Stąd zaś, na mocy nierówności (19), wynika całkowalność funkcji $P_k^n(t)$ dla wszystkich $n$ naturalnych. Przypuśćmy, że kaskada powstaje z $k$ cząstek, to znaczy $n_0 = k$. Z twierdzenia 2 otrzymujemy wówczas, że liczby naturalne nie są punktami granicznymi procesu. Widzimy zatem, że dla procesów kaskadowych punktem granicznym może być tylko liczba 0, która wobec wzoru (16) jest liczbą krytyczną procesu.

b. Elektrownia obsługuje $m$ odbiorców prądu. Obciążenie elektrowni w danej chwili, to znaczy ilość odbiorców prądu pobierających w tej chwili energię elektryczną uważa się za jednorodny regularny proces Markowa o $m+1$ stanach: $0, 1, 2, \ldots, m$. (Jeżeli $\omega(t) = 0$, to w chwili $t$ żaden z odbiorców nie pobiera prądu itp.) Intensywności procesu obciążenia elektrowni są następujące (por. Feller [5], str. 384):

$$a_n^{n+1} = (m-n)a, \quad c_n^{n-1} = nb \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots, m \quad (a, b > 0),$$
$$a_n^k = 0 \quad \text{dla pozostałych} \quad k.$$

Równania Kołmogorowa (14) przybierają więc dla tego procesu postać:

$$\frac{d}{dt} P_r^0(t) = -maP_r^0(t) + bP_r^1(t),$$
$$\frac{d}{dt} P_r^n(t) = -\{nb + (m-n)a\} P_r^n(t) + (n+1)bP_r^{n+1}(t) +$$
$$+ (m-n-1)aP_r^{n-1}(t) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots, m-1,$$
$$\frac{d}{dt} P_r^m(t) = -mbP_r^m(t) + aP_r^{m-1}(t).$$

Z równań tych otrzymujemy nierówności

$$P_r^{n+1}(t) \geqslant \frac{(m-n)aP_r^n(t) - dP_r^{n+1}(t)/dt}{(n-1)b + (m-n-1)a} \quad (n = 0, 1, \ldots, m-1),$$

$$P_r^{n-1}(t) \geqslant \frac{nbP_r^n(t) - dP_r^{n-1}(t)/dt}{(n-1)b + (m-n-1)a} \quad (n = 1, 2, \ldots, m).$$

Widzimy zatem, że bądź wszystkie funkcje $P_r^n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots, m)$ są całkowalne na półprostej dodatniej, bądź

$$\int_0^\infty P_r^n(t)\,dt = \infty \quad (n = 0, 1, \ldots, m). \tag{20}$$

Z równości

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^m P_r^n(t)\,dt = \int_0^\infty 1\,dt = \infty$$

wynika, że zachodzi przypadek (20). Przypuśćmy, że w chwili początkowej obciążenie elektrowni było równe $r$. Z równości (10) na podstawie twierdzenia 2 wnioskujemy, że wszystkie liczby $0, 1, \ldots, m$ są punktami granicznymi tego procesu.

c. Reakcje wybuchowe traktuje się jako jednorodne regularne procesy Markowa o stanach $0, 1, \ldots$ Jeżeli w chwili $t$ układ składa się z $n$ cząstek ($n \geqslant 1$), to przyjmujemy $\omega(t) = n$; jeżeli w chwili $t$ następuje wybuch, to dla $T \geqslant t$ przyjmujemy $\omega(T) = 0$. W pierwszym przybliżeniu uważa się, że bądź ilość cząstek się powiększa, bądź następuje wybuch. Intensywności tego procesu są następujące:

$$a_0^n = 0 \quad \text{dla wszystkich} \quad n,$$

$$c_k^n = \begin{cases} \beta & \text{dla} \quad n = 0, \\ \beta_k & \text{dla} \quad n = k+1, \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0, k, k+1. \end{cases}$$

Równania Kołmogorowa przyjmują więc dla procesu reakcji wybuchowych postać:

$$\frac{d}{dt}P_r^0(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \beta P_r^s(t) = \beta\big(1-P_r^0(t)\big), \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt}P_r^1(t) = -(\beta+\beta_1)\,P_r^1(t), \tag{22}$$

$$\frac{d}{dt}P_r^n(t) = \beta_{n-1}\,P_r^{n-1}(t) - (\beta+\beta_n)P_r^n(t) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{23}$$

Z równań (21) otrzymujemy dla $r \geqslant 1$, a więc z warunkiem początkowym $P_r^0(0) = 0$, równość

$$P_r^0(t) = 1-\exp(-\beta t). \tag{24}$$

Stąd wynika, że

$$\int_0^{\infty} P_r^0(t)\,dt = \infty. \tag{25}$$

Z równania (22) wynika całkowalność funkcji $P_r^1(t)$ na półprostej dodatniej, co wobec równań (23) daje

$$\int_0^{\infty} P_r^n(t)\,dt < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Przypuśćmy, że w chwili początkowej układ składał się z $r$ cząstek ($r \geqslant 1$). Na mocy twierdzenia 2, ze wzorów (25) i (26) otrzymujemy, że liczba 0

j st jedynym punktem granicznym procesu reakcji wybuchowych. Z definicji intensywności tego procesu widzimy, że liczba 0 jest także punktem krytycznym procesu.

d. Rozpatrzmy proces Markowa, którego realizacje przybierają wartości $2, 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots, 0$. W przestrzeni

$$\mathfrak{X} = \{2\} \cup \{1\} \cup \{2^{-1}\} \cup \{3^{-1}\} \cup \ldots \cup \{0\}$$

jest zwykła topologia. Przyjmujemy $x_0 = 1$, a zatem $\omega(0) = 1$ $(\omega \in \Omega)$. Intensywności procesu są określone wzorami

$$q(0, x) \equiv 0, \quad q(2, x) \equiv 0,$$

$$(27) \qquad q(k^{-1}, x) = \begin{cases} 3^{-k}, & \text{gdy } x = 2, \\ 0, & \text{gdy } x \neq 2 \end{cases} \qquad (k \geqslant 2);$$

$$q(1, x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{gdy } x = n^{-1}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases} \qquad (n \geqslant 2),$$

(Intensywności $q(x, B)$ tego procesu są $\sigma$-miarami i wraz z $q(x) = q(x, \mathfrak{X}-(x))$ tworzą „*a standard pair of q-functions*" w sensie Dooba. Z twierdzenia Dooba wynika, że istotnie opisują one pewien proces, który wobec ciągłości intensywności $q(x)$, $q(x, B)$ względem $x$ jest procesem Markowa w sensie używanym w tej pracy (por. Doob [3], str. 267-270).)

Z równań (4) otrzymujemy prawdopodobieństwa przejścia tego procesu:

$$p(t, 1, (1)) = \exp(-2^{-1}t), \quad p(t, 1, (0)) \equiv 0,$$

$$(28) \qquad p(t, 1, (k^{-1})) = \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{2}{3^k - 2} \exp(-3^{-k}t) - \exp(-2^{-1}t) \qquad (k \geqslant 2),$$

skąd wynika, że

$$\int_0^\infty p(t, 1, (k^{-1}))\, dt < \infty \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

punkty $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots$ nie są krytyczne, a zatem na podstawie twierdzenia 1 wnioskujemy, że są także niegraniczne.

Ze wzorów (28) otrzymujemy

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p(t, 1, (k^{-1})) = 0.$$

Stąd wynika

$$(29) \qquad \lim_{t \to \infty} p(t, 1, (2)) = 1,$$

co implikuje

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \{\omega(t) = 2\}\Big) \geqslant \lim_{t \to \infty} p(t, 1, (2)) = 1,$$

a zatem punkt krytyczny 2 jest punktem granicznym procesu. Niech $x \leqslant 1$; ze wzoru (29) i nierówności wynikającej z krytyczności punktu 2

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t}\{\omega(T) \leqslant x\}\Big) \leqslant 1-p\big(t, 1, (2)\big)$$

otrzymujemy

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t}\{\omega(T) \leqslant x\}\Big) = 0.$$

Widzimy stąd, że punkt krytyczny 0 nie jest punktem granicznym procesu. Niech $U = \langle 0, N^{-1}\rangle$, $N \geqslant 1$; ze wzorów (28) uzyskujemy

$$\int_0^\infty p(t, 1, U)\,dt = \sum_{k=N}^{\infty} \int_0^\infty p\big(t, 1, (k^{-1})\big)\,dt = \sum_{k=N}^{\infty} \left(\tfrac{3}{2}\right)^k = \infty.$$

Przykład ten pokazuje, że założenie niekrytyczności punktów w twierdzeniu 1 jest istotne.

W rozpatrywanym procesie jest tylko jeden punkt krytyczny i niegraniczny taki, że dla każdego jego otoczenia $U$ zachodzi równość

$$\int_0^\infty p(t, x_0, U)\,dt = \infty. \tag{30}$$

Ogólnie dla procesów Markowa mamy twierdzenie:

*Zbiór krytycznych punktów niegranicznych, takich że dla każdego ich otoczenia $U$ zachodzi równość* (30), *jest domknięty i rzadki.*

Domkniętość tego zbioru wynika z ciągłości intensywności $q(x)$ (por. warunek konieczny i dostateczny ust. I.3) i tego, że każde otoczenie punktu skupienia punktów rozpatrywanego zbioru jest otoczeniem pewnego punktu zbioru, a więc spełnia równość (30). Aby udowodnić rzadkość, wystarczy pokazać, że rozpatrywany zbiór nie zawiera żadnego otoczenia. Dowodząc nie wprost, przypuśćmy, że zawiera on otoczenie $U_0$. Niech $x \in U_0$; z krytyczności punktów otoczenia $U_0$ wynika nierówność

$$p(t, x_0, U) \leqslant p(T, x_0, U) \qquad (T \geqslant t,\ U \subset U_0). \tag{31}$$

Niech $U$ będzie dowolnym otoczeniem punktu $x$ zawartym w $U_0$. Wówczas ze wzorów (30) i (31) otrzymujemy nierówność

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t}\{\omega(T) \in U\}\Big) \geqslant \lim_{t\to\infty} p(t, x_0, U) > 0,$$

a zatem punkt $x$ jest graniczny wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność dowodzi rzadkości zbioru.

**I.5.** Symbolem $\bar{A}$ oznaczamy domknięcie zbioru $A$ ($A \subset \mathfrak{X}$). Zbiór

$$L(\omega) = \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{T\geqslant t}\{x\colon \omega(T) = x\}} \tag{32}$$

nazywamy *zbiorem granicznym* realizacji $\omega$ (pojęcie to pochodzi od E. Marczewskiego). Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią zwartą, to jak łatwo sprawdzić, zbiór graniczny realizacji $\omega$ jest wtedy i tylko wtedy zbiorem jednopunktowym $L(\omega) = \{y\}$ $(y \in \mathfrak{X})$, gdy istnieje granica $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = y$.

Zbiór wszystkich punktów granicznych procesu oznaczamy symbolem $\mathfrak{G}$. Następujące twierdzenia opisują własności zbiorów granicznych realizacji procesów Markowa:

TWIERDZENIE 3. *Dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ zachodzi inkluzja $L(\omega) \subset \mathfrak{G}$.*

TWIERDZENIE 4. *Istnieje ciąg zbiorów otwartych rozłącznych $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ takich, że dla prawie każdego $\omega \in \Omega$ zachodzi*

$$\operatorname{int} L(\omega) = \Gamma_1 \text{ albo } \Gamma_2, \text{ albo } \ldots$$

($\operatorname{int} A$ oznacza tu wnętrze zbioru $A$).

Dowody tych twierdzeń są podane w ustępie I.7.

