POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CCLXXIII

WIESŁAW KRAWCEWICZ

Contribution à la théorie des équations non linéaires dans les espaces de Banach

WARSZAWA 1988
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-01-08619-X   ISSN 0012-3862

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 5

Chapitre I. Préliminaires

§1. Notations 8
§2. Mesures de non compacité 9
§3. Applications μ-lipschitziennes 11

Chapitre II. Propriétés homotopiques des applications condensantes

§1. Applications essentielles et la propriété de Leray–Schauder 13
§2. Théorème de transversalité topologique 15
§3. Théorème de bijection 17

Chapitre III. Points fixes des applications condensantes

§1. Généralisations des théorèmes de point fixe 20
§2. Champs condensants 25

Chapitre IV. Théorie de coïncidence

§1. Théorie de coïncidence pour des opérateurs de Fredholm 33
§2. Remarques générales sur les applications universelles 38
§3. Théorie de coïncidence de Mawhin 39
§4. Théorie de coïncidence pour des opérateurs semi-fredholmiens 43

Chapitre V. Applications aux équations différentielles

§1. Notations 47
§2. Certains résultats concernant les applications condensantes et L-condensantes . 50
§3. Applications aux équations différentielles ordinaires 58

Appendices

A1. Théorie du degré topologique 66
A2. Propriétés homotopiques de l'ensemble $GL_{\mathscr{C}}(E)$ . . . 69

Commentaires . . 77
Références . . . 79

Introduction

En 1959 Andrzej Granas a proposé une méthode nouvelle pour le traitement des problèmes non linéaires, basée sur les notions provenant de la théorie d'homotopie (voir A. Granas [1], J. Dugundji et A. Granas [1]). Par la suite, cette méthode a rendu des services analogues pour d'autres classes d'opérateurs que les opérateurs compacts, et a été appliquéé à des espaces plus généraux (voir Granas [5], Furi, Martelli et Vignoli [1], Volkmann [1]). Le but de ce travail est de préciser et de compléter certains aspects de cette méthode et de montrer comment on peut réduire au cas classique plusieurs généalisations de la théorie de Leray–Schauder.

Les résultats principaux de ce travail peuvent être résumés comme suit:

Soient $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux espaces de Banach, $L\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro [Chapitre IV, §1]. Dans la suite on considère aussi d'autres cas, où L est par exemple un opérateur de Fredholm généralisé au sens de Mawhin (voir Gaines et Mawhin [1]) [Chapitre IV, §3] ou bien un opérateur semi-fredholmien [Chapitre IV, §4]. On désigne par $\mathrm{CR}(L)$ un sous-ensemble non vide de $\mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ défini par $\mathrm{CR}(L) = \{A \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}) \mid L+A \text{ est bijectif}\}$.

Soit μ une mesure de non compacité définie sur $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{R}$ de façon axiomatique [Chapitre I, §2], [Chapitre V, §1], ou bien par exemple la mesure de non compacité de Kuratowski qu'on note α.

Soit $X \subset \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{R}$ un sous-ensemble borné. Si $Y \subset \boldsymbol{E}$ est borné et G est une application continue de X dans Y, on dit que:

(i) G est *une application de Darbo* si $\mu(G(A)) \leqslant k \cdot \mu(A)$ pour chaque $A \subset X$, où $0 \leqslant k < 1$.

(ii) G est *condensante* si $\mu(G(A)) < \mu(A)$ pour chaque $A \subset X$ avec $\mu(A) > 0$ [Chapitre I, §3].

Notons par $\mathscr{K}$ la classe des applications compactes, par $\mathscr{D}$ la classe des applications de Darbo et par $\mathscr{C}$ la classe des applications condensantes. Etant donnée une des classes $\mathscr{A}$ d'applications définies ci-dessus, on introduit la classe $\mathscr{A}_L$ de la façon suivante

$$F \in \mathscr{A}_L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } F\colon X \to Y \text{ où } X \text{ est borné et } Y \subset \boldsymbol{F}; \\ \text{ii) } (L+A)^{-1} \circ F \in \mathscr{A} \text{ pour un certain } A \in \mathrm{CR}(L). \end{cases}$$

Notons les inclusions suivantes:

(1) $$\mathscr{K} \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{C} \quad \text{et} \quad \mathscr{K}_L \subset \mathscr{D}_L \subset \mathscr{C}_L.$$

Etant donné un couple fermé (X, A) dans $\boldsymbol{E}$ avec $A \neq \emptyset$, on pose

$$\mathscr{A}_L(X, A) = \{F\colon X \to \boldsymbol{F} \mid \text{(i) } F \in \mathscr{A}_L \text{ et (ii) } Lx \neq F(x)\ \forall x \in A\}.$$

On dit que deux applications $F, G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ sont *homotopes* dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ s'il existe une application $H\colon X \times [0, 1] \to \boldsymbol{F}$ telle que (i) $H \in \mathscr{A}_L$; (ii) $Lx \neq H(x, t)$ pour tous $t \in [0, 1]$, $x \in A$; (iii) $H(x, 0) = F(x)$, $H(x, 1) = G(x)$ pour tout $x \in X$. La relation d'homotopie dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ est une relation d'équivalence et on désigne par $\mathscr{A}_L[X, A]$ l'ensemble des classes d'homotopie correspondantes; si $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$ nous notons par $[F]$ la classe d'homotopie dans $\mathscr{A}_L[X, A]$ qui contient F. [Chapitre II, §1], [Chapitre IV, §2].

On dit qu'une application $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$ est *L-universelle* dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ si pour tout $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ satisfaisant $F|_A = G|_A$, il existe un $x_0 \in X$ tel que $Lx_0 = G(x_0)$ (dans le cas où $L = I\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, F est dite *essentielle* dans $\mathscr{A}(X, A)$).

On dit qu'une classe d'applications $\mathscr{A}$ satisfait *la propriété de Leray–Schauder*, si pour tout couple fermé $(X, A) \subset \boldsymbol{E}$ avec $A \neq \emptyset$ la condition

(*) F et G sont homotopes dans $\mathscr{A}_L(X, A)$;

entraîne

(**) F est L-universelle dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ si et seulement si G est L-universelle dans $\mathscr{A}_L(X, A)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'annoncer notre premier résultat principal [Prop.IV.1.3, Prop.IV.3.1, Corol.IV.3.3, Prop.IV.4.1, Corol.IV.4.4].

THÉORÈME 1.

(i) *Chacune des classes $\mathscr{K}_L$, $\mathscr{D}_L$, $\mathscr{C}_L$ satisfait la propriété de Leray–Schauder*;

(ii) *Pour tout couple fermé $(X, A) \subset \boldsymbol{E}$ avec $A \neq \emptyset$, dans le diagramme suivant*

$$\mathscr{K}_L[X, A] \to \mathscr{D}_L[X, A] \to \mathscr{C}_L[X, A]$$

toutes les flèches (induites par les inclusions évidentes) représentent des fonctions bijectives qui appliquent les classes L-universelles sur les classes L-universelles.

Dans le cas spécial $L = I\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ on peut élargir le résultat précédent. Supposons que C est un convexe fermé dans $\boldsymbol{E}$. Etant donné un couple fermé $(X, A) \subset C$ avec $A \neq \emptyset$ et une classe $\mathscr{A}$ d'applications $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$, on pose

$$\mathscr{A}(X, A) = \{F\colon X \to C \mid \text{(i) } F \in \mathscr{A};\ \text{(ii) } x \neq F(x) \quad \forall x \in A\}.$$

De façon analogue on introduit la relation d'homotopie dans $\mathscr{A}(X, A)$ et on désigne par $\mathscr{A}[X, A]$ l'ensemble de classes d'homotopie correspondantes; si $F \in \mathscr{A}(X, A)$, on désigne par $[F]$ la classe d'homotopie qui contient F. On définit la notion d'application essentielle dans $\mathscr{A}(X, A)$.

THÉORÈME 2.
(i) *Chacune des classes* $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{C}$ *satisfait la propriété de Leray–Schauder*;
(ii) *Pour tout couple fermé* $(X, A) \subset C$ *avec* $A \neq \emptyset$ *dans le diagramme*

$$\mathscr{K}[X, A] \to \mathscr{D}[X, A] \to \mathscr{C}[X, A]$$

toutes les flèches (induites par les inclusions évidentes) représentent des functions bijectives qui appliquent les classes essentielles sur les classes essentielles. [Th.II.1.1, Th.II.2.4, Th.II.3.1, Corol.II.3.2].

Soit $\mathscr{A}$ la classe d'applications $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$ et (X, A) un couple fermé dans $\boldsymbol{E}$ avec $A \neq \emptyset$. Etant donné $B \in \mathrm{CR}(L)$, définissons une fonction Θ_B^* de $\mathscr{A}_L[X, A]$ dans $\mathscr{A}[X, A]$ en posant $\Theta_B^*([F]) = [(L+B)^{-1} \circ G]$ pour tout $[F] \in \mathscr{A}_L[X, A]$.

THÉORÈME 3. *Soit* $(X, A) \in \boldsymbol{E}$ *un couple fermé quelconque tel que* $A \neq \emptyset$. *Alors*:
(i) *La fonction* Θ_B^*: $\mathscr{A}_L[X, A] \to \mathscr{A}[X, A]$ *définie ci-dessus est bijective*;
(ii) Θ_B^* *applique les classes L-universelles sur les classes essentielles.* [Chapitre IV. §1].

En s'aidant des théorèmes 1, 2 et 3 on peut réduire au cas classique ($\mathscr{A} = \mathscr{K}$) plusieurs extensions des théorèmes de point fixe pour les classes d'applications $\mathscr{A} \neq \mathscr{K}$. Par exemple, les théorèmes de Darbo et de Sadovskii sont une conséquence immédiate et directe du théorème de Schauder, [Chapitre III, Chapitre IV]. En utilisant les théorèmes 1 et 3 on ramène au cas classique les extensions de la théorie du degré topologique de Leray–Schauder [Appendice A1].

Nous voulons indiquer que certains résultats présentés dans ce travail ont été déjà annoncé dans Gęba, Granas, Kaczyński et Krawcewicz [1].

La matrière de cet article est incluse dans la thèse de doctorat de l'auteur à l'Université de Montréal. Je tiens à exprimer ma gratitude à mon directeur de recherche, le professeur A. Granas, pour l'aide précieuse et le soutien qu'il m'a apportés, pour ses conseils judicieux et pour sa collaboration pendant la préparation de ce travail. Je remercie également le professeur K. Gęba et mon collègue T. Kaczyński pour plusieurs discussions fructueuses et les remarques critiques.

Chapitre I

Préliminaires

Dans ce chapitre on rappelle la définition d'une mesure de non compacité abstraite μ: $\mathscr{M} \to [0, \infty]$ où $\mathscr{M}$ est la classe des sous-ensembles bornés dans $\boldsymbol{E}^{\infty+n} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{R}^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, et on étudie ses propriétés fondamentales. Dans la suite, on définit les classe des applications μ-lipschitziennes, des applications de Darbo (notée $\mathscr{D}$) et des applications condensantes (notée $\mathscr{C}$), par rapport à une mesure de non compacité abstraite μ. (La classe des applications complètement continues est notée $\mathscr{K}$). Les propriétés principales de ces applications sont énumérées dans Prop. (I.3.1) et le Th. (I.3.2).

§1. Notations

Dans ce travail nous considérons des espaces de Banach, dénotés par les lettres $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \ldots$, et nous dénotons par $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$, $n = 0, 1, \ldots$, l'espace de Banach $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{R}^n$ muni de la norme $\|(x, p)\| = \max\{\|x\|, \|p\|\}$, où $x\in\boldsymbol{E}$, $p\in\boldsymbol{R}^n$. La projection standard de $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$ sur $\boldsymbol{E}$, définie par $(x, p)\to x$, est notée π. Dans le cas $n = 0$, π étant l'application identité, elle est notée I.

Les notations suivantes sont utilisées dans la suite:

$L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ — l'espace des opérateurs linéaires continus de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$;
$L(\boldsymbol{E}) = L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$;
$\mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ — l'espace des opérateurs linéaires complètement continus de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$;
$\mathscr{K}(\boldsymbol{E}) = \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$;
$L_c(\boldsymbol{E})$ — le sous-espace de $L(\boldsymbol{E})$ des opérateurs de la forme $I+K$, où $K\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$;
$\mathrm{Iso}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ — le sous-ensemble de $L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ des isomorphismes linéaires;
$\mathrm{GL}(\boldsymbol{E}) = \mathrm{Iso}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$;
$\mathrm{GL}_c(\boldsymbol{E}) = \mathrm{GL}(\boldsymbol{E})\cap L_c(\boldsymbol{E})$;
$\Phi_k(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ — l'espace des opérateurs de Fredholm d'indice k;
$\Phi_k(\boldsymbol{E}) = \Phi_k(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})$;
$\Phi(\boldsymbol{E})$ — l'espace des opérateurs de Fredholm;
$\mathscr{P}r(\boldsymbol{E})$ — l'espace des projections linéaires continues dans $\boldsymbol{E}$.

Soient A, X deux sous-ensembles de $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$ tels que $A\subset X$. On dit que (X, A) est *un couple* dans $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$. Si X est borné, (X, A) est dit couple *borné* et si X et A sont fermés dans $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$, on dit qu'il est *fermé*.

Soient $X, Y\subset\boldsymbol{E}^{\infty+n}$ deux ensembles bornés. Définissons:

$\mathrm{Conv}(X)$ — l'enveloppe convexe de l'ensemble X;
$d(X, Y) = \inf\{\|x-y\| \mid x\in X,\ y\in Y\}$,
$d(x, Y) = d(\{x\}, Y)$, où $x\in\boldsymbol{E}^{\infty+n}$;
$B_n(X, \varepsilon) = \{y\in\boldsymbol{E}^{\infty+n} \mid d(y, X) < \varepsilon\}$;
$B(X, \varepsilon) = B_0(X, \varepsilon)$, dans le cas où $X\subset\boldsymbol{E}$;
$B_n(x, \varepsilon) = B_n(\{x\}, \varepsilon)$; où $x\in\boldsymbol{E}^{\infty+n}$;
$D^*(X, Y) = \inf\{r > 0 \mid X\subset B_n(Y, r)\}$;

$D(X, Y) = \max\{D^*(X, Y), D^*(Y, X)\};$
$\|X\| = \sup\{\|x\| \mid x \in X\};$
$\mathrm{diam}(X) = \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in X\}.$

Rappelons que la function D, définie sur la classe des sous-ensembles bornés et fermés de $E^{\infty+n}$, à valeurs dans $R_+ = \{t \in R \mid t \geqslant 0\}$, est une métrique (appelée *métrique de Hausdorff*).

§2. Mesures de non compacité

Dénotons par $\mathcal{M}_n$ la classe des ensembles bornés dans $E^{\infty+n}$ et soit

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

On dit qu'une fonction μ: $\mathcal{M} \to [0, +\infty)$ est *une mesure de non compacité* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(μ-1) $\mu(X) = 0 \Leftrightarrow \bar{X}$ est compact;
(μ-2) $\mu(\bar{X}) = \mu(\bar{X})$;
(μ-3) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$;
(μ-4) $\mu(\mathrm{Conv}(X)) = \mu(X)$;
(μ-5) $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$;
(μ-6) $\mu(r \cdot X) = |r| \cdot \mu(X)$, $r \in R$;
(μ-7) $\mu(X+Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$;
(μ-8) Soit $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ une suite décroissante d'ensembles fermés non vides de $\mathcal{M}_n$, telle que $\lim_{i\to\infty} \mu(X_i) = 0$; alors $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \neq \emptyset$.

Soulignons que cette collection d'axiomes n'est pas minimale.

Soient X, $Y \in \mathcal{M}_n$. Dans la suite nous utilisons les propriétés suivantes d'une mesure de non compacité μ:

(μ-9) $\mu(\pi(X)) = \mu(X)$;
(μ-10) $\mu(B_n(X, r)) \leqslant \mu(X) + r \cdot \mu(B(0, 1))$;
(μ-11) $|\mu(X) - \mu(Y)| \leqslant D(X, Y) \cdot \mu(B_n(0, 1))$;

(La propriété (μ-11) implique que la fonction μ est uniformément continue par rapport à la métrique de Hausdorff).

(μ-12) Soient $\{x_i\}, \{y_i\} \subset E^{\infty+n}$ deux suites bornées et $K \subset E^{\infty+n}$ un compact. Si $\lim_{i\to\infty} d(x_i - y_i, K) = 0$, alors $\mu(\{x_i\}) = \mu(\{y_i\})$.

Preuves.

(μ-9): Pour chaque $X \in \mathcal{M}_n$ il existe un n-simplexe Δ; $\Delta \subset R^n$, $\Delta \neq \emptyset$, tel que $X \subset \pi(X) \times \Delta$. Notons que $X \subset \pi(X) + (\{0\} \times \Delta)$ et $\pi(X) \subset X + (\{0\} \times (-\Delta))$

et par (μ-3), (μ-4) et (μ-7) on obtient

$$\mu(X) \leqslant \mu(\pi(X))+\mu(\Delta) = \mu(\pi(X)) \quad \text{et} \quad \mu(\pi(X)) \leqslant \mu(X)+\mu(\Delta) = \mu(X),$$

donc

$$\mu(\pi(X)) \leqslant \mu(X) \leqslant \mu(\pi(X)),$$

d'où la conclusion.

(μ-10): D'après (μ-9), $\mu(B_n(0, 1)) = \mu(B(0, 1))$, puisque $B(0, 1) = \pi(B_n(0, 1))$. On déduit alors des propriétés (μ-6) et (μ-7) que

$$\begin{aligned}\mu(B_n(X, r)) &= \mu(X+r\cdot B_n(0, 1)) \leqslant \mu(X)+r\cdot\mu(B_n(0, 1))\\ &= \mu(X)+r\cdot\mu(B(0, 1)).\end{aligned}$$

(μ-11): Sans perte de généralité on peut supposer que $D(X, Y) = r > 0$. Soit $\varepsilon > 0$; par définition, $X \subset B_n(Y, r+\varepsilon)$ et $Y \subset B_n(X, r+\varepsilon)$, alors d'après (μ-3) et (μ-10)

$$\mu(X) \leqslant \mu(B_n(Y, r+\varepsilon)) \leqslant \mu(Y)+(r+\varepsilon)\cdot\mu(B(0, 1)),$$

et

$$\mu(Y) \leqslant \mu(X)+(r+\varepsilon)\cdot\mu(B(0, 1)).$$

Donc, on a pour tout $\varepsilon > 0$ que

$$|\mu(X)-\mu(Y) \leqslant (r+\varepsilon)\cdot\mu(B(0, 1))$$

et la propriété (μ-11) en résulte.

(μ-12): Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in N$ tel que pour tout $i > m$:

$$(x_i - y_i) \in B_n(K, \varepsilon) \quad \text{et donc} \quad x_i \in y_i + B_n(K, \varepsilon).$$

Puisque la mesure de non compacité d'un ensemble fini est nulle, on a

$$\mu(\{x_i\}) = \mu(\{x_i \mid i > m\}) \leqslant \mu(\{y_i\})+\varepsilon\cdot\mu(B(0, 1)).$$

D'autre part, par un argument analogue, on obtient

$$\mu(\{y_i\}) \leqslant \mu(\{x_i\})+\varepsilon\cdot\mu(B(0, 1)).$$

Il en résulte que $\mu(\{x_i\}) = \mu(\{y_i\})$.

(2.1) Remarque. On peut vérifier que chaque fonction μ définie sur la classe $\mathscr{M}_0$ et vérifiant les axiomes (μ-1) à (μ-8) par rapport à cette classe, se prolonge, grâce à la formule (μ-9), à une mesure de non compacité $\mu\colon \mathscr{M} \to [0, +\infty)$.

Les exemples les plus connus de mesure de non compacité sont les suivants:

1. *La mesure de non compacité de Kuratowski* $\alpha\colon \mathscr{M} \to [0, +\infty)$ est

déterminée par la formule:

$$\alpha(X) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \exists k \in N \ X = X_1 \cup \ldots \cup X_k,$$
$$\operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon, \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, k\}, \quad \text{où } X \in \mathcal{M}_0.$$

2. *La mesure de non compacité de Hausdorff* χ: $\mathcal{M} \to [0, +\infty)$ est définie de la façon suivante:

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \exists k \in N \ \exists\{x_1, \ldots, x_k\} \subset \boldsymbol{E},\ X \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)\},$$
$$\text{où } X \in \mathcal{M}_0.$$

Dans le chapitre VI, à la section 1, nous présentons d'autres exemples de mesures de non compacité.

(2.2) PROPOSITION. *Supposons que χ est la mesure de non compacité de Hausdorff, définie sur $\boldsymbol{E}$, et soit μ une mesure de non compacité sur $\boldsymbol{E}$. Alors, pour tout ensemble borné $X \in \boldsymbol{E}$*

$$\mu(X) \leqslant \mu(B(0, 1))\cdot\chi(X).$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de χ, il existe $r > 0$ tel que $r < \chi(X)+\varepsilon$, et un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \boldsymbol{E}$ tel que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r).$$

D'après les propriétés d'une mesure de non compacité on obtient:

$$\begin{aligned}\mu(X) &\leqslant \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r)\Big) = \max\{\mu(B(x_i, r)) \mid i = 1, 2, \ldots, n\}\\ &= r\cdot\max\{\mu(B(x_i, 1)) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = r\cdot\mu(B(0, 1))\\ &\leqslant (\mu(X)+\varepsilon)\cdot\mu(B(0, 1)),\end{aligned}$$

et la conclusion en découle. ■

§3. Applications μ-lipschitziennes

Soient $X \subset \boldsymbol{E}^{\infty+n}$, $Y \subset \boldsymbol{E}^{\infty+m}$ et F: $X \to Y$ une application continue, bornée sur chaque sous-ensemble borné de X.

On dit que F est une application:

- *μ-lipschitzienne* avec la constante $k \in \boldsymbol{R}_+$ si $\mu(F(A)) \leqslant k\cdot\mu(A)$ pour tout sous-ensemble borné A de X;
- *complètement continue* si elle est μ-lipschitzienne avec la constante 0;
- *de Darbo* si elle est μ-lipschitzienne avec la constante $k < 1$;

– *condensante* si elle est μ-lipschitzienne avec la constante 1 et $\mu(E(A)) < \mu(A)$ pour tout sous-ensemble borné A de X tel que $\mu(A) > 0$.

Une application continue $F: X \to Y$ est dite *compacte* si $F(X)$ est relativement compact dans Y. Notons que dans le cas où X est borné, la définition d'une application compacte coïncide avec celle d'une application complètement continue.

Dans la suite nous allons dénoter par:

$\mathscr{K}$ – la classe des applications complètement continues;

$\mathscr{D}$ – la classe des applications de Darbo;

$\mathscr{C}$ – la classe des applications condensantes.

Il est évident qu'on a les inclusions suivantes: $\mathscr{K} \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{C}$.

(3.1) PROPOSITION. (Propriétés des applications μ-lipschitziennes.) *Soient* X, Y, $Z \subset \boldsymbol{E}^{\infty+n}$.

(a) *Soient $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ deux applications continues. Si F et G sont μ-lipschitziennes avec les constantes k_1 et k_2 respectivement, alors $G \circ F: X \to Z$ est μ-lipschitzienne avec la constante $k_1 \cdot k_2$. Si $k_1, k_2 \leqslant 1$ et au moins une des applications F et G est condensante, alors $G \circ F$ est condensante.*

(b) *Soit $F: X \to \boldsymbol{E}^{\infty+n}$ une application μ-lipschitzienne avec la constante k et soit $t \in \boldsymbol{R}$. Alors $t \cdot F$ est μ-lipschitzienne avec la constante $|t| \cdot k$.*

(c) *Soient $F, G: X \to \boldsymbol{E}^{\infty+n}$ deux applications μ-lipschitziennes avec les constantes k_1 et k_2 respectivement. Alors $F+G$ est μ-lipschitzienne avec la constante k_1+k_2. Si F et G sont condensantes et $t \in [0, 1]$, alors $t \cdot F+(1-t) \cdot G$ est condensante.*

(d) *Soit $F: X \cup Y \to Z$ une application continue. Si $F|_X$, $F|_Y$ sont μ-lipschitziennes avec les constantes k_1 et k_2 respectivement, alors F est μ-lipschitzienne avec la constante* $\max\{k_1, k_2\}$. *Si $F|_X$, $F|_Y$ sont condensantes, alors F est condensante.*

Preuve. (a) est évident.

(b) résulte immédiatement de (μ-6).

(c) est une conséquence de (μ-3), (μ-7) et du fait que

$$(F+G)(A) \subset F(A)+G(A).$$

(d) est évident d'après (μ-5). ∎

(3.2) THÉORÈME. *Soient X un sous-ensemble borné et fermé* de $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$ *et $F: X \to \boldsymbol{E}^{\infty+m}$ une application condensante. Alors:*

(i) *$(\pi-F)(A)$ est fermé pour chaque sous-ensemble fermé $A \subset X$.*

(ii) *$(\pi-F)^{-1}(K)$ est compact pour chaque compact $K \subset \boldsymbol{E}^{\infty+m}$.**)

*) On note ici π la projection $\boldsymbol{E}^{\infty+n} \to \boldsymbol{E}$ composée avec l'inclusion $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{E}^{\infty+m}$.

Preuve. (i) Soient $\{x_i\} \subset A$, $\{y_i\} \subset E^{\infty+m}$ deux suites telles que $y_i = \pi(x_i) - F(x_i)$ et $y_i \to y \in E^{\infty+m}$, pour $i \to \infty$. Montrons que $y \in (\pi - F)(A)$. Les propriétés (μ-9) et (μ-12) appliquées à $K = \{y\}$ impliquent que $\mu(\{x_i\}) = \mu(\{\pi(x_i)\}) = \mu(\{F(x_i)\})$. Comme F est condensante, cette égalité ne peut avoir lieu que dans le cas où $\mu(\{x_i\}) = \mu(\{F(x_i)\}) = 0$. Il en résulte que $\{x_i\}$ contient une sous-suite qui converge vers un certain $x \in A$. Par conséquent, par la continuité de F, on obtient que $\pi(x) - F(x) = y$.

(ii) Soit $K \subset E^{\infty+m}$ un compact et soit $\{x_i\}$ une suite dans $(\pi - F)^{-1}(K)$. Il suffit de montrer que $\{x_i\}$ contient une sous-suite convergente. Soit $y_i = \pi(x_i) - F(x_i) \in K$. L'ensemble K est compact, donc après extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $\{y_i\}$ converge. Un raisonnement analogue à celui fait dans la preuve de (i) montre que $\mu(\{x_i\}) = \mu(\{F(x_i)\}) = 0$, d'où on obtient qu'il existe une suite extraite de $\{x_i\}$ qui converge. ∎

Chapitre II

Propriétés homotopiques des applications condensantes

Dans ce chapitre on considère les classes des applications $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ (notée $\mathscr{A}$) et on introduit la notion de la classe $\mathscr{A}(X, A)$ des applications appartenant à $\mathscr{A}$ et n'ayant pas de "point fixe" dans A, où $(X, A) \subset E^{n+\infty}$ est un couple fermé borné. On définit la notion d'homotopie dans $\mathscr{A}(X, A)$ et la notion d'application essentielle. On montre ensuite que l'inclusion $\mathscr{K}(X, A) \subset \mathscr{C}(X, A)$ induit une bijection sur les classes d'homotopie et qu'une application essentielle dans $\mathscr{K}(X, A)$ est aussi essentielle dans $\mathscr{C}(X, A)$ (Th.(II.1.1) et Th.(II.3.1)).

§1. Applications essentielles et la propriété de Leray–Schauder

Nous considérons dans ce chapitre un ensemble convexe fermé fixé de $E^{\infty+k}$, que nous notons C.

Etant donné un ensemble $X \subset E^{\infty+n}$, $n = 0, 1, \ldots$, et une application F: $X \to C$, on dit que $x \in X$ est *un point fixe* de F si $\pi(x) = F(x)$. Remarquons que dans le cas où $n = 0$, cela signifie que $x = F(x)$.