W przypadku gdy przestrzeń $\mathfrak{X}$ jest dyskretna, wnętrze zbioru $A \subset \mathfrak{X}$ jest równe $A$. Twierdzenie 4 przyjmuje wówczas postać:

TWIERDZENIE 4'. *Jeżeli $\mathfrak{X}$ jest przestrzenią dyskretną, to istnieje ciąg zbiorów rozłącznych $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ takich, że dla prawie każdego $\omega \in \Omega$ mamy*

$$L(\omega) = \Gamma_1 \text{ albo } \Gamma_2, \text{ albo } \ldots$$

Twierdzenie 4 jest odpowiednikiem znanego twierdzenia o klasach ergodycznych dla łańcuchów Markowa (por. Doob [3], rozdział V, § 2; Lévy [10]).

PRZYKŁAD. Rozpatrzmy proces kaskadowy (por. przykład (a) poprzedniego ustępu). Za przestrzeń $\mathfrak{X}$ przyjmiemy teraz przestrzeń liczb całkowitych nieujemnych traktowaną dyskretnie z dołączonym punktem skupienia $\infty$. Tak określona przestrzeń $\mathfrak{X}$ jest zwarta. Wiemy, że liczby naturalne nie są punktami granicznymi procesu kaskadowego. A zatem

$$\mathfrak{G} \subset (0) \cup (\infty).$$

Z twierdzenia 3 wynika, że dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ zachodzi

$$L(\omega) = (0) \quad \text{albo} \quad L(\omega) = (\infty), \quad \text{albo} \quad L(\omega) = (0) \cup (\infty).$$

Pokażemy, że ostatnia równość może zachodzić tylko z prawdopodobieństwem 0. Istotnie, ze schodkowości realizacji $\omega$ wynika inkluzja

$$\{L(\omega) = (0) \cup (\infty)\} \subset \bigcup_{t_i<t_j} \{\omega(t_i) = 0, \omega(t_j) \neq 0\}, \tag{33}$$

gdzie $\{t_i\}$ jest ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Z równania (17) i warunku początkowego (15) wynika równość

$$P_0^k(t) = \delta_0^k,$$

która dla $t_i < t_j$ implikuje $P(\{\omega(t_i) = 0, \omega(t_j) \neq 0\}) = 0$. Stąd i z inkluzji (33) otrzymujemy $P(L(\omega) = (0) \cup (\infty)) = 0$. Widzimy więc, że prawie wszystkie realizacje mają jednopunktowe zbiory graniczne, co wobec zwartości przestrzeni $\mathfrak{X}$ implikuje zachodzenie z prawdopodobieństwem 1 alternatywy:

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = 0 \quad \text{albo} \quad \lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty.$$

Jest to pozytywne rozwiązanie zagadnienia H. Steinhausa.

**I.6.** Przed dowodem twierdzenia 1 podamy kilka lematów.

LEMAT 1. *Jeżeli $A \subset \mathfrak{X}$ jest zbiorem zwartym, $F(s, y)$ $(t \leqslant s \leqslant T;$ $y \in \mathfrak{X} - A)$ funkcją mierzalną (względem miar $p(n^{-1}, x, B)$) zmiennej $y$ przy ustalonym $s$, ciągłą i monotoniczną zmiennej $s$ przy ustalonym $y$ oraz* $\sup|F(s, y)| \leqslant M < \infty$, *gdzie supremum jest brane po $t \leqslant s \leqslant T$ i $y \in \mathfrak{X} - A$, to dla funkcji*

$$(34) \qquad G(s, n, x) = \int_{\mathfrak{X}-A} F(s, y) np(n^{-1}, x, dy) - \int_{\mathfrak{X}-A} F(s, y) q(x, dy)$$

*zachodzą wzory*

$$(35) \qquad \sup|G(s, n, x)| \leqslant 2M \max_{x \in A} q(x)$$

(*gdzie supremum jest brane po $x \in A$, $t \leqslant s \leqslant T$ i $n = 1, 2, \ldots$*),

$$(36) \qquad \lim_{n\to\infty} \max_{t \leqslant s \leqslant T} |G(s, n, x)| = 0 \quad \textit{dla} \quad x \in A.$$

Dowód. Z definicji (34) i nierówności (5) otrzymujemy oszacowanie dla $t \leqslant s \leqslant T$, $x \in A$ i $n = 1, 2, \ldots$

$$|G(s, n, x)| \leqslant M\Big\{\int_{\mathfrak{X}-A} np(n^{-1}, x, dy) + \int_{\mathfrak{X}-A} q(x, dy)\Big\} =$$

$$= Mnp(n^{-1}, x, \mathfrak{X}-A) + Mq(x, \mathfrak{X}-A) \leqslant Mn\big(1 - p(n^{-1}, x, (x)\big) + Mq(x) \leqslant$$

$$\leqslant Mn\Big(1 - \exp\big(-q(x)n^{-1}\big)\Big) + Mq(x) \leqslant 2Mq(x),$$

z którego wynika nierówność (35).

Oznaczmy, przy ustalonym $x \in A$,

$$(37) \qquad \mu_n(B) = np(n^{-1}, x, B), \qquad \mu(B) = q(x, B).$$

Funkcje $\mu_n$ i $\mu$ są skończonymi $\sigma$-miarami na $\sigma$-ciele podzbiorów borelowskich zbioru $\mathfrak{X} - A$. Ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B) \qquad (B \subset \mathfrak{X} - A).$$

Stąd wynika, że dla każdej funkcji $h(x)$ ograniczonej i mierzalnej (względem wszystkich miar $\mu_n$) zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}-A} h(y)\mu_n(dy) = \int_{\mathfrak{X}-A} h(y)\mu(dy). \tag{38}$$

Dowodząc nie wprost przypuśćmy, że wzór (36) nie zachodzi. Istnieje więc ciąg $s_1, s_2, \ldots$ $(t \leqslant s_i \leqslant T)$, dla którego przy pewnym $x \in A$

$$\lim_{n\to\infty} |G(s_n, n, x)| > 0. \tag{39}$$

Nie zmniejszając ogólności rozważań można przyjąć, że ciąg $s_1, s_2, \ldots$ jest monotoniczny i zbieżny do liczby $s_0$ (ponieważ zawsze można wybrać podciąg o tych własnościach). Z monotoniczności funkcji $F(s, y)$ względem $s$, stosując oznaczenia (37), otrzymujemy dla $n \geqslant k$ nierówność

$$\begin{aligned}
|G(s_n, n, x)| &= \Big| \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_n, y)\mu_n(dy) - \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_n, y)\mu(dy) \Big| \leqslant \\
&\leqslant \int_{\mathfrak{X}-A} |F(s_n, y) - F(s_0, y)|\mu_n(dy) + \int_{\mathfrak{X}-A} |F(s_0, y) - F(s_n, y)|\mu(dy) + \\
&\quad + \Big| \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_0, y)\mu_n(dy) - \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_0, y)\mu(dy) \Big| \leqslant \\
&\leqslant \int_{\mathfrak{X}-A} |F(s_k, y) - F(s_0, y)|\mu_n(dy) + \int_{\mathfrak{X}-A} |F(s_0, y) - F(s_k, y)|\mu(dy) + \\
&\quad + \Big| \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_0, y)\mu_n(dy) - \int_{\mathfrak{X}-A} F(s_0, y)\mu(dy) \Big|.
\end{aligned}$$

Stąd, na mocy mierzalności i ograniczoności funkcji $F(s, y)$ względem $y$ (według miar $\mu_n$), mamy ze wzoru (38)

$$\lim_{n\to\infty} |G(s_n, n, x)| \leqslant 2 \int_{\mathfrak{X}-A} |F(s_0, y) - F(s_k, y)|\mu(dx) \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{40}$$

Z założenia lematu wynika, że funkcja $F(s_0, y) - F(s, y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej $s$ i ograniczoną względem $s$ i $y$. Stosując twierdzenie Lebesgue'a (por. np. Halmos [7], str. 110) otrzymujemy ze wzoru (40)

$$\lim_{n\to\infty} |G(s_n, n, x)| \leqslant 2 \int_{\mathfrak{X}-A} \lim_{k\to\infty} |F(s_0, y) - F(s_k, y)|\mu(dy) = 0,$$

co jest sprzeczne ze wzorem (39). Wzór (36) jest więc udowodniony.

LEMAT 2. *Jeżeli $A$ jest dowolnym podzbiorem borelowskim przestrzeni $\mathfrak{X}$, to dla każdego $y \in A$ prawdopodobieństwo*

$$\mathrm{P}\Big( \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t} \{\omega(s) \in A\} \Big| \omega(0) = y \Big)$$

*jest funkcją ciągłą parametru $t$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $t_1, t_2, \ldots$ jest ciągiem monotonicznym zbieżnym do $t$. Rozpatrzmy przypadek $t_1 > t_2 > \ldots$ (dowód w przypadku $t_1 < t_2 < \ldots$ jest analogiczny). Zachodzi wówczas inkluzja

$$\lim_{n\to\infty} \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t_n} \{\omega(s)\in A\} \subset \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t} \{\omega(s)\in A\}. \tag{41}$$

Funkcje $\omega$ są schodkowe, a więc ma miejsce również inkluzja

$$\bigcap_{0\leqslant s\leqslant t} \{\omega(s)\in A\} \subset \Big[\lim_{n\to\infty} \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t_n} \{\omega(s)\in A\}\Big] \cup \Big[\{\omega(t)\in A\} \cap \lim_{n\to\infty} \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t_n} \{\omega(s) \text{ non} \in A\}\Big]. \tag{42}$$

Na mocy wzoru (6) i ciągłości funkcji $p(t, x, A)$ względem $t$ mamy

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\Big(\{\omega(t)\in A\} \cap \lim_{n\to\infty} \bigcap_{0\leqslant s\leqslant t_n} \{\omega(s) \text{ non} \in A\} \,\Big|\, \omega(0) = y\Big) \leqslant \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(\{\omega(t_n) \text{ non} \in A\} \cap \{\omega(t)\in A\} \,\Big|\, \omega(0) = y\Big) = \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int_A p(t_n - t, x, \mathfrak{X} - A)\, p(t, y, dx) = 0. \end{aligned}$$

Stąd i z inkluzji (41) i (42) wynika teza lematu.

Lemat 3. *Dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset \mathfrak{X}$, zwartego po domknięciu, zachodzi równość*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T} \{\omega(s)\in A\}\Big) &= p(T, x_0, A) + \\ &+ \int_t^T \int_A \int_{\mathfrak{X}-A} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant T-u} \{\omega(s) \text{ non} \in A\} \,\Big|\, \omega(0) = y\Big) q(x, dy)\, p(u, x_0, dx)\, du. \end{aligned} \tag{43}$$

Dowód. Niech

$$t \leqslant t_0^{(n)} < t_1^{(n)} = t_0^{(n)} + n^{-1} < t_2^{(n)} = t_1^{(n)} + n^{-1} < \ldots < t_{kn}^{(n)} \leqslant T$$

będzie ciągiem podziałów przedziału $\langle t, T\rangle$. Schodkowość funkcji $\omega$ pociąga za sobą równość

$$\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T} \{\omega(s)\in A\} = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} \bigcap_{T\geqslant s\geqslant t_{i+1}^{(n)}} \{\omega(s) \text{ non} \in A\} \cap \{\omega(t_i^{(n)})\in A\} \cup \{\omega(T)\in A\},$$

w której składniki występujące po prawej stronie są rozłączne. Otrzymujemy stąd wzór

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T} \{\omega(s)\in A\}\Big) &= \mathrm{P}\big(\omega(T)\in T\big) + \\ &+ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant s\geqslant t_{i+1}^{(n)}} \{\omega(s) \text{ non} \in A\} \cap \{\omega(t_i^{(n)})\in A\}\Big). \end{aligned} \tag{44}$$



BUW

Ze wzorów (6) i (7) wynika równość

$$(45)\quad \mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant s\geqslant t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\cap\{\omega(t_i^{(n)})\,\epsilon\,A\}\Big) =$$

$$= \int_A \mathrm{P}\Big(\bigcap_{1/n\leqslant s\leqslant 1/n+T-t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\,\Big|\,\omega(0)=x\Big)p(t_i^{(n)},x_0,dx) =$$

$$= \int_A\int_{\mathfrak{X}-A}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant T-t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)\,p(n^{-1},x,dy)p(t_i^{(n)},x_0,dx).$$