Supposons que $\mathscr{A}$ dénote une sous-classe des applications continues, définies sur les sous-ensemble de $E^{\infty+n}$, $n = 0, 1, \ldots$, et à valeurs dans $E^{\infty+k}$.

Soit (X, A) un couple fermé et borné dans $E^{\infty+n}$. Désignons par $\mathscr{A}(X, A)$ la classe de toutes les applications F: $X \to C$ telles que:

(i) $F \in \mathscr{A}$;

(ii) F n'a pas de point fixe dans A, i.e. $\pi(x) \neq F(x)$ pour tout $x \in A$.

Une application $H\colon X\times[0, 1]\to C$ est dite *une homotopie* dans $\mathscr{A}(X, A)$ si et seulement si $H\in\mathscr{A}(X\times[0, 1], A\times[0, 1])$, et $H_t = H(\cdot, t)$ appartient à $\mathscr{A}(X, A)$ pour tout $t\in[0, 1]$. Deux applications $F, G\in\mathscr{A}(X, A)$ sont dites *homotopes* (ce qu'on note $F \underset{\mathscr{A}}{\sim} G$), s'il existe une homotopie H dans $\mathscr{A}(X, A)$ telle que $H_0\equiv F$, $H_1\equiv G$.

Dans la suite nous supposons que la classe $\mathscr{A}$ possède les propriétés suivantes:

(1) la relation "$\underset{\mathscr{A}}{\sim}$" est une relation d'équivalence pour tout couple borné et fermé (X, A);

(2) $F|_A\equiv G|_A \;\Rightarrow\; F\underset{\mathscr{A}}{\sim} G$, pour toutes $F, G\in\mathscr{A}(X, A)$.

L'ensemble de toutes les classes d'homotopie dans $\mathscr{A}(X, A)$ est noté $\mathscr{A}[X, A]$.

(1.1) DÉFINITION. Une application $F\in\mathscr{A}(X, A)$ est dite *essentielle* si chaque $G\in\mathscr{A}(X, A)$ telle que $F|_A\equiv G|_A$ a un point fixe dans X. F est dite *inessentielle* si elle n'est pas essentielle.

L'ensemble des applications essentielles dans $\mathscr{A}(X, A)$ est noté $\mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A)$.

(1.2) DÉFINITION. Nous disons que la classe $\mathscr{A}(X, A)$ satisfait *la propriété de Leray–Schauder* si, pour toutes les applications $F, G\in\mathscr{A}(X, A)$ telles que $F\underset{\mathscr{A}}{\sim} G$, F est essentielle si et seulement si G est essentielle.

Supposons que $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}^*$ sont deux classes d'applications continues bornées telles que les propriétés (1), (2) et de Leray–Schauder sont satisfaites. Notons que l'inclusion $i\colon \mathscr{A}(X, A)\to\mathscr{A}^*(X, A)$ induit l'application

$$i_*\colon \mathscr{A}[X, A]\to\mathscr{A}^*[X, A].$$

(1.1) THÉORÈME. *Avec les notations précédentes, supposons que les applications induites:*

$$i^*\colon \mathscr{A}[X, A]\to\mathscr{A}^*[X, A] \quad et \quad i^*\colon \mathscr{A}[X, X]\to\mathscr{A}^*[X, X]$$

sont bijectives. Alors on a:

(i) $i(\mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A))\subset\mathrm{Ess}_{\mathscr{A}^*}(X, A)$.

(ii) *Si $X = C\subset E$ (en supposant que C est borné), alors X a la propriété du point fixe par rapport à la classe $\mathscr{A}$ si et seulement si X a la propriété du point fixe par rapport à la classe $\mathscr{A}^*$ (i.e. chaque application $F\colon X\to X$ appartenant à $\mathscr{A}^*$ a un point fixe).*

Preuve. (i) Supposons que $F\in\mathscr{A}(X, A)$ et que F est inesentielle dans la classe $\mathscr{A}^*(X, A)$. Par définition, il existe une application $G^*\in\mathscr{A}^*(X, A)$ telle que $G^*|_A\equiv F|_A$ et G^* n'a pas de point fixe. Par conséquent $G^*\in\mathscr{A}^*(X, X)$ et d'après la propriété (2), $G^*\underset{\mathscr{A}^*}{\sim} F$ dans la classe $\mathscr{A}^*(X, A)$. La bijectivité de $i^*\colon \mathscr{A}[X, X]\to\mathscr{A}^*[X, X]$ implique qu'il existe $G\in\mathscr{A}^*(X, X)$ telle que $G\underset{\mathscr{A}^*}{\sim} G^*$ dans la classe $\mathscr{A}^*(X, X)$, d'où l'on déduit que $G\underset{\mathscr{A}^*}{\sim} G^*$ dans $\mathscr{A}^*(X, A)$ et par suite $G\underset{\mathscr{A}^*}{\sim} F$ dans $\mathscr{A}^*(X, A)$. Par ailleurs, $G\in\mathscr{A}(X, A)$ et G n'a pas de point fixe, alors la bijectivité de i^*: $\mathscr{A}[X, A] \to \mathscr{A}^*[X, A]$ implique que $G \underset{\mathscr{A}}{\sim} F$ dans $\mathscr{A}(X, A)$. Il s'ensuit, grâce à la propriété de Leray–Schauder, que F est inessentielle dans $\mathscr{A}(X, A)$.

(ii) Notons que la condition „$X = C$ a la propriété du point fixe par rapport à la classe $\mathscr{A}$" est équivalente à: $\mathscr{A}(X, X) = \emptyset$, d'où l'on obtient la conclusion puisque i^*: $\mathscr{A}[X, X] \to \mathscr{A}^*[X, X]$ est supposée bijective. ∎

§2. Théorème de transversalité topologique

Dans cette section nous supposons que l'espace de Banach E est muni d'une mesure de non compacité μ: $\mathscr{M} \to \boldsymbol{R}_+$. Considérons les classes d'applications $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$.

Soit (X, A) un couple borné et fermé dans $E^{\infty+n}$. Nous allons considérer la classe $\mathscr{A}(X, A)$, telle que définie au §1, où $\mathscr{A}$ représente une des classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$.

Une homotopie dans la classe $\mathscr{K}(X, A)$ est dite *complètement continue* ou *compacte*, une homotopie dans $\mathscr{D}(X, A)$ est appelée *homotopie de Darbo*, et *homotopie condensante* une homotopie dans $\mathscr{C}(X, A)$.

(2.1) PROPOSITION. *Les classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ satisfont les conditions* (1) *et* (2) *du* §1.

Preuve. (1) La réflexivité est triviale, la symétrie résulte de (I.3.1,(a)) appliqué à l'homotopie H entre F et G, i.e. $H_0 \equiv F$ et $H_1 \equiv G$, et à l'application $(x, t) \to (x, 1-x)$. Pour prouver que la relation d'homotopie est transitive, considérons l'application.

$$H(x, t) = \begin{cases} H^1(x, 2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ H^2(x, 2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

où H^1 est une homotopie entre F_1 et F_2 dans $\mathscr{A}(X, A)$, H^2 est une homotopie entre F_2 et F_3 dans $\mathscr{A}(X, A)$, $\mathscr{A} = \mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$ (resp.).

On conclut à l'aide (I.3.1,(d)) que l'homotopie H entre F_1 et F_3 appartient à $\mathscr{A}(X, A)$ ce qui termine la vérification de (1).

(2) Supposons que $F, G \in \mathscr{A}(X, A)$ et $F|_A \equiv G|_A$. Puisque C est convexe, alors l'homotopie

$$H_t(x) = (1-t)F(x) + t \cdot G(x), \quad t \in [0, 1], \; x \in X,$$

est une application dans C sans point fixe dans A.

Soit $B \subset X \times [0, 1]$ un sous-ensemble quelconque. Comme

$$H(B) \subset H(\pi(B) \times [0, 1]) \subset \operatorname{Conv}\big(F(\pi(B)) \cup G(\pi(B))\big),$$

on a

$$\mu(H(B)) \leqslant \mu\big(\operatorname{Conv}\big(F(\pi(B)) \cup G(\pi(B))\big)\big) = \max\big\{\mu\big(F(\pi(B))\big), \mu\big(G(\pi(B))\big)\big\}.$$

Si F et G sont deux applications de Darbo (resp. complètement continues, condensantes), alors H est une application de Darbo (resp. complètement continue, condensante). Remarquons enfin que si $H \in \mathscr{D}$ (resp. $H \in \mathscr{K}$, $H \in \mathscr{C}$) alors il est évident que $H_t \in \mathscr{D}$ (resp. $H_t \in \mathscr{K}$, $H_t \in \mathscr{C}$) pour tout $t \in [0, 1]$. ∎

Si $F \in \mathscr{A}(X, A)$, alors $0 \notin (\pi - F)(A)$. D'après (I.3.2,(i)) on en déduit que le nombre

$$\varepsilon = d(0,(\pi - F)(A)) = \inf_{a \in A} \{\|\pi(A) - F(a)\|\}$$

est strictement positif.

(2.2) Proposition. *Soient* $F \in \mathscr{A}(X, A)$, $\varepsilon = d(0,(\pi - F)(A))$ *et* $G\colon X \to C$ *une application de la classe* $\mathscr{A}$. *Supposons qu'une des deux conditions suivantes est satisfaite:*

(i) $\pi(x) \neq (1-t)F(x) + t \cdot G(x)$ *pour tout* $(x, t) \in A \times [0, 1]$,

(ii) $\|G(x) - F(x)\| < \varepsilon$, *pour tout* $x \in A$.

Alors $G \in \mathscr{A}(X, A)$ *et* $F \underset{\mathscr{A}}{\simeq} G$ *dans* $\mathscr{A}(X, A)$.

Preuve. Supposons d'abord que la condition (i) est satisfaite. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de (2.1,(2)) montre que l'homotopie

$$H(x, t) = (1-t)F(x) + t \cdot G(x), \qquad x \in X;\ t \in [0, 1],$$

est une homotopie entre F et G dans la classe $\mathscr{A}(X, A)$. Notons ensuite que la condition (ii) entraîne (i), ce qui achève la démonstration. ∎

(2.3) Lemme. *Soit* $F \in \mathscr{A}(X, A)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est inessentielle;*

(ii) *il existe* $G \in \mathscr{A}(X, A)$, *telle que G n'a pas de point fixe et* $G \underset{\mathscr{A}}{\simeq} F$ *dans* $\mathscr{A}(X, A)$;

(iii) *il existe une homotopie H dans $\mathscr{A}(X, A)$ entre F et G^*, où G^* n'a pas de point fixe, et telle que* $H_t|_A \equiv F|_A$ *pour tout* $t \in [0, 1]$.

Preuve. (i) ⇒ (ii) Soit $G \in \mathscr{A}(X, A)$ une application sans point fixe telle que $F|_A \equiv G|_A$. Alors, la condition (2.2,(i)) est satisfaite, ce qui implique que $F \underset{\mathscr{A}}{\simeq} G$ dans $\mathscr{A}(X, A)$.

(ii) ⇒ (iii) Soit H une homotopie entre F et G, où G n'a pas de point fixe. Définissons l'ensemble

$$B = \{x \in X \mid \exists t \in [0, 1]\ \pi(x) = H(x, t)\}.$$

D'après (I.3.2,(ii)), l'ensemble $(\pi - H)^{-1}(0)$ est compact dans $X \times [0, 1]$ et par conséquent B, étant l'image de cet ensemble par la projection $X \times [0, 1] \to X$, est compact aussi. Sans perte de généralité, on peut supposer que $B \neq \emptyset$. Puisque $A \cap B = \emptyset$, alors il existe une fonction de Urysohn $\xi\colon X \to [0, 1]$, telle que $\xi(A) = 1$, $\xi(B) = 0$. On définit

$$F^*(x) = H(x, \xi(x)), \qquad x \in X;$$
$$H^*(x, t) = H(x,(1-t)+t\xi(x)), \qquad x \in X, \ t \in [0, 1].$$

D'après (I.3.1,(a)) appliqué à

$$x \to (x, \xi(x)) \quad \text{et} \quad (x, t) \to (x,(1-t)+t\xi(x)), \quad x \in X, \ t \in [0, 1];$$

composées avec H, on déduit que F^*, $H^* \in \mathscr{A}$.

F^* n'a pas de point fixe: en effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in X$ tel que $\pi(x) = F^*(x)$. Alors $x \in B$ et par conséquent $\xi(x) = 0$, d'où on obtient que $\pi(x) = H_0(x) \doteq G(x)$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que G n'a pas de point fixe. Par ailleurs, si $x \in A$, alors $\xi(x) = 1$ et par suite

$$H_t^*(x) = H(x,(1-t)+\xi(x)t) = H_1(x) = F(x).$$

Il en résulte que H^* est une homotopie entre F et F^*, telle que $H_t^*|_A \equiv F|_A$ pour tout $t \in [0, 1]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) est évident. ■

(2.4) THÉORÈME (de transversalité topologique). *Supposons que F, $G \in \mathscr{A}(X, A)$ sont homotopes dans $\mathscr{A}(X, A)$. Alors $F \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A)$ si et seulement si $G \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A)$. Par conséquent, les classes $\mathscr{K}(X, A)$, $\mathscr{D}(X, A)$ et $\mathscr{C}(X, A)$ satisfont la propriété de Leray–Schauder pour tous les couples fermés et bornés (X, A), $A = \emptyset$, dans $E^{\infty+n}$.*

Preuve. La preuve est immédiate d'après le lemme (2.3). ■

§3. Théorème de bijection

Considérons les inclusions suivantes:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}(X,A) \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i_1"'] & & \mathscr{C}(X,A) \\
& \mathscr{D}(X,A) \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

qui induisent les applications

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}[X,A] \arrow[rr, "i^*"] \arrow[dr, "(i_1)^*"'] & & \mathscr{C}[X,A] \\
& \mathscr{D}[X,A] \arrow[ur, "(i_2)^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant:

(3.1) THÉORÈME (de bijection). *Pour chaque couple borné et fermé* (X, A), $A \neq \emptyset$, *dans* $E^{\infty+n}$ *l'application induite*

$$i^*: \mathscr{K}[X, A] \to \mathscr{C}[X, A]$$

est une bijection.

Preuve. *1-ère étape.* $(i_1)^*$: $\mathscr{K}[X, A] \to \mathscr{D}[X, A]$ *est une bijection.*

Montrons d'abord que $(i_1)^*$ est surjective. Supposons que $F \in \mathscr{D}(X, A)$, i.e. il existe $k \in [0, 1)$ tel que F une application μ-lipchitzienne avec la constante k. Il suffit de vérifier que F est homotope dans $\mathscr{D}(X, A)$ à une application compacte.

Définissons les suites d'ensembles: $Q_i \subset E^{\infty+n}$, $R_i \subset E$; définies par

$$Q_1 = \overline{\mathrm{Conv}\{F(X)\}}; \qquad R_1 = \pi(Q_1),$$
$$Q_{i+1} = \overline{\mathrm{Conv}\{F(X \cap \pi^{-1}(R_i))\}}; \qquad R_{i+1} = \pi(Q_{i+1}).$$

Notons que $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$, que Q_i est un ensemble borné, fermé et convexe pour tout i, et que

$$\mu(Q_{i+1}) = \mu\big(F(X \cap \pi^{-1}(R_i))\big) \leqslant k \cdot \mu(X \cap \pi^{-1}(R_i)) \leqslant k \cdot \mu(R_i) = k \cdot \mu(Q_i)$$

pour tous $i = 1, 2 \dots$, donc $\mu(Q_i) \leqslant k^i \cdot \mu(X)$, $i = 1, 2, \dots$, et par conséquent $\lim_{i \to \gamma} \mu(Q_i) = 0$. Définissons $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ et $R = \pi(Q)$; $\mu(Q) = 0$ et $F(X \cap \pi^{-1}(R)) \subset Q$.

Il y a deux possibilités: ou bien $Q \neq \emptyset$, ou bien il existe $m \geqslant 1$ tel que $Q_m \neq \emptyset$, $Q_{m+1} = \emptyset$.

Dans le premier cas, Q est convexe, compact et non vide. Il existe donc une rétraction r: $C \to Q$ de C sur Q. Posons

$$H(x, t) = (1-t)F(x) + t \cdot r(F(x)), \qquad x \in X, \ t \in [0, 1].$$

et prouvons que $\pi(x) \neq H(x, t)$ pour tous $x \in A$, $t \in [0, 1]$.

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in A$ et $t_0 \in [0, 1]$ tels que $\pi(x_0) = H(x_0, t_0)$. Puisque $F(x_0) \in Q_1$ et $r(F(x_0)) \in Q_1$, il en résulte que $\pi(x_0) \in Q_1$. Un raisonnement analogue montre que $\pi(x_0) \in Q_i$ implique que $\pi(x_0) \in Q_{i+1}$. Par induction $\pi(x_0) \in Q$, donc $F(x_0) \in Q$ et

$$\begin{aligned} \pi(x_0) &= (1-t_0)F(x_0) + t_0 r(F(x_0)) \\ &= (1-t_0)F(x_0) + t_0 \cdot F(x_0) \\ &= F(x_0) \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Cela montre que $F \underset{\mathscr{D}}{\sim} r \circ F$ dans $\mathscr{D}(X, A)$, où $r \circ F \in \mathscr{K}(X, A)$.

Dans le deuxième cas considérons un point $\bar{x}_0 \in Q_m$ et posons

$$H(x, t) = (1-t)F(x)+t\cdot\bar{x}_0, \quad \text{où } (x, t)\in X\times[0, 1].$$

Comme dans le cas précédent, supposons qu'il existe $(x_0, t_0)\in A\times[0, 1]$ tel que $\pi(x_0) = H(x_0, t_0)$. On en déduit que $\pi(x_0)\in Q_m$, mais par hypothèse $\pi^{-1}(R_m)\cap X = \emptyset$; c'est donc une contradiction et cela montre que H est une homotopie dans $\mathscr{D}(X, A)$. Comme par ailleurs $R_m\cap\pi(X) = \emptyset$, alors l'application $H(x, t)$ est une homotopie dans $\mathscr{D}(X, A)$ entre l'application F et l'application constante $X\to\{\bar{x}_0\}$.

Montrons ensuite que $(i_1)^*$ est injective. Supposons que $F_0, F_1\in\mathscr{K}(X, A)$ sont homotopes dans $\mathscr{D}(X, A)$ et soit H une homotopie entre F_0 et F_1 dans $\mathscr{D}(X, A)$. On va montrer qu'il existe un homotopie H^* entre F_0 et F_1 dans la classe $\mathscr{K}(X, A)$. Par définition $H\in\mathscr{D}(X\times[0, 1], A\times[0, 1])$. D'autre part, la surjectivité de $(i_1)^*$ appliquée à $(X\times[0, 1], A\times[0, 1])$, implique qu'il existe une application compacte $H'\in\mathscr{K}(X\times[0, 1], A\times[0, 1])$ et une homotopie $\tilde{H}$: $X\times[0, 1]\times[0, 1]\to C$ dans $\mathscr{D}(X\times[0, 1], A\times[0, 1])$ entre H et H'.

Notons que $H|_{(X\times\{0\})\cup(X\times\{1\})}$ est compacte, alors par la construction utilisée dans la première partie de la preuve, $\tilde{H}|_{(X\times\{0\}\times[0,1])\cup(X\times\{1\}\times[0,1])}$ est également compacte. Notons, d'autre part, que $\tilde{H}|_{X\times[0,1]\times\{1\}}\equiv H'$ est aussi compacte. Alors on peut vérifier facilement que l'application H^* définie par la formule suivante:

$$H^*(x, t) = \begin{cases} H(x, 0, 3t) & \text{si } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{3}, \\ H(x, 3t-1, 1) & \text{si } \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant \frac{2}{3}, \\ H(x\ 1, 3-3t) & \text{si } \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1, \end{cases}$$

est une homotopie entre F_0 et F_1 dans la classe $\mathscr{K}(X, A)$.

2-ème étape: $(i_2)^*$: $\mathscr{D}[X, A]\to\mathscr{C}[X, A]$ est une bijection.

Sans perte de généralité on peut supposer que $0\in C$. On va montrer seulement que $(i_2)^*$ est surjective, puisque la démonstration de l'injectivité est très similaire à celle déjà faite pour $(i_1)^*$.

Supposons que $F\in\mathscr{C}(X, A)$, alors on a que

$$\varepsilon = \inf_{x\in A}\|\pi(x)-F(x)\| > 0.$$

Soit k un nombre tel que

$$1-\frac{\varepsilon}{\|F(X)\|} < k < 1;$$

$k\cdot F$ est une application μ-lipschitzienne avec la constante k et on en déduit que pour tout $x\in X$ $\|k\cdot F(x)-F(x)\| < \varepsilon$. D'après (2.2), l'homotopie

$H(x, t) = (1-t)F(x)+t\cdot k\cdot F(x), (x, t)\in X\times[0, 1]$ est une homotopie entre F et $k\cdot F$ dans $\mathscr{C}(X, A)$. ∎

(3.2) COROLLAIRE. *Pour chaque couple (X, A), $A \neq \emptyset$, dans $E^{\infty+n}$ on a*

$$i(\mathrm{Ess}_{\mathscr{K}}(X, A)) \subset \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(X, A).$$

Chapitre III

Points fixes des applications condensantes

Dans ce chapitre on présente plusieurs théorèmes de point fixe qui sont des corollaires des résultats du chapitre précédent (i.e. des Th.(II.1.1) et Th.(II.3.1). Dans le §2 on étudie les propriétés des champs condensants et on démontre de nombreux théorèmes sur les équations non linéaires provenant des champs condensants.

§1. Généralisations des théorèmes de point fixe

Dans ce chapitre C dénote un sous-ensemble fermé et convexe de E, fixé.

(1.1) THÉORÈME (de point fixe de Sadovskii). *Chaque application condensante et bornée F: $C\to C$ a au moins un point fixe.*

Preuve. On peut toujours se ramener au cas où C est borné (en considérant la restriction de l'application F à $\overline{\mathrm{Conv}\{F(C)\}}$). Par le théorème de point fixe de Schauder, C a la propriété du point fixe par rapport à la classe $\mathscr{K}$, alors d'après (II.1.1) et (II.3.1), C a aussi cette propriété par rapport à la classe $\mathscr{C}$.

(2.1) PROPOSITION. *Soient U un ensemble ouvert borné dans C, $x_0\in C$ et $x_0\notin\partial U$. L'application constante $\bar U\to\{x_0\}$ est essentielle dans $C(\bar U, \partial U)$ si et seulement si $x_0\in U$.*

Preuve. D'après le théorème de point fixe de Schauder, l'application $\bar U\to\{x_0\}$ est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar U, \partial U)$ si et seulement si $x_0\in U$, alors la conclusion découle de (II.3.2). ∎

(1.3) THÉORÈME (Alternative non linéaire). *Soit U un ensemble ouvert borné dans C tel que $0\in U$. Alors, pour chaque application condensante F: $\bar U\to C$, on a l'alternative suivante:*

(i) *F a un point fixe,*

ou bien
(ii) *il existe* $x \in \partial U$ *et* $\lambda \in (0, 1)$ *tels que* $x = \lambda F(x)$.

Preuve. Par (1.2), l'application constante $\bar{U} \to \{0\}$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$. Définissons l'application H par $H(x, t) = t \cdot F(x)$, $x \in \bar{U}$, $t \in [0, 1]$. Alors H étant une application condensante, ou bien elle est une homotopie entre F et 0 dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$, ou bien elle a un point fixe dans ∂U i.e. il existe $(x, \lambda) \in \partial U \times (0, 1]$ tel que $x = \lambda \cdot F(x)$. Dans le cas où $0 \underset{\mathscr{C}}{\sim} F$ dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$, ou dans celui où $\lambda = 1$, F a un point fixe. Sinon, la condition (ii) est satisfaite. ∎

Soit p: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}_+$ une fonction (qui n'est pas nécessairement continue) telle que $p^{-1}(0) = 0$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$. Chaque norme définie sur l'espace $\boldsymbol{E}$ est un exemple d'une telle fonction. Alors:

(1.4) Corollaire. *Soient U un sous-ensemble ouvert borné de C tel que $0 \in U$, et F: $\bar{U} \to C$ une application condensante telle qu'une des conditions suivantes est satisfaite:*
(1) (*condition de Rothe*)

$$p[F(x)] \leqslant p(x) \quad \text{pour tout } x \in \partial U;$$

(2) (*condition d'Altman*)

$$[p(F(x))]^2 \leqslant [p(F(x) - x)]^2 + [p(x)]^2 \quad \text{pour tout } x \in \partial U.$$

Alors F a un point fixe.

Preuve. On va vérifier que chacune des conditions (1) et (2), exclut la possibilité d'existence d'un point $(x, \lambda) \in \partial U \times (0, 1)$ tel que $x = \lambda F(x)$. Donc, d'après (1.3), F doit avoir un point fixe. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point $(x, \lambda) \in \partial U \times (0, 1)$ tel que $x = \lambda F(x)$. On en déduit que $p(x) = \lambda p[F(x)]$, ce qui contredit (1). Par ailleurs

$$[p(x)]^2 + [p(x - F(x))]^2 = (1 - 2\lambda(1 - \lambda))[p(F(x))]^2 < p[F(x)]^2$$

ce qui contredit (2). ∎

(1.5) Corollaire (Alternative de Leray—Schauder). *Soit C un sous-ensemble convexe et fermé* dans E, *tel que* $0 \in C$. *Etant donné une application condensante F: $C \to C$, on définit*

$$\Sigma(F) = \{x \in C \mid \exists \lambda \in (0, 1) \ x = \lambda F(x)\}.$$

Alors, ou bien $\Sigma(F)$ est non borné ou bien F a un point fixe.

Preuve. Supposons que $\Sigma(F)$ est borné et soit $B(0, r)$ une boule contenant $\Sigma(F)$. L'ensemble $U = C \cap B(0, r)$ est ouvert et borné dans C, $0 \in U$ et $F|_{\bar{U}}$: $\bar{U} \to C$ est une application condensante n'ayant pas de point $x \in \partial U$ satisfaisant la condition (ii) de (1.3). Donc $F|_{\bar{U}}$ a un point fixe. ∎

(1.1) DÉFINITION. Une application F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est dite *quasi-bornée* si

$$|F| = \limsup_{\|x\| \to \infty} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} = \inf_{\varrho > 0} \sup_{\|x\| \geqslant \varrho} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} < \infty.$$

Le nombre $|F|$ est appelé *la quasi-norme* de F.

(1.6) THÉORÈME. *Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ une application condensante quàsi-bornée. Alors, pour chaque $y \in \boldsymbol{E}$ et pour chaque $\lambda \in [-1, 1]$ tel que $|\lambda| < 1/|F|$, l'équation $y = x - \lambda \cdot F(x)$ a une solution. En particulier, l'application condensante $\lambda \cdot F$ a un point fixe.*

Preuve. Considérons l'application $G(x) = y + \lambda \cdot F(x)$, $x \in \boldsymbol{E}$. Puisque $|\lambda| < 1$, l'application G: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est condensante. Il est facile de vérifier que $|G| = |\lambda| \cdot |F| < 1$, donc il existe $r > 0$ tel que

$$\frac{\|G(x)\|}{\|x\|} < 1 \quad \text{pour tout } \|x\| > r.$$

D'après l'alternative non linéaire (1.3), appliquée avec $U = \{x \in \boldsymbol{E} \mid \|x\| < r\}$, on déduit que G doit avoir un point fixe $x \in \boldsymbol{E}$, donc $x = G(x) = y + \lambda F(x)$. ∎

(1.2) DÉFINITION. Une application F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est dite *asymptotiquement linéaire* s'il existe un opérateur linéaire $S \in L(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ tel que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Sx - F(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

On peut vérifier que l'opérateur S est déterminé uniquement. On l'appelle *la derivée asymptotique* de F et on le note $F'(\infty)$.

(1.7) COROLLAIRE. *Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ une application condensante asymptotiquement linéaire. Si $\|F'(\infty)\| < 1$ alors, pour chaque $y \in \boldsymbol{E}$ et pour chaque $\lambda \in [-1, 1]$, l'équation $y = x - \lambda \cdot F(x)$ a une solution. En particulier, l'application condensante $\lambda \cdot F$ a un point fixe.*

Preuve. Notons d'abord que F est une application quasi-bornée et que $|F| < \|F'(\infty)\|$. En effet, pour tout $x \neq 0$ on a

$$\frac{\|F(x)\|}{\|x\|} - \|F'(\infty)\| \leqslant \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} - \frac{\|F'(\infty)x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|F(x) - F'(\infty)x\|}{\|x\|}$$

ce qui implique que

$$\limsup_{\|x\| \to \infty} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} - \|F'(\infty)\| \leqslant 0.$$

Alors, $|F| < 1$ ce qui, d'après (1.6), achève la preuve. ∎

(1.8) Remarque. Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ une application μ-lipschitzienne avec la constante k, F asymptotiquement linéaire, et soit $F'(\infty)$: $E \to E$ sa dérivée asymptotique. Alors $F'(x)$ est également μ-lipschitzienne avec la constante k.

Preuve. Soient $X \subset E$ un sous-ensemble borné et $B(0, R)$ une boule telle que $X \subset B(0, R)$. $F'(\infty)$ est la dérivée asymptotique de F, donc

$$(1) \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall \|x\| \geqslant r \quad \|F(x) - F'(\infty)x\| < \varepsilon\|x\|.$$

Etant donné $\eta > 0$, posons $X_\eta = X \backslash (X \cap B(0, \eta))$. Notons d'abord que si $x \in \frac{r}{\eta} \cdot X_\eta$, alors $r \leqslant \|x\| \leqslant \frac{r}{\eta} R$, donc il découle de (1) que

$$F'(\infty)\left(\frac{r}{\eta} X_\eta\right) \subset B\left(F\left(\frac{r}{\eta} \cdot X_\eta\right), \varepsilon \cdot \frac{r}{\eta} R\right)$$

ce qui implique

$$\frac{r}{\eta} \cdot \mu(F'(\infty)(X_\eta)) \leqslant \mu\left(B\left(F\left(\frac{r}{\eta} X_\eta\right), \varepsilon \cdot \frac{r}{\eta} \cdot R\right)\right) \leqslant k \cdot \mu\left(\frac{r}{\eta} X_\eta\right) + \varepsilon \cdot \frac{r}{\eta} \cdot R \cdot \mu(B(0, 1))$$

$$\leqslant k \cdot \frac{r}{\eta} \cdot \mu(X_\eta) + \varepsilon \cdot \frac{r}{\eta} \cdot R \cdot \mu(B(0, 1)).$$

Par conséquent

$$\mu(F'(\infty)(X_\eta)) \leqslant k \cdot \mu(X_\eta) + \varepsilon \cdot k_1,$$

où k_1 est une constante qui ne dépend pas de ε. Après passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\mu(F'(\infty)(X_\eta)) \leqslant k \cdot \mu(X_\eta) \leqslant k \cdot \mu(X).$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\eta > 0$, le passage à la limite quand $\eta \to 0$ conduit à l'inégalité

$$\mu(F'(\infty)\ (X)) \leqslant k \cdot \mu(X). \ \blacksquare$$

(1.9) THÉORÈME (de point fixe de Borsuk). *Soit U un voisinage borné et symétrique de 0 dans* **E**. *Supposons que F: $\bar{U} \to$ **E** est une application condensante telle que $F(-x) = -F(x)$ pour tout $x \in \partial U$. Alors, ou bien F a un point fixe sur ∂U ou bien F est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$ (on suppose ici que $C =$ **E**).*

Preuve. Supposons que F n'a pas de point fixe sur ∂U, alors $F \in \mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$. On va montrer que F est homotope dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$ à une application essentielle compacte. Posons

$$\varepsilon = \inf_{x \in \partial U} \|x - F(x)\| > 0$$

et soit k un nombre tel que $1 - \varepsilon/\|F(U)\| < k < 1$. Alors $k \cdot F$ est une application

μ-lipschitzienne avec la constante k, et d'après (II.2.2)

$$H(x, t) = (1-t)F(x)+tkF(x), \quad (x, t)\in \bar{U}\times[0, 1),$$

est l'homotopie dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$ entre F et $k\cdot F$, puisque $\|k\cdot F(x)-F(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x\in\partial U$. Remarquons que $k\cdot F$ est toujours *impaire* sur ∂U, i.e. $k\cdot F(-x) = -k\cdot F(x)$ pour tout $x\in\partial U$, donc le problème se ramène au cas où $F\in\mathscr{D}(\bar{U}, \partial U)$.

Notons que les hypothèses sur F et U nous permettent de modifier la construction des ensembles Q_i de la première étape de la preuve de (II.3.1), c'est-à-dire que nous définissons:

$$Q_1 = \overline{\mathrm{Conv}\{F(\bar{U})\cup -F(\bar{U})\}};$$

$$Q_{i+1} = \overline{\{\mathrm{Conv}\ F(\bar{U}\cap Q_i)\cup -F(\bar{U}\cap Q_i)\}}; \quad i\geqslant 1.$$

Alors $Q = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$ est compact, convexe et symétrique. Soit $\bar{r}$ une rétraction de E sur Q. Alors,

$$r(x) = \tfrac{1}{2}[\bar{r}(x)-\bar{r}(-x)]$$

est une rétraction symétrique de E sur Q et un raisonnement analogue à celui de la preuve de (II.3.1) montre que $r\cdot F$ et F sont homotopes dans $\mathscr{D}(\bar{U}, \partial U)$. Mais $r\cdot F$ est une application compacte et impaire sur ∂U, donc d'après la version classique du théorème de Borsuk, elle est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{U}, \partial U)$. On conclut à l'aide de (II.3.2) que $r\cdot F$ est essentielle dans $\mathscr{D}(\bar{U}, \partial U)$, ce qui achève la preuve. ∎

Une application F: $E\to E$ est dite *homogène* si $F(t\cdot x) = t\cdot F(x)$ pour tout $t\in \boldsymbol{R}$, $x\in E$.

Indiquons enfin le résultat suivant:

(1.10) THÉORÈME. *Soient F, G, S: $E\to E$ des applications condensantes satisfaisant les conditions suivantes:*

(i) *F est homogène et son unique point fixe est zéro;*

(ii) *G est bornée;*

(iii) *$S(x) = F(x)+G(x)$ pour tout $x\in E$.*

Alors S a un point fixe dans E.

Preuve. D'après (i) et (1.9), $F\in \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(\overline{B(0, r)}, \partial B(0, r))$ pour tout $r>0$. Soit

$$d(r) = \inf\{\|x-F(x)\| \mid x\in\partial B(0, r)\}.$$

Donc pour tout $r>0$, $d(r) = r\cdot d(1)>0$. D'autre part, d'après (ii), il existe $M>0$ tel que $\|S(x)-F(x)\| < M$ pour tout $x\in E$. Soit r_0 tel que $M = r_0\cdot d(1) = d(r_0)$. Alors, d'après (II.2.2,(ii)), $S\underset{\mathscr{C}}{\sim} F$ dans $\mathscr{C}(\overline{B(0, r_0)}, \partial B(0, r_0))$, ce qui achève la preuve. ∎

§2. Champs condensants

Nous supposons dans cette section que $C = \boldsymbol{E}$.

Soient (X, A) un couple fermé et borné dans $\boldsymbol{E}$ et (U, V) un couple ouvert dans $\boldsymbol{E}$. Etant donné une application $f\colon X \to U$ telle que $f(A) \subset V$, nous la notons $f\colon (X, A) \to (U, V)$.

Une application $f\colon (X, A) \to (U, V)$ est dite *champ de Darbo* (resp. *champ condensant*) si $f(x) = x - F(x)$ pour tout $x \in X$ et $F\colon X \to \boldsymbol{E}$ est une application de Darbo (resp. application condensante). La classe des champs de Darbo (resp. champs condensants) $f\colon (X, A) \to (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}\backslash\{0\})$ est en correspondance biunivoque avec la classe $\mathscr{C}(X, A)$ (resp. $\mathscr{D}(X, A)$) via la transformation $f \to F = I - f$.

(2.1) Proposition. *Soit U un ouvert borné dans $\boldsymbol{E}$ et soit $f\colon (\bar{U}, \partial U) \to (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}\backslash\{0\})$ un champ condensant tel que $F = I - f$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$. Alors pour tout $\eta > 0$ tel que $f(\partial U) \cap B(0, \eta) = \emptyset$,*

$$B(0, \eta) \subset f(U).$$

Preuve. Soit $x \in B(0, \eta)$ un point quelconque. On sait grâce à (II.2.2) que l'application $F_x(y) = F(y) + x$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$, puisque $\eta \leqslant d(0, f(\partial U))$. Par conséquent elle a un point fixe dans U, ce qui entraîne que $x \in f(U)$. On en déduit que $B(0, \eta) \subset f(U)$. ∎

(2.2) Corollaire. *Soit $f\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ un champ condensant tel que l'image inverse $f^{-1}(X)$ est bornée pour tout sous-ensemble borné $X \subset \boldsymbol{E}$. Supposons en plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(-x) = -f(x)$ lorsque $\|x\| \geqslant C$. Alors f est une application surjective.*

Preuve. La preuve est immédiate d'après (2.1) et (1.9). ∎

(2.1) Définition. Soient $X \subset \boldsymbol{E}$ un sous-ensemble et $F\colon X \to \boldsymbol{E}$ une application condensante. On dit que F est *une application condensante régulière* si pour chaque sous-ensemble borné $A \subset X$ tel que $\mu(A) > 0$ on a l'inégalité suivante:

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mu\big(F(B(A, \varepsilon))\big) < \mu(A).$$

On dit que champ condensant $f\colon X \to \boldsymbol{E}$ est *un champ condensant régulier* si $I - f$ est une application condensante régulière.

(2.3) Proposition. *Chaque application de Darbo est une application condensante régulière.*

Preuve. Soit F une application μ-lipschitzienne avec la constante $k < 1$. Pour chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\mu\big(F(B(A, \varepsilon))\big) \leqslant k \cdot \mu\big(B(A, \varepsilon)\big) \leqslant k \cdot \{\mu(A) + \varepsilon \cdot \mu\big(B(0, 1)\big)\},$$

donc

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mu\big(F(B(A,\varepsilon))\big) \leqslant k\cdot\mu(A) < \mu(A)$$

lorsque $\mu(A) > 0$. ∎

(2.4) LEMME. *Soit $F\colon \overline{B(0, r)} \to E$ une application condensante régulière. Alors l'application $H\colon \overline{B(0, r)} \times [0, 1] \to E$,*

$$H(x, t) = F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(\frac{-tx}{1+t}\right)$$

est une application condensante.

Preuve. Soit $A \subset \overline{B(0, r)} \times [0, 1]$ un sous-ensemble tel que $\mu(A) > 0$. D'après (μ-2) et (μ-3) on peut supposer que A est fermé. Définissons les ensembles

$$A_{[s,t]} = \left\{\frac{1}{1+c}x \mid x \in \pi(A),\ s \leqslant c \leqslant t\right\};$$

$$B_{[s,t]} = \left\{\frac{-c}{1+c}x \mid x \in \pi(A),\ s \leqslant c \leqslant t\right\};$$

où

$$(s, t) \in D = \{(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid u \leqslant v\}.$$

Notons que

$$\mu(A_{[s,t]}) = \mu\big(\mathrm{Conv}\{\{0\} \cup A_{[s,s]}\}\big) = \frac{1}{1+s}\mu(A) > 0;$$

$$\mu(B_{[s,t]}) = \mu\big(\mathrm{Conv}\{\{0\} \cup B_{[t,t]}\}\big) = \frac{t}{1+t}\mu(A);$$

$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+t} = 1 + O(t-s), \qquad \text{où } \lim_{\delta\to 0} O(\delta) = 0.$$

Montrons d'abord qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

(1) $$\mu\big(F(A_{[s,t]})\big) < \mu(A_{[s,t]}) - \varepsilon \quad \text{pour tout } (s, t) \in D.$$

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $(s_i, t_i) \in D$ telle que

$$\mu\big(F(A_{[s_i,t_i]})\big) - \mu(A_{[s_i,t_i]}) \to 0,$$

quand $i \to \infty$. L'ensemble D est compact, donc on peut supposer que $(s_i, t_i) \to (s_0, t_0) \in D$. Puisque l'application $(s, t) \to A_{[s,t]}$ est continue par rapport à la métrique de Hausdorff alors, si $\eta > 0$,

$$A_{[s_i,t_i]} \subset B(A_{[s_0,t_0]}, \eta)$$

pour tout i suffisamment grand. Par suite

$$\mu(F(A_{[s_i,t_i]})) \leqslant \mu\big(F(B(A_{[s_0,t_0]}, \eta))\big),$$

$$\mu\big(F(B(A_{[s_0,t_0]}, \eta))\big) - \mu(A_{[s_i,t_i]}) \geqslant \mu\big(F(A_{[s_i,t_i]})\big) - \mu(A_{[s_i,t_i]}) \to 0$$

quand $i \to \infty$. D'après (μ-11)

$$\mu(A_{[s_i,t_i]}) \to \mu(A_{[s_0,t_0]})$$

et par conséquent on obtient

$$\lim_{\eta \to 0} \mu\big(F(B(A_{[s_0,t_0]}, \eta))\big) - \mu(A_{[s_0,t_0]}) \geqslant 0$$

ce qui est une contradiction avec l'hypothèse.

Ensuite, considérons une partition de [0, 1]

$$0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1, \quad t_i - t_{i-1} \leqslant \delta, \quad \delta > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

D'aprés les propriétés de μ et (1) on a

$$\begin{aligned}
\mu\big(H(\pi(A) \times [t_{i-1}, t_i])\big) &\leqslant \mu\big(F(A_{[t_{i-1},t_i]})\big) + \mu\big(F(B_{[t_{i-1},t_i]})\big) \\
&< \mu(A_{[t_{i-1},t_i]}) - \varepsilon + \mu(B_{[t_{i-1},t_i]}) \\
&= \frac{1}{1+t_{i-1}}\mu(A) - \varepsilon + \frac{t_i}{1+t_i}\mu(A) = \mu(A)\big(1+O(\delta)\big) - \varepsilon
\end{aligned}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\mu(H(A)) &\leqslant \mu\big(H(\pi(A) \times [0, 1))\big) \\
&\leqslant \max\Big\{\mu\big(H(\pi(A) \times [t_{i-1}, t_i])\big) \mid i = 1, 2, \ldots, n\Big\} \\
&< \mu(A)\cdot\big(1+O(\delta)\big) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

On obtient à la limite quand $\delta \to 0$, que

$$\mu\big(H(A)\big) \leqslant \mu(A) - \varepsilon.$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

(2.2) Définition. Soient $\varepsilon, \sigma > 0$. Une application $f\colon X \to E$, où X est un espace métrique, est dite *une ε-application de base δ* (resp. *une ε-application*) si $\operatorname{diam}\{f^{-1}(B(y, \delta))\} < \varepsilon$ (resp. $\operatorname{diam}\{f^{-1}(y)\} < \varepsilon$) pour tout $y \in E$. L'application f est dite *une ε-application stricte* s'il existe $\delta > 0$ tel que f est *une ε-application* de base δ.

(2.5) Lemme. *Soient $f\colon \overline{B(x_0, \varepsilon)} \to E$ un champ condensant et $\varepsilon > 0$.*
(a) *Si f est un champ condensant régulier et f est une η-application, alors il existe*

$\eta > 0$ *tel que*

$$B(f(x_0), \eta) \subset f(B(x_0, \varepsilon)).$$

(b) *Si f est une $\varepsilon/3$-application de base $\delta > 0$, alors*

$$B(f(x_0), \delta) \subset f(B(x_0, \varepsilon)).$$

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 = f(x_0) = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas en considérant le champ $\tilde{f}(x) = f(x+x_0)-f(x_0)$). Notons d'abord que dans les cas (a) et (b) également, f est une ε-application, et alors $0 \in f(B(0, \varepsilon))$ implique que $0 \notin f(\partial B(0, \varepsilon))$ et ainsi

$$F = I - f \in \mathscr{C}(\overline{B(0, \varepsilon)}, \partial B(0, \varepsilon)).$$

De plus, si f est une $\varepsilon/3$-application de base δ, alors

$$\delta \leqslant d\big(0, f(\partial B(0, \varepsilon))\big).$$

Ainsi il suffit de montrer que $F \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(\overline{B(0, \varepsilon)}, \partial B(0, \varepsilon))$ pour obtenir les résultats (a) et (b) à l'aide de (2.1).

(a) Soit f une ε-application condensante régulière. D'après (2.4), l'application

$$H(x, t) = F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(\frac{-tx}{1+t}\right)$$

est condensante, et n'a pas de point fixe dans $\partial B(0, \varepsilon) \times [0, 1]$: en effet, supposons qu'il existe $(x, t) \in \partial B(0, \varepsilon) \times [0, 1]$ tel que

$$x = \frac{x}{1+t} - \frac{-tx}{1+t} = F\left(\frac{x}{1+t}\right) - F\left(\frac{-tx}{1+t}\right),$$

alors

$$f\left(\frac{x}{1+t}\right) = f\left(\frac{-tx}{1+t}\right),$$

ce qui contredit l'hypothèse que f est une ε-application. Remarquons que $H_0 \equiv F$ et H_1 est une application impaire, donc le résultat découle de (1.9).

(b) Soit f une $\varepsilon/3$-application de base $\delta > 0$. On choisit un nombre k de telle façon que

$$0 < 1 - k < \frac{\delta}{\|F(B(0, \varepsilon))\|}.$$

On a alors que $g = I - k \cdot F$ est un champ de Darbo et ainsi, d'après (2.3), c'est un champ condensant régulier. Par le choix de k, $k \cdot F(x) \in B(F(x), \delta)$ pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$, et d'après (II.2.2) on obtient que $k \cdot F \underset{\mathscr{C}}{\sim} F$ dans $\mathscr{C}(\overline{B(0, \varepsilon)}, \partial B(0, \varepsilon))$, car $\delta \leqslant d\big(0, f(\partial B(0, \varepsilon))\big)$. Il reste à prouver que g est une ε-application, d'où on pourra déduire, d'après la première partie de la preuve, que $k \cdot F$ est essentielle et donc que F l'est aussi.

Soient $y \in g\overline{(B(0, \varepsilon))}$ et $x \in g^{-1}(y)$, i.e. $y = x - k \cdot f(y)$. Soit $y' = x - f(y)$. Alors

$$\|y - y'\| = (1-k)\|f(y)\| < \delta.$$

Par suite $y \in B(y', \delta)$ et $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B(y', \delta))$. Puisque $x \in f^{-1}(B(y', \delta))$ et $\operatorname{diam}\{f^{-1}(B(y', \delta))\} < \varepsilon/3$, alors $d(x, f^{-1}(y)) < \varepsilon/3$ pour tout $x \in g^{-}(x)$. Par conséquent, pour $x_0, x \in g^{-1}(y)$ on a

$$\begin{aligned}\|x_0 - x\| &\leqslant d(x_0, f^{-1}(y)) + d(x, f^{-1}(y)) + \operatorname{diam}\{f^{-1}(y)\}\\ &\leqslant \tfrac{2}{3}\varepsilon + \operatorname{diam}\{f^{-1}(y)\} < \varepsilon,\end{aligned}$$

donc $\operatorname{diam}\{g^{-1}(y)\} < \varepsilon$, ce qui achève la preuve. ■

(2.6) THÉORÈME. *Soit f: $E \to E$ un champ condensant.*
(a) *Si f est un champ condensant régulier et f est une ε-application, alors $f(E)$ est ouvert dans E.*
(b) *Si f est une ε-application stricte, alors $f(E) = E$.*

Preuve. (a) est immédiat d'après (2.5). Pour montrer (b), notons que d'après (2.5), l'hypothèse $y \in f(E)$ implique que $B(y, \delta) \subset f(E)$, où $\delta > 0$ ne dépend pas y. On en déduit que f est surjective. ■

(2.7) THÉORÈME (de l'Invariance du Domaine). *Soient U un ouvert dans E et f: $U \to E$ un champ condensant régulier injectif. Alors:*
(a) *f est une application ouverte. En particulier $f(U)$ est ouvert dans E,*
(b) *$f(U)$ est homéomorphe à U.*
De plus, si f est une ε-application stricte pour tout $\varepsilon > 0$; alors l'hypothèse de régularité peut être négligée.

Preuve. La preuve est immédiate d'après (2.6), car une application injective est une ε-application. ■

(2.8) COROLLAIRE (Alternative de Fredholm). *Soit T: $E \to E$ un opérateur linéaire condensant. Alors $I - T$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. En particulier on a l'alternative suivante:*
(a) *l'équation $0 = x - Tx$ a une solution non triviale, ou bien*
(b) *l'equation $y = x - Tx$ a une solution unique pour tout $y \in E$.*

Preuve. Remarquons d'abord que si le champ $f(x) = x - Tx$ est injectif, alors f est un champ condensant régulier. En effet, l'application $A \to T(A)$, où A est un sous-ensemble fermé et borné de E, est continue par rapport à la métrique de Hausdorff. Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu\big(T(B(A, \varepsilon))\big) = \mu(T(A))$$

ce qui implique que T est une application condensante régulière.

(1) $\quad \mathrm{Ker}(I-T)$ *est de dimension finie.*

Considérons $X = \overline{B(0, 1)}$ et soit $T_0 = T|_X\colon X \to \boldsymbol{E}$. D'après (I.3.2,(ii)),

$$(I-T_0)^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(I-T) \cap \overline{B(0, 1)}$$

est un ensemble compact. Mais $\mathrm{Ker}(I-T) \cap \overline{B(0, 1)}$ est la boule fermée dans $\mathrm{Ker}(I-T)$ donc $\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dimension finie.

(2) $\quad \mathrm{Im}(I-T)$ *est un sous-espace fermé.*

$\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dimension finie, donc il existe un sous-espace fermé $\boldsymbol{E}_1$ tel que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \oplus \mathrm{Ker}(I-T)$. Notons que

$$A = (I-T)|_{\boldsymbol{E}_1}\colon\ \boldsymbol{E}_1 \to \boldsymbol{E}$$

est une application injective. Soit $\{x_n\} \subset \boldsymbol{E}_1$ une suite telle que $A(x_n) = y_n \to y_0 \in \boldsymbol{E}$. Remarquons d'abord que la suite $\{x_n\}$ est bornée. En effet, supposons par contradiction que $\|x_n\| \to \infty$, alors $x_n' = x_n/\|x_n\|$ est une suite telle que $\|x_n'\| = 1$ et $A(x_n') = y_n/\|x_n\| \to 0$. D'après (I.3.2,(ii)) il existe une sous-suite $\{x'_{n(k)}\}$ convergente vers $x_0' \in \boldsymbol{E}_1$, où $\|x_0'\| = 1$. La continuité de A implique que $A(x_0') = 0$, ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que A est injectif. D'autre part, un raisonnement analogue montre qu'il existe une sous-suite $\{x_{n(k)}\}$ convergente vers $x_0 \in \boldsymbol{E}_1$. Par continuité de A, on obtient que $A(x_0) = y_0$. Il s'ensuit que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(I-T)$ est un sous-espace fermé dans $\boldsymbol{E}$.

(3) $\quad \dim \boldsymbol{E}/\mathrm{Im}(I-T) < \infty.$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\boldsymbol{E}/\mathrm{Im}(I-T)$ est de dimension infinie. Il existe alors un sous-espace $\boldsymbol{F}_0 \subset \boldsymbol{E}$ tel que

i) $\dim(\boldsymbol{F}_0) = \dim(\mathrm{Ker}(I-T))$;

ii) $\boldsymbol{F}_0 \cap \mathrm{Im}(I-T) = \{0\}$;

iii) $\boldsymbol{F}_0 \oplus \mathrm{Im}(I-T) \neq \boldsymbol{E}$.

Soit $P \in \mathscr{P}r(\boldsymbol{E})$ une projection linéaire associée à la décomposition $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \oplus \mathrm{Ker}(I-T)$, i.e. $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(I-T)$ et $\mathrm{Ker}(P) = \boldsymbol{E}_1$; et supposons que $B\colon \mathrm{Ker}(I-T) \to \boldsymbol{F}_0$ est un isomorphisme quelconque. Il est clair que l'opérateur $T+B\circ P$ est condensant (puisque $B\circ P$ est complètement continu). Notons ensuite que $\mathrm{Ker}(I-T-B\circ P) = \{0\}$ donc $I-T-B\circ P$ est injectif. D'après (2.6), $\mathrm{Im}(I-T-B\circ P) = \boldsymbol{F}_0 \oplus \mathrm{Im}(I-T)$ est un ouvert dans $\boldsymbol{E}$, ce qui est une contradiction car $\boldsymbol{F}_0 \oplus \mathrm{Im}(I-T) \neq \boldsymbol{E}$.

(4) *L'indice de $I-T$ est zéro.*

Dénotons par $L_{\mathscr{C}}(E)$ le sous-espace de $L(E)$ des opérateurs de la forme $I - T$, où T est un opérateur condensant. $L_{\mathscr{C}}(E)$ est un ensemble connexe tel que $I \in L_{\mathscr{C}}(E)$. La fonction d'indice i: $\Phi(E) \to \boldsymbol{Z}$ est une fonction continue, donc elle est constante sur l'ensemble connexe $L_{\mathscr{C}}(E) \subset \Phi(E)$. Alors $L_{\mathscr{C}}(E) \subset \Phi_0(E)$. ∎

(2.9) COROLLAIRE. *Soit f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ un champ condensant. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\|f(x)-f(y)\| \geqslant M\|x-y\| \quad \textit{pour tous } x,\ y \in \boldsymbol{E}.$$

Alors f est inversible.

Preuve. Notons que f est une ε-application stricte pour tout $\varepsilon > 0$. D'après (2.6), f est surjective et comme elle est aussi injective, alors f est inversible. ∎

(2.10) THÉORÈME. *Soit U un ouvert borné et symétrique dans $\boldsymbol{E}$ tel que $0 \in U$ et soit f: $\bar{U} \to \boldsymbol{E}$ un champ condensant satisfaisant la condition:*

$$f(x) \neq t \cdot f(-x) \quad \textit{pour tout } (x,\ t) \in \partial U \times [0,\ 1].$$

Alors $F = I - f$ est essentielle dans $C(\bar{U},\ \partial U)$.

Preuve. Définissons H: $\bar{U} \times [0,\ 1] \to \boldsymbol{E}$ par

$$H(x,\ t) = \frac{1}{1+t} F(x) - \frac{t}{1+t} F(-x).$$

Il est clair que H n'a pas de point fixe dans $\partial U \times [0,\ 1]$. De plus, pour tout $A \subset \bar{U} \times [0,\ 1]$,

$$H(A) \subset \operatorname{Conv}\{F(\pi(A)) \cup -F(-\pi(A))\},$$

ce qui, en vertu des propriétés d'une mesure de non-compacité, implique que H est une application condensante et par conséquent, H est une homotopie dans $\mathscr{C}(\bar{U},\ \partial U)$ entre F et $H_1(x) = \frac{1}{2}\{F(x) - F(-x)\}$. Puisque H_1 est impaire, la conclusion découle de (1.9). ∎

(2.11) THÉORÈME. *Soit U un voisinage ouvert et borné de 0 dans $\boldsymbol{E}$, et soit f: $\bar{U} \to \boldsymbol{E}$ un champ condensant. Pour chaque $y \in \partial U$ définissons le rayon de 0 à y:*

$$L_y = \{x \in \boldsymbol{E} \mid \exists \lambda > 0 \ \ x = \lambda y\}.$$

Si l'application $F = I - f$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U},\ \partial U)$, alors pour tout $y \in \partial U$ $L_y \cap f(\partial U) \neq \emptyset$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $y \in \partial U$ tel que $x \neq F(x) + \lambda y$ pout tous $x \in \partial U$ et $\lambda \in (0,\ \infty)$. Puisque $f(\bar{U})$ est borné, alors il existe $k > 0$ tel que $\|f(\bar{U})\| < k \cdot \|y\|$. Définissons

$$H(x,\ t) = F(x) + t \cdot k \cdot y.$$

Il est clair que H est une application condensante et qu'elle n'a pas de point fixe dans $\partial U \times [0, 1]$. De plus, $H_0 \equiv F$ et H_1 n'a pas de point fixe. En effet, si $x = H_1(x)$, alors $k \cdot y = x - F(x) = f(x)$. Donc $k \cdot \|y\| \leqslant \|f(\bar{U})\|$, ce qui est une contradiction. ■

Dans la suite nous posons: $B = B(0, 1)$, $S = \partial B$, et $E^{\infty - n}$ dénote un sous-espace de E de codimension n.