Prawdopodobieństwo

$$F(s,y) = \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant u\leqslant T-s}\{\omega(u)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)$$

jest funkcją mierzalną zmiennej $y$ (względem prawdopodobieństw przejścia; por. uwagę w ust. I.2) przy ustalonym $s$ i, na podstawie lematu 2, funkcją ciągłą (i monotoniczną) zmiennej $s$ przy ustalonym $y\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A$. Z lematu 1 i wzoru (45) uzyskujemy zatem równość

$$(46)\quad \mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant s\geqslant t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\cap\{\omega(t_i^{(n)})\,\epsilon\,A\}\Big) =$$

$$= n^{-1}\int_A\int_{\mathfrak{X}-A}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant T-t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon\,A\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)q(x,dy)p(t_i^{(n)},x_0,dx)+$$

$$+n^{-1}\int_A G(t_{i+1}^{(n)},n,x)p(t_i^{(n)},x_0,dx),$$

gdzie wobec zwartości domknięcia zbioru $A$ jest

$$(47)\quad \begin{gathered}\sup_{s,n,x\,\epsilon\,A}|G(s,n,x)|\leqslant K<\infty,\\ \lim_{n\to\infty}\max_{t\leqslant s\leqslant T}|G(s,n,x)| = 0 \quad \text{dla} \quad x\,\epsilon\,A.\end{gathered}$$

Z warunku (47) na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o przejściu granicznym pod znakiem całki otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}n^{-1}\int_A G(t_{i+1}^{(n)},n,x)p(t_i^{(n)},x_0,dx) =$$

$$= \int_A \lim_{k\to\infty}\max_{t\leqslant s\leqslant T}G(s,k,x)\int_t^T p(u,x_0,dx)\,du = 0.$$

Stąd i ze wzorów (44) i (46) wynika równość:

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\,\epsilon\,A\}\Big) = p(T,x_0,A)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}n^{-1}\int_A\int_{\mathfrak{X}-A}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant T-t_{i+1}^{(n)}}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\,\epsilon A\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)q(x,dy)p(t_i^{(n)},x_0,dx).$$

Wyrażenie stojące pod znakiem granicy jest przybliżoną sumą riemannowską całki występującej po prawej stronie wzoru (43), co wobec ciągłości funkcji podcałkowej gwarantuje istnienie całki, a więc dowodzi lematu.

WNIOSEK. *Dla każdego $y \in \mathfrak{X}$ i zbioru $A \subset \mathfrak{X}$ zwartego po domknięciu zachodzi równość*

$$48)\quad \mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big) = p(T,y,A)+$$
$$+\int_t^T\int_A\int_{\mathfrak{X}-A}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant T-u}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\in A\}\Big|\omega(0)=z\Big)q(x,dz)p(u,y,dx)du.$$

Rozpatrujemy pomocniczy proces Markowa z prawdopodobieństwami przejścia $p(t,x,A)$ i $x_0=y$ (por. uwagę C, ust. I.2). Dla tego procesu mamy równość $\mathrm{P}^*\big(\omega(t)\in A\big)=p(t,y,A)$. Założenia lematu 3 są spełnione. Z tezy lematu otrzymujemy równość (48).

Dla $x\in A$ określamy następującą funkcję:

$$(49)\qquad H(x,t,A)=\int_{\mathfrak{X}-A}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant t}\{\omega(s)\,\mathrm{non}\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big)q(x,dy).$$

Z ciągłości intensywności $q(x,B)$ ($B\subset\mathfrak{X}-A$, $x\in A$) względem $x$ i lematu 2 wynika ciągłość funkcji $H(x,t,A)$ względem $t$ i $x\in A$. Z definicji (46) otrzymujemy bezpośrednio oszacowanie

$$(50)\qquad 0\leqslant H(x,t,A)\leqslant\int_{\mathfrak{X}-A}q(x,dy)=q(x,\mathfrak{X}-A)\leqslant q(x).$$

Dla zbiorów $A$ zwartych po domknięciu wniosek z lematu 3 można napisać w postaci

$$(51)\quad \mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big)=$$
$$=p(T,y,A)+\int_t^T\int_A H(x,T-u,A)p(u,y,dx)du.$$

LEMAT 4. *Jeżeli $A\subset\mathfrak{X}$ jest zbiorem zwartym po domknięciu i dla każdego $x\in A$ zachodzi równość*

$$(52)\qquad \lim_{t\to\infty}H(x,t,A)=0,$$

*to dla wszelkich $t$ i $y$*

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big)=\mathrm{P}\Big(\bigcup_{0\leqslant s}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big).$$

Dowód. Z definicji (49) widzimy, że funkcja $H(x,t,A)$ jest nierosnąca względem zmiennej $t$. Stąd na mocy (51) otrzymujemy dla $T>t$ nierówność

$$(53)\quad 0 \leqslant \Gamma\Big(\bigcup_{0\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big)-\Gamma\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\in A\}\Big|\omega(0)=y\Big)\leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t\int_A H(x, T-t, A)p(u, y, dx)du.$$

Ze zwartości domknięcia zbioru $A$ i oszacowania (50) wynika ograniczoność funkcji $H(x, t, A)$. Stąd i z założenia (52), na podstawie twierdzenia Lebesgue'a o przejściu granicznym pod znakiem całki wynika równość

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^t\int_A H(x, T-t, A)p(u, y, dx)du = 0.$$

Stąd i ze wzoru (53) otrzymujemy tezę lematu.

LEMAT 5. *Jeżeli istnieje otoczenie $U_0$ punktu $x$ zwarte po domknięciu, dla którego $\lim_{t\to\infty} H(x, t, U_0) > 0$, to dla pewnego otoczenia $U$ punktu $x$ zachodzi nierówność*

$$\int_0^\infty p(t, x_0, U)dt < \infty.$$

Dowód. Funkcja $H(x, t, U_0)$ jest nierosnąca względem zmiennej $t$, a zatem na podstawie wzoru (51) otrzymujemy nierówność

$$(54)\qquad 1 \geqslant \int_0^T\int_{U_0}\lim_{t\to\infty} H(y, t, U_0)p(u, x_0, dy)du \quad \text{dla} \quad T\geqslant 0.$$

Funkcja $\lim_{t\to\infty} H(y, t, U_0)$ jest ciągła względem $y$ (por. uwagi przed lematem 4), a zatem z założenia lematu otrzymujemy, że dla pewnego otoczenia $U\subset U_0$ punktu $x$ mamy

$$\lim_{t\to\infty} H(y, t, U_0) \geqslant a > 0 \quad \text{dla} \quad y\in U.$$

Stąd i z nierówności (54) wynika

$$1 \geqslant a\int_0^T\int_U p(t, x_0, dy)dt = a\int_0^T p(t, x_0, U)dt \quad (T\geqslant 0),$$

co dowodzi lematu.

LEMAT 6. *Jeżeli dla ciągu otoczeń $U_1\supset U_2\supset\ldots$ dającego w iloczynie punkt $x$ zachodzi równość*

$$\lim_{t\to\infty} H(x, t, U_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

*to*

$$\lim_{t\to\infty} H\big(x, t, (x)\big) = 0.$$

Dowód. Wobec wzoru (49) założenie lematu możemy napisać w postaci

$$\int_{\mathfrak{X}-U_n} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \text{ non} \in U_n\}\Big|\omega(0) = y\Big) q(x, dy) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Stąd otrzymujemy

$$\int_{\mathfrak{X}-U_n} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \text{ non} \in U_k\}\Big|\omega(0) = y\Big) q(x, dy) = 0 \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant k,$$

a zatem

$$\int_{\mathfrak{X}-(x)} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \text{ non} \in U_k\}\Big|\omega(0) = y\Big) q(x, dy) = 0 \qquad \text{dla} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

czyli

$$\int_{\mathfrak{X}-(x)} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \neq x\}\Big|\omega(0) = y\Big) q(x, dy) = 0,$$

co wobec wzoru (49) daje tezę lematu.

Lemat 7. *Jeżeli $x$ jest punktem niekrytycznym i niegranicznym procesu, to istnieje otoczenie $U_0$ tego punktu zwarte po domknięciu, dla którego*

$$\lim_{t\to\infty} H(x, t, U_0) > 0 \qquad \textit{lub} \qquad p(t, x_0, U_0) \equiv 0.$$

Dowód. Dowodząc nie wprost, przypuśćmy, że dla każdego otoczenia $U$ punktu $x$ zwartego po domknięciu zachodzi równość

$$\lim_{t\to\infty} H(x, t, U) = 0 \tag{55}$$

i dla pewnego $t_u$ jest

$$p(t_u, x_0, U) > 0. \tag{56}$$

Z równości (55) zachodzącej dla wszystkich otoczeń zwartych po domknięciu wynika, na mocy lematu 6,

$$\lim_{t\to\infty} H\big(x, t, (x)\big) = 0, \tag{57}$$

czyli

$$\int_{\mathfrak{X}-x} \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \neq x\}\Big|\omega(0) = y\Big) q(x, dy) = 0.$$

Stąd i z założenia niekrytyczności punktu $x$ otrzymujemy dla pewnego zbioru $B$ o mierze $q(x, B) = q(x) > 0$ równość

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s}\{\omega(s) \neq x\}\Big|\omega(0)\Big) = 0, \qquad \text{gdy} \qquad y \in B.$$

Stąd zaś wobec schodkowości funkcji $\omega$ wynika, że istnieje liczba $t_0$ i zbiór

$B_0 \subset B$ (o którym nie zmniejszając ogólności, możemy założyć, że jest domknięty) miary

(58) $$q(x, B_0) > 0,$$

dla którego

(59) $$p(t_0, y, x) \geqslant a > 0 \quad \text{dla} \quad y \in B_0.$$

Z nierówności (58), domkniętości zbioru $B_0$ i ciągłości intensywności $q(z, B_0)$ dla $z$ non $\in B_0$ wynika, że istnieje takie otoczenie $U$ punktu $x$, że

(60) $$q(z, B_0) \geqslant b > 0 \quad \text{dla} \quad z \in U.$$

Z równania Chapmana i Kołmogorowa

$$p(t+t_u, x_0, B_0) = \int_{\mathfrak{X}} p(t, z, B_0) p(t_u, x_0, dz),$$

nierówności (56), (60) i lematu Fatou (por. np. Halmos [7], str. 113) otrzymujemy nierówność

$$\liminf_{t\to 0+} t^{-1} p(t+t_u, x_0, B_0) \geqslant \liminf_{t\to 0+} \int_U t^{-1} p(t, z, B_0) p(t_u, x_0, dz) \geqslant$$

$$\geqslant \int_U q(z, B_0) p(t_u, x_0, dz) \geqslant b \cdot p(t_u, x_0, U) > 0,$$

z której wynika

(61) $$c = p(t_1, x_0, B_0) > 0 \quad \text{dla pewnego} \quad t_1.$$

Ze wzoru (57) na podstawie lematu 4 otrzymujemy dla każdego $t$ i $y$ nierówność

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{s\geqslant t} \{\omega(s) = x\} \Big| \omega(0) = y\Big) \geqslant p\big(t_0+t_1, y, (x)\big).$$

Stąd i ze wzorów (59) i (61) wynika nierówność

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{s\geqslant t} \{\omega(s) = x\}\Big) \geqslant \int_{B_0} p(t_0, y, x) p(t_1, x_0, dy) \geqslant ac > 0$$

$$\text{dla każdego} \quad t \geqslant 0,$$

co jest sprzeczne z niegranicznością punktu $x$. Lemat jest więc udowodniony.

Dowód twierdzenia 1. Udowodnimy kontrapozycję twierdzenia, to znaczy pokażemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by punkt niekrytyczny $x$ nie był punktem granicznym procesu, jest zbieżność całki

$$\int_0^\infty p(t, x_0, U)dt < \infty \tag{62}$$

dla pewnego otoczenia $U$ punktu $x$.