(2.12) THÉORÈME. *Pour chaque champ condensant f: $\bar{B} \to E^{\infty - 1}$, il existe un point $x \in S$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve. Supposons que pour tout $x \in S$, $f(x) \neq f(-x)$. Définissons

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\}, \quad x \in \bar{B}.$$

Alors $0 \notin g(S)$, et donc $I - g \in \mathscr{C}(\bar{B}, S)$. Puisque g est impaire, alors $I - g$ est aussi impaire, ce qui implique qu'elle est essentielle. Par ailleurs, si $y \in (E \backslash E^{\infty - 1}) \cap S$, alors $L_y \cap g(S) = \emptyset$, ce qui est une contradiction avec (2.11). ■

(2.13). THÉORÈME. *Chaque application μ-lipschitzienne F: $S \to E$ avec la constante k, peut être prolongée à une application μ-lipschitzienne $\tilde{F}$: $\bar{B} \to E$ avec la même constante.*

Preuve. Definissons $\tilde{F}$: $\bar{B} \to E$ par

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot F(x/\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Soient $J \subset [0, 1]$, $X \subset S$. Posons $J \cdot X = \{t \cdot x \mid t \in J,\ x \in X\}$. Alors

$$\mu(J \cdot X) = \mu(\mathrm{Conv}\{\{0\} \cup \|J\| \cdot X\}) = \|J\| \cdot \mu(X).$$

Notons que $\tilde{F}$ est continue car F est bornée. Montrons que $\tilde{F}$ est une application μ-lipschitzienne avec la constante k. Soient $A \subset \bar{B}$ et $\varepsilon > 0$. D'après (μ-11), il existe un ensemble A^ε, $A \subset A^\varepsilon$, de la forme suivante:

$$A^\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} [s_i, t_i] \cdot A_i, \quad 0 \leqslant s_i \leqslant t_i \leqslant 1, \quad A_i \subset S,$$

et tel que

$$\mu(A^\varepsilon) \leqslant \mu(A) + \varepsilon.$$

Par suite

$$\mu(\tilde{F}(A)) \leqslant \mu(\tilde{F}(A^\varepsilon)) = \max_i \{\mu(\tilde{F}[s_i, t_i] \cdot A_i)\}$$

$$= \max_i \{\mu[s_i, t_i] \cdot F(A_i))\} \leqslant k \cdot \max_i \{t_i \cdot \mu(A_i)\}$$

$$\leqslant k \cdot \mu(A^\varepsilon) \leqslant k \cdot \mu(A) + \varepsilon \cdot k.$$

Passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient $\mu(\tilde{F}(A)) \leqslant k \cdot \mu(A)$. ■

(2.14) Remarque. Soit U un ensemble ouvert, borné et soit $x_0 \in U$. On dit que U est *un ensemble étoilé* par rapport à x_0 si chaque point $x \in U$, $x \neq x_0$ peut être exprimé *d'une façon unique par*

$$x = (1-t)x_0 + tx_1, \quad t \in [0, 1], \quad x_1 \in \partial U.$$

U est appelé *ensemble étoilé régulier* si la fonction θ: $S \to \boldsymbol{R}$, déterminée par la propriété $(1-\theta(x))x_0 + \theta(x)x \in \partial U$, $x \in S$, est continue.

Le théorème (2.13) reste vrai (et la preuve est analogue) si B, S sont remplacés par un ensemble étoilé régulier quelconque et sa frontière.

(2.15) Corollaire (Théorème Antipodal). *Pour chaque champ de Darbo $f: S \to \boldsymbol{E}^{\infty-1}$ il existe un point $x \in S$ tel que $f(x) = f(-x)$.*

Preuve. La preuve est immédiate d'après (2.12) et (2.13). ∎

(2.16) Corollaire. *Il n'existe pas de champ de Darbo bijectif f: $S^{\infty-n} \to S^{\infty-k}$, $n < k$, où $S^{\infty-n}$, $S^{\infty-k}$ sont les sphères unité dans les sous-espaces fermés $\boldsymbol{E}^{\infty-n+1}$ et $\boldsymbol{E}^{\infty-k+1}$ de $\boldsymbol{E}$.*

Chapitre IV

Théorie de coïncidence

Dans ce chapitre on adopte le méthode utilisée dans les chapitres précédents à la théorie de coïncidence. Dans le §1 on traite la théorie de coïncidence pour des opérateurs de Fredholm d'indice zéro. Dans le §3 on présente la théorie de coïncidence de Mawhin pour des opérateurs de Fredholm généralisés. On montre que les problèmes de coïncidence se ramène directement aux problèmes de point fixe. En utilisant les résultats du chapitre III on obtient d'une façon simple et rapide plusieurs généralisations des théorèmes de coïncidence déjà connus pour les applications L-compactes. Dans le §4 on présente la théorie de coïncidence pour les opérateurs semi-fredholmiens.

§1. Théorie de coïncidence pour des opérateurs de Fredholm

Soit $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux espaces de Banach et L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

On considère la décomposition $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 \oplus \mathrm{Im}(L)$, et soit $P \in \mathscr{P}r(\boldsymbol{E})$ une projection sur $\mathrm{Ker}(L) \subset \boldsymbol{E}$. L étant d'indice 0, il existe un isomorphisme J: $\mathrm{Ker}(L) \to \boldsymbol{F}_0$. Alors, l'opérateur $L + J \circ P$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est bijectif, et ainsi c'est un isomorphisme. Notons aussi que $J \circ P$ est un opérateur complètement continu.

(1.1) DÉFINITION. Soit L: $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ un opérateur linéaire continu. L'opérateur T: $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ est dit *la résolvante compacte* de L si $T\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ et $L+T$: $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{F}$ est un isomorphisme. On dénote par $\mathrm{CR}(L)$ l'ensemble de toutes les résolvantes compactes de L.

Dans la suite nous supposons que $\mathrm{CR}(L)\neq\emptyset$. Cette hypothèse implique que L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

(1.1) Remarque. $\mathrm{CR}(L)$ est un sous-ensemble ouvert dans $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$.

Preuve. L'application β: $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})\to L(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ définie par $\beta(T)=L+T$ est continue, et $\mathrm{CR}(L)=\beta^{-1}(\mathrm{Iso}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}))$ est ouvert dans $\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ parce que $\mathrm{Iso}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$ est ouvert dans $L(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})$. ■

Etant donné $T\in\mathrm{CR}(L)$, posons $R_T=(L+T)^{-1}$.

(1.2) PROPOSITION. *Pour tous S, $T\in\mathrm{CR}(L)$ on a les égalités suivantes:*
(i) $R_S(L+T)=I+R_S(T-S)$;
(ii) $R_S=R_T+R_S(T-S)R_T$.

Preuve. La preuve est immédiate. ■

Soit $S\in\mathrm{CR}(L)$. Définissons l'application α_S: $\mathrm{CR}(L)\to\mathrm{GL}_c(E)$ par la formule $\alpha_S(T)=R_S(L+T)$, $T\in\mathrm{CR}(L)$. D'après (1.2.(i)),

$$\alpha_S(T)=I+R_S(T-S)\in\mathrm{GL}_c(E),$$

donc α_S est bien définie et continue. De plus, cette application est un homéomorphisme de $\mathrm{CR}(L)$ sur $\mathrm{GL}_c(E)$ dont l'inverse est défini par

$$\alpha_S^{-1}(I+K)=(L+S)K+S,\qquad \text{où } K\in\mathscr{K}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}).$$

Soit $\boldsymbol{E}$ muni d'une mesure de non compacité μ et supposons que $\mathscr{A}$ représente une des classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$.

(1.2) DÉFINITION. Soit $X\in\boldsymbol{E}^{\infty+n}$. Nous disons que l'application F: $X\to\boldsymbol{F}$ appartient à la classe $\mathscr{A}_L$ si $R_T\circ F$ appartient à la classe $\mathscr{A}$ pour un certain $T\in\mathrm{CR}(L)$. D'après (1.2.(ii)), on en déduit que $R_T\circ F\in\mathscr{A}$ pour tout $T\in\mathrm{CR}(L)$. Ainsi, se trouvent définies les classes:
$\mathscr{K}_L$ — *des applications L-complètement continues*;
$\mathscr{D}_L$ — *des L-applications de Darbo*;
$\mathscr{C}_L$ — *des applications L-condensantes.*

Nous disons en outre que F: $X\to\boldsymbol{F}$ est une application L-condensante *régulière*, si $R_T\circ F$ est une application condensante régulière pour un certain (et par conséquent pour tout) $T\in\mathrm{CR}(L)$.

(1.3) DÉFINITION. Soit (X,A) un couple borné et fermé dans $\boldsymbol{E}$. Nous disons que l'application F: $X\to\boldsymbol{F}$ appartient à la classe $\mathscr{A}_L(X,A)$ si $F\in\mathscr{A}_L$ et $L(x)\neq F(x)$ pour tout $x\in A$.

Un point $x \in X$ tel que $L(x) = F(x)$ est dit *point de coïncidence entre L et F.* Nous disons que deux applications $F, G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ sont *homotopes* s'il existe application $H\colon X \times [0, 1] \to F$ telle que

i) $H \in \mathscr{A}_L$;

ii) H n'a pas de point de coïncidence avec L dans A, i.e. $L(x) \neq H(x, t)$ pour tout $x \in A$, $t \in [0, 1]$;

iii) $H_0 \equiv F$, $H_1 \equiv G$.

Une telle application H est dite *homotopie* dans $\mathscr{A}_L(X, A)$. L'ensemble de toutes les classes d'homotopie dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ est noté $\mathscr{A}_L[X, A]$.

Nous dissons que $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$ est *L-universelle* si chaque $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$, tel que $G|_A \equiv F|_A$, a un point de coïncidence avec L dans X. Sinon, F est dite *L-non-universelle.* L'ensemble des applications L-universelles dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ est noté $\mathrm{Unv}_{\mathscr{A}_L}(X, A)$.

Nous considérons un couple (X, A), fermé et borné dans $\mathbf{E}$. Pour chaque $T \in \mathrm{CR}(L)$ nous définissons *la connection*

$$\Theta_T\colon \mathscr{A}_L(X, A) \to \mathscr{A}(X, A) \qquad \text{(où on suppose que } C = \mathbf{E}\text{)},$$

par $\Theta_T(F) = R_T(F + T)$, $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$.

$R_T \circ F \in \mathscr{A}$ et $R_T \circ T$, donc Θ_T a ses valeurs dans la classes $\mathscr{A}$. Egalement, $L(x) = F(x) \Leftrightarrow x = \Theta_T(F)(x)$, où $x \in X$, et on en déduit que Θ_T est bien définie.

(1.3) PROPOSITION. *Soit (X, A) un couple fermé et borné dans $\mathbf{E}$.*

i) *Θ_T est une bijection de $\mathscr{A}_L(X, A)$ sur $\mathscr{A}(X, A)$, telle que $\Theta_T(\mathrm{Unv}_{\mathscr{A}_L}(X, A)) = \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A)$, et dont l'inverse est défini par:*

$$\Theta_T^{-1}(G) = (L + T) \circ G - T, \qquad G \in \mathscr{A}(X, A);$$

ii) *Θ_T induit la bijection $\Theta_T^*\colon \mathscr{A}_L[X, A] \to \mathscr{A}[X, A]$;*

iii) *Θ_T et Θ_T^* sont naturelles par rapport aux classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ c'est-à-dire que les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_L(X,A) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cong"', "\theta_T"] & \mathscr{D}_L(X,A) \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\cong"', "\theta_T"] & \mathscr{C}_L(X,A) \arrow[d, "\cong"', "\theta_T"] \\
\mathscr{K}(X,A) \arrow[r, "\subset"] & \mathscr{D}(X,A) \arrow[r, "\subset"] & \mathscr{C}(X,A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_L[X,A] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "\theta_T^*"] & \mathscr{D}_L[X,A] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "\theta_T^*"] & \mathscr{C}_L[X,A] \arrow[d, "\cong"', "\theta_T^*"] \\
\mathscr{K}[X,A] \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{D}[X,A] \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{C}[X,A]
\end{tikzcd}$$

Preuve. La preuve n'est qu'une vérification simple. ∎

On obtient de la proposition (1.3) plusieurs corollaires dont les preuves seront données dans un cas plus général dans la section 3.

(1.4) Corollaire (Alternative non linéaire). *Soit U un ouvert borné dans $\boldsymbol{E}$ tel que $0 \in U$. Alors, chaque application L-condensante F: $\bar{U} \to \boldsymbol{F}$ vérifie au moins une des conditions suivantes:*
(i) *F a un point de coïncidence avec L dans $\bar{U}$;*
(ii) *Pour un certain (et également pour tout) $T \in \mathrm{CR}(L)$ il existe $x \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que*

$$L(x) + (1-\lambda) T(x) = \lambda F(x).$$

(1.5) Corollaire (Alternative de Leray–Schauder). *Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une application L-condensante. Etant donné $T \in \mathrm{CR}(L)$, définissons*

$$\Sigma_T(F) = \{x \in \boldsymbol{E} \mid \exists \lambda \in (0, 1) \;\; L(x) + (1-\lambda) T(x) = \lambda F(x)\}.$$

Alors, ou bien $\Sigma_T(F)$ est non borné pour certain (et également pour tout) $T \in \mathrm{CR}(L)$, ou bien F a un point de coïncidence avec L.

(1.6) Corollaire (de (III.1.6)). *Supposons que F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est une application L-condensante quasi-bornée, telle que $\|R_T\|(|F| + \|T\|) < 1$ pour un certain $T \in \mathrm{CR}(L)$. Alors, l'application $L - F$ est surjective.*

(1.7) Corollaire (de (III.1.7)). *Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une application L-condensante asymptotiquement linéaire, telle que $\|R_T\|\big(\|F'(\infty)\| + \|T\|\big) < 1$ pour un certain $T \in \mathrm{CR}(L)$. Alors, l'application $L - F$ est surjective.*

(1.8) Corollaire (Théorème de Borsuk). *Soit U un voisinage ouvert de $0 \in \boldsymbol{E}$, borné, symétrique et soit F: $\bar{U} \to \boldsymbol{F}$ une application L-condensante impaire sur ∂U. Alors, ou bien F a un point de coïncidence avec L dans ∂U, ou bien F est L-universelle dans $\mathscr{C}_L(\bar{U}, \partial U)$.*

(1.9) Corollaire (de (III.1.10)). *Soient F, G, S: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ des applications L-condensantes satisfaisant les conditions suivantes:*
i) *F est homogène et son seul point de coïncidence avec L est* 0;
ii) *G est bornée;*
iii) *$S(x) = F(x) + G(x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{E}$.*
Alors S a un point de coïncidence avec L.

(1.10) Corollaire (de (III.2.10)). *Soit U un voisinage de $0 \in \boldsymbol{E}$, ouvert, borné, symétrique et soit F: $\bar{U} \to \boldsymbol{F}$ une application L-condensante telle que $(L - F)(x) \neq t \cdot (L - F)(-x)$ pour tout $(x, t) \in \partial U \times [0, 1]$. Alors F est L-universelle dans $\mathscr{C}_L(\bar{U}, \partial U)$.*

Les corollaires (1.6), (1.7) et (1.10) se rapportent aux applications de la forme $f = L - F$. Nous disons que $f = L - F$ est *une L-perturbation condensante* (respectivement *une L-perturbation condensante régulière, L-perturbation de Darbo*) si F est L-condensante (respectivement L-condensante régulière, L-application de Darbo).

R_T est *une connection* entre les L-perturbations et les champs:

$$R_T(f) = R_T \circ (L-F) = I-\Theta_T(F),$$

dont l'inverse est $L+T$:

$$(L+T)(g) = L+T-(L+T)\circ G = L-\Theta_T^{-1}(G)$$

pour tous $T \in \mathrm{CR}(L)$ et $g = I-G$.

(1.11) PROPOSITION. *Une application f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est respectivement:*
— *une application injective;*
— *une application surjective;*
— *une application ouverte;*
— *une ε-application;*
— *une ε-application stricte;*
si et seulement si l'application $R_T \circ f$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est respectivement:
— *une application injective;*
— *une application surjective;*
— *une application ouverte;*
— *une ε-application;*
— *une ε-application stricte.*

Preuve. La preuve est immédiate parce que R_T est un isomorphisme linéaire. ∎

(1.12) COROLLAIRE (de (III.2.6)). *Soit f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une L-perturbation condensante.*
a) *Si f est une L-perturbation condensante régulière et si elle est une ε-application, alors $f(\boldsymbol{E})$ est ouvert dans $\boldsymbol{F}$.*
b) *Si f est une ε-application stricte, alors $f(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{F}$.*

(1.13) COROLLAIRE (Théorème d'invariance du domaine). *Soient U un sous-ensemble ouvert de $\boldsymbol{E}$ et f: $U \to \boldsymbol{F}$ une L-perturbation condensante régulière injective. Alors:*
a) *f est une application ouverte. En particulier, $f(U)$ est ouvert dans $\boldsymbol{F}$;*
b) *$f(U)$ est homéomorphe à U.*
De plus, si f est une ε-application stricte pour tout $\varepsilon > 0$, alors l'hypothèse de régularité de f peut être négligée.

(1.14) COROLLAIRE (Alternative de Fredholm). *Soit S: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur linéaire L-condensant. Alors, on a l'alternative suivante:*
a) *L'équation $0 = L(x)-S(x)$ a une solution non triviale; ou bien*
b) *L'équation $y = L(x)-S(x)$ a une solution unique pour tout $y \in \boldsymbol{F}$.*

(1.15) COROLLAIRE (de (III.2.9)). *Soit f: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une L-perturbation* *condensante. Supposons qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\|f(x)-f(y)\| \geqslant M\cdot\|x-y\| \quad \textit{pour tous } x, y\in \boldsymbol{E}.$$

Alors f *est inversible.*

(1.16) COROLLAIRE (de (III.2.12)). *Pour chaque L-perturbation condensante* $f\colon \bar{B}\to F^{\infty-1}$, *où* $B = B(0, 1) \subset \boldsymbol{E}$, *il existe un point* $x\in S = \partial B$ *tel que* $f(x) = f(-x)$.

§2. Remarques générales sur les applications universelles

Soient $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ deux espaces de Banach et L: $\mathrm{Dom}(L)\to \boldsymbol{F}$ un opérateur linéaire (qui n'est pas nécessairement continu), où $\mathrm{Dom}(L)$ est un sous-espace de $\boldsymbol{E}$.

Soit (X, A) un couple borné et fermé dans $\boldsymbol{E}$, et supposons que F: $X\to \boldsymbol{F}$ est une application continue. Nous considérons le problème suivant:

Trouver un point de coïncidence entre l'application F et l'opérateur L, i.e. trouver un point $x\in X$ *tel que* $L(x) = F(x)$.

Soit $\mathscr{B}$ une classe d'applications définies sur les sous-ensembles de $\boldsymbol{E}^{\infty+n}$, $n = 0, 1,\ldots,$ à valeurs dans $\boldsymbol{F}$. Définissons la classe

$$\mathscr{B}^*(X, A) = \{F\colon X\to \boldsymbol{F} \mid F\in\mathscr{B} \text{ et } F(x)\neq L(x) \quad \forall x\in\mathrm{Dom}(L)\cap A\}.$$

Deux applications F, $G\in\mathscr{B}^*(X, A)$ sont dites *homotopes* dans $\mathscr{B}^*(X, A)$ s'il existe une application H: $X\times[0, 1]\to \boldsymbol{F}$ telle que

(i) $H\in\mathscr{B}$;

(ii) $H_t\in\mathscr{B}^*(X, A)$ pour tout $t\in[0, 1]$;

(iii) $H_0\equiv F$, $H_1\equiv G$.

On dit que H est *une homotopie* dans $\mathscr{B}^*(X, A)$ entre F et G. Nous notons cette relation $F\underset{\mathscr{B}}{\sim} G$. Nous supposons dans la suite que cette relation est *une relation d'èquivalence* et nous notons $\mathscr{B}^*[X, A]$ l'ensemble des classes d'homotopie.

Nous supposons également que la propriété suivante est vérifiée:

(∗) si F, $G\in\mathscr{B}^*(X, A)$ et $F|_A\equiv G|_A$, alors $F\underset{\mathscr{B}}{\sim} G$ dans $\mathscr{B}^*(X, A)$.

Une application $F\in\mathscr{B}^*(X, A)$ est dite *$\mathscr{B}$-universelle* si chaque $G\in\mathscr{B}^*(X, A)$ telle que $F|_A\equiv G|_A$ a un point de coïncidence avec L dans X. L'ensemble des applications $\mathscr{B}$-universelles dans $\mathscr{B}^*(X, A)$ est noté $\mathrm{Unv}_{\mathscr{B}}(X, A)$.

Nous disons que la classe $\mathscr{B}^*(X, A)$ satisfait *la propriété de Leray–Schauder* si, pour toutes les applications F, $G\in\mathscr{B}^*(X, A)$ telles que $F\underset{\mathscr{B}}{\sim} G$, F est $\mathscr{B}$-universelle si et seulement si G est $\mathscr{B}$-universelle.

Supposons que $\mathscr{A}^*(X, A)$ est une des classes considérées dans (II.1) (i.e. elle satisfait les propriétés (1), (2) et la propriété de Leray–Schauder, formulées dans la section (II.1)). Supposons également que $\mathscr{B}^*(X, A)$ satisfait la propriété (*) et la propriété de Leray–Schauder.

Etant donné une application $\Theta: \mathscr{B}^*(X, A) \to \mathscr{A}(X, A)$, nous disons que Θ est *une L-connection* si les conditions suivantes sont vérifiées:

1) $F \underset{\mathscr{B}}{\sim} G$ dans $\mathscr{B}^*(X, A) \Rightarrow \Theta(F) \underset{\mathscr{A}}{\sim} \Theta(G)$ dans $\mathscr{A}(X, A)$;

2) $\Theta(F) \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A) \Rightarrow F \in \mathrm{Unv}_{\mathscr{B}}(X, A)$.

L'existence d'une L-connection est très utile dans l'étude des problèmes de coïncidence, parce qu'elle permet d'examiner ces problèmes en termes de point fixe, d'une façon analogue à la méthode utilisée dans la section 1. Nous allons montrer deux autres exemples de théorie de coïncidence ayant une L-connection.

§ 3. Théorie de coïncidence de Mawhin

Dans cette section nous allons étudier le problème de coïncidence pour un opérateur généralisé de Fredholm.

(3.1) DÉFINITION. Soient $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ deux espaces de Banach et L: $\mathrm{Dom}(L) \to \boldsymbol{F}$ un opérateur linéaire (qui n'est pas nécessairement continu), où $\mathrm{Dom}(L)$ est un sous-espace de $\boldsymbol{E}$. L'opérateur L est dit *opérateur (généralisé) de Fredholm* si les conditions suivantes sont satisfaites:

a) $\mathrm{Ker}(L)$ est de dimension finie;

b) $\mathrm{Im}(L) = L(\mathrm{Dom}(L))$ est un sous-espace fermé de codimension finie.

L'indice $i(L)$ de L est l'entier $\dim(\mathrm{Ker}(L)) - \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(L))$.

(3.2) DEFINITION. Soit L: $\mathrm{Dom}(L) \to \boldsymbol{F}$ un opérateur de Fredholm. On dit qu'un opérateur continu et de rang fini T: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est *une résolvante de rang fini de L* si l'opérateur $L+T$: $\mathrm{Dom}(L) \to \boldsymbol{F}$ est bijectif. L'inverse de $L+T$ sera noté R_T. On note $\mathrm{FR}(L)$ l'ensemble de toutes les résolvantes de rang fini de L. On a que $\mathrm{FR}(L) \subset \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$.

Dans cette section nous considérons un opérateur de Fredholm d'indice zéro L: $\mathrm{Dom}(L) \to \boldsymbol{F}$. Dans ce cas $\mathrm{FR}(L)$ est non vide. En effet, il existe une projection $P \in \mathscr{P}r(\boldsymbol{E})$ sur $\mathrm{Ker}(L)$ et si J: $\mathrm{Ker}(L) \to \boldsymbol{F}_0$ est un isomorphisme, où $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 \oplus \mathrm{Im}(L)$, alors $L + J \circ P$ est une bijection et évidemment $J \circ P \in \mathrm{FR}(L)$.

Soit $\boldsymbol{E}$ muni d'une mesure de non compacité μ et supposons que $\mathscr{A}$ représente une des classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$. Soit $X \subset \boldsymbol{E}^{\infty+n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Nous disons que l'application F: $X \to \boldsymbol{F}$ appartient à la classe $\mathscr{A}_L$ si $R_T \circ F \in \mathscr{A}$ pour un certain $T \in \mathrm{FR}(L)$. Cette définition ne dépend pas du choix de $T \in \mathrm{FR}(L)$. En effet, supposons que $T, S \in \mathrm{FR}(L)$, alors on a

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad R_S \circ F &= (L+S)^{-1}(L+T)(L+T)^{-1} \circ F \\
&= I_{\mathrm{Dom}(L)} \circ R_T \circ F + R_S \circ (T-S) \circ R_T \circ F \\
&= R_T \circ F + R_S \circ (T-S) \circ R_T \circ F;
\end{aligned}
$$

comme $T-S$ est continu et de rang fini, on en conclut que $R_S \circ F \in \mathscr{A}$ si et seulement si $R_T \circ F \in \mathscr{A}$.

Ainsi se trouvent définies les classes

$\mathscr{K}_L$ — *des applications L-complètement continues*;
$\mathscr{D}_L$ — *des L-applications de Darbo*;
$\mathscr{C}_L$ — *des applications L-condensantes.*

Soit (X, A) un couple borné et fermé dans E. Nous disons que l'application $F\colon X \to F$ appartient à la classe $\mathscr{A}_L(X, A)$ si $F \in \mathscr{A}_L$ et $L(x) \neq F(x)$ pour tout $x \in A \cap \mathrm{Dom}(L)$. Deux applications $F, G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ sont dites *homotopes* dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ s'il existe une application $H\colon X \times [0, 1] \to F$ telle que

(i) $H \in \mathscr{A}_L$;
(ii) $H_t \in \mathscr{A}_L(X, A)$ pour tout $t \in [0, 1]$;
(iii) $H_0 \equiv F$, $H_1 \equiv G$.

Il est évident que cette relation d'homotopie est une relation d'equivalence. L'ensemble de toutes les classes d'homotopie est noté $\mathscr{A}_L[X, A]$.

Nous disons que $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$ est *L-universelle* si chaque $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ tel que $G|_A \equiv F|_A$ a un point de coïncidence avec L. Sinon, F est dite *L-non-universelle.*

Pour chaque $T \in \mathrm{FR}(L)$ nous définissons *la connection* $\Theta_T\colon \mathscr{A}_L(X, A) \to \mathscr{A}(X, A)$ par $\Theta_T(F) = R_T(F+T)$, $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$. Il est facile de vérifier que Θ_T est bien définie.

(3.1) Proposition. *Soient $F, G \in \mathscr{A}_L(X, A)$. La connection Θ_T vérifie les propriétés suivantes:*

(i) $x \in X$ *et* $x = \Theta_T(F)(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Dom}(L) \cap X$ *et* $L(x) = F(x)$;
(ii) $\Theta_T(F) \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A) \Rightarrow F$ *est L-universelle dans* $\mathscr{A}_L(X, A)$;
(iii) $F \underset{\mathscr{A}_L}{\sim} G$ *dans* $\mathscr{A}_L(X, A) \Rightarrow \Theta_T(F) \underset{\mathscr{A}}{\sim} \Theta_T(G)$ *dans* $\mathscr{A}(X, A)$.

Preuve. La preuve est immédiate. ∎

(3.2) Lemme. *Soit $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F est L-non universelle;*
(ii) *il existe $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ telle que G n'a pas de point de coïncidence avec L et $G \underset{\mathscr{A}}{\sim} F$ dans $\mathscr{A}_L(X, A)$;*
(iii) *il existe une homotopie H dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ entre F et G^*, où G^* n'a pas de point de coïncidence avec L, et telle que $H_t|_A \equiv F|_A$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ une application sans point de coïncidence avec L et telle que $F|_A \equiv G|_A$. $H_t = t \cdot G + (1-t)F$ est une homotopie dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ entre F et G.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit H une homotopie dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ entre F et G, où G n'a pas de point de coïncidence avec L.

Définissons l'ensemble

$$B = \{x \in X \cap \mathrm{Dom}(L) \mid \exists t \in [0, 1] \ L(x) = H(x, t)\}.$$

D'après (3.1) on obtient que

$$B = \{x \in X \mid \exists t \in [0, 1] \ x = \Theta_T(H_t)(x)\}.$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la preuve de (II.2.3), on déduit que B est fermé dans X. Sans perte de généralité, on peut supposer que $B \neq \emptyset$. Soit ξ: $X \to [0, 1]$ une fonction de Urysohn telle que $\xi(A) = 1$, $\xi(B) = 0$. On définit

$$F^*(x) = H(x, \xi(x)); \quad x \in X,$$

$$H^*(x, t) = H(x, (1-t)+t\cdot\xi(x)); \quad x \in X, \ t \in [0, 1].$$

Par ailleurs $\Theta_T(H^*) = [\Theta_T(H)]^*$, où $[\Theta_T(H)]^*$ est l'homotopie définie par la même construction que dans la preuve de (II.2.3), appliquée à l'homotopie $\Theta_T(H)$. Par conséquent $H^* \in \mathscr{A}_L$ et elle vérifie les conditions requises.

(iii) $\Rightarrow$ (i) est évident. ■

(3.3) COROLLAIRE (Théorème de transversalité topologique). *Supposons que F, $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ sont homotopes dans $\mathscr{A}_L(X, A)$. Alors F est L-universelle si et seulement si G est L-universelle. Par conséquent, les classes $\mathscr{K}_L(X, A)$, $\mathscr{D}_L(X, A)$ et $\mathscr{C}_L(X, A)$ satisfont la propriété de Leray–Schauder pour tous les couples fermés et bornés (X, A) dans $\mathbf{E}$.*

(3.4) COROLLAIRE (Alternative non linéaire). *Soit U un ensemble ouvert borné dans $\mathbf{E}$ tel que $0 \in U$. Alors pour chaque application L-condensante F: $\bar{U} \to \mathbf{F}$, on a l'alternative suivante:*

(i) *F a un point de coïncidence avec L dans $\bar{U}$; ou bien*

(ii) *Pour un certain (et également pour tout) $T \in \mathrm{FR}(L)$ il existe $x \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tels que*

$$L(x) + (1-\lambda)Tx = \lambda F(x).$$

Preuve. On a que pour tous $x \in \bar{U} \cap \mathrm{Dom}(L)$ et $t \in [0, 1]$

$$L(x) + (1-t)T(x) = t\cdot F(x) \iff x = t\cdot\Theta_T(F)(x).$$

Alors, la conclusion découle de (III.1.3). ■

(3.5) COROLLAIRE (Alternative de Leray–Schauder). *Soit F: $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ une application L-condensante. Etant donné $T \in \mathrm{FR}(L)$, définissons*

$$\Sigma_T(F) = \{x \in \mathbf{E} \cap \mathrm{Dom}(L) \mid \exists \lambda \in (0, 1), \ L(x) + (1-\lambda)T(x) = \lambda F(x)\}.$$

Alors, ou bien $\Sigma_T(F)$ est non borné pour un certain (et également pour tout) $T \in \mathrm{FR}(L)$, ou bien F a un point de coïncidence avec L.

Preuve. La preuve est immédiate d'après (III.1.5), parce que $\Sigma_T(F) = \Sigma(\Theta_T(F))$. ∎

(3.6) COROLLAIRE (de (III.1.6)). *Supposons que R_T: $F \to E$ est continue, où $T \in \mathrm{FR}(L)$. Soit F: $E \to F$ une application L-condensante quasi-bornée telle que $\|R_T\|(|F| + \|T\|) < 1$. Alors, l'application $L - F$ est surjective.*

Preuve. Notons d'abord que

$$|\Theta_T(F)| \leqslant \|R_T\|(|F| + \|T\|) < 1.$$

D'après (III.1.6), pour chaque $y \in F$ il existe $x \in X$ tel que $R_T(y) = x - \Theta_T(F)(x)$, alors $x \in \mathrm{Dom}(L)$ et

$$y = L(x) + T(x) - (F(x) + T(x)) = L(x) - F(x). \; ∎$$

Notons que si R_T: $F \to E$ est continue pour un certain $T \in \mathrm{FR}(L)$, alors R_T est continue pour tout $T \in \mathrm{FR}(L)$.

(3.7) COROLLAIRE (de (III.1.7)). *Supposons que R_T est continue, où $T \in \mathrm{FR}(L)$. Soit F: $E \to E$ une application L-condensante asymptotiquement linéaire telle que*

$$\|R_T\|(\|F'(\infty)\| + \|T\|) < 1.$$

Alors, l'application $L - F$ est surjective.

Preuve. Reprenant la preuve de (III.1.7), on obtient $|F| < \|F'(\infty)\|$ et la conclusion découle de (3.6). ∎

(3.8) COROLLAIRE (Théorème de Borsuk). *Soit U un voisinage ouvert de $0 \in E$, borné, symétrique et soit F: $\bar{U} \to F$ une application L-condensante impaire sur ∂U. Alors, ou bien F a un point de coïncidence avec L sur ∂U, ou bien F est L-universelle dans $\mathscr{A}_L(\bar{U}, \partial U)$.*

Preuve. Puisque R_T et T sont linéaires, alors $\Theta_T(F)$ est une application impaire sur ∂U. La conclusion découle de (III.1.9) et (3.1). ∎

Une application G: $E \to F$ est dite *L-bornée* si $R_T \circ G$ est bornée pour un certain $T \in \mathrm{FR}(L)$. D'après (1) cette définition ne dépend pas du choix de $T \in \mathrm{FR}(L)$.

(3.9) COROLLAIRE (de (III.1.10)). *Soient F, G, S: $E \to F$ des applications L-condensantes satisfaisant les conditions suivantes:*

i) *F est homogène et son seul point de coïncidence avec L est 0;*

ii) *G est L-bornée;*

iii) *$S(x) = F(x) + G(x)$ pour tout $x \in E$.*

Alors S a un point de coïncidence avec L.

Preuve. Soit $T \in \mathrm{FR}(L)$. Posons $F^* = \Theta_T(F)$, $G^* = R_T \circ G = \Theta_T(G) - R_T \circ T$, $S^* = \Theta_T(S)$. On vérifie facilement que F^*, G^*, S^* satisfont les conditions (i), (ii), (iii) de (III.1.10), et la conclusion découle de (3.1). ∎

(3.10) Corollaire (de (III.2.10)). *Soit U un voisinage ouvert de* 0, *borné, symétrique et soit $F\colon \bar{U} \to \boldsymbol{E}$ une application L-condensante telle que $(L-F)(x) \neq t\cdot(L-F)(-x)$ pour tous $x \in \partial U \cap \mathrm{Dom}(L)$ et $t \in [0, 1]$. Alors F est L-universelle dans $\mathscr{C}_L(\bar{U}, \partial U)$.*

P r e u v e. Notons d'abord que la condition $(L-F)(x) \neq \lambda(L-F)(-x)$ pour tous $x \in \partial U \cap \mathrm{Dom}(L)$ et $\lambda \in [0, 1]$, est équivalente à

$$x - \Theta_T(F)(x) \neq \lambda(-x - \Theta_T(F)(-x))$$

pour tous $x \in \partial U$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Alors, la conclusion découle de (III.2.10) et (3.1). ∎

§4. Théorie de coïncidence pour des opérateurs semi-fredholmiens

(4.1) Définition. Soient $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $L\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est dit *semi-fredholmnien à droite* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $\mathrm{Ker}(L)$ est fermé et il existe un sous-espace fermé $\boldsymbol{E}_1$ de $\boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \oplus \mathrm{Ker}(L)$;

(ii) $\mathrm{Im}(L)$ est fermé et de codimension finie.

On dit aussi que l'opérateur continu $K\colon \mathrm{Im}(L) \to \boldsymbol{E}$ est *un pseudo-inverse à droite* de L si les diagrammes suivants commutent:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Im}(L) \arrow[r, "K"] \arrow[d, "I"'] & \boldsymbol{E} \arrow[dl, "L"] \\ \mathrm{Im}(L) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{E}_1 \arrow[r, "L"] \arrow[d, "J"'] & \mathrm{Im}(L) \arrow[dl, "K"] \\ \boldsymbol{E} & \end{tikzcd}$$

où $J\colon \boldsymbol{E}_1 \to \boldsymbol{E}$ est l'inclusion.

Soit $P \in \mathscr{P}r(\boldsymbol{E})$ la projection associée à la décomposition $\boldsymbol{E} = \mathrm{Ker}(L) \oplus \boldsymbol{E}_1$, i.e. $P(\boldsymbol{E}) = \mathrm{Ker}(L)$ et $\mathrm{Ker}(P) = \boldsymbol{E}_1$. La relation $\mathrm{Im}(K) = \mathrm{Ker}(P)$ nous autorise à dire que l'inverse à droite K est *associé à la projection P*.

On définit l'indice de L comme étant le nombre entier généralisé

$$\mathrm{i}(L) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) - \dim(\boldsymbol{F}/\mathrm{Im}(L)).$$

Dans la suite nous supposons que $\mathrm{i}(L) \geqslant 0$.

Notons que l'existence d'un pseudo-inverse implique que L est continu. En effet, $K\colon \mathrm{Im}(L) \to \boldsymbol{E}_1$ est un isomorphisme et $L(x) = K^{-1} \circ (I-P)(x)$, où P est la projection associée à l'inverse K et $x \in \boldsymbol{E}$.

D'abord nous considérons un opérateur semi-fredholmien à droite

$L\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ qui est *surjectif* et nous supposons que $K\colon \mathbf{F} \to \mathbf{E}$ est un pseudo-inverse à droite de L.

Supposons que $\mathscr{A}$ représente une des classes $\mathscr{K}$, $\mathscr{D}$ ou $\mathscr{C}$ par rapport à l'espace $\mathbf{E}$.

(4.2) DÉFINITION. Soient $X \subset \mathbf{E}^{\infty+n}$ un ensemble fermé et borné et $F\colon X \to \mathbf{F}$ une application continue. Nous disons que F appartient à la classe $\mathscr{A}_L$ si l'application $K \circ F\colon X \to \mathbf{E}$ appartient à la classe $\mathscr{A}$.

Cette définition dépend du choix de K.

Soit (X, A) un couple borné et fermé dans $\mathbf{E}$. Nous définissons la classe $\mathscr{A}_L(X, A)$, l'homotopie dans cette classe et les applications L-universelles de la même manière que dans les sections précédentes.

Considérons l'application $\Theta_K\colon \mathscr{A}_L(X, A) \to \mathscr{A}(X, A)$; $\Theta_K(F) = K \circ F\colon X \to \mathbf{E}$; $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$.

(4.1) PROPOSITION. *L'application Θ_K a les propriétés suivantes:*

(i) *si $x = \Theta_K(F)(x)$, où $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$, $x \in X$ alors $L(x) = F(x)$;*

(ii) *$F \underset{\mathscr{A}}{\sim} G$ dans $A_L(X, A)) \Rightarrow \Theta_K(F) \sim \Theta_K(G)$ dans $\mathscr{A}(X, A)$;*

(iii) *$\Theta_K(F) \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{A}}(X, A) \Rightarrow F \in \mathrm{Unv}_{\mathscr{A}_L}(X, A)$.*

Preuve. (i) est évident et (ii), (iii) découlent de (i) par contradiction. ■

(4.2) Remarque. Les conditions (4.1,(ii)) et (4.1,(iii)) impliquent que Θ_K est une connection entre $\mathscr{A}_L$ et $\mathscr{A}$, au sens de la section 2.

(4.3) LEMME. *Soit $F \in \mathscr{A}_L(X, A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *F n'est pas L-universelle;*

(ii) *il existe $G \in \mathscr{A}_L(X, A)$, telle que G n'a pas de point de coïncidence avec L et $G \underset{\mathscr{A}}{\sim} F$ dans $\mathscr{A}_L(X, A)$;*

(iii) *il existe une homotopie H dans $\mathscr{A}_L(X, A)$ entre F et G^*, où G^* n'a pas de point de coïncidence avec L, et telle que $H_t|_A \equiv F|_A$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) sont évidentes. Pour prouver l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) nous répétons la même construction que dans la preuve (II.2.3). Soit $F, G \in \mathscr{A}_L(X, A)$ comme dans (ii) et supposons que H est une homotopie entre F et G dans $\mathscr{A}_L(X, A)$. Définissons

$$\begin{aligned} B &= \{x \in X \mid \exists t \in [0, 1],\ L(x) = H(x, t)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists t \in [0, 1],\ x = K \circ H(x, t) + (I-P)(x)\}. \end{aligned}$$

Puisque $(x, t) \to K \circ H(x, t) + (I-P)(x) - x$ est continue et que l'intervalle $[0, 1]$ est compact, il s'ensuit que B est fermé. Sans perte de généralité on peut supposer que $B \neq \emptyset$. Soit $\xi\colon X \to [0, 1]$ une fonction de Urysohn telle que

$\xi(A) = 1$, $\xi(B) = 0$. On définit

$$F^*(x) = H(x, \xi(x));$$

$$H^*(x, t) = H(x,(1-t)+t\cdot\xi(x)); \quad x \in X, \ t \in [0, 1].$$

Alors $\Theta_K(H^*) = [\Theta_K(H)]^*$, où $[\Theta_K(H)]^*$ est l'homotopie définie par la même construction que dans la preuve (II.2.3), appliquée à l'homotopie $\Theta_K(H)$. Par conséquent $H^* \in \mathscr{A}_L$ et elle vérifie les conditions requises. ∎

(4.4) COROLLAIRE. *Les classes $\mathscr{K}_L(X, A)$, $\mathscr{D}_L(X, A)$ et $\mathscr{C}_L(X, A)$ satisfont la propriété de Leray-Schauder pour tous les couples fermés et bornés (X, A) dans $\boldsymbol{E}$.*

Maintenant, nous abandonnons l'hypothèse que L est surjectif.

(4.5) LEMME. *Soient $L\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur semi-fredholmien à droite et $K\colon \mathrm{Im}(L) \to \boldsymbol{E}$ un pseudo-inverse à droite de L. Supposons que $B\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est un opérateur complètement continu. Alors $L+B\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est un opérateur semi-fredholmien à droite ayant un pseudo-inverse à droite.*

Preuve. Considérons l'opérateur linéaire continu $I+B\circ K\colon \mathrm{Im}(L) \to \boldsymbol{F}$. Nous voulons montrer que $\mathrm{Im}(I+B\circ K)$ est un sous-espace fermé dans $\boldsymbol{F}$, $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(I+B\circ K)) < \infty$ et $\mathrm{Im}(I+B\circ K) \subset \mathrm{Im}(L+B)$. Cela nous permettra de constater que $\mathrm{Im}(L+B)$ est fermé et que $\mathrm{codim}(\mathrm{Im}(L+B)) < \infty$. En effet, si $\mathrm{Im}(I+B\circ K)$ est fermé et de codimension finie, alors $\mathrm{Im}(L+B) = \mathrm{Im}(I+B\circ K) \oplus \boldsymbol{F}^*$, où $\boldsymbol{F}^*$ est un sous-espace de dimension finie, et la conclusion en découle.

Soit $Q \in \mathscr{P}r(\boldsymbol{F})$ une projection sur $\mathrm{Im}(L)$. Il est clair que

$$\mathrm{Im}(I+B\circ K) = \mathrm{Im}(Q+B\circ K\circ Q), \quad \text{où } Q+B\circ K\circ Q\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}.$$

Parce que $Q = I-R$, où $R\colon \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{F}$ est de rang fini, on a que $Q+B\circ K\circ Q$ est un champ complètement continu sur $\boldsymbol{F}$. D'après (III.2.8), $\mathrm{Im}(I+B\circ K)$ est fermé dans $\boldsymbol{F}$ et de codimension finie. Ensuite, soit $y = z+B\circ K(z)$ pour un certain $z \in \mathrm{Im}(L)$. Alors

$$z = L(x_0), \quad \text{où } x_0 \in \boldsymbol{E}_1$$

et

$$y = L(x_0)+B\circ K\circ L(x_0) = L(x_0)+B(x_0).$$

Cela montre que $\mathrm{Im}(I+B\circ K) \subset \mathrm{Im}(L+B)$. Puisque $\mathrm{Ker}(I+B\circ K) \subset \mathrm{Im}(L)$, il existe un sous-espace fermé $\boldsymbol{F}_1 \subset \boldsymbol{F}$ tel que

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{Ker}(I+B\circ K) \oplus \boldsymbol{F}_1.$$

Considérons l'opérateur $I+B\circ K\colon \mathrm{Im}(L) \to \mathrm{Im}(I+B\circ K)$, restreint au sous-espace $\boldsymbol{F}_1$. Il est bijectif, donc son inverse $D\colon \mathrm{Im}(I+B\circ K) \to \boldsymbol{F}_1$ est continu. Par conséquent, pour tout $z \in \mathrm{Im}(I+B\circ K)$, $(L+B)\circ K\circ D(z) = z$. $\boldsymbol{F}^*$ est de dimension finie, donc $K \circ D$ se prolonge à un pesudo-inverse à droite de $L+B$, défini sur tout le sous-espace $\mathrm{Im}(L+B)$. ∎

(4.6) THÉORÈME. *Soit L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur semi-fredholmien ayant un pseudo-inverse à droite. Soient $U \subset \boldsymbol{E}$ un voisinage ouvert et borné de 0 et F: $U \to \boldsymbol{F}$ une application continue. Supposons qu'il existe un opérateur $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ tel que:*

a) *$L+B$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est surjectif;*

b) *$K_B \circ (F+B)$: $\bar{U} \to \boldsymbol{E}$ est condensante, où K_B est un pseudo-inverse à droite de l'opérateur semi-fredholmien à droite $L+B$;*

c) *$L(x)+B(x) \neq t(F(x)+B(x))$ pour tous $x \in \partial U$, $t \in [0, 1)$.*

Alors F a un point de coïncidence avec L. De plus, si la conclusion (c) *est vérifiée pour tout $t \in [0, 1]$, alors $0 \in \boldsymbol{F}$ est un point intérieur de $(L-F)(U)$.*

Preuve. On peut supposer que la condition (c) est vérifiée pour tout $t \in [0, 1]$. Sinon, F a un point de coïncidence avec L dans ∂U. D'après (4.4) et (III.1.2), l'application $\Theta_{K_B}(F)$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{U}, \partial U)$. Cela implique, par (4.1), qu'il existe un point de coïncidence entre F et L.

D'après (III.2.1), 0 est un point intérieur de $\big(I-\Theta_{K_B}(F)\big)(U)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in \boldsymbol{F}$, $\|y\| \in \varepsilon$, l'équation $x-\Theta_{K_B}(F)(x) = y$ a une solution dans U. Par conséquent, il existe un $x \in U$ tel que $y = (L+B)(x)-(F+B)(x) = L(x)-F(x)$. Il s'ensuit que 0 est un point intérieur de $(L-F)(U)$. ∎

(4.7) THÉORÈME. *Soit L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur semi-fredholmien ayant un pseudo-inverse à droite. Soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ une application continue. Supposons qu'il existe un opérateur $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ tel que les conditions* (a) *et* (b) *de* (4.6) *sont vérifiées. Définissons l'ensemble.*

$$\Sigma_B(F) = \{x \in \boldsymbol{E} \mid \exists \lambda \in [0, 1], \quad \lambda \cdot F(x) = L(x)+(1-\lambda)B(x)\}.$$

Alors, ou bien $\Sigma_B(F)$ est non borné, ou bien F a un point de coïncidence avec L.

Preuve. Supposons que $\Sigma_B(F)$ est borné, i.e. $\Sigma_B(F) \subset B(0, r)$ pour un certain $r \in \boldsymbol{R}_+$. Pour chaque $x \in \partial B(0, r)$, $\lambda \cdot F(x) \neq L(x)+(1-\lambda)B(x)$ et alors la conclusion découle de (4.6) pour $U = B(0, r)$. ∎

(4.8) THÉORÈME. *Soit L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ un opérateur semi-fredholmien ayant un pseudo-inverse à droite. Soient $U \subset \boldsymbol{E}$ un voisinage de 0, borné, ouvert et symétrique, F: $\bar{U} \to \boldsymbol{F}$ une application continue, impaire sur ∂U. Supposons qu'il existe un opérateur $B \in \mathscr{K}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F})$ tel que les conditions* (a) *et* (b) *de* (4.6) *sont vérifiées.*

Alors F a un point de coïncidence avec L.

Preuve. L'application $K_B \circ (F+B)$: $\bar{U} \to \boldsymbol{E}$ est condensante, et elle est impaire sur ∂U, puisque K_B et B sont linéaires. Alors, d'après (III.1.9) et (4.1),

$F+B$ a un point de coïncidence x_0 avec $L+B$, et ainsi x_0 est un point coïncidence entre F et L. ∎

(4.9) THÉORÈME. *Soient L: $E \to F$ un opérateur semi-fredholmien ayant un pseudo-inverse à droite, $U \subset E$ un voisinage de* 0, *ouvert, borné, symétrique et convexe, et F: $\bar{U} \to E$ une application continue satisfaisant la condition suivante:* d) $(L-F)(x) \neq t(L-F)(-x)$ *pour tous* $t \in [0, 1]$, $x \in \partial U$. *Supposons qu'il existe un opérateur $B \in \mathscr{K}(E, F)$ tel que les conditions* (a) *et* (b) *de* (4.6) *sont satisfaites.*

Alors F a un point de coïncidence avec L dans U.

Preuve. (d) implique que

$$(I-\Theta_{K_B}(F))(x) \neq t(I-\Theta_{K_B}(F))(-x)$$

pour tous $x \in \partial U \cap E_1$ et $t \in [0, 1]$, où $\Theta_{K_B}(F) = K_B(F+B)$ et $E_1 = \operatorname{Im}(K_B)$. E_1 est un sous-espace fermé de E, alors nous pouvons appliquer (III.2.10) à $\Theta_{K_B}(F)|_{\bar{U}_1}$, $U_1 = U \cap E_1$. D'après (III.2.10), $\Theta_{K_B}(F)$ a un point fixe $x_0 \in U_1$. Il est clair que x_0 est un point de coïncidence entre L et F. ∎

Chapitre V

Applications aux équations différentielles

Dans ce chapitre on présente des exemples de mesures de non compacité sur divers espaces fonctionnels et on étudie certaines applications condensantes par rapport à ces mesures. On indiques plusieurs applications des théorèmes précédents aux équations différentielles et on obtient quelques résultats d'existence pour les équations différentielles non résolubles par rapport á la dérivée seconde.

§1. Notations

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$ un multi-indice. On pose

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad \text{où } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Soient M un espace métrique et F un espace de Banach. Nous considérons l'espace de Banach

$$C(M, F) = \{u\colon M \to F \mid u \text{ est continue et bornée}\},$$

où la norme est donnée par $\|u\|_\infty = \sup_{x \in M} \|u(x)\|$.

Soit $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ un domaine, i.e. Ω est un ensemble ouvert et borné. Nous considérons en particulier les espaces de Banach suivants:

$$C(\bar{\Omega}, \boldsymbol{F}) = \{u\colon \Omega \to \boldsymbol{F} \mid u \text{ a une extension continue bornée sur } \bar{\Omega}\}$$

muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \|u(x)\|$;

$$C(F) = C(\bar{\Omega}, \boldsymbol{R});$$

$$C^k(\bar{\Omega}, \boldsymbol{F}) = \{u\colon \Omega \to \boldsymbol{F} \mid \forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k,\ \partial^\alpha u \in C(\bar{\Omega}, \boldsymbol{F})\}$$

muni de la norme $\|u\|_{\infty,k} = \max\{\|\partial^\alpha u\|_\infty \mid 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\}$; $C^k(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega}, \boldsymbol{R})$;

$$L^p(\bar{\Omega}, \boldsymbol{F}) = \{u\colon \Omega \to \boldsymbol{F} \mid u \text{ mesurable et } \int_\Omega \|u\|^p < \infty\}$$

muni de la norme $\|u\|_p = (\int_\Omega \|u\|^p)^{1/p}$, $p \geqslant 1$; $L^p(\Omega) = L^p(\Omega, \boldsymbol{R})$;

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u\colon \Omega \to \boldsymbol{R} \mid \forall 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k,\ \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

muni de la norme $\|u\|_{p,k} = \max\{\|\partial^\alpha u\|_p \mid 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k\}$.

Supposons que (a, b) est un intervalle dans $\boldsymbol{R}$. Posons

$$C^k[a, b] = C^k([a, b]), \quad L^p[a, b] = L^p((a, b)), \quad W^{k,p}[a, b] = W^{k,p}((a, b)).$$

L'espace $W^{k,2}(\Omega)$ peut être muni d'une autre norme équivalente, définie par

$$\|u\| = \Big(\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant k} \|\partial^\alpha u\|_2^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W^{k,2}(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert. Il est noté $H^k(\Omega)$. Les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont dits *espaces de Sobolev.*

Etant donné $u\colon \bar{\Omega} \to \boldsymbol{F}$ une application, définissons *le support* de u par $\operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$. Soit

$$C_0^k(\Omega) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \Omega\}.$$

Alors, il est clair que $C_0^k(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ et en particulier $C_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$. On note $W_0^{k,p}(\Omega)$ (respectivement $H_0^k(\Omega)$) sa fermeture dans $W^{k,p}(\Omega)$ (respectivement dans $H^k(\Omega)$).

Remarque. On peut vérifier que chaque fonction μ définie sur la famille $\mathscr{M}_0$ des sous-ensembles bornés d'un espace de Banach $\boldsymbol{E}$, et qui satisfait les axiomes (I.2,(μ-1) – (μ-8)) par rapport à $\mathscr{M}_0$, peut être prolongée par la formule (I.2,(μ-9)) à une mesure de non compacité $\mu\colon \mathscr{M} \to [0, \infty)$.

Nous présentons d'autres exemples de mesures de non compacité, qui n'ont pas été discutés dans le Chapitre I.

EXEMPLES.

(1.1) *Mesure de non équicontinuité* ω_0. Soit (K, ϱ) un espace métrique compact. Considérons l'espace $E = C(K)$. Etant donné $x \in C(K)$ et $\varepsilon > 0$, définissons

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s)-x(t)| \mid t, s \in K,\ \varrho(s, t) < \varepsilon\}.$$

Le module de continuité d'un sous-ensemble borné $X \subset E$ est la fonction

$$\omega(X, \varepsilon) = \sup\{\omega(x, \varepsilon) \mid x \in X\}.$$

Posons $\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon)$. On peut vérifier que ω_0 est une mesure de non compacité et que $\omega_0(X) = 2 \cdot \chi(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}$.