Konieczność. Jeżeli $x$ jest punktem niekrytycznym i niegranicznym procesu, to na podstawie lematu 7 istnieje otoczenie $U$ punktu $x$ zwarte po domknięciu, dla którego

$$\lim_{t\to\infty} H(t, x, U) > 0 \tag{63}$$

lub $p(t, x_0, U) \equiv 0$. W ostatnim przypadku wzór (62) dla otoczenia $U$ jest banalnie spełniony. Przypuśćmy więc, że zachodzi (63). Wówczas z lematu 5 otrzymujemy, że wzór (62) zachodzi dla pewnego otoczenia punktu $x$. Konieczność warunku (62) jest zatem udowodniona.

Dostateczność. Przypuśćmy, że warunek (62) zachodzi dla pewnego otoczenia $U$ punktu $x$. Nie zmniejszając ogólności rozważań można przyjąć, że otoczenie $U$ jest zwarte po domknięciu. Z ciągłości intensywności $q(x)$ otrzymujemy zatem

$$\sup_{x\in U} q(x) \leqslant M < \infty,$$

co wobec wzoru (50) implikuje nierówność

$$\sup_{0\leqslant t;\, x\in U} H(x, t, U) \leqslant M.$$

Stąd na podstawie wzoru (51) otrzymujemy nierówność

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{t\leqslant s\leqslant T}\{\omega(s)\in U\}\Big) &\leqslant p(T, x_0, U) + M\int_t^\infty \int_U p(t, x_0, dy)dt = \\ &= p(T, x_0, U) + M\int_t^\infty p(t, x_0, U)dt. \end{aligned} \tag{64}$$

Z warunku (62) dostajemy

$$\liminf_{t\to\infty} p(t, x_0, U) = 0.$$

Stąd i z nierówności (64) wynika

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{s\geqslant t}\{\omega(s)\in U\}\Big) \leqslant M\int_t^\infty p(t, x_0, U)dt,$$

co wobec (62) implikuje dla otoczenia $U$ punktu $x$:

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{s\geqslant t}\{\omega(s)\in U\}\Big) = 0;$$

punkt $x$ nie jest zatem punktem granicznym. Dostateczność warunku (62) jest więc udowodniona.

**I.7.** W ustępie niniejszym udowodnimy twierdzenia 3 i 4.

Dowód twierdzenia 3. Dowodząc nie wprost, przypuśćmy, że zachodzi nierówność

$$\mathrm{P}\big(L(\omega) \cap \mathfrak{X} - \mathfrak{G} \neq 0\big) > 0. \tag{65}$$

Jeżeli $x \in \mathfrak{X} - \mathfrak{G}$, to istnieje otoczenie $U_x$ punktu $x$, dla którego

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \big\{\omega(T) \in U_x\big\}\Big) = 0. \tag{66}$$

Z ośrodkowości przestrzeni metrycznej $\mathfrak{X}$ na podstawie twierdzenia Lindelöfa (por. np. Kuratowski [9], str. 131) uzyskujemy równość

$$\mathfrak{X} - \mathfrak{G} = \bigcup_{x \in \mathfrak{X} - \mathfrak{G}} U_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}, \tag{67}$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots$ jest pewnym ciągiem punktów niegranicznych procesu. Ze wzorów (65) i (67) widzimy, że dla pewnego wskaźnika $j$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{P}\big(L(\omega) \cap U_{x_j} \neq 0\big) > 0.$$

Stąd i z inkluzji

$$\big\{L(\omega) \cap U_{x_j} \neq 0\big\} \subset \lim_{t \to \infty} \bigcup_{T \geqslant t} \big\{\omega(T) \in U_{x_j}\big\}$$

wynika

$$\lim_{t \to \infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \big\{\omega(T) \in U_{x_j}\big\}\Big) > 0,$$

co jest sprzeczne ze wzorem (66). Twierdzenie jest więc udowodnione.

Mówimy, że zbiór otwarty $A$ należy do klasy $a(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$p(t, x, A) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0. \tag{68}$$

Przyjmijmy

$$A(x) = \bigcup_{A \in a(x)} A.$$

Zbiór $A(x)$ jest otwarty. Z twierdzenia Lindelöfa (zob. Kuratowski [9], str. 40) wynika równość

$$A(x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \big(A_i \in a(x)\big).$$

Stąd otrzymujemy

$$p\big(t, x, A(x)\big) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0. \tag{69}$$

Z definicji klasy $a(x)$ wynika, że każdy podzbiór $U$ zbioru $\mathfrak{X}-A(x)$, otwarty i niepusty, ma przy pewnym $T$ miarę $p(T, x, U) > 0$. Z tego w szczególności wynika, że jeżeli zbiór $E$ ma dla każdego $t$ miarę $p(t, x, E) = 1$, to jest on gęsty w zbiorze $\mathfrak{X}-A(x)$. Z uwagi tej będziemy korzystali w dowodach lematów.

LEMAT 8. *Jeżeli* $y \in \mathfrak{X}-A(x)$, *to* $A(x) \subset A(y)$.

Dowód. Niech $A$ będzie zbiorem otwartym z klasy $a(x)$, spełniającym warunek

$$\bar{A} \cap \big(\mathfrak{X}-A(x)\big) = 0. \tag{70}$$

Przyjmijmy przy ustalonym $T$ zbiór $E = \{y: p(T, y, A) = 0\}$. Ze wzoru (68), prawdziwego dla zbioru $A$, korzystając z równania Chapmana i Kołmogorowa

$$0 = p(T+t, x, A) = \int_{\mathfrak{X}} p(T, y, A)p(t, x, dy) \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0$$

otrzymujemy

$$p(t, x, E) = 1 \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0,$$

a więc zbiór $E$ jest gęsty w $\mathfrak{X}-A(x)$. Z warunku (70) i własności $D$ (ust. I.2.) wynika, że prawdopodobieństwo przejścia $p(T, y, A)$ jest funkcją ciągłą zmiennej $y \in \mathfrak{X}-A(x)$. Z gęstości zbioru $E$ wynika

$$p(T, y, A) = 0 \quad \text{dla} \quad y \in \mathfrak{X}-A(x).$$

Wobec dowolności $T$ otrzymujemy stąd dla $A$ spełniających warunek (70) $A \in a(y)$ dla $y \in \mathfrak{X}-A(x)$.

Ponieważ każdy zbiór otwarty należący do klasy $a(x)$ można przedstawić w postaci sumy przeliczalnej ilości zbiorów spełniających warunek (70), więc wynika stąd teza lematu 8.

LEMAT 9. *Jeżeli $x$ jest niekrytycznym punktem granicznym procesu, to dla zbioru elementów $y$, gęstego w $\mathfrak{X}-A(x)$, zachodzi przy pewnym $t_y$ nierówność* $p\big(t_y, y, (x)\big) > 0$.

Dowód. Z lematów 5, 6, 7 i twierdzenia 1 wynika, że dla punktów $x$ spełniających założenia dowodzonego lematu zachodzi zbieżność

$$\lim_{t\to\infty} H\big(x, t, (x)\big) = 0.$$

Na podstawie lematu 4 mamy stąd dla każdego $t$ i $y$

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t}\{\omega(T) = x\}\,\Big|\,\omega(0) = y\Big) = \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant 0}\{\omega(T) = x\}\,\Big|\,\omega(0) = y\Big),$$

co wobec równości

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant 0}\{\omega(T)=x\}\,\Big|\,\omega(0)=x\Big)=1$$

implikuje

(71) $$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant t}\{\omega(T)\neq x\}\,\Big|\,\omega(0)=x\Big)=0 \quad \text{dla} \quad t\geqslant 0.$$

Z równości wynikającej ze wzorów (6) i (7)

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant t}\{\omega(T)\neq x\}\,\Big|\,\omega(0)=x\Big)=\int_{\mathfrak{X}}\mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant 0}\{\omega(T)\neq x\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)p(t,x,dy)$$

i wzoru (71) wynika, że zbiór

$$F_0=\Big\{y\colon \mathrm{P}\Big(\bigcap_{T\geqslant 0}\{\omega(T)\neq x\}\,\Big|\,\omega(0)=y\Big)=0\Big\}$$

ma miarę

$$p(t,x,E_0)=1 \quad \text{dla każdego} \quad t\geqslant 0,$$

a więc jest gęsty w $\mathfrak{X}-A(x)$. Z definicji zbioru $E_0$ i schodkowości realizacji $\omega$ wynika, że przy pewnym $t_y$ jest

$$p(t_y,x,(x))>0 \quad \text{dla} \quad y\in E_0,$$

co dowodzi lematu.

Lemat 10. *Jeżeli $x$ i $z$ są niekrytycznymi punktami granicznymi procesu, to*

$$\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(x))=\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(z))$$

*albo*

$$\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(x))\cap\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(z))=0.$$

Dowód. Przypuśćmy, że

$$\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(x))\cap\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(z))\neq 0.$$

Wobec tego na mocy lematu 9 istnieje element

(72) $$y\in\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(x))\cap\operatorname{int}(\mathfrak{X}-A(z)),$$

dla którego

(73) $$x\in\mathfrak{X}-A(y).$$

Z (72) i (73) na mocy lematu 8 otrzymujemy

$$\mathfrak{X}-A(y)\subset\mathfrak{X}-A(z),\qquad \mathfrak{X}-A(x)\subset\mathfrak{X}-A(y),$$

skąd

$$\mathfrak{X}-A(x)\subset\mathfrak{X}-A(z).$$

Ze względu na symetrię elementów $x$ i $z$ otrzymujemy stąd równość

$$\mathfrak{X}-A(x)=\mathfrak{X}-A(z),$$

co dowodzi w szczególności lematu.

Przyjmijmy

$$B(x) = \operatorname{int}\big(\mathfrak{X} - A(x)\big). \tag{74}$$

Na mocy lematu 10 wnioskujemy, że istnieje taki ciąg punktów niekrytycznych i granicznych procesu $x_1, x_2, \ldots$, że

$$B(x_i) \cap B(x_j) = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j$$

i dla każdego punktu $x$ granicznego i niekrytycznego zachodzi

$$B(x) = B(x_1) \text{ albo } B(x_2), \text{ albo } \ldots$$

Oznaczmy symbolem $\mathfrak{R}$ wszystkie punkty krytyczne procesu.

LEMAT 11.

$$\mathrm{P}\Big(\Big\{\operatorname{int} L(\omega) \subset \mathfrak{X} - \bigcup_i B(x_i)\Big\} \cap \big\{\operatorname{int} L(\omega) \cap \mathfrak{X} - \mathfrak{R} \neq 0\big\}\Big) = 0.$$

Dowód. Dowodząc nie wprost, przypuśćmy, że istnieje otoczenie

$$U \subset \mathfrak{X} - \bigcup_i B(x_i), \qquad U \neq 0, \tag{75}$$

dla którego

$$\mathrm{P}\big(U \subset \operatorname{int} L(\omega)\big) > 0. \tag{76}$$

Stąd i z inkluzji

$$\big\{U_0 \subset \operatorname{int} L(\omega)\big\} \subset \lim_{t\to\infty} \bigcup_{T\geqslant t} \big\{\omega(T) \in U_0\big\} \quad \text{dla} \quad U_0 \subset U,$$

wynika nierówność

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant t} \big\{\omega(T) \in U_0\big\}\Big) > 0 \quad \text{dla} \quad U_0 \subset U,$$

która z kolei implikuje inkluzję

$$U \subset \mathfrak{G}. \tag{77}$$

Stąd i ze wzoru (75) wynika, że otoczenie $U$ składa się z punktów granicznych i niekrytycznych.