Nous appelons ω_0 *mesure de non équicontinuité*.

(1.2) Soit F un espace de Banach et soit $E = C([a, b], F)$. Etant donné une mesure de non compacité μ sur l'espace F, définissons

$$\mu^*(X) = \sup\{\mu(X(t)) \mid t \in [a, b]\}, \qquad \text{où } X(t) = \{x(t) \mid x \in X\}.$$

Posons $\mu_c(X) = \omega_0(X) + \mu^*(X)$, où $\omega_0(X)$ est définie de façon analogue à ω_0 dans l'exemple précédent. La fonction μ_c est une mesure de non compacité sur E.

(1.3) Soient $E = L^p[a, b]$ et T_h: $L^p[a, b] \to L^p(\boldsymbol{R})$ l'opérateur de translation défini par

$$(T_h x)(t) = x(t+h); \qquad x \in E,\ h \in \boldsymbol{R}.\ ^*)$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, $x \in E$ et $X \subset E$ un ensemble borné, définissons:

$$\nu(x, \varepsilon) = \sup\{\|T_h x - x\|_p \mid |h| \leqslant \varepsilon\} \quad \text{et} \quad \nu(X, \varepsilon) = \sup\{\nu(x, \varepsilon) \mid x \in X).$$

Soit $\nu_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \nu(X, \varepsilon)$. ν_0 est une mesure de non compacité sur E.

Une autre mesure de non compacité η_0 sur $L^p[a, b]$ peut être obtenue si dans la construction de ν_0 ci-dessus, l'opérateur T_h est remplacé par l'opérateur S_h, défini par

$$(S_h x)(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(s)\, ds, \qquad x \in L^p[a, b],\ h \neq 0.$$

L'opérateur S_h est dit *opérateur de la moyenne de Stéklov*. On peut vérifier que les mesures de non compacité χ, ν_0 et η_0 sur $L^p[a, b]$ satisfont les inégalités suivantes

$$\chi(X) \leqslant \eta_0(X) \leqslant \nu_0(X) \qquad \text{pour tout } X \in \mathcal{M}.$$

---

*) On pose $x(t) = 0$ pour $t \notin [a, b]$.

(1.4) Supposons que $\boldsymbol{E}$ représente l'espace $C^n[a, b]$ (respectivement $W^{n,p}[a, b]$) et que $\boldsymbol{E}_0$ représente l'espace $C[a, b]$ (respectivement $L^p[a, b]$). Soit $X \subset \boldsymbol{E}$ un ensemble borné. Définissons l'ensemble $X^{(n)} \subset \boldsymbol{E}_0$ par

$$X^{(n)} = \{x^{(n)} \mid x \in X\},$$

où $x^{(n)}$ est la n-iéme dérivée de x. Etant donne une mesure de non compacité μ sur $\boldsymbol{E}_0$, définissons

$$\mu^{(n)}(X) = \mu(X^{(n)}).$$

$\mu^{(n)}$ est une mesure de non compacité sur $\boldsymbol{E}$. En particulier, on obtient les mesures $\omega_0^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ sur $C^n[a, b]$ et $\nu_0^{(n)}$, $\eta_0^{(n)}$, $\alpha^{(n)}$ et $\chi^{(n)}$ sur $W^{n,p}[a, b]$.

§ 2. Certains résultats concernant les applications condensantes et L-condensantes

(2.1) Soit K: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ une application complètement continue et soit F: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ une contraction avec constante $k \geqslant 0$, i.e. $\|Fx - Fy\| \leqslant k \cdot \|x - y\|$ pour tous x, $y \in \boldsymbol{E}$. Alors, l'application $F+K$ est α-lipschitzienne et χ-lipschitzienne avec la constante k. Si $k < 1$, $F+K$ est une application de Darbo.

(2.2) Soit f: $[0, 1] \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue. *L'opérateur de Nemytskii* F: $C[0, 1] \to C[0, 1]$ pour la fonction f est défini par la formule

$$F(u)(t) = f(t, u(t)), \quad u \in C[0, 1],\ t \in [0, 1].$$

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k \cdot |x - y|$ pour tous $t \in [0, 1]$, x, $y \in \boldsymbol{R}$;

(ii) $\|F(u) - F(x)\|_\gamma \leqslant k \cdot \|u - v\|_\gamma$ pour tous u, $v \in C[0, 1]$;

(iii) F est χ-lipschitzienne avec la constante k.

(cf. Appell [1]).

(2.3) Soit f: $[0, 1] \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *une fonction de Carathéodory*, i.e. $f(t, \cdot)$ est continue pour presque tout $t \in [0, 1]$; $f(\cdot, x)$ est mesurable pour tout $x \in \boldsymbol{R}$.

L'opérateur de Nemytskii F: $L^p[0, 1] \to L^p[0, 1]$ pour la fonction f est défini par $F(u)(t) = f(t, u(t))$, $u \in L^p[0, 1]$. (On peut montrer que si F est bien défini, alors il est nécessairement continu).

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k \cdot |x - y|$ pour presque tout $t \in [0, 1]$, et pour tous x, $y \in \boldsymbol{R}$,

(ii) $\|F(u) - F(v)\|_p \leqslant k\|u - v\|_p$, pour tous u, $v \in L^p[0, 1]$;

(iii) F est χ-lipschitzienne avec la constante k.

(cf. Appell [1]).

(2.4) Nous considérons l'espace $\boldsymbol{E} = C[a, b]$. Supposons que S: $C[a, b]$

$\to C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ est une application complètement continue. Soit g: $[a, b] \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{R}$ une fonction continue satisfaisant la condition:

(1) Il existe une constante $k \in (0, 1)$ tel que pour tous $t \in [a, b]$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ et $r, s \in \boldsymbol{R}^l$

$$|g(t, x, r) - g(t, x, s)| \leqslant k \cdot |r - s|.$$

Supposons que β_i: $[a, b] \to [a, b]$, $i = 1, \ldots, l$, sont des fonctions continues. Etant donné $u \in C[a, b]$, posons

$$\beta(u)(t) = \big(u(\beta_1(t)), \ldots, u(\beta_l(t))\big) \in \boldsymbol{R}^l.$$

Définissons G: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ par la formule:

$$G(u)(t) = g\big(t, S(u)(t), \beta(u)(t)\big) \quad \text{pour tous } u \in \boldsymbol{E}, t \in [a, b].$$

Alors, G est une application de Darbo par rapport aux mesures de non compacité α, χ et ω_0.

Preuve. Parce que $\omega_0 = 2 \cdot \chi$ (ex. (1.1)), alors il suffit de montrer que G est μ-lipschitzienne avec la constante k pour $\mu = \omega_0$ et $\mu = \alpha$. Notons d'abord que l'opérateur $\beta: C[a, b] \to C([a, b], \boldsymbol{R}^l)$ est un opérateur linéaire continu et $\|\beta\| \leqslant 1$. Soient $A \subset \boldsymbol{E}$ un ensemble et $r > 0$ tel que $\operatorname{diam}(A) \leqslant r$. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{diam}(S(A)) \leqslant R$. La fonction g: $[a, b] \times \overline{B(0, r)} \times \overline{B(0, r)} \to \boldsymbol{R}$ (oú $B(0, R) = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| < R\}$ et $B(0, r) = \{x \in \boldsymbol{R}^l \mid \|x\| < r\}$) est uniformèment continue. Alors, la compacitè de l'application $S_{|A}$: $A \to C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ implique que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall v, \tilde{v} \in A\ \forall u \in E\ \forall s, t \in [a, b]$ si $|t - s| < \delta$, $\|v - \tilde{v}\|_\infty < \delta$ et $\|u\|_\gamma < r$ alors

(2) $$\big|g\big(t, S(v)(t), \beta(u)(t)\big) - g\big(s, S(\tilde{v})(s), \beta(u)(t)\big)\big| < \varepsilon.$$

Posons

$$\omega(\beta, \eta) = \max\{\omega(\beta_1, \eta) \mid i = 1, \ldots, l\},$$

où $\eta > 0$ et $\omega(\cdot, \eta)$ est défini dans (1.1). Il est clair que $\lim\limits_{\eta \to 0} \omega(\beta, \eta) = 0$.

Cas où $\mu = \omega_0$. Pour chaque $u \in C[a, b]$ défnissons:

$$\omega_1(u, \varepsilon) = \sup\big\{\big|g\big(t, S(u)(t), \beta(u)(t)\big) - g\big(s, S(u)(s), \beta(u)(t)\big)\big| \mid |t - s| < \varepsilon\big\},$$

$$\omega_2(u, \varepsilon) = \sup\big\{\big|g\big(s, S(u)(s), \beta(u)(t)\big) - g\big(s, S(u)(s), \beta(u)(s)\big)\big| \mid |t - s| < \varepsilon\big\},$$

$$\omega_1(A, \varepsilon) = \sup\{\omega_1,(u, \varepsilon) \mid u \in A\},$$

$$\omega_2(A, \varepsilon) = \sup\{\omega_2,(u, \varepsilon) \mid u \in A\}.$$

Pour tout $u \in A$ on a

$$\omega\big(G(u), \varepsilon\big) \leqslant \omega_1(u, \varepsilon) + \omega_2(u, \varepsilon) \leqslant \omega_1(u, \varepsilon) + k \cdot \omega\big(u, \omega(\beta, \varepsilon)\big)$$

alors

$$\omega(G(A), \varepsilon) \leqslant \omega_1(A, \varepsilon)+\omega_2(A, \varepsilon) \leqslant \omega_1(A, \varepsilon)+k\cdot\omega(A, \omega(\beta, \varepsilon)).$$

D'après (2) on obtient que $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_1(A, \varepsilon) = 0$,

$$\omega_0(G(A)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \omega(G(A), \varepsilon) \leqslant k\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \omega(A, \omega(\beta, \varepsilon))$$
$$= k\cdot \lim_{\eta\to 0} \omega(A, \eta) = k\cdot\omega_0(A).$$

Cas où $\mu = \alpha$. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et $y = \alpha(A)$, il existe une décomposition $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, où $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \eta+\varepsilon/(2k)$. Définissons la famille $\{G_u\colon A \to \boldsymbol{E} \mid u \in \boldsymbol{E},\ \|u\|_\infty \leqslant r\}$ par

$$G_u(v)(t) = g(t, S(v)(t), \beta(u)(t)),\ t \in [a, b],\ v \in A.$$

D'après (2), $\{G_u\}$ est équicontinue, i.e. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall v, \tilde{v} \in A\ \forall u \in \boldsymbol{E}$ si $\|v-\tilde{v}\|_\infty < \delta$ et $\|u\|_\infty \leqslant r$, alors

(3) $$\|G_u(v)-G_u(\tilde{v})\|_\infty < \varepsilon.$$

$S|_A\colon A \to C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ est compacte, alors d'après le théorème d'Arzela et d'après (2), $G_u(A)$ est compact pour tout $u \in \boldsymbol{E}$. Par (3) il existe des décompositions $A_i = A_1^i \cup \ldots \cup A_{n(i)}^i$, $i = 1, \ldots, m$, telles que diam $(G_u(A_j^i)) < \varepsilon/2$ pour tous $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n(i)$, et pour tout $u \in \boldsymbol{E}$ tel que $\|u\|_\infty \leqslant r$.

Supposons que $u, v \in A_j^i$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n(i)$. Alors

$$\|G(v)-G(u)\|_\infty \leqslant \|G(v)-G_u(v)\|_\infty + \|G_u(v)-G(u)\|_\infty.$$

Notons que

$$\begin{aligned}\|G(v)-G_u(v)\|_\infty &= \sup\{|g(t, S(v)(t), \beta(v)(t))-g(t, S(v)(t), \beta(u)(t))| \mid t \in [a, b]\}\\ &\leqslant k\cdot\|\beta(v)-\beta(u)\|_\infty\\ &\leqslant k\cdot\|v-u\|_\infty < k\cdot(\eta+\varepsilon/(2k))\\ &\leqslant k\cdot\eta+\varepsilon/2.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\|G_u(v)-G(u)\|_\infty = \|G_u(v)-G_u(u)\|_\infty \leqslant \varepsilon/2.$$

Il s'ensuit que $\operatorname{diam}(G(A_j^i)) \leqslant k\cdot\eta+\varepsilon$, pour tous i, j. Alors $\alpha(G(A)) \leqslant k\cdot\eta = k\cdot\alpha(A)$. ■

(2.5) Soit $g\colon [a, b]\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

(4) $$\|\operatorname{Grad}_r(g)(t, x, r)\| < 1$$

pour tous $t \in [a, b]$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ et $r \in \boldsymbol{R}^l$, où Grad_r est le gradient par rapport à $r \in \boldsymbol{R}^l$.

Supposons que S: $C[a, b] \to C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ est une application complètement continue et que β_i: $[a, b] \to [a, b]$, $i = 1, \ldots, l$, sont des fonctions continues. Alors l'application G: $C[a, b] \to C[a, b]$, définie par

$$G(u)(t) = g\big(t, S(u)(t), \beta(u)(t)\big),$$

où $\beta(u)(t)$ est définie comme dans (2.4), est une application condensante par rapport aux mesures α, χ et ω_0.

(2.6) Considérons l'espace $E = C^n[a, b]$ muni de la mesure de non compacité $\mu^{(n)}$, où μ est une mesure de non compacité sur $\boldsymbol{E}_0 = C[a, b]$. Soient $X \subset \boldsymbol{E}$ et F: $X \to \boldsymbol{E}_0$ une application continue, bornée sur les sous-ensembles bornés. F est dite *une application* $(\mu^{(n)}, \mu)$*-lipschitzienne* avec la constante k, si pour tout sous-ensemble borné $A \subset X$, $\mu\big(F(A)\big) \leqslant k \cdot \mu^{(n)}(A)$.

Soient S: $C^n[a, b] \to C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ une application complètement continue et g: $[a, b] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue satisfaisant (1). Supposons que β_i: $[a, b] \to [a, b]$; $i = 1, \ldots, l$ sont des fonctions continues et $\beta(u)(t) = \big(u(\beta_1(t)), \ldots, u(\beta_l(t))\big) \in \boldsymbol{R}^l$. Définissons

$$G(u)(t) = g\big(t, S(u)(t), \beta(u^{(n)}(t)\big), \quad \text{où } u \in C^n[a, b] \text{ et } t \in [a, b].$$

Alors, par un raisonnement analogue à celui de la preuve de (2.4) on obtient que G est une application $(\mu^{(n)}, \mu)$-lipschitzienne avec la constante k, où $\mu = \alpha$, χ, ω_0.

(2.7) Supposons que $\boldsymbol{E}$ est un sous-espace fermé de $C^n[a, b]$ et soit L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0 = C[a, b]$ un isomorphisme linéaire continu. Définissons

$$l(L) = \sup\{r > 0 \mid \forall A \subset \boldsymbol{E}, \operatorname{diam}(A) < \infty, \ r \cdot \mu^{(n)}(A) \leqslant \mu\big(L(A)\big)\}.$$

Supposons que $l(L) > 0$ et que F: $X \to \boldsymbol{E}_0$; $X \subset \boldsymbol{E}$, est une application $(\mu^{(n)}, \mu)$-lipschitzienne avec constante k. Alors $L^{-1} \circ F$: $X \to \boldsymbol{E}$ (respectivement $F \circ L^{-1}$: $L(X) \to \boldsymbol{E}_0$) est une application $\mu^{(n)}$-lipschitzienne (respectivement μ-lipschitzienne) avec la constante $k/l(L)$. En effet, si $A \subset X$ est un sous-ensemble borné et $B = (L^{-1} \circ F)(A)$, alors $L(B) = F(A)$ et

$$l(L) \cdot \mu^{(n)}(B) \leqslant \mu\big(L(B)\big) = \mu\big(F(A)\big) \leqslant k \cdot \mu^{(n)}(A).$$

(Respectivement, si $A \subset L(X)$ est un sous-ensemble borné et $B = L^{-1}(A)$, alors

$$\mu\big(F \circ L^{-1}(A)\big) \leqslant k \cdot \mu^{(n)}(B) \leqslant k/l(L) \cdot \mu\big(L(B)\big) = k/l(L) \cdot \mu(A).)$$

Considérons comme cas particulier

$$\boldsymbol{E} = C_0^2[a, b] = \{u \in C^2[a, b] \mid u(a) = u(b) = 0\}$$

et L_0: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0 = C[a, b]$ défini par $L_0 u = u''$, $u \in \boldsymbol{E}$. Il est clair que L_0 est un isomorphisme et que $l(L_0) = 1$.

Soit g: $[a, b] \times \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue satisfaisant (1) et supposons que S: $\boldsymbol{E} \to C([a, b], \boldsymbol{R}^2)$ est une application complètement continue. Supposons aussi que le vecteur $\beta(u)(t) \in \boldsymbol{R}^l$, où $u \in \boldsymbol{E}$, est défini comme dans (2.4), (2.5) ou (2.6).

Considérons le problème suivant

$$u'' = g(t, S(u)(t), \beta(u'')(t)), \qquad u(a) = u(b) = 0. \tag{5}$$

L'application G: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$ est définie par

$$G(u)(t) = g(t, S(u)(t), \beta(u'')(t)), \qquad u \in \boldsymbol{E},\ t \in [a, b].$$

Le problème (5) est équivalent à l'équation

$$F(u) = u, \quad u \in \boldsymbol{E}, \qquad \text{où } F = L_0^{-1} \circ G.$$

Il est aussi équivalent á l'équation

$$T(u) = u, \quad u \in \boldsymbol{E}_0, \qquad \text{où } T = G \circ L_0^{-1}.$$

On peut vérifier que F (respectivement T) est une application $\mu^{(n)}$-lipschitzienne (respectivement μ-lipschitzienne) avec la constante $k < 1$, où $\mu = \alpha$, χ ou ω_0. Alors elle est une application de Darbo. Si g satisfait (4) au lieu de (1), alors F et T sont des applications condensantes.

Considérons également le problème

$$u''(t) = g(t, S(u)(t), \beta(u'')(t)), \qquad u(a) = u(b); \quad u'(a) = u'(b). \tag{5a}$$

Ce problème est équivalent au problème

$$u''(t) - u(t) = g(t, S(u)(t), \beta(u'')(t)) - u(t),$$
$$u(a) = u(b); \quad u'(a) = u'(b).$$

Dans ce cas considérons

$$\boldsymbol{E} = C_p^2[a, b] = \{u \in C^2[a, b] \mid u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b)\},$$

$\boldsymbol{E}_0 = C[a, b]$ et L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$ est défini par $Lu = u'' - u$, $u \in \boldsymbol{E}$.

Il est clair que L est un isomorphisme et que $l(L) = 1$. En effet:

$$\begin{aligned} l(L) &= \sup\{r > 0 \mid \forall A \subset \boldsymbol{E} \text{ borné, } r \cdot \mu^{(n)}(A) \leqslant \mu(L(A))\} \\ &= \sup\{r > 0 \mid \forall A \subset \boldsymbol{E} \text{ borné, } r \cdot \mu^{(n)}(A) \leqslant \mu(L_0(A))\} \\ &= l(L_0) = 1. \end{aligned}$$

Soit G': $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$ défini par

$$G'(u)(t) = g(t, S(u)(t), \beta(u'')(t)) - u(t).$$

L'inclusion $E \subset E_0$ est complètement continue, donc $L^{-1} \circ G'$: $E \to E$ et $G' \circ L^{-1}$: $E_0 \to E_0$ sont des applications de Darbo et (5a) est équivalent aux équations

$$(L^{-1} \circ G')u = u; \quad u \in E \qquad \text{ou} \qquad (G' \circ L^{-1})u = u; \quad u \in E_0.$$

(2.8) Soit $E = L^2[a, b]$. Nous considérons l'espace E muni de la mesure de non compacité α. Soit S: $L^2[a, b] \to C([a, b], R^n)$ une application complètement continue. Supposons que la fonction continue g: $[a, b] \times R^n \times R \to R$ satisfait la condition (1) et

(6) $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall r \in R \quad \forall x, y \in R^n$$
$$\|x-y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(t, x, r)-g(t, y, r)| < \varepsilon.$$

Définissons l'application G: $E \to E$ par

$$G(u)(t) = g(t, S(u)(t), u(t)); \, u \in E; \, t \in [a, b].$$

Alors G est une application α-lipschitzienne avec la constante k.

Preuve. Soient $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, et supposons que $A \subset E$ est un ensemble borné tel que $\alpha(A) = \eta$. Alors il existe une décomposition $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \eta + \varepsilon_1$, $i = 1, \ldots, m$. Comme $S(A)$ est relativement compact dans $C([a, b], R^n)$, il existe $\delta > 0$ correspondant à $\varepsilon_2 > 0$ dans la condition (6), et il existe des décompositions $A_i = A_1^i \cup \ldots \cup A_{n(i)}^i$, $i = 1, \ldots, m$, où $\operatorname{diam}(S(A_j^i)) < \delta$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n(i)$. Soient u, $v \in A_j^i$. On a

$$\begin{aligned} |g(t, S(v)(t), v(t))-g(t, S(u)(t), u(t))| &\leqslant |g(t, S(v)(t), v(t))-g(t, S(v)(t), u(t))| \\ &+|g(t, S(v)(t), u(t))-g(t, S(u)(t), u(t))| \leqslant k|v(t)-u(t)|+\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|G(v)-G(u)\|_2 &\leqslant k \cdot \|v-u\|_2+\varepsilon_2 \cdot (b-a)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant k \cdot (\eta+\varepsilon_1)+\varepsilon_2 \cdot (b-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par conséquent $\alpha(G(A)) \leqslant k \cdot \eta = k \cdot \alpha(A)$. ∎

(2.9) Soit g: $[a, b] \times R^n \times R \to R$ une application comme dans (2.8). Définissons G: $H^n[a, b] \to L^2[a, b]$, $G(u)(t) = g(t, S(u)(t), u^{(n)}(t))$, $u \in H^n[a, b]$, où S: $H^n[a, b] \to C([a, b], R^n)$ est une application complètement continue.

Alors G est une application $(\alpha^{(n)}, \alpha)$-lipschitzienne avec la constante k.

(2.10) Considérons l'espace $E = C([0, 1], F)$, où F est une espace de Banach quelconque, et considérons les mesures de non compacité α_c ou χ_c (cf. ex. (1.2)). Soient f: $F \to E$ une application compacte et G: $[0, 1] \times [0, 1] \to R$ le noyau de Green, défini par

$$G(t, s) = \begin{cases} -s(1-t), & \text{si } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \\ -t(1-s), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Définissons l'application $\Phi\colon E \to E$ par

$$\Phi u(t) = \int_0^1 G(t, s)\tilde{f}(s, u(s))\, ds, \qquad u \in E,$$

où

$$\tilde{f}(s, x) = f(x)(s); \qquad (s, x) \in [0, 1] \times F.$$

Nous allons prouver que Φ est une application compacte. D'abord, notons que pour tout $t \in [0, 1]$ l'application $g_t\colon E \to F$

$$g_t(u) = \int_0^1 G(t, s) u(s)\, ds, \qquad u \in E,$$

est continue et que pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$\{\Phi u(t) \mid u \in C([0, 1], F)\} \subset g_t(f(F)),$$

alors la compacité de $\overline{f(F)}$ implique que $g_t(f(F))$ est rélativement compact. Il en décolue que $\alpha^*(\Phi(E)) = 0$ (cf. ex.(1.2)).

Il reste à prouver que $\omega_0(\Phi(E)) = 0$. Soit $|t - t'| < \varepsilon$. Pour tout $u \in E$, on a les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}\|\Phi u(t) - \Phi u(t')\| &\leqslant \int_0^1 \|G(t, s)\tilde{f}(s, u(s)) - G(t', s)\tilde{f}(s, u(s))\|\, ds \\ &\leqslant \int_0^1 |G(t, s) - G(t', s)|\, ds \cdot \sup \|\tilde{f}(t, s)\| \\ &\leqslant \text{Const}\cdot|t - t'| \leqslant \text{Const}\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Alors $\omega(\Phi(E), \varepsilon) \leqslant \text{Const}\cdot\varepsilon$ et par conséquent

$$\omega_0(\Phi(E)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\Phi(E), \varepsilon) = 0.$$

Supposons que $h\colon F \to F$ est une contraction avec la constante $k < 1$. Définissons l'application $H\colon E \to E$ par $Hu(t) = h(u(t))$, $u \in E$. H est aussi une contraction avec la constante k; en effet, soient $u, v \in E$, alors

$$\begin{aligned}\|Hu - Hv\| &= \sup\{\|h(u(t)) - h(v(t))\| \mid t \in [0, 1]\} \\ &\leqslant \sup\{k\cdot\|u(t) - v(t)\| \mid t \in [0, 1]\} = k\cdot\|u - v\|.\end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu que $\Phi + H\colon E \to E$ est une application de Darbo par rapport à α_c (ou χ_c).

(2.11) Soient $a > 0$, $t \in \boldsymbol{R}$ et $x \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^n)$. Définissons

$$x_t \in M_a = C([-a, 0], \boldsymbol{R}^n) \qquad \text{par} \qquad x_t(\tau) = x(t + \tau).$$

Considérons

$$E = \{x \in C^1(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^n) \mid \forall t \in \boldsymbol{R},\ x(t+1) = x(t)\},$$
$$F = \{y \in C(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}^n) \mid \forall t \in \boldsymbol{R},\ y(t+1) = y(t)\}$$

et soit L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ l'opérateur défini par $Lx = \dot{x}$, $x \in \boldsymbol{E}$, où $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ et $\dot{x}(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, $t \in \boldsymbol{R}$. Notons que L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet:

$$\mathrm{Ker}(L) = \{x \in \boldsymbol{E} \mid x \text{ est constante}\},$$

donc $\dim(\ker(L)) = n$ et

$$\mathrm{Im}(L) = \{y \in \boldsymbol{F} \mid \int_0^1 y(t)\, dt = 0\},$$

et par conséquent $\mathrm{Im}(L)$ est un sous-espace fermé et $\dim(\boldsymbol{F}/\mathrm{Im}(L)) = n$.

Soit P: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ la projection définie par $P(x) = x(0)$. P est une projection continue sur $\mathrm{Ker}(L)$. Considérons l'inclusion J: $\mathrm{Ker}(L) \to \boldsymbol{F}$. Alors $J \circ P \in \mathrm{CR}(L)$ parce que $L + J \circ P$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ est bijective.