Niech $U_1, U_2, \ldots$ będzie bazą podzbiorów otwartych zbioru $U$. Ze schodkowości realizacyj $\omega$ wynika inkluzja

$$\big\{U \subset \operatorname{int} L(\omega)\big\} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{t_{j_i} > t_j} \big\{\omega(t_{j_i}) \in U_i\big\} \cap \big\{\omega(t_j) \in U\big\},$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots$ jest ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Stąd wobec nierówności (76) otrzymujemy dla pewnego $t_j$

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{t_{j_i} > t_j} \big\{\omega(t_{j_i}) \in U_i\big\} \cap \big\{\omega(t_j) \in U\big\}\Big) > 0.$$

Lewa strona ostatniej nierówności jest równa

$$\int_U \mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{t_{j_i}>t_j} \{\omega(t_{j_i}) \in U_i\} \,\Big|\, \omega(t_j) = x\Big) p(t_j, x_0, dx).$$

A zatem dla pewnego $x \in U$ zachodzi nierówność

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{t_{j_i}>t_j} \{\omega(t_{j_i}) \in U_i\} \,\Big|\, \omega(t_j) = x\Big) > 0.$$

Stąd wynika inkluzja $U \subset \mathfrak{X} - A(x)$, która wobec otwartości zbioru $U$ implikuje

$$U \subset \operatorname{int}\big(\mathfrak{X} - A(x)\big) = B(x). \tag{78}$$

Punkt $x$ jest punktem niekrytycznym i granicznym procesu, a więc z definicji ciągu $x_1, x_2, \ldots$ wynika, że istnieje wskaźnik $j$, dla którego $B(x) = B(x_j)$. Stąd i z (78) wynika inkluzja $U \subset B(x_j)$, co jest sprzeczne ze wzorem (75). Lemat jest więc udowodniony.

Lemat 12.

$$\mathrm{P}\Big(\{\operatorname{int} L(\omega) \subset \mathfrak{R}\} \cap \{\overline{\overline{\operatorname{int} L(\omega)}} > 1\}\Big) = 0$$

($\overline{\overline{A}}$ *oznacza moc zbioru* $A$).

Dowód. Niech $U_1, U_2, \ldots$ będzie bazą zbiorów otwartych zbioru $\operatorname{int}\mathfrak{R}$, a $t_1, t_2, \ldots$ ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Ze schodkowości realizacyj $\omega$ wynika inkluzja

$$\{\operatorname{int} L(\omega) \subset \mathfrak{R}\} \cap \{\overline{\overline{\operatorname{int} L(\omega)}} > 1\} \subset \bigcup_{t_j>t_k} \bigcup_{U_n \cap U_m = 0} \{\omega(t_j) \in U_n\} \cap \{\omega(t_k) \in U_m\}. \tag{79}$$

Ze wzoru

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega(t_j) \in U_n\} \cap \{\omega(t_k) \in U_m\}\Big) = \int_{U_m} p(t_j - t_k, x, U_n) p(t_k, x_0, dx)$$

i równości $A(x) = \mathfrak{X} - (x)$ dla $x$ krytycznych otrzymujemy dla $U_n \cap U_m = 0$ równość

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega(t_j) \in U_n\} \cap \{\omega(t_k) \in U_m\}\Big) = \int_{U_m} p\big(t_j - t_k, x, A(x)\big) p(t_k, x_0, dx) = 0$$

(por. wzór (69)). Stąd i ze wzoru (79) wynika teza lematu.

Lemat 13. *Dla każdego $j$ zachodzi wzór*

$$\mathrm{P}\Big(\{\operatorname{int} L(\omega) \cap B(x_j) \neq 0\} \cap \{\operatorname{int} L(\omega) \cap \mathfrak{X} - B(x_j) \neq 0\}\Big) = 0.$$

Dowód. Z równości $\mathfrak{X}-B(x_j) = \overline{A(x_j)}$ i otwartości $\operatorname{int} L(\omega)$ wynika implikacja: Jeżeli $\operatorname{int} L(\omega) \cap \overline{A(x_j)} \neq 0$, to $\operatorname{int} L(\omega) \cap A(x_j) \neq 0$. Stąd mamy inkluzję

$$(80) \qquad \{\operatorname{int} L(\omega) \cap \mathfrak{X}-B(x_j) \neq 0\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t_k>n} \{\omega(t_k) \in A(x_j)\},$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots$ jest ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Stąd otrzymujemy inkluzję

$$(81) \qquad \{\operatorname{int} L(\omega) \cap B(x_j) \neq 0\} \cap \{\operatorname{int} L(\omega) \cap \mathfrak{X}-B(x_j) \neq 0\} \subset$$
$$\subset \bigcup_{t_k>t_s} \{\omega(t_k) \in A(x_j)\} \cap \{\omega(t_s) \in B(x_j)\}.$$

Dla $x \in B(x_j)$ na podstawie lematu 8 zachodzi inkluzja

$$(82) \qquad A(x_j) \subset A(x).$$

Ze wzorów (69), (82) i równości

$$\mathrm{P}\big(\{\omega(t_k) \in A(x_j)\} \cap \{\omega(t_s) \in B(x_j)\}\big) = \int_{B(x_j)} p\big(t_k-t_s, x, A(x_j)\big) p(t_s, x_0, dx)$$

otrzymujemy wzór

$$\mathrm{P}\big(\{\omega(t_k) \in A(x_j)\} \cap \{\omega(t_s) \in B(x_j)\}\big) \leqslant \int_{B(x_j)} p\big(t_k-t_s, x, A(x)\big) p(t_s, x_0, dx) = 0.$$

Stąd na podstawie inkluzji (81) otrzymujemy tezę lematu.

Lemat 14. *Jeżeli $U$ jest otwartym niepustym podzbiorem zbioru $B(x_j)$, to*

$$\mathrm{P}\big(\{\omega(t) \in B(x_j)-\mathfrak{R}\} \cap \bigcap_{T\geqslant t} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U\}\big) = 0.$$

Dowód. Jeżeli $y \in U$ jest punktem niekrytycznym, to ponieważ jest on także punktem granicznym, więc na podstawie lematu 7 mamy

$$\lim_{t\to\infty} H(y, t, U) = 0.$$

Stąd na podstawie lematu 4

$$\mathrm{P}\big(\bigcup_{T\geqslant t} \{\omega(T) \in U\} \big| \omega(0) = y\big) = 1 \quad \text{dla} \quad t \geqslant 0.$$

Jeżeli punkt $y \in U$ jest krytyczny, to ostatnia równość zachodzi na podstawie (8).

A zatem dla wszystkich $y \in U$ zachodzi równość

$$(83) \qquad \mathrm{P}\big(\bigcup_{T\geqslant t} \{\omega(T) \in U\} \big| \omega(0) = y\big) = 1 \quad \text{dla} \quad y \in U, \quad t \geqslant 0.$$

Przyjmijmy

(84) $$E = \{z: \mathrm{P}\big(\bigcap_{T\geqslant 0}\{\omega(T)\,\mathrm{non}\in U\}\big|\omega(0) = z\big) = 0.$$

Z równości (83) i wzoru

$$\mathrm{P}\big(\bigcap_{T\geqslant t}\{\omega(T)\,\mathrm{non}\in U\}\big|\omega(0) = y\big) = \int_{\mathfrak{X}} \mathrm{P}\big(\bigcap_{T\geqslant 0}\{\omega(T)\,\mathrm{non}\in U\}\big|\omega(0) = z\big)p(t, y, dz)$$

dla $t \geqslant 0$ i $y \in U$

wynika, że

(85) $$p(t, y, E) = 1 \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0 \quad \text{i} \quad y \in U.$$

Niech $x \in B(x_j) - \mathfrak{R}$; mamy wówczas $B(x) = B(x_j)$. Z lematu 9 wynika, że istnieje ciąg $y_1, y_2, \ldots$ gęsty w $\mathfrak{X} - A(x)$, dla którego

(86) $$p\big(t_i, y_i, (x)\big) > 0 \quad \text{dla pewnego} \quad t_i.$$

Ponieważ $U \subset B(x)$ i ciąg $y_1, y_2, \ldots$ jest gęsty, więc istnieje co najmniej jeden element $y_i$ należący do $U$. Spełnia on wzory (85) i (86), co implikuje $x \in E$. Udowodniliśmy więc inkluzję

(87) $$B(x_j) - \mathfrak{R} \subset E.$$

Z równości

$$\mathrm{P}\Big(\big\{\omega(t) \in B(x_j) - \mathfrak{R} \cap \bigcap_{T\geqslant t}\{\omega(T)\,\mathrm{non}\in U\}\big\}\Big) =$$
$$= \int_{B(x_j)-\mathfrak{R}} \mathrm{P}\big(\bigcap_{T\geqslant 0}\{\omega(T)\,\mathrm{non}\in U\}\big|\omega(0) = x\big)p(t, x_0, dx)$$

oraz ze wzorów (84) i (87) wynika teza lematu.

Lemat 15.

$$\mathrm{P}\Big(\big\{0 \neq \mathrm{int}\,L(\omega) \subset B(x_j)\big\} \cap \big\{B(x_j) - \mathrm{int}\,L(\omega) \neq 0\big\}\Big) = 0.$$

Dowód. Jeżeli

$$\overline{\mathrm{int}\,L(\omega)} \supset B(x_j),$$

to ponieważ $L(\omega)$ jest zbiorem domkniętym, więc mamy $L(\omega) \supset B(x_j)$, a zatem

$$\mathrm{int}\,L(\omega) \supset \mathrm{int}\,B(x_j) = B(x_j),$$

co implikuje

$$B(x_j) - \mathrm{int}\,L(\omega) = 0.$$

Widzimy stąd, że zachodzi inkluzja

(88) $$\big\{0 \neq \mathrm{int}\,L(\omega) \subset B(x_j)\big\} \cap \big\{B(x_j) - \mathrm{int}\,L(\omega) \neq 0\big\} \subset$$
$$\subset \bigcup_k \big\{0 \neq \mathrm{int}\,L(\omega) \subset B(x_j) - U_k\big\},$$

gdzie $U_1, U_2, \ldots$ jest bazą zbiorów otwartych zawartych w $B(x_j)$. Z lematu 9 wynika, że punkty niekrytyczne leżą gęsto w $B(x_j)$. A zatem wobec wzoru (88) mamy inkluzję

$$\{0 \neq \operatorname{int} L(\omega) \subset B(x_j) - U_k\} \subset \bigcup_t \{\omega(t) \in B(x_j) - \mathfrak{R}\} \cap \bigcap_{T \geq t} \{\omega(T) \text{ non} \in U_k\},$$

gdzie $t$ przebiega zbiór przeliczalny gęsty na półprostej dodatniej. Stąd na podstawie lematu 14 otrzymujemy tezę lematu.

Dowód twierdzenia 4. Niech $z_1, z_2, \ldots$ będzie ciągiem (skończonym albo nieskończonym) wszystkich punktów krytycznych izolowanych ($z_i \neq z_j$ dla $i \neq j$). Punkty te spełniają równość

$$\operatorname{int}(z_i) = (z_i) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{89}$$

Niech $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ będzie ciągiem utworzonym ze zbiorów

$$B(x_1), B(x_2), \ldots, 0, (z_1), (z_2), \ldots$$

(0 jest zbiorem pustym). Zbiory $\Gamma_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) są otwarte. Są one także rozłączne. Istotnie, wobec gęstości w $B(x_j)$ punktów niekrytycznych (por. lemat 9), ze wzoru $z_k \in B(x_j)$ wynikałoby, że $z_k$ jest punktem skupienia punktów niekrytycznych, a więc że nie jest punktem izolowanym.

Jeżeli $\operatorname{int} L(\omega) \cap B(x_j) \neq 0$ dla pewnego $j$, to na podstawie lematów 13 i 15 mamy z prawdopodobieństwem 1 równość

$$\operatorname{int} L(\omega) = B(x_j).$$

Jeżeli natomiast $\operatorname{int} L(\omega) \cap \bigcup_i B(x_i) = 0$, to z lematu 11 wynika, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi inkluzja

$$\operatorname{int} L(\omega) \subset \mathfrak{R}.$$

Stąd na podstawie lematu 12 $\operatorname{int} L(\omega)$ jest zbiorem co najwyżej jednopunktowym z prawdopodobieństwem 1. Jeżeli

$$\operatorname{int} L(\omega) = (x),$$

to $x$ jest punktem krytycznym izolowanym, a więc $x = z_k$ przy pewnym $k$. Udowodniliśmy zatem, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi alternatywa

$$\operatorname{int} L(\omega) = \Gamma_1 \text{ albo } \Gamma_2, \text{ albo } \ldots$$

Twierdzenie 4 jest więc udowodnione.