Proposition. *Soit* g: $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{M}_a \times \boldsymbol{M}_a \to \boldsymbol{R}^n$ *une application uniformément continue sur les sous-ensembles bornès et supposons que*:

(7) *g est 1-périodique par rapport à la première variable, i.e.*

$g(1+t, u, v) = g(t, u, v)$ *pour tous* $t \in [0, 1]$, $u, v \in \boldsymbol{M}_a$;

(8) $\exists k \in [0, 1)\ \forall t \in \boldsymbol{R}\ \forall u, v_1, v_2 \in \boldsymbol{M}_a$

$$\|g(t, u, v_1) - g(t, u, v_2)\| \leqslant k\|v_1 - v_2\|_\infty.$$

Définissons l'application G: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ *par la formule*:

$$G(x)(t) = g(t, x_t, \dot{x}_t), \quad \text{où } x \in \boldsymbol{E}.$$

Alors G est une L-application de Darbo par rapport à la mesure $\omega_0^{(1)}$ *(et* $\alpha^{(1)}$*).*

Preuve. Montrons d'abord que $G|_{B(0,r)}$: $B(0, r) \to \boldsymbol{F}$ est uniformément continue pour tout $r \in \boldsymbol{R}_+$ et ainsi elle est bornée sur les sous-ensembles bornés. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Si $x \in B(0, r)$, alors $\|x_t\|$, $\|\dot{x}_t\| < r$. L'application g: $\boldsymbol{R} \times B_r \times B_r \to \boldsymbol{R}^n$, où $B_r = \{u \in \boldsymbol{M}_a \mid \|u\| < r\}$, est uniformément continue, donc $\exists \delta > 0\ \forall t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}\ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in B_r$, si

$$\max\{|t_1 - t_2|, \|u_1 - u_2\|, \|v_1 - v_2\|\} < \delta$$

alors

$$\|g(t_1, u_1, v_1) - g(t_2, u_2, v_2)\| < \varepsilon. \tag{9}$$

Soient, $x, y \in \boldsymbol{E}$ tel que $\|x - y\| < \delta$. Il est clair que $\|x_t - y_t\| < \delta$ et $\|\dot{x}_t - \dot{y}_t\| < \delta$, alors

$$\|G(x)-G(y)\|_\infty = \sup\{\|g(t, x_t, \dot{x}_t)-g(t, y_t, \dot{y}_t)\| \mid t\in[0, 1]\} \leqslant \varepsilon.$$

Montrons ensuite que G est L-application de Darbo. D'abord notons que:

$$(L+J\circ P)^{-1}y(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau+(1-t)\int_0^1 y(\tau)\,d\tau.$$

Soit $A\subset \boldsymbol{E}$ un ensemble borné. Pour chaque $x\in A$ définissons

$$\omega_1(x, \varepsilon) = \sup\{\|g(t, x_t, \dot{x}_t)-g(s, x_s, \dot{x}_t)\| \mid |t-s| < \varepsilon\};$$

$$\omega_2(x, \varepsilon) = \sup\{\|g(s, x_s, \dot{x}_t)-g(s, x_s, \dot{x}_s)\| \mid |t-s| < \varepsilon\};$$

$$\omega_1(A, \varepsilon) = \sup\{\omega_1(x, \varepsilon) \mid x\in A\},$$

$$\omega_2(A, \varepsilon) = \sup\{\omega_2(x, \varepsilon) \mid x\in A\}.$$

Soit $y=(L+J\circ P)^{-1}\circ G(x)$. On a

$$\begin{aligned}\|\dot{y}(t)-\dot{y}(s)\| &= \|g(t, x_t, \dot{x}_t)-g(s, x_s, \dot{x}_s)\|\\ &\leqslant \|g(t, x_t, \dot{x}_t)-g(s, x_s, \dot{x}_t)\|+\|g(s, x_s, \dot{x}_t)-g(s, x_s, \dot{x}_s)\|.\end{aligned}$$

Soit $B=(L+J\circ P)^{-1}\circ G(A)$, alors on a

$$\omega(B^{(1)}, \varepsilon) \leqslant \omega_1(A, \varepsilon)+\omega_2(A, \varepsilon) \leqslant \omega_1(A, \varepsilon)+k\cdot\omega(A^{(1)}, \varepsilon).$$

Comme A est relativement compact dans $\boldsymbol{F}$, alors d'après (9) on obtient que $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_1(A, \varepsilon) = 0$, et donc

$$\omega_0^{(1)}(B) = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega(B^{(1)}, \varepsilon) \leqslant k\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\omega(A^{(1)}, \varepsilon) \leqslant k\cdot\omega_0^{(1)}(A).$$

La démonstration dans le cas de la mesure $\alpha^{(1)}$ est analogue à celle de (2.4) pour le cas $\mu=\alpha$. ∎

§ 3. Applications aux équations différentielles ordinaires

(3.1) *Théorie de Bernstein pour l'équation* $y''=f(t, y, y', \beta(y''))$. Considérons la fonction continue g: $[0, 1]\times\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^l\to\boldsymbol{R}$ satisfaisant:

(A1) Il existe une constante $k\in(0, 1)$ telle que

$$|g(t, x, y, r)-g(t, x, y, s)| \leqslant k\cdot\|r-s\| \quad \text{pour tous } t\in[0, 1];\ x, y\in\boldsymbol{R};\ r, s\in\boldsymbol{R}^l.$$

(A2) Il existe une constante $M_0>0$ telle que

$$y\cdot g(t, y, 0, r)>0 \quad \text{pour tous } |y|\geqslant M_0;\ t\in[0,1];\ r\in\boldsymbol{R}^l.$$

(A3) Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que, pour tous $(t, y, p, r) \in [0, 1] \times [-M_0, M_0] \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^l$,

$$|g(t, y, p, r)| \leqslant A \cdot p^2 + B.$$

Soient β_i: $[0, 1] \to [0,1]$; $i = 1, \ldots, l$, des fonctions continues, et posons

$$\beta(y)(t) = \big(y(\beta_1(t)), \ldots y(\beta_l(t))\big), \quad \text{où } y \in C[0, 1],\ t \in [0, 1].$$

Nous allons étudier l'existence d'une solution y dans $C^2[0, 1]$ de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' = g\big(t, y, y', \beta(y'')\big), \quad t \in (0, 1)$$

satisfaisant l'une des conditions au bord suivantes;

(I) $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ (*condition de Dirichlet*);

(II) $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$ (*condition de Neumann*);

(III) $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$ (*condition périodique*);

Désignons par $\mathfrak{b}$ une des conditions (I), (II) ou (III) et notons

$$C^2_{\mathfrak{b}}[0, 1] = \{y \in C^2[0, 1] \mid y \in \mathfrak{b}\}.$$

Pour appliquer les résultats généraux, considérons le problème

$$\text{(H)} \qquad y'' = g\big(t, y, y', \beta(y'')\big), \quad y \in \mathfrak{b},$$

transformé en

$$(\mathrm{H}_\lambda) \qquad y'' - y = \lambda\big(g(t, y, y', \beta(y'') - y)\big), \quad y \in \mathfrak{b},\ \lambda \in [0, 1].$$

Soient $\boldsymbol{E} = C^2_{\mathfrak{b}}[0, 1]$, $\boldsymbol{E}_0 = C[0, 1]$ et L: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$ défini par $Lu = u'' - u$. Posons

$$G(u)(t) = g\big(t, u(t), u'(t), \beta(u'')(t)\big) - u(t); \quad u \in \boldsymbol{E};\ t \in [0, 1].$$

D'après (VI.2.7), l'application $F = L^{-1} \circ G$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est une application de Darbo. L'existence d'une solution de (H) est équivalente à l'existence d'un point fixe de F et le problème (H_λ) est équivalent à l'équation

$$u = \lambda F u, \quad u \in \boldsymbol{E},\ \lambda \in [0,1].$$

Considérons l'ensemble

$$\Sigma(F) = \{u \in \boldsymbol{E} \mid \exists\, 0 < \lambda < 1,\ u = \lambda F(u)\}.$$

D'après l'alternative de Leray–Schauder (III.1.5), si $\Sigma(F)$ est borné, alors F a un point fixe. Cela signifie que pour prouver l'existence d'une solution de (H) il suffit de trouver des bornes a priori sur les solutions de (H_λ).

(3.1) LEMME. *La condition* (A2) *implique que si y est une solution de l'équation* (H_λ) *pour un certain $\lambda \in [0, 1]$, alors $\|y\|_\infty < M_0$.*

Preuve. Si y est une solution de (H_λ), où $\lambda > 0$ et si y n'atteint pas son maximum en $t = 0$ ou $t = 1$, alors $|y|^2$ atteint un maximum positif en un point $t_0 \in (0, 1)$. Supposons que $|y(t_0)| > M_0$, nous aurons alors

$$\begin{aligned} 0 &\geqslant 2\cdot y(t_0)\cdot y''(t_0) \\ &= 2\lambda\cdot y(t_0)\cdot\left[g(t_0, y(t_0), 0, \beta(y'')(t_0)) - y(t_0)\right] + 2(y(t_0))^2 \\ &= 2\lambda\cdot y(t_0)\cdot g(t_0, y(t_0), 0, \beta(y'')(t_0)) + 2(1-\lambda)(y(t_0))^2 \\ &\geqslant 2\lambda\cdot y(t_0)\cdot g(t_0, y(t_0), 0, \beta(y'')(t_0)). \end{aligned}$$

Mais par l'hypothèse (A2)

$$2\cdot y(t_0)\cdot g(t_0, y(t_0), 0, \beta(y'')(t_0)) > 0,$$

d'où la contradiction.

Pour le problème de Dirichlet (I), si y atteint son maximum en $t = 0$ ou $t = 1$, alors $\|y\| = 0$. Soit donc y une solution de (H_λ) avec les conditions au bord (II) ou (III). Si y atteint son maximum en $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$, alors il suffit de montrer que $|y(t_0)| < M_0$. Supposons donc que y est une solution du problème (II) telle que $|y(0)|$ est la valeur maximale de $|y|$, et supposons par contradiction que $|y(0)| > M_0$. Nous avons

$$y(0)\cdot y''(0) = \lambda y(0)\cdot g(0, y(0), 0, \beta(y'')(0)) + (1-\lambda)(y(0))^2 > 0.$$

Si $y(0) > 0$ alors $y''(0) > 0$, i.e. $y'(t)$ est strictement croissante près de zéro, et donc $y(0) = |y(0)|$ n'est pas un maximum de $|y|$ sur $[0, 1]$, d'où la contradiction. Si $y(0) < 0$ nous obtenons la même contradiction et donc $|y(0)| \leqslant M_0$. Par le même argument nous prouvons que $|y(1)| \leqslant M_0$, et le lemme est donc prouvé pour la condition (II) (de Neumann).

Considérons maintenant la condition périodique (III). Si $y'(0) = y'(1) \neq 0$, alors y ne peut pas atteindre son maximum en t_0, où $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$ puisque $y(0) = y(1)$. Alors, si on suppose que y atteint son maximum pour $t_0 = 0$ ou $t_0 = 1$, on doit avoir $y'(0) = 0$, y satisfait donc les conditions (II), et par conséquent $|y(0)| = |y(1)| \leqslant M_0$. La preuve est complète. ■

(3.2) LEMME. *Les conditions* (A2) *et* (A3) *impliquent qu'il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour toute solution* y *de l'équation* (H_λ), $\lambda \in [0, 1]$, *on a*

$$\|y\|_\infty < M, \qquad \|y'\|_\infty < M, \qquad \|y''\|_\infty < M.$$

Preuve. Comme y' s'annule au moins une fois sur $[0, 1]$, alors chaque point $t \in [0, 1]$ pour lequel $y'(t) \neq 0$ appartient à un intervalle $[\mu, \nu]$ sur lequel y' ne change pas de signe et tel que $y'(\mu)$ et/ou $y'(\nu)$ est nul. Supposons que $y'(\mu) = 0$ et que $y' \geqslant 0$ sur $[\mu, \nu]$. Alors, par (A3),

$$\frac{d}{dt}(\log[A\cdot(y')^2 + B]) = \frac{2A\cdot y'\cdot y''}{A\cdot(y')^2 + B} \leqslant 2\cdot A\cdot y' \quad \text{sur } [\mu, \nu],$$

et en intégrant entre μ et t il vient

$$\log\frac{A\cdot(y'(t))^2+B}{B} \leqslant 4\cdot A\cdot M_0, \quad |y'(t)| \leqslant \left\{\frac{B}{A}(e^{4AM_0}-1)\right\}^{1/2} = M_1.$$

La possibilité $y'(v) = 0$ se traite de manière identique et la même borne M_1 est obtenue. D'après (A3),

$$\|y''\|_\infty \leqslant A\cdot(M_1)^2+B = M_2.$$

Alors il suffit de prendre $M = \max\{M_0, M_1, M_2\}$. ∎

(3.3) THÉORÈME. *Supposons que* g: $[0, 1]\times \boldsymbol{R}^2\times \boldsymbol{R}^l\to \boldsymbol{R}$ *satisfait les conditions* (A1), (A2) *et* (A3); *alors, le problème* (H) *a au moins une solution de classe* C^2.

Preuve. La preuve est immédiate d'après (3.2) et (III.1.5). ∎

(3.4) THÉORÈME. *Supposons que* g: $[0, 1]\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}^l\to \boldsymbol{R}$ *est une fonction continue telle que*:

(H1) *Il existe une constante* $k\in(0, 1)$ *telle que*

$$|g(t, x, y, r)-g(t, x, y, s)| \leqslant k\cdot\|r-s\| \quad \textit{pour tous } t\in[0, 1];\ x, y\in \boldsymbol{R},\ r, s\in \boldsymbol{R}^l.$$

(H2) *Il existe une constante* $M_0 > 0$ *telle que*

$$y\cdot g(t, y, 0, r) > 0 \quad \textit{pour tous } |y| \geqslant M_0,\ t\in[0, 1],\ r\in \boldsymbol{R}^l.$$

(H3) *Il existe une constante* $M_1 > 0$ *telle que*

$$\varrho = \inf\{|g(t, y, p, r)| \mid (t, y)\in[0, 1]\times[-M_0, M_0],\ |p| \geqslant M_1,\ r\in \boldsymbol{R}^l\} > 0$$

(H4) *La fonction* g *est bornée sur l'ensemble*

$$\{(t, y, p, r) \mid t\in[0, 1],\ y\in[-M_0, M_0],\ |p| \leqslant \max\{1, \varrho, M_1\},\ r\in \boldsymbol{R}^l\}.$$

Alors le problème homogène de Neumann

$$\text{(N)} \qquad \begin{aligned} y''(t) &= g(t, y(t), y'(t), \beta(y'')(t)),\\ y'(0) &= y'(1) = 0, \end{aligned}$$

admet une solution.

Preuve. Soit $\varepsilon = \varrho/(2(M_0+1))$, où $\varrho > 0$ est défini dans la condition (H3). Considérons la famille de problèmes

$$(\mathrm{N}_\lambda) \qquad \begin{aligned} y''-\varepsilon y &= \lambda[g(t, y, y', \beta(y''))-\varepsilon y]+(1-\lambda)\varphi(t, y, y', \beta(y''))y'^2,\\ y'(0) &= 0, \quad y'(1) = 0, \quad \lambda\in[0, 1]. \end{aligned}$$

où $\varphi(t, y, p, r)$ est une fonction continue bornée telle que

$$\varphi(t, y, p, r) = \operatorname{sign} g(t, y, p, r) \quad \text{pour } (t, y) \in [0, 1] \times [-M_0, M_0],$$
$$|p| \geqslant M_1 \quad \text{et } r \in \boldsymbol{R}^l.$$

Une telle fonction peut être construite de la façon suivante: d'après (H3) il existe $\delta > 0$ tel que

$$\inf\{|g(t, y, p, r)| \mid (t, y) \in [0, 1] \times [-M_0, M_0],\ |p| \geqslant M_1 - \delta,\ r \in \boldsymbol{R}^l\} > 0.$$

Soit ξ: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que $\xi(p) = 0$ si $|p| \geqslant M_1$ et $\xi(p) = 1$ si $|p| \leqslant M_1 - \delta$. Posons

$$\varphi(t, y, p, r) = (1 - \xi(p)) \cdot \operatorname{sign} g(t, y, p, r) + \xi(p) \cdot g(t, y, p, r).$$

Il est clair que $\varphi(t, y, p, r)$ est bornée (par (H4)) et que la condition suivante est satisfaite:

$$|\varphi(t, y, p, r) - \varphi(t, y, p, s)| \leqslant k \cdot \|r - s\|$$

pour tous $t \in [0, 1]$, y, $p \in \boldsymbol{R}$, $r, s \in \boldsymbol{R}^l$.

Notons que pour $\lambda = 0$, le problème (N_λ) satisfait les conditions (A1), (A2) et (A3); d'après le théorème (3.3) il existe au moins une solution de (N_0). Alors, pour prouver l'existence d'une solution de (N_1), qui est équivalent à (N), il faut établir des bornes a priori sur les solutions de (N_λ).

Supposons donc que y est une solution de l'équation

$$y'' = \lambda \cdot g(t, y, y', \beta(y'')) + (1 - \lambda)\varepsilon \cdot y + (1 - \lambda)\varphi(t, y, y', \beta(y''))y'^2.$$

Parce que

$$x[\lambda g(t, x, 0, r) + (1 - \lambda)\varepsilon \cdot x] = \lambda x g(t, x, 0, r) + (1 - \lambda)\varepsilon \cdot x^2 > 0$$

pour $|x| > M_0$, on obtient par (3.1) que $\|y\|_\infty \leqslant M_0$.

Soit $M_1' = \max\{1, M_1, \varrho\}$. Supposons que $\|y'\|_\infty > M_1'$. En vertu des conditions au bord, il existe $t_0 \in (0, 1)$ tel que $|y'(t_0)| = \max\{|y'(t)| \mid t \in [0, 1]\}$ et donc $y''(t_0) = 0$. On a donc que $|y'(t_0)| > M_1'$. Posons $y_0 = y(t_0)$, $y_0' = y'(t_0)$, $\beta_0 = \beta(y'')(t_0)$, $g_0 = g(t_0, y_0, y_0', \beta_0)$. On a donc

$$0 = y_0'' = \lambda g_0 + (1 - \lambda)[\varepsilon y_0 + \varphi(t_0, y_0, y_0', \beta_0)y_0'^2].$$

On a que $\varphi(t_0, y_0, y_0', \beta_0) = \operatorname{sign} g_0$. On multiplie cette équation par sign g_0 et on obtient

$$(\operatorname{sign} g_0)(1 - \lambda) \cdot \varepsilon y_0 = \lambda |g_0| + (1 - \lambda)y_0'^2.$$

Puisque

$$\varepsilon|y_0| \leqslant [\varrho/(2(M_0 + 1))] \cdot M_0 < \tfrac{1}{2}\varrho, \qquad |g_0| \geqslant \varrho,\ y_0' \geqslant M_1'^2 \geqslant M_1' \geqslant \varrho,$$

on obtient que

$$\tfrac{1}{2}\varrho \geqslant \tfrac{1}{2}(1-\lambda)\varrho \geqslant \lambda\varrho+(1-\lambda)\varrho = \varrho$$

ce qui est une contradiction. Alors $\|y'\|_\infty \leqslant M'_1$ pour chaque solution $y(t)$ de (N_λ). La condition (H4) donne la borne a priori sur $\|y''\|_\infty$. ■

(3.5) COROLLAIRE. *Soient* α, γ: $[0, 1]\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}$ *deux fonctions continues telles que les conditions suivantes sont vérifiées:*

(i) $\alpha(t, y, 0, r) > 0$;

(ii) $|\gamma(t, y, p, r)| \to \infty$ *et* $\alpha(t, y, p, r)/\gamma(t, y, p, r) \to 0$ *quand* $|p| \to \infty$, *presque-uniformément par rapport à* $(t, y) \in [0, 1]\times \boldsymbol{R}$ *et uniformément par rapport à* $r \in \boldsymbol{R}^l$;

(iii) *Il existe une constante* $M > 0$ *telle que*

$$\frac{\gamma(t, y, 0, r)}{y\cdot\alpha(t, y, 0, r)} < 1 \qquad \text{pour } |y| > M \text{ et } r \in \boldsymbol{R}^l;$$

(iv) *La fonction* $g(t, y, p, r) = y\cdot\alpha(t, y, p, r)-\gamma(t, y, p, r)$ *vérifie la condition* (H1);

(v) *Pour chaque* $R > 0$ *la fonction* g *est bornée sur l'ensemble*: $|y| < M$, $|p| < R$, $t \in [0, 1]$, $r \in \boldsymbol{R}^l$.

Alors, le problème homogène de Neumann

$$y'' = y\cdot\alpha(t, y, y', \beta(y''))-t(t, y, y', \beta(y'')),$$
$$y'(0) = y'(1) = 0.$$

admet une solution.

(3.2) *Résolution de l'équation* $y'' = g(t, y'')+f(t, y, y')+h(t)$ *dans* $H^1_0[0, 1]$. Considérons une fonction continue g: $[0, 1]\times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ satisfaisant pour un certain $k > 0$ la condition

(B1) $|g(t, x)-g(t, y)| \leqslant k\cdot|x-y|$ pour tous $t \in [0, 1]$; $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Soit f: $[0,1]\times \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue telle qu'il existe des constantes $\gamma, \delta > 0$ et $\beta \in L^2[0, 1]$ satisfaisant les conditions

(B2) $|f(t, s, r)| \leqslant \beta(t)+\gamma|s|+\delta|r|$ pour tous $t \in [0, 1]$, $s, r \in \boldsymbol{R}$,

(B3) $k+\dfrac{\gamma}{\pi}+\dfrac{2\delta}{\pi} < 1$.

Nous allons étudier le problème aux limites suivant

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} y'' &= g(t, y'')+f(t, y, y')+h(t),\\ y(0) &= y(1) = 0, \end{aligned}$$

où $h \in L^2[0, 1]$ est une fonction quelconque.

Considérons $\boldsymbol{E} = H^2[0, 1] \cap H_0^1[0, 1]$, $\boldsymbol{E}_0 = L^2[0, 1]$, et définissons les applications

$$
\begin{aligned}
&L\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0, \quad && Lu = u'';\\
&G\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0, \quad && G(u)(t) = g\big(t, u''(t)\big);\\
&F\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0, \quad && F(u)(t) = f\big(t, u(t), u'(t)\big),
\end{aligned}
$$

où $u \in \boldsymbol{E}$ et $t \in [0, 1]$.

Une vérification simple et directe montre que l'opérateur $L\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}_0$ est un isomorphisme. D'après (V.1.4) et (V.2.9) on obtient que l'application $L^{-1} \circ G\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est de Darbo par rapport à la mesure de non compacité $\alpha^{(2)}$. Il est facile de vérifier que $L^{-1} \circ F$ est complètement continue*). Définissons $T\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ par

$$T(u) = L^{-1}\big(G(u) + F(u)\big), \qquad u \in \boldsymbol{E}.$$

T est une application de Darbo et le problème (D) est équivalent à l'équation

$$u = T(u) + L^{-1}(u), \qquad u \in \boldsymbol{E}.$$

Nous allons montrer que les hypothèses (B1), (B2) et (B3) impliquent que l'application $T\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ est quasi-bornée avec $|T| < 1$.

Supposons que $u, u' \in L^2[0, 1]$. On a les inégalités suivantes, connues sous le nom *d'inégalités de Wirtinger* (c.f. Hardy, Littlewood, Polya [1]):

(1) $$\|u\|_2 \leqslant \frac{1}{\pi}\|u'\|_2 \quad \text{pour } u \in \boldsymbol{E},$$

(2) $$\|u\|_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\|u'\|_2 \quad \text{pour } u,\ u' \in L^2[0, 1] \text{ et } u \text{ tel que}$$

$$u(t_0) = 0 \text{ pour un certain } t_0 \in [0, 1].$$

Nous allons utiliser ces inégalités pour estimer la norme de l'opérateur $L^{-1}\colon \boldsymbol{E}_0 \to \boldsymbol{E}$. Si $L^{-1}v = u$, i.e. $u'' = v$, on a les inégalités suivantes

(3) $$\|u'\|_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\|u''\|_2,$$

(4) $$\|u\|_2 \leqslant \frac{2}{\pi^2}\|u''\|_2 \quad \text{pour tout } u \in \boldsymbol{E}.$$

---

*) F se décompose de la façon suivante: $\boldsymbol{E} \xrightarrow{a} C[0, 1] \times C[0, 1] \xrightarrow{F} C[0, 1] \subset \boldsymbol{E}_0$, $a(u) = (u, u')$, $F(u, v)(t) = f\big(t, u(t), v(t)\big)$, où a est complètement continue et F est continue.

Par conséquent

$$\|u\|_{2,2} \leqslant \max\{\|u\|_2, \|u'\|_2, \|u''\|_2\} \leqslant \max\left\{\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi^2}, 1\right\}\cdot\|u''\|_2 \leqslant \|u''\|_2,$$

alors

$$\|L^{-1}v\|_{2,2} \leqslant \|v\|_2.$$

Ensuite, montrons que

$$|T| \leqslant \inf_{\varrho>0} \sup\left\{\frac{\|T(u)\|_{2,2}}{\|u\|_{2,2}} \mid \|u\|_{2,2} \geqslant \varrho\right\} < 1.$$

En effet, étant donné $u \in \boldsymbol{E}$, on a

$$\|T(u)\|_{2,2} \leqslant \|G(u)+F(u)\|_2 \leqslant \|G(0)\|_2 + \|G(u)-G(0)\|_2 + \|F(u)\|_2.$$

Mais $\|G(u)-G(0)\|_2 \leqslant k\cdot\|u''\|_2$ et par l'hypothèse (B2) on obtient que

$$\|F(u)\|_2 \leqslant \|\beta\|_2 + \gamma\cdot\|u\|_2 + \delta\cdot\|u'\|_2.$$

D'après (3) et (4) on obtient que

$$\|u\|_2 \leqslant \max\left\{\frac{1}{\pi}\|u'\|_2, \frac{2}{\pi^2}\|u''\|_2\right\} = \frac{1}{\pi}\max\left\{\|u'\|_2, \frac{2}{\pi}\|u''\|_2\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\max\{\|u'\|_2, \|u''\|_2\} \leqslant \frac{1}{\pi}\|u\|_{2,2}$$

et

$$\|u'\|_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\|u''\| \leqslant \frac{2}{\pi}\|u\|_{2,2},$$

ce qui implique

$$\|F(u)\|_2 \leqslant \|\beta\|_2 + \frac{\gamma}{\pi}\|u\|_{2,2} + \frac{2\delta}{\pi}\|u\|_{2,2}.$$

Alors

$$|T| \leqslant \inf_{\varrho>0}\left[\frac{\|G(0)\|_2+\|\beta\|_2}{2\varrho}\right] + k + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{2\delta}{\pi} = k + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{2\delta}{\pi} < 1.$$

D'après (III.1.6) il existe au moins une solution de l'équation (D). Ainsi on a prouvé

(3.6) THÉORÈME. *Soit g: $[0, 1] \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue satisfaisant la condition* (B1) *et soit f : $[0, 1] \times \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ une fonction continue satisfaisant* (B2) *et* (B3).

Alors le problème

$$y'' = g(t, y'') + f(t, y, y') + h(t),$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

a au moins une solution dans $H_0^1[0, 1]$ *pour tout* $h \in L^2[0, 1]$.

Appendices

Dans l'appendice A1 on présente, comme un complèment à la théorie de la transversalité topologique, certains aspects de la théorie du degré topologique.

Dans l'appendice A2 on généralise un résultat de K. Gęba (Gęba [1]) et on montre que la structure homotopique de l'ensemble $GL_{\mathscr{C}}(E)$ — des isomorphismes de la forme $I+T$, où T est un opérateur condensant, est équivalente avec $\lim_{n\to\infty} GL(n, \boldsymbol{R})$.

A1. Théorie du degré topologique

Nous présentons dans cet appendice les relations entre la théorie du degré topologique et la théorie de la transversalité topologique. Nous conservons la notation du Chapitre II et nous supposons que $C = \boldsymbol{E}$.

Soit ω la classe des sous-ensembles ouverts bornés dans $\boldsymbol{E}$. Supposons donnée une famille de fonctions non-constantes à valeurs entières: $\{d_\Omega\colon \mathscr{K}[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \to \boldsymbol{Z} \mid \Omega \in \omega\}$. Etant donné un champ compact $f = I - F\colon \Omega \to \boldsymbol{E}$, où $F \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$, définissons $D(f, \Omega) = d_\Omega([F])$.

La fonction $D(\cdot, \Omega)$ est dite *le degré* sur Ω si la condition suivante est vérifiée:

(D) (*propriété d'additivité*) Pour tous $\Omega_1, \Omega_2, \Omega \in \omega$ tels que $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et pour tout $F \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}, \overline{\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)})$, on a

$$D(I-F, \Omega) = D(I-F, \Omega_1) + D(I-F, \Omega_2).$$

(1.1) THÉORÈME. *Le degré D a les propriétés suivantes:*

(1) (propriété d'excision) *Si* $F \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}, \overline{\Omega \setminus \Omega_1})$, *où* $\Omega_1 \subset \Omega$ *est un ouvert, alors*

$$D(I-F, \Omega_1) = D(I-F, \Omega).$$

(2) (propriété d'existence de point fixe) *Soit* $\Omega \neq \emptyset$. *Si* $F \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ *et* $D(I-F, \Omega) \neq 0$, *alors* $0 \in (I-F)(\Omega)$, *i.e. il existe* $x_0 \in \Omega$ *tel que* $x_0 = F(x_0)$.