**II.1.** Wyładowania elektryczne w gazach można w pierwszym przybliżeniu uważać za kaskadę stochastyczną złożoną z elektronów. Gdy ilość elektronów w kaskadzie jest bardzo duża, obserwuje się nowe jakościowo zjawiska fizyczne (np. hamowanie). Fizyków interesuje prawdopodobieństwo pojawiania się zjawisk wtórnych. Niech na przykład $n_0$ będzie dla

zjawiska $A$ krytyczną ilością elektronów w kaskadzie, to znaczy, że $m$ elektronów wywołuje zjawisko $A$, gdy $m > n_0$ i nie wywołuje go, gdy $m < n_0$. Wówczas prawdopodobieństwo $\mathrm{P}\left(\sup_{0<t} \omega(t) < n_0\right)$ jest prawdopodobieństwem tego, że wyładowaniu w gazie nie będzie towarzyszyć zjawisko $A$.

Z rezultatów poprzedniego rozdziału otrzymuje się metodę obliczania dystrybuanty zmiennej losowej $\sup_{0<t} \omega(t)$ dla procesów kaskadowych i ogólnie dla procesów Markowa przybierających wartości z przestrzeni dyskretnej.

**II.2.** Rozpatrzmy proces Markowa, którego realizacje przybierają wartości $0, 1, 2, \ldots$, to znaczy dla którego przestrzeń $\mathfrak{X}$ składa się z liczb całkowitych nieujemnych. Niech $t_1, t_2, \ldots$ będzie ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Ze schodkowości funkcji wynika równość

$$\left\{\sup_{0<t} \omega(t) < x\right\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left\{\omega(t_i) < x\right\},$$

a więc $\sup_{0<t} \omega(t)$ jest zmienną losową (funkcją mierzalną).

Pomocniczo będziemy rozpatrywali proces Markowa o takich samych prawdopodobieństwach przejścia, którego realizacje przybierają w zerze wartość $n$ (a zatem dla tego procesu $x_0 = n$). Niech $\Gamma_1^{(n)}, \Gamma_2^{(n)}, \ldots$ będzie ciągiem zbiorów granicznych prawie wszystkich realizacji tego procesu (por. twierdzenie 4). Symbolem $M_k^{(n)}$ oznaczmy sumę wszystkich zbiorów $\Gamma_i^{(n)}$ zawierających co najmniej jedną liczbę większą lub równą $k$. Symbolem $F_n$ oznaczmy dystrybuantę warunkową:

$$F_n(k) = \mathrm{P}\left(\sup_{0\leqslant t} \omega(t) < k \,|\, \omega(0) = n\right). \tag{90}$$

Metodę znajdowania dystrybuant $F_n$, gdy dane są intensywności i prawdopodobieństwa przejścia procesu, daje następujące

TWIERDZENIE 5. *Dystrybuanty $F_n$ spełniają następujący układ równań liniowych:*

$$F_n(k) + \sum_{r \in R_k^{(n)}} F_r(k) A_n^{(r)}(k) = B_n(k),$$

*gdzie*

$$R_k^{(n)} = \left\{m : m \text{ non} \in M_k^{(n)},\ m < k\right\},$$

$$A_n^{(r)}(k) = \int_0^{\infty} \sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} a_s^r P_n^s(t)\, dt, \qquad B_n(k) = \lim_{t\to\infty} \sum_{s \in R_k^{(n)}} P_n^s(t).$$

(Dowód tego twierdzenia jest podany w ustępie II.4.)

II.3. Przykłady. a. Proces kaskadowy. Z przykładu z ustępu I.5 widzimy, że dla procesu kaskadowego zbiór $M_k^{(n)}$ jest pusty dla $k = 1, 2, \ldots$ i dowolnych $n$, a zatem zbiór $R_k^{(n)}$ składa się z liczb $0, 1, 2, \ldots, k-1$, gdy $k \neq 0$. Mamy więc na mocy (16) dla $k \neq 0$ wzór

$$A_n^{(r)}(k) = \int_0^\infty \Big[\sum_{s=k}^\infty a_s^r P_n^s(t)\Big]\,dt = \begin{cases} k a_1^0 \int_0^\infty P_n^k(t)\,dt & \text{dla} \quad r = k-1, \\ 0 & \text{dla} \quad r < k-1. \end{cases}$$

Liczby naturalne nie są punktami granicznymi procesu, a zatem mamy równość

$$\lim_{t\to\infty} P_r^k(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{91}$$

Z równości (16) i (17) wynika

$$P_r^0(t) = \big(P_1^0(t)\big)^r. \tag{92}$$

Funkcja $P_1^0(t)$ na mocy równania (17) (przy $k = 0, n = 1$) jest funkcją niemalejącą, a więc ma granicę w nieskończoności. Przyjmując oznaczenie

$$Q = \lim_{t\to\infty} P_1^0(t) \tag{93}$$

otrzymujemy ze wzorów (91) i (92) następujący:

$$B_n(k) = \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{k-1} P_n^s(t) = Q^n \qquad (k \geqslant 1).$$

Dla procesu kaskadowego teza twierdzenia 5 przybiera więc postać

$$F_n(k) + F_{k-1}(k)\, k a_1^0 \int_0^\infty P_n^k(t)\,dt = Q^n \qquad (k \geqslant 1). \tag{94}$$

Przyjmując w tym równaniu $n = k-1$ wyznaczamy $F_{k-1}(k)$ i wstawiając otrzymaną wartość do równania (94) przy dowolnym $n$ mamy

$$F_n(k) = Q^n - \frac{k a_1^0 Q^{k-1} \int_0^\infty P_n^k(t)\,dt}{1 + a_1^0 \int_0^\infty P_{k-1}^k(t)\,dt}. \tag{95}$$

Całkując równania (17) względem $t$ od 0 do $\infty$ otrzymujemy

$$\begin{gathered} a_1^0 \int_0^\infty P_r^1(t)\,dt = Q^r, \\ -(m-1)\, a_1^1 \int_0^\infty P_r^{m-1}(t)\,dt + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq m-1}}^{m} s a_1^{m-s} \int_0^\infty P_r^s(t)\,dt = \delta_r^{m-1} \qquad (m = 2, \ldots, k). \end{gathered} \tag{96}$$

Z równań tych wyznaczymy całki

$$\int_0^\infty P_r^k(t)\,dt.$$

Wyznacznik $D_k$ układu (96) jest postaci

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1^1 & 2a_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & -2a_1^1 & 3a_1^0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{k-1} & 2a_1^{k-2} & 3a_1^{k-3} & \dots & ka_1^0 \end{vmatrix} = k!(a_1^0)^k.$$

Zastępując w tym wyznaczniku $k$-tą kolumnę kolumną wyrazów wolnych układu (96) otrzymujemy wyznacznik $D_k^{(r)}$. Drogą prostych rachunków stwierdzamy, że zachodzi równość

$$D_k^{(r)} = (k-1)!\,[(-1)^{k+1}Q^r\Delta_{k-1}+(-1)^{k+r}(a_1^0)\Delta_{k-r-1}],$$

gdzie

$$(97)\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} -a_1^1 & a_1^0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^2 & -a_1^1 & a_1^0 & \dots & 0 \\ a_1^3 & a_1^2 & -a_1^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1^1 \end{vmatrix} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1,$$

$$(98)\qquad \Delta_0 = 1, \quad \Delta_n = 0 \quad \text{dla} \quad n < 0.$$

Stąd otrzymujemy równość (przy $m_1^0 \neq 0$)

$$\int_0^\infty P_r^k(t)\,dt = \frac{1}{k\cdot(a_1^0)^k}\,[(-1)^{k+1}Q^r\Delta_{k-1}+(-1)^{k+r}(a_1^0)^r\Delta_{k-r-1}].$$

Wstawiając otrzymane wyrażenie do wzoru (95) dostajemy

$$(99)\qquad F_n(k) = (-1)^n(a_1^0)^n\,\Delta_{k+n-1}/\Delta_{k-1}, \quad \text{gdy} \quad a_1^0 \neq 0.$$

(Wzór ten otrzymał także W. M. Zołotariew [12].)

W przypadku procesu Fellera, w którym cząstki rozpadają się tylko na dwie części, intensywności są określone wzorem

$$a_1^0 = \gamma > 0, \quad a_1^2 = \eta > 0, \quad a_1^k = 0 \quad \text{dla} \quad k \geqslant 3.$$

Zachodzi wówczas łatwa do sprawdzenia (np. przez indukcję) równość

$$\Delta_n = \begin{cases} (-1)^n(\gamma^{n+1}-\eta^{n+1})/(\gamma-\eta), & \text{gdy} \quad \gamma \neq \eta, \\ (-1)^n(n+1)\gamma^n, & \text{gdy} \quad \gamma = \eta. \end{cases}$$

Wstawiając te wartości do wzoru (99) otrzymujemy dla procesu Fellera:

$$\text{dla} \quad k > n \qquad F_n(k) = \begin{cases} (a^n-a^k)/(1-a^k), & \text{gdy} \quad a = \gamma/\eta \neq 1, \\ (k-n)/k, & \text{gdy} \quad \gamma = \eta, \end{cases}$$

$$\text{dla} \quad k \leqslant n \qquad F_n(k) = 0.$$

b. Proces reakcji wybuchowych. Z przykładu c ustępu I.4 widzimy, że dla tego procesu $M_k^{(n)}$ jest zbiorem pustym dla $k = 1, 2, \ldots$, a zatem zbiór $R_k^{(n)}$ składa się z liczb $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Uwzględniając wzory na intensywności procesu reakcji wybuchowych uzyskujemy dla $k \geqslant 1$ wzór

$$A_n^{(r)}(k) = \begin{cases} \beta \int\limits_0^\infty \sum\limits_{s=k}^\infty P_n^s(t)\,dt, & \text{gdy} \quad r = 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad r > 0. \end{cases}$$

Ze wzoru (24) otrzymujemy dla wszystkich $n$

$$B_n(k) = \lim_{t\to\infty} \sum_{s=0}^{k-1} P_n^s(t) = 1 \qquad (k \geqslant 1).$$

Z równań (22) i (23) wynika $P_0^k(t) \equiv 0$, gdy $k > 0$, co implikuje $A_0^{(r)}(k) = 0$ dla każdego $r$ i $k$. Stąd na podstawie twierdzenia 5 otrzymujemy

$$F_0(k) = 1 \qquad \text{dla} \qquad k \geqslant 1,$$

$$F_n(k) = 1-\beta \int\limits_0^\infty \sum_{s=k}^\infty P_n^s(t)\,dt \qquad (n > 0,\ k \geqslant 1). \tag{100}$$

Z równań (22) i (23) wynika

$$P_n^s(t) \equiv 0 \qquad \text{dla} \qquad s = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{101}$$

Uwzględniając to, z równania (23) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt} P_n^n(t) = -(\beta+\beta_n)P_n^n(t),$$

skąd $P_n^n(t) = \exp\big(-(\beta+\beta_n)t\big)$, gdyż $P_n^n(0) = 1$. Z równania (23) dostajemy dla $s \neq n$

$$(\beta+\beta_s)\int\limits_0^\infty P_n^s(t)\,dt = \beta_{s-1}\int\limits_0^\infty P_n^{s-1}(t)\,dt.$$

Stąd, dla $s > n$, wynika równość

$$(102)\qquad \int_0^\infty P_n^s(t)\,dt = \prod_{j=0}^{s-n-1} \big(\beta_{n+j}/(\beta+\beta_{n+j+1})\big) \int_0^\infty P_n^n(t)\,dt =$$
$$= (\beta+\beta_n)^{-1} \prod_{j=0}^{s-n-1} \big(\beta_{n+j}/(\beta+\beta_{n+j+1})\big).$$

Ze wzorów (100), (101) i (102) wynika dla $k > n$

$$F_n(k) = 1-\big(\beta/(\beta+\beta_n)\big) \sum_{s=k}^{\infty} \prod_{j=0}^{s-n-1} \big(\beta_{n+1}/(\beta+\beta_{n+j+1})\big).$$

**II.4.** Rozpatrzmy proces Markowa o przestrzeni złożonej z liczb całkowitych nieujemnych (ze zwykłą dyskretną topologią). Przyjmijmy

$$(103)\qquad C_n(B,t) = \mathrm{P}\Big(\bigcap_{0\leqslant s\leqslant t} \big\{\omega(s)\in B\big\} \Big| \omega(0) = n\Big).$$

Jeżeli $\mathfrak{X}-B$ jest zbiorem zwartym (czyli skończonym), to na mocy wniosku z lematu 3 i wzorów określających funkcje $q$ przez intensywność $a_n^k$, otrzymujemy równanie

$$(104)\qquad C_n(B,t) = \sum_{s\in B} P_n^s(t) - \sum_{r\in B} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t C_r(B, t-U)\, a_s^r P_n^s(u)\,du.$$

Pokażemy teraz, że równanie (104) zachodzi także dla zbiorów $B$ skończonych.

Niech $\{B_m\}$ będzie zstępującym ciągiem zbiorów o dopełnieniach skończonych, zbieżnym do zbioru skończonego $B$. Dla każdego zbioru $B_m$ spełnione jest równanie (104). Z definicji (103) wynika bezpośrednio nierówność

$$(105)\qquad C_r(B,t) \leqslant C_r(B_k,t) \leqslant C_r(B_m,t) \quad \text{dla} \quad k \geqslant m.$$

Stąd i z równania (104) otrzymujemy nierówność

$$C_n(B_k,t) \leqslant \sum_{s\in B_k} P_n^s(t) - \sum_{r\in B_k} \sum_{s \text{ non} \in B_m} \int_0^t C_r(B, t-u)\, a_s^r P_n^s(u)\,du.$$

Gdy $k\to\infty$, wynika stąd nierówność

$$C_n(B,t) \leqslant \sum_{s\in B} P_n^s(t) - \sum_{r\in B} \sum_{s \text{ non} \in B_m} \int_0^t C_r(B, t-u)\, a_s^r P_n^s(u)\,du \qquad (m=1,2,\ldots).$$

Wobec dowolności $m$ nierówność ta implikuje następującą:

$$(106)\qquad C_n(B,t) \leqslant \sum_{s\in B} P_n^s(t) - \sum_{r\in B} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t C_r(B, t-u)\, a_s^r P_n^s(u)\,du.$$

Z nierówności (105) i równania (104) otrzymujemy także nierówność dla $m \geqslant k$:

$$C_n(B_m, t) \geqslant \sum_{s \in B_m} P_n^s(t) -$$

$$- \sum_{r \in B_m} \sum_{s \text{ non} \in B_m} \int_0^t C_r(B_k, t-u) a_s^r P_n^s(u)\, du -$$

$$- \sum_{r \in B_m} \sum_{s \in B_m - B} \int_0^t C_r(B_k, t-u) a_s^r P_n^s(u)\, du =$$

$$= \sum_{s \in B_m} P_n^s(t) - \sum_{r \in B_m} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t C_r(B_k, t-u) |a_s^r| P_n^s(u)\, du.$$

Gdy $m \to \infty$, uzyskujemy stąd nierówność

(107) $$C_n(B, t) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{s \in B} P_n^s(t) - \sum_{r \in B} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t C_r(B_k, t-u) a_s^r P_n^s(u)\, du \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ze skończoności zbioru $B$ wynika ograniczoność

$$\sum_{r \in B} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t a_s^r P_n^s(u)\, du \leqslant \sum_{r \in B} a_r^r t \leqslant K < \infty.$$

Stąd i ze wzoru (107), na mocy twierdzenie Lebesgue'a o przejściu granicznym pod znakiem całki otrzymujemy nierówność

$$C_n(B, t) \geqslant \sum_{s \in B} P_n^s(t) - \sum_{r \in B} \sum_{s \text{ non} \in B} \int_0^t C\ (B, t-u) a_s^r P_n^s(u)\, du,$$

która razem z nierównością (106) daje wzór (104) dla zbioru skończonego $B$.

LEMAT 16. *Jeżeli* $m \in \mathfrak{X} - A(n)$, *to*

$$F_m(k) = \mathrm{P}\Big(\bigcap_{t \geqslant 0} \{\omega(t) < k\} \cap \bigcap_{T \geqslant 0} \{\omega(T) \text{ non} \in M_k^{(n)}\} \Big| \omega(0) = m\Big).$$

Dowód. Przypuśćmy, że

(108) $$M_k^{(n)} = \Gamma_{i_1}^{(n)} \cup \Gamma_{i_2}^{(n)} \cup \ldots$$

(oznaczenia jak na str. 32). Z definicji zbioru $M_k^{(n)}$ wynika, że składnik $\Gamma_{i_r}^{(n)}$ zawiera co najmniej jeden element $n_r$ spełniający nierówność

(109) $$n_r \geqslant k \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Z definicji zbiorów $\Gamma_{i_r}^{(n)}$ otrzymujemy inkluzję

$$\Gamma_{i_r}^{(n)} \subset B(n_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{110}$$

(por. dowód twierdzenia 4). Przyjmijmy

$$U_r = \{s : s \in B(n_r),\ s \neq 0, 1, \ldots, k-1\}. \tag{111}$$

Z wzorów (109) i (110) wynika, że zbiory $U_r$ są niepuste. Wobec tego na podstawie lematu 14 otrzymujemy dla każdego $t$ i $r$:

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega(t) \in B(n_r)\} \cap \bigcap_{T \geqslant t} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U_r\} \Big| \omega(0) = n\Big) = 0. \tag{112}$$

Z założenia $m \in \mathfrak{X} - A(m)$ i dyskretności przestrzeni $\mathfrak{X}$ wynika, że dla pewnego $t_0$ jest $P_n^m(t_i) > 0$. Stąd i z nierówności

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega(t+t_0) \in B(n_r)\} \cap \bigcap_{T \geqslant t+t_0} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U_r\} \Big| \omega(0) = n\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{P}\Big(\{\omega(t) \in B(n_r)\} \cap \bigcap_{T \geqslant t} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U_r\} \Big| \omega(0) = m\Big) P_n^m(t_0)$$

na mocy wzoru (112) otrzymujemy równość

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega(t) \in B(n_r)\} \cap \bigcap_{T \geqslant t} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U_r\} \Big| \omega(0) = m\Big) = 0 \tag{113}$$

dla każdego $t \geqslant 0$ i $m \in \mathfrak{X} - A(n)$.

Ze schodkowości realizacji procesu i wzorów (108), (109), (110), (111) uzyskujemy inkluzję

$$\bigcap_{t \geqslant 0} \{\omega(t) < k\} \cap \bigcup_{T \geqslant 0} \{\omega(T) \in M_k^{(n)}\} \subset$$

$$\subset \bigcup_r \bigcup_{t_i} \{\omega(t_i) \in B(n_r)\} \cap \bigcap_{T \geqslant t_i} \{\omega(T) \operatorname{non} \in U_r\},$$

gdzie $t_1, t_2, \ldots$ jest ciągiem gęstym na półprostej dodatniej. Stąd wobec wzoru (113) otrzymujemy równość

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{t \geqslant 0} \{\omega(t) < k\} \cap \bigcup_{T \geqslant 0} \{\omega(T) \in M_k^{(n)}\} \Big| \omega(0) = m\Big) = 0 \quad \text{dla} \quad m \in \mathfrak{X} - A(n),$$

która wraz z definicją (90) daje tezę lematu.

LEMAT 17. *Jeżeli $r$ jest punktem granicznym procesu, czyli jeżeli $r \in \bigcup_j \Gamma_j^{(n)}$ oraz $r \operatorname{non} \in M_k^{(n)}$, to*

$$F_r(k) = 1.$$

Dowód. Z założenia lematu wynika, że $r$ należy do pewnego zbioru $\Gamma_{i_0}^{(n)}$, złożonego z liczb mniejszych od $k$:

$$m < k \quad \text{dla} \quad m \in \Gamma_{i_0}^{(n)}. \tag{114}$$

Dowodząc nie wprost, przypuśćmy, że zachodzi nierówność $F_r(k) < 1$. Z niej i z definicji (90) otrzymujemy

$$\mathrm{P}\Big(\bigcup_{T\geqslant 0}\{\omega(T) \geqslant k\}\big|\omega(0) = r\Big) > 0,$$

a zatem wobec schodkowości realizacji $\omega$ jest

(115) $$P_r^{m_0}(t_0) > 0 \quad \text{dla pewnego} \quad t_0,$$

gdzie

(116) $$m_0 \geqslant k.$$

Z tego widzimy, że

(117) $$m_0 \in \mathfrak{X} - A(r).$$

Przestrzeń $\mathfrak{X}$ jest dyskretna, a zatem ze wzoru (117) na mocy lematu 9 wnioskujemy, że $r \in \mathfrak{X} - A(m_0)$, co w połączeniu z (117) implikuje niekrytyczność punktów $r$ i $m_0$. Z założenia punkt $r$ jest punktem granicznym rozpatrywanego procesu, a więc na mocy twierdzenia 2 mamy

$$\int_0^\infty P_n^r(t)\,dt = \infty.$$

Stąd i ze wzoru (115) na mocy nierówności $P_n^m(t+t_0) \geqslant P_r^m(t_0)P_n^r(t)$ mamy

$$\int_0^\infty P_n^{m_0}(t)\,dt = \infty,$$

a więc na mocy twierdzenia 2 punkt $m_0$ jest punktem granicznym rozpatrywanego procesu. Na mocy definicji zbiorów $\Gamma_j^{(n)}$ mamy zatem $m_0 \in B(r) = \Gamma_{i_0}^{(n)}$, skąd na podstawie wzoru (114) otrzymujemy $m_0 < k$, co jest sprzeczne z (116). Lemat jest więc udowodniony.

Dowód twierdzenia 5. Przyjmijmy

$$R_k^{(n)} = \{m\colon m \text{ non} \in M_k^{(n)},\ m < k\}.$$

Z lematu 16 otrzymujemy wówczas, na mocy wzoru (103),

(118) $$F_r(k) = \lim_{t\to\infty} C_r(R_k^{(n)}, t) \quad \text{dla} \quad r \in \mathfrak{X} - A(n).$$

Zbiór $R_k^{(n)}$ jest skończony, a więc spełnia równanie (104):

(119) $$C_n(R_k^{(n)}, t) = \\ = \sum_{s\in R_k^{(n)}} P_n^s(t) - \sum_{r\in R_k^{(n)}} \sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} \int_0^t C_r(R_k^{(n)}, t-u)\,a_s^r P_n^s(u)\,du.$$

Pokażemy teraz, że dla każdego $r \in R_k^{(n)}$ zachodzi nierówność

$$(120) \qquad A_n^{(r)}(k,t) = \int_0^t \Big[ \sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} a_s^r P_n^s(u) \Big] du \leqslant k < \infty \quad \text{dla każdego} \quad t \geqslant 0.$$

Jeżeli $r$ nie jest punktem granicznym procesu (pomocniczego, czyli z warunkiem $\omega(0) = n$), to na mocy twierdzenia 2

$$(121) \qquad \int_0^\infty P_n^r(u)\,du < \infty.$$

Z równań Kołmogorowa (14) uzyskujemy nierówność

$$\sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} a_s^r P_n^s(u) \leqslant a_r^r P_n^r(u) + dP_n^r(u)/du,$$

która wobec wzoru (121) dowodzi nierówności (120) dla punktów $r$ niegranicznych.

Przypuśćmy teraz, że $r \in R_k^{(n)}$ oraz że $r$ jest punktem granicznym (a więc w szczególności $r \in \mathfrak{X} - A(n)$). Ze wzorów (118), (103) i lematu 7 otrzymujemy tożsamość $C_r(R_k^{(n)}), t) \equiv 1$ dla $r$ granicznych. Z niej i z równania (119) wynika nierówność (120) dla punktów $r$ granicznych. Udowodniliśmy zatem nierówność (120). Z niej i z równania (119) uzyskujemy przy $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} C_n(R_k^{(n)}, t) = \lim_{t\to\infty} \sum_{s \in R_k^{(n)}} P_n^s(t) - \sum_{r \in R_k^{(n)}} \lim_{t\to\infty} C_r(R_k^{(n)}, t) A_n^{(r)}(k,t).$$

Stąd, wobec wzoru (118) i uwagi, że dla $r \in A(n)$ jest

$$A_n^{(r)}(k,t) \equiv 0,$$

wynika twierdzenie.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

## Bibliografia


[1] Н. А. Дмитрев и А. Н. Колмогоров, *Ветвящиеся случайные процессы,* Доклады Академии Наук СССР 56 (1) (1947), str. 7-10.

[2] J. L. Doob, *Markoff chains — denumerable case,* Trans. Am. Math. Soc. 58 (1945), str. 455-473.

[3] — *Stochastic processes,* New York-London 1953.

[4] — *Topics in the theory of Markoff chains,* Trans. Am. Math. Soc. 52 (1942), str. 37-64.

[5] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications,* New York 1950.

[6] — *On the theory of stochastic processes, with particular reference to applications,* Proc. Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability (1949), str. 403-432.

[7] P. R. Halmos, *Measure theory,* New York 1950.

[8] А. Н. Колмогоров, *К вопросу о дифференцируемости переходных вероятностей в однородных по времени процессах Маркова со счетным числом состояний,* Ученые Записки. Московский Орд. Ленина Гос. Унив. им. М. В. Ломоносова, 148 (1951), str. 53-59.

[9] C. Kuratowski, *Topologie I,* Warszawa-Wrocław 1948.

[10] P. Lévy, *Systèmes markoviens et stationnaires. Cas dénombrable,* Ann. Ec. Norm. Sup. 68 (1951), str. 327-381.

[11] K. Urbanik, *Limit properties of homogeneous Markoff processes with a denumerable set of states,* Bull. de l'Acad. Polon. des Sciences, Cl. III, 2 (1954), str. 371-373.

[12] В. М. Золотарев, *Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов,* Успехи математ. наук 9,2 (1954), str. 147-156.

# *ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ*

К. УРБАНИК


## РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются однородные марковские случайные процессы $\langle \Omega, B_\Omega, P\rangle$ удовлетворяющие следующим условиям:

1. Пространство $\Omega$ реализаций процесса состоит из скачкообразных функций $\omega$ определённых для $t \geqslant 0$, принимающих значения из некоторого метрического, сепарабельного, локально компактного множества $\mathfrak{X}$ и таких что: $\omega(0) = x_0$.

2. $B_\Omega$ — наименьшее $\sigma$-тело, порожденное множествами вида

$$A(U, t) = \{\omega : \omega(t) \in U\},$$

где $U$ — произвольное открытое подмножество $\mathfrak{X}$.

3. Интенсивности $q(x)$ и $q(x, A)$, определенные формулами

$$q(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - p(t, x, (x))}{t},$$

$$q(x, A) = \lim_{t \to 0+} \frac{p(t, x, A)}{t} \quad \text{для борелевских} \quad A \subset \mathfrak{X} - (x),$$

где $p(t, x, A)$ — вероятность перехода из $x$ в $A$ в течение времени $t$, суть непрерывные функции переменной $x$. Интенсивность $q(x, A)$ при фиксированном $x$, является конечной $\sigma$-мерой на борелевских подмножествах множества $\mathfrak{X} - (x)$.

Процессы $\langle \Omega, B_\Omega, P\rangle$, удовлетворяющие вышеперечисленным условиям, называются кратко *марковскими процессами*.

Точка $x \in \mathfrak{X}$ называется *критической точкой марковского процесса*, если для всякого $t \geqslant 0$

$$p(t, x, (x)) = 1.$$

Точка $x \in \mathfrak{X}$ называется *предельной точкой* марковского процесса, если для произвольной окрестности $U$ точки $x$ имеет место неравенство

$$\lim_{t \to \infty} P\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \{\omega : \omega(T) \in U\}\Big) > 0.$$

Следующая теорема характеризует некритические передельные точки процесса при помощи вероятностей перехода:

*Некритическая точка $x \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда является предельной точкой марковского процесса, когда для произвольной окрестности $U$ точки $x$ справедливо равенство*

$$(*) \qquad \int_0^\infty p(t, x_0, U)\, dt = \infty.$$

*При этом множество непредельных и критических точек, окрестности которых удовлетворяют (*), замкнуто и нигде не плотно.*

Легко проверить, что $\int_0^\infty p(t, x_0, U)\,dt$ есть среднее время пребывания процесса в окрестности $U$.

Для дискретных пространств $\mathfrak{X}$ имеет место более сильная теорема:

*Если $\mathfrak{X}$ — дискретное пространство, то точка $x \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда является предельной точкой марковского процесса, когда*

$$\int_0^\infty p(t, x_0, (x)) = \infty.$$

Множество

$$L(\omega) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\bigcup_{T \geqslant t} \{x : \omega(T) = x\}}$$

называется *предельным множеством реализаций* $\omega$. Если $\mathfrak{X}$ компактное множество, то равенство $L(\omega) = (y)$ равносильно равенству $\lim_{t \to \infty} \omega(t) = y$. Доказываются следующие теоремы:

1. *Предельное множество $L(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ состоит из предельных точек процесса.*

2. *Существует последовательность $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ непересекающихся открытых множеств таких, что для почти всех $\omega \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\operatorname{int} L(\omega) = \Gamma_1 \quad \text{или} \quad \Gamma_2, \quad \text{или} \quad \ldots$$

($\operatorname{int} A$ — множество внутренних точек множества $A$).

В статье даются применения изложеных теорем. В частности, когда $\mathfrak{X}$ — множество целых неотрицательных чисел (с дискретной топологией), условные функции распределения

$$F_n(k) = \mathrm{P}\left(\sup_{0 \leqslant t} \omega(t) < k \,|\, \omega(0) = n\right)$$

удовлетворяют системе линейных уравнений

$$F_n(k) + \sum_{r \in R_k^{(n)}} F_r(k) A_n^{(r)}(k) = B_n(k) \qquad (n, k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$R_k^{(n)} = \{m : m \text{ non} \in M_k^{(n)},\ m < k\},$$

$$A_n^r(k) = \int_0^\infty \Big( \sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} q(s, (r)) p(t, n, (s)) \Big)\, dt,$$

$$B_n(k) = \lim_{t \to \infty} p(t, n, R_k^{(n)})$$

и $M_k^{(n)}$ — соединение всех множеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (см. теор. 2) процесса с начальным условием $x_0 = n$, содержащих по крайней мере одно число $\geqslant k$. Используя этот результат можно в некоторых случаях вычислить функции распределения $F_n(k)$.

# *LIMIT PROPERTIES OF MARKOFF PROCESSES*

K. URBANIK

SUMMARY

There are considered in this paper homogeneous stochastic processes $\langle \Omega, B_\Omega, P\rangle$ satisfying the conditions:

1. The space $\Omega$ of the realizations of the process consists of step functions $\omega$ defined for $t \geqslant 0$ and taking on values from a separable locally compact metric space $\mathfrak{X}$, moreover, we suppose that the functions of $\Omega$ have a fixed value at zero: $\omega(0) = x_0$.

2. $B_\Omega$ is the smallest $\sigma$-field spanned upon the sets of form

$$A(U, t) = \{\omega : \omega(t) \in U\}$$

where $U$ is an arbitrary open set of $\mathfrak{X}$.

3. The intensities $q(x)$ and $q(x, A)$ defined as

$$q(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{1 - p(t, x, (x))}{t},$$

$$q(x, A) = \lim_{t \to 0+} \frac{p(t, x, A)}{t} \quad \text{for Borel sets} \quad A \subset \mathfrak{X} - (x),$$

where $p(t, x, A)$ is the transition probability from $x$ to $A$ in the time $t$, are continuous functions of $x \in \mathfrak{X}$. For fixed $x$, the intensity $q(x, A)$ is a finite $\sigma$-measure on Borel subsets of $\mathfrak{X} - (x)$.

The processes $\langle \Omega, B_\Omega, P\rangle$ satisfying these conditions are called shortly the *Markoff processes.*

The point $x \in \mathfrak{X}$ is called *critical for the Markoff process* if for every $t \geqslant 0$

$$p(t, x, (x)) = 1.$$

The point $x \in \mathfrak{X}$ is called *limit-point of the Markoff process* if for every neighbourhood $U$ of $x$

$$\lim_{t \to \infty} P\Big(\bigcup_{T \geqslant t} \{\omega : \omega(T) \in U\}\Big) > 0.$$

The following theorem characterizes the non-critical limit-points of the process, by means of the transition probabilities:

*The non-critical point $x \in \mathfrak{X}$ is a limit point of the Markoff process if and only if for every neighbourhood $U$ of $x$*

$$(*) \qquad \int_0^\infty p(t, x_0, U)\, dt = \infty.$$

*Moreover, the set of critical non-limit-points satisfying* (*) *for every of its neighbourhoods* $U$ *is closed and non-dense.*

It is easily seen that the integral $\int_0^\infty p(t, x_0, U)\,dt$ is equal to the mean time of remaining of the process in the neighbourhood $U$.

The foregoing theorem may be strengthened for discrete spaces $\mathfrak{X}$:

*Let the space* $\mathfrak{X}$ *be discrete. Then the point* $x \in \mathfrak{X}$ *is a limit point of the Markoff process if and only if*

$$\int_0^\infty p(t, x_0, (x))\,dt = \infty.$$

The set

$$L(\omega) = \bigcap_{t \geqslant 0} \overline{\bigcup_{T \geqslant t} \{x : \omega(T) = x\}}$$

is called the *limit-set of the realizaiion* $\omega$. If the space $\mathfrak{X}$ is compact, then $L(\omega) = \{y\}$ if and only if $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = y$. The following theorems describe the properties of limit-sets of realizations of Markoff processes.

1. *For almost all* $\omega \in \Omega$ *the limit set* $L(\omega)$ *consists of limit-points of the process.*

2. *There exists a sequence* $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ *of disjoint open sets such that for almost any* $\omega \in \Omega$

$$\operatorname{int} L(\omega) = \Gamma_1 \quad or \quad \Gamma_2, \quad or \quad \ldots$$

($\operatorname{int} A$ denotes the interior of the set $A$).

In the paper some applications of the general theorems are given. In particular if $\mathfrak{X}$ is the space of positive integers (with the discrete topology), then the conditional distribution functions

$$F_n(k) = \mathrm{P}\big(\sup_{0 \leqslant t} \omega(t) < k \,|\, \omega(0) = n\big)$$

satisfy the system of linear equations

$$F_n(k) + \sum_{r \in R_k^{(n)}} F_r(k) A_n^{(r)}(k) = B_n(k) \qquad (n, k = 0, 1, \ldots)$$

where

$$R_k^{(n)} = \{m : m \text{ non} \in M_k^{(n)},\ m < k\},$$

$$A_n^{(r)}(k) = \int_0^\infty \Big( \sum_{s \text{ non} \in R_k^{(n)}} q(s, (r))\, p(t, n, (s))\Big)\,dt,$$

$$B_n(k) = \lim_{t\to\infty} p(t, n, R_k^{(n)})$$

and $M_k^{(n)}$ stands for the sum of all the sets $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (see th. 2) of the process satisfying the initial condition $x_0 = n$ and containing at least one number non-less than $k$. This result enables us to determine in many cases the distribution functions $F_n(k)$.

## SPIS RZECZY

Własności graniczne procesów Markowa . . . . . 3
Bibliografia . . . . . 41
Предельные свойства марковских процессов (Резюме) . . . . . 42
Limit properties of Markoff processes (Summary) . . . . . 44