(3) (dépendance des valeurs sur le bord) *Si* F, $G \in \mathscr{K}(\Omega, \partial\Omega)$ *sont telles que* $F(x) = G(x)$ *pour tout* $x \in \partial\Omega$, *alors* $D(I-F, \Omega) = D(I-G, \Omega)$.

Preuve. (1) découle directement de (D) appliqué à $\Omega_2 = \emptyset$.

(2) Supposons que F n'a pas de point fixe et soit $\Omega_1 \neq \emptyset$ un sous-ensemble ouvert de Ω avec $\Omega_2 = \mathrm{Int}(\Omega \backslash \Omega_1) \neq \emptyset$. Alors, d'après (D) et (1)

$$D(I-F, \Omega) = D(I-F, \Omega_1) + D(I-F, \Omega_2) = 2D(I-F, \Omega)$$

et par conséquent $D(I-F, \Omega) = 0$.

(3) est immédiat par la propriété de Leray–Schauder de la classe $\mathscr{K}$. ∎

(1.2) Remarque. Notons que le degré D peut être défini de la même manière pour classe $\mathscr{A}$ considérée dans le Chapitre II, section 1. On montre de la façon similaire que les propriétés (1), (2), (3) de (1.1) sont satisfaites.

D'après le Théorème de bijection on a les bijections suivantes:

$$\mathscr{K}[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \xrightarrow{\cong} \mathscr{D}[\bar{\Omega}, \partial\Omega) \xrightarrow{\cong} \mathscr{C}[\bar{\Omega}, \partial\Omega].$$

Il en résulte que le degré défini pour la classe $\mathscr{K}[\bar{\Omega}, \partial\Omega]$, $\Omega \in \omega$, détermine d'une façon unique le degré pour les classes $\mathscr{D}[\bar{\Omega}, \partial\Omega]$ et $\mathscr{C}[\bar{\Omega}, \partial\Omega]$. D'autre part, la valeur $D(I, \Omega)$ pour un certain $\Omega \in \omega$ tel que $0 \in \Omega$, détermine d'une façon unique le degré pour toute la classe $\mathscr{K}$ (cf. Lloyd [1]).

Si $D(I, \Omega) = 1$ pour un certain Ω, où $0 \in \Omega$, alors par (1), $D(I, \Omega) = 1$ pour tout $\Omega \in \omega$ tel que $0 \in \Omega$, et ce degré est dit *le degré de Leray–Schauder*.

(1.3) Théorème. *Soient D le degré de Leray–Schauder et $F \in \mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$. Alors*

$$(*) \qquad F \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(\bar{\Omega}, \partial\Omega) \iff D(I-F, \Omega) \neq 0.$$

Preuve. La preuve est une conséquence du théorème de bijection et de la propriété analogue à (*) pour la classe $\mathscr{K}$ (cf. Krasnoselskii, Zabrejko [1].) ∎

Supposons que D est le degré de Leray–Schauder. *La propriété du produit* est une propriété très importante et non triviale, qui ne découle pas des propriétés des applications essentielles.

Supposons que E_1, $E_2 \subset E$ sont deux sous-espaces fermés tels que $E = E_1 \oplus E_2$ et soient $\Omega_1 \subset E_1$, $\Omega_2 \subset E_2$ deux ouverts bornés dans ces sous-espaces. Supposons aussi que $F_1\colon \bar{\Omega}_1 \to E_1$ et $F_2\colon \bar{\Omega}_2 \to E_2$ sont des éléments de $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ et $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_2, \partial\Omega_2)$ respectivement, où $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_i, \partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$ est considérée pour le convexe $C_i = E_i$, $i = 1, 2$. Définissons l'application

$$F\colon \bar{\Omega} \to E, \quad \text{où } \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

par

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1), F_2(x_2)) \in E_1 \oplus E_2 = E.$$

Il est clair que $F \in \mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$. Avec ces hypothèses on a:

(1.4) Théorème (propriété du produit).

$$D(I-F, \Omega) = D(I-F_1, \Omega_1) \cdot D(I-F_2, \Omega_2).$$

Preuve. La preuve décolue de la propriété analogue pour la classe $\mathscr{K}$ (c.f. Krasnoselskii, Zabrejko [1]). ∎

(1.5) Corollaire.

$$F \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(\bar{\Omega}, \partial\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad F_i \in \mathrm{Ess}_{\mathscr{C}}(\bar{\Omega}_i, \partial\Omega_i) \quad pour\ i = 1, 2.$$

La propriété du produit implique le théorème suivant:

(1.6) Théorème. *Supposons que E est un espace de Hilbert. Soient $E_1 \subset E$ un sous-espace fermé, $E_2 = (E_1)^{\perp}$, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, où $\Omega_2 \subset E_2$ est un sous-ensemble ouvert, borné et convexe et Ω_1 est un voisinage ouvert et borné de 0 dans E_1. Supposons que $F \in \mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ est une application telle que $F(\bar{\Omega}) \subset E_1$.*

Alors F est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ si et seulement si $F|_{\Omega_1}$: $\bar{\Omega}_1 \to E_1$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ (où $C = E$).

Preuve. Soit $P \in \mathscr{P}r(E)$ une projection orthogonale sur E_1, i.e. $P(E) = E_1$ et $\mathrm{Ker}(P) = E_2$. Supposons d'abord que $F \in \mathscr{K}$. Définissons l'homotopie

$$H(x, t) = F(Px + t(I-P)x), \qquad x \in \bar{\Omega},\ t \in [0, 1],$$

Parce que Ω_2 est convexe, alors $Px + t(I-P)x \in \bar{\Omega}$ pour tout $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, 1]$. Donc H est bien définie. Il est clair que H est une application compacte. De plus, si $x \in \partial\Omega$, alors $H(x, t) \neq x$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il en découle que H est une homotopie dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$, $H_1 \equiv F$ et $H_0 \equiv F_0$, où $F_0(x) = F(Px)$, $x \in \bar{\Omega}$. Il est clair que

$$F_0(x_1, x_2) = (F(x_1), 0), \qquad \text{oú} \qquad (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_1 \times \bar{\Omega}_2.$$

Alors, d'après (1,5), F est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ si et seulemet si $F_1 = F|_{\bar{\Omega}_1}$ est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ (pour $C = E_1$).

Considérons le cas général: $F \in \mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$. En répétant la construction de la démonstration de (II.3.1), on montre qu'il existe une homotopie H dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ entre F et $\tilde{F} \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ telle que $H(\bar{\Omega}) \subset E_1$. Alors,

$$H^* \equiv H|_{\bar{\Omega}_1 \times [0,1]}: \bar{\Omega}_1 \times [0, 1] \to E_1$$

est une homotopie dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ entre $F|_{\bar{\Omega}_1}$ et $\tilde{F}|_{\bar{\Omega}_1} \in \mathscr{K}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$. Par la propriété de Leray–Schauder de la classe $\mathscr{C}$ et par (II.3.2), $F|_{\bar{\Omega}_1}$ est essentielle dans $\mathscr{C}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ si et seulement si $F|_{\bar{\Omega}_1}$ est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$. Or, on a déjà montré que $\tilde{F}$ est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$ si et seulement si $F|_{\bar{\Omega}_1}$ est essentielle dans $\mathscr{K}(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega_1)$. La conclusion découle de la propriété de Leray -Schauder de $\mathscr{C}$ et de (II.3.2). ■

Supposons que L: $\mathrm{Dom}(L) \to \boldsymbol{F}$; $\mathrm{Dom}(L) \subset \boldsymbol{E}$, est un opérateur généralisé de Fredholm d'indice zéro. Rappelons que nous avons la connection:

$$\Theta_T(F) = R_T \circ (F+T) \qquad \text{pour } F \in \mathscr{A}_L(X, A),$$

où $\mathscr{A}_L$ dénote une des classes $\mathscr{K}_L$, $\mathscr{D}_L$ ou $\mathscr{C}_L$, et $T \in \mathrm{FR}(L)$.

Nous avons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{K}_L[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \arrow[r] \arrow[d, "\Theta_T^*"] & \mathscr{D}_L[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \arrow[r] \arrow[d, "\Theta_T^*"] & \mathscr{C}_L[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \arrow[d, "\Theta_T^*"] \\
\mathscr{K}[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \arrow[r] & \mathscr{D}[\bar{\Omega}, \partial\Omega] \arrow[r] & \mathscr{C}[\bar{\Omega}, \partial\Omega]
\end{tikzcd}$$

Définissons *le degré de coïncidence*:

$$D_L(L-F, \Omega) = d_\Omega([\Theta_T(F)]) = D(I-\Theta_T(F), \Omega), \qquad \text{pour } F \in \mathscr{A}_L(\Omega, \partial\Omega).$$

Cette définition dépend du choix de l'opérateur T (au signe près), mais la propriété analogue à (D) est satisfaite:

(D_L) (propriété d'additivité) Pour tous $\Omega_1, \Omega_2, \Omega \in \omega$ tels que $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, et pour tout $F \in \mathscr{A}_L(\bar{\Omega}, \overline{\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)})$, on a

$$D_L(L-F, \Omega) = D_L(L-F, \Omega_1) + D_L(L-F, \Omega_2).$$

(1.7) THÉORÈME. *Le degré D_L a les propriétés suivantes*:

(1) (propriété d'excision) *Si $F \in \mathscr{A}_L(\bar{\Omega}_1, \overline{\Omega \backslash \Omega_1})$, où $\Omega_1 \subset \Omega$ est un ouvert, alors* $D_L(L-F, \Omega_1) = D_L(L-F, \Omega)$;

(2) (propriété d'existence de point de coïncidence) *Soit $\Omega \neq \emptyset$, Si $F \in \mathscr{A}_L(\bar{\Omega}_1, \partial\Omega)$, et $D_L(L-F, \Omega) \neq 0$, alors $0 \in (L-F)(\Omega)$, i.e. il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $Lx_0 = F(x_0)$*;

(3) (dépendence des valeurs sur le bord) *Si $F, G \in \mathscr{A}_L(\bar{\Omega}, \partial\Omega)$ sont telles que $F(x) = G(x)$, où $x \in \partial\Omega$, alors $D_L(L-F, \Omega) = D_L(L-G, \Omega)$.*

A2. Propriétés homotopiques de l'ensemble $\mathrm{GL}_{\mathscr{C}}(E)$

Rappelons que $\mathscr{K}(\boldsymbol{E})$ dénote l'espace des opérateurs linéaires complètement continus de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{E}$. Dans la suite nous notons $\mathscr{C}(\boldsymbol{E})$ (respectivement $\mathscr{D}(\boldsymbol{E})$) l'espace des opérateurs linéaires condensants (respectivement de Darbo). Par $\mathscr{F}(\boldsymbol{E})$ nou dénotons l'espace des opérateurs de rang fini.

(2.1) DÉFINITION. On dit que $\mathscr{P} \subset L(\boldsymbol{E})$ est *une classe de perturbations* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $\mathscr{F}(E)+\mathscr{P} \subset \mathscr{P}$;
(ii) Si $A \in \mathscr{P}$ alors $t \cdot A \in \mathscr{P}$ pour tout $t \in [0, 1]$;
(iii) Si $A \in \mathscr{P}$ alors $I+A \in \Phi_0(E)$.

(2.1) PROPOSITION. *Les sous-ensembles $\mathscr{F}(E)$, $\mathscr{K}(E)$, $\mathscr{D}(E)$ et $\mathscr{C}(E)$ sont des classes de perturbations.*

Preuve. La preuve découle de (I.3.1) et de (III.2.8).

Supposons que $\mathscr{P}$ est une classe de perturbations. Dénotons par $L_{\mathscr{P}}(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$, des opérateurs de la forme $I+T$, où $T \in \mathscr{P}$. Posons

$$\mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E) = \mathrm{GL}(E) \cap L_{\mathscr{P}}(E).$$

Dans le cas $\mathscr{P} = \mathscr{K}$, $\mathrm{GL}_{\mathscr{K}}(E)$ est exactement le groupe $\mathrm{GL}_c(E)$ défini dans le Chapitre I. On a aussi les inclusions suivantes:

$$\mathrm{GL}_{\mathscr{F}}(E) \subset \mathrm{GL}_c(E) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{D}}(E) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{C}}(E).$$

Nous allons montrer que tous ces espaces sont homotopiquement équivalents.

(2.2) LEMME. *Soient (C, C_1) un couple compact et $a\colon C \to L_{\mathscr{P}}(E)$ une application continue telle que $a|_{C_1} : C_1 \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$.*

Alors, il existe un sous-espace fermé E^0 de E et une application continue $p\colon C \to \mathscr{P}r(E)$ tels que:
(i) *E^0 est de codimension finie;*
(ii) *$E^0 \cap \operatorname{Ker} a(\lambda) = \{0\}$ pour tout $\lambda \in C$;*
(iii) *$p(\lambda)E = a(\lambda)E^0$ pour tout $\lambda \in C$;*
(iv) *$p(\lambda) = a(\lambda) \circ Q \circ a(\lambda)^{-1}$ pour tout $\lambda \in C_1$, où Q est une projection sur E^0;*
(v) *L'ensemble $\xi(C) = \{(v, \lambda) \in E \times C \mid v \in \operatorname{Ker} p(\lambda)\}$ est muni d'une structure naturelle de fibré vectoriel sur C.*

Preuve. Pour chaque $\lambda_0 \in C$, $\operatorname{Ker} a(\lambda_0)$ est un sous-espace fermé de dimension finie. Alors, il existe une décomposition

$$E = E(\lambda_0) \oplus \operatorname{Ker}\ a(\lambda_0),$$

où $E(\lambda_0)$ est fermé dans E. Considérons l'application $a_0\colon C \to L(E(\lambda_0), E)$ définie par

$$a_0(\lambda) = a(\lambda)|_{E(\lambda_0)}\colon E(\lambda_0) \to E.$$

Evidemment, $a_0(\lambda)$ est une application injective à l'image fermé. Puisque $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-ensemble ouvert de $L(E)$, alors il existe un voisinage ouvert V_{λ_0} de $\lambda_0 \in C$, tel que $E(\lambda_0) \cap \operatorname{Ker}\ a(\lambda) = \{0\}$ pour chaque $\lambda \in V_{\lambda_0}$. L'ensemble C est compact, alors par un raisonnement analogue, il existe un recouvrement ouvert et fini $\{V_{\lambda_i}\}_{i=1}^m$ de l'ensemble C, tel que $\lambda_i = V_{\lambda_i}$, et il existe aussi une suite finie de sous-espaces $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_m)$ fermés et de codimension finie, telle que

$E = E(\lambda_1) \oplus \operatorname{Ker} a(\lambda_i)$ et pour tout $\lambda \in V_{\lambda_i}$, $E(\lambda_i) \cap \operatorname{Ker} a(\lambda) = \{0\}$, $i = 1, \ldots, m$. Posons $E^0 = \bigcap_{i=1}^{m} E(\lambda_i)$. Il est clair que $E^0 \cap \operatorname{Ker} a(\lambda) = \{0\}$ pour tout $\lambda \in C$. Le sous-espace E^0 est fermé dans E et il est de codimension finie.

Notons que $a(\lambda_i)E(\lambda_i)$ est un sous-espace fermé et de codimension finie, alors il existe un sous-espace de dimension finie $L(\lambda_i) \subset E$, tel que $E = a(\lambda_i)E(\lambda_i) \oplus L(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Puisque $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dans $L(E)$ et que l'application a est continue, alors, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que pour chaque $\lambda \in V_{\lambda_i}$ on a la décomposition directe suivante:

$$E = a(\lambda)E(\lambda_i) \oplus L(\lambda_i).$$

Définissons les applications c_i: $V_{\lambda_i} \to L_{\mathscr{P}}(E)$; $i = 1, \ldots, m$, par $c_i(\lambda) = a(\lambda)|_{E(\lambda_i)} \oplus A_i$, $\lambda \in V_{\lambda_i}$, où A_i: $\operatorname{Ker} a(\lambda_i) \to L(\lambda_i)$ est un isomorphisme arbitraire. Il est évident que $c_i(\lambda) \in \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$ pour tout $\lambda \in V_{\lambda_i}$ et que c_i est une application continue. Soient P_i, $Q \in \mathscr{P}r(E)$; $i = 1, \ldots, m$, des projections telle que $P_i(E) = E(\lambda_i)$, $(I - P_i)(E) = \operatorname{Ker} a(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$ et $Q(E) = E^0$. Puisque $E^0 \subset E(\lambda_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, il est clair que $Q \circ P_i \in \mathscr{P}r(E)$. Ensuite définissons p_i: $V_{\lambda_i} \to \mathscr{P}r(E)$; $i = 1, \ldots, m$, par $p_i(\lambda) = c(\lambda) \circ Q \circ P_i \circ c(\lambda)^{-1}$. L'application p_i est bien définie, parce que

$$\begin{aligned} p_i(\lambda) \circ p_i(\lambda) &= [c(\lambda) \circ QP_i \circ c(\lambda)^{-1}] \circ [c(\lambda) \circ QP \circ c(\lambda)^{-1}] \\ &= c(\lambda) \circ QP_i \circ c(\lambda)^{-1} \circ c(\lambda) \circ QP \circ c(\lambda)^{-1} \\ &= c(\lambda) \circ QP \circ QP \circ c(\lambda)^{-1} \\ &= c(\lambda) \circ QP_i \circ c(\lambda)^{-1} = p_i(\lambda). \end{aligned}$$

On a aussi que

$$\begin{aligned} p_i(\lambda)E &= [c(\lambda) \circ QP_i \circ c(\lambda)^{-1}](E) \\ &= [c(\lambda) \circ QP_i](E(\lambda_i) \oplus \operatorname{Ker} a(\lambda_i)) \\ &= [c(\lambda) \circ Q](E(\lambda_i)) \\ &= a(\lambda)E^0. \end{aligned}$$

Soit $\{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, m$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{V_{\lambda_i}\}$. Posons

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i(\lambda)) p_i(\lambda).$$

Notons que pour tout $\lambda \in C$, $p(\lambda) \in \mathscr{P}r(E)$. En effet, si $\lambda \in V_{\lambda_{i_1}} \cap \ldots \cap V_{\lambda_{i_k}}$, alors

$$p_{i_1}(\lambda)E = \ldots = p_{i_k}(\lambda)E = a(\lambda)E^0,$$

et ainsi

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i(\lambda))p_i(\lambda)$$

est une projection continue sur $a(\lambda)E^0$. Il reste à prouver que l'ensemble $\xi(C)$ est muni d'une structure naturelle de fibré vectoriel sur C. Soit $\lambda \in V_{\lambda_i}$. Notons que

$$\varphi_i(\lambda) = (I - p_i(\lambda))|_{L(\lambda_i)}: L(\lambda_i) \to E$$

est une application injective, et que

$$\mathrm{Im}(\varphi_i(\lambda)) = \mathrm{Ker}\ p_i(\lambda).$$

Alors, on peut considérer $\Phi_i: \xi(V_{\lambda_i}) \to L(\lambda_i) \times V_{\lambda_i}$, définie par $\Phi_i(v, \lambda) = (\varphi_i(\lambda)v, \lambda)$, comme une trivialisation de ξ au-dessus de V_{λ_i}. ■

(2.3) LEMME. *Soient C un compact et a: $C \times [0, 1] \to L_{\mathscr{P}}(E)$ une application continue, telle que $a|_{C \times \{1\}}$: $C \times \{1\} \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$.*

Alors il existe un sous-espace fermé et de codimension finie $E^0 \subset E$ tel que $E^0 \cap \mathrm{Ker}\ a(\lambda, t) = \{0\}$ pour tout $(\lambda, t) \in C \times [0, 1]$, et il existe une application continue b: $C \times [0, 1] \to GL_{\mathscr{P}}(E)$ telle que

(i) $b(\lambda, t)|_{E^0} = a(\lambda, t)|_{E^0}$ *pour tout* $(\lambda, t) \in C \times [0, 1]$;

(ii) $b|_{C \times \{1\}} = a|_{C \times \{1\}}$.

Preuve. D'après (2.2), il existe on sous-espace fermé E^0, de codimension finie, et il existe une application p: $C \times [0, 1] \to \mathscr{P}r(E)$, telle que $p(\lambda, t)E = a(\lambda, t)E^0$ pour tout $(\lambda, t) \in C \times [0, 1]$, et $p(\lambda, t) = a(\lambda, t) \circ Q \circ a(\lambda, t)^{-1}$ pour tout $(\lambda, t) \in C \times \{1\}$. Considérons le fibré vectoriel

$$\xi(C \times [0, 1]) = \{(v, \lambda, t) \in E \times C \times [0, 1] \mid v \in \mathrm{Ker}\ p(\lambda, t)\}.$$

Notons que le fibré vectoriel $\xi(C \times \{1\})$ sur $C \times \{1\}$ est trivial. En effet, posons $L_0 = (I - Q)E$, on a

$$\begin{aligned} a(\lambda, t)L_0 &= a(\lambda, t)(I - Q)E \\ &= a(\lambda, t)(I - Q)a(\lambda, t)^{-1}E \\ &= [I - a(\lambda, t) \circ Q \circ a(\lambda, t)^{-1}]E \\ &= (I - p(\lambda))E \\ &= \mathrm{Ker}\ p(\lambda) \quad \text{pour tout } (\lambda, t) \in C \times \{1\}, \end{aligned}$$

alors on peut définir la trivialisation

$$\Psi: \xi(C \times \{1\}) \to L_0 \times (C \times \{1\})$$

de ξ au-dessus de $C \times \{1\}$ par la formule

$$\Psi(v, \lambda, t) = (a(\lambda, t)^{-1}v, (\lambda, t)); \quad \text{où } v \in \mathrm{Ker}\ p(\lambda, t) \text{ et } (\lambda, t) \in C \times \{1\}.$$

Considérons le diagramme suivant de fibrés vectoriels

$$\begin{tikzcd}
\xi(C\times[0,1]) \arrow[d, "\pi"] & i^*(\xi) \arrow[l] \arrow[d, "\pi"] & \varrho^* i^*(\xi) \arrow[l] \arrow[d, "\pi"] \\
C\times[0,1] & C\times\{1\} \arrow[l, "i"'] & C\times[0,1] \arrow[l, "\varrho"']
\end{tikzcd}$$

où i: $C\times\{1\}\to C\times[0,1]$ est l'inclusion et ϱ: $C\times[0,1]\to C\times\{1\}$ est la projection naturelle.

Il est évident que le fibré $i^*(\xi)$ est isomorphe à $\xi(C\times\{1\})$, donc $i^*(\xi)$ est un fibré vectoriel trivial. Il s'ensuit que le fibré $\varrho^* i^*(\xi)$ est également trivial.

D'autre part, l'application $i\circ\varrho$: $C\times[0,1]\to C\times[0,1]$ est homotope à l'application identité, donc le fibré ξ doit aussi être trivial. Il en resulte qu'il existe des sections $s_1,\ldots,s_k$: $C\times[0,1]\to\xi(C\times[0,1])$, linéairement indépendantes, telles que $a(\lambda,1)^{-1}s_i(\lambda,1) = v_i$, où $\lambda\in C$, $i=1,\ldots,k$ et $\{v_1,\ldots,v_k\}\subset \boldsymbol{L}_0$ est une base de $\boldsymbol{L}_0$.

Considérons la fonction f: $C\times[0,1]\to L(\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{E})$ définie par

$$f(\lambda,t)\Big(\sum_{i=1}^{k}\beta_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{k}\beta_i\cdot s_i(\lambda,t), \qquad \text{où } (\lambda,t)\in C\times[0,1].$$

Il est clair que f est une application continue et aussi que $f(\lambda,t)$: $\boldsymbol{L}_0\to \operatorname{Ker} p(\lambda,t)$ est un isomorphisme pour chaque $(\lambda,t)\in C\times[0,1]$. On en déduit que l'application b: $C\times[0,1]\to L_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{E})$ définie par

$$b(\lambda,t) = a(\lambda,t)\circ Q + f(\lambda,t)\circ(I-Q)$$

est une application continue de $C\times[0,1]$ dans $\mathrm{GL}_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{E})$. Pour compléter la preuve, remarquons que l'application b satisfait la condition:

$$b(\lambda,t)|_{\boldsymbol{E}^0} = a(\lambda,t)|_{\boldsymbol{E}^0}.$$

Il découle de la construction de b que $b(\lambda,1) = a(\lambda,1)$ pour tout $\lambda\in C$. ∎

(2.4) THÉORÈME. *Soient $\mathcal{P}$ une classe de perturbations, C un compact et a: $C\to\mathrm{GL}_{\mathcal{P}}(E)$ une application continue. Alors, il existe une décomposition $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^0\oplus \boldsymbol{L}_0$, où $\boldsymbol{E}^0$ est un sous-espace fermé de codimension finie, et une homotopie h: $C\times[0,1]\to\mathrm{GL}_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{E})$, telle que pour tout $\lambda\in C$ on a*

(i) $h(\lambda,1) = a(\lambda)$;
(ii) $h(\lambda,0)|_{\boldsymbol{E}^0} = I|_{\boldsymbol{E}^0}$;
(iii) $h(\lambda,0)|_{\boldsymbol{L}^0}$: $\boldsymbol{L}_0\to\boldsymbol{L}_0$.

Preuve. Définissons l'application b: $C\times[0,1]\to L_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{E})$ par

$$b(\lambda,t)x = x + t\cdot A(\lambda)x, \qquad \text{où } a(\lambda) = I + A(\lambda);\ A(\lambda)\in\mathcal{P},\ x\in\boldsymbol{E},\ \lambda\in C.$$

D'après le lemme (3.3) il existe une décomposition $E = E^0 \oplus L_0$, où E^0 est un sous-espace fermé de codimension finie, et il existe une application $\tilde{h}$: $C \times [0, 1] \to GL_{\mathscr{P}}(E)$, telle que $\tilde{h}(\lambda, 1) = a(\lambda)$ pour tout $\lambda \in C$, et $b(\lambda, t)|_{E^0} = \tilde{h}(\lambda, t)|_{E^0}$ pour tout $(\lambda, t) \in C \times [0, 1]$. Alors, on a que $\tilde{h}(\lambda, t)|_{E^0} = I|_{E^0}$. On peut représenter $\tilde{h}(\lambda, 0)$: $E \to E$ par la metrice suivante:

$$\begin{array}{cc} E^0 & L_0 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ M_1(\lambda) & M(\lambda) \end{bmatrix} \begin{array}{c} E^0 \\ L_0 \end{array}$$

où $M(\lambda)$ est un isomorphisme de L_0 dans lui-même. Considérons ensuite l'homotopie définie par

$$\begin{array}{cc} E^0 & L_0 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ t \cdot M_1(\lambda) & M(\lambda) \end{bmatrix} \begin{array}{c} E^0 \\ L_0 \end{array}$$

où $\lambda \in C$, $t \in [0, 1]$. En composant l'homotopie $\tilde{h}$ avec cette homotopie, on obtient une homotopie h qui satisfait les conditions requises. ∎

Soit $\{(E_n, E^n)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de sous-espaces de E telle que pour tout $n = 1, 2, \ldots$,

(1) $\dim(E_n) = n$;
(2) $E_n \subset E_{n+1}$;
(3) $E_n \oplus E^n = E$;
(4) $E^{n+1} \subset E^n$.

Une telle suite peut être construite facilement.

Définissons les inclusions:

$$i_{n,n+k}: \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \to \mathrm{GL}(n+k, \boldsymbol{R})$$

et

$$i_n: \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \simeq \mathrm{GL}(E_n) \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$$

de la façon suivante: $i_{n,n+k}(T)$: $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k \to \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k$ est définie par

$$i_{n,n+k}(T)(v_1, v_2) = (Tv_1, v_2), \quad \text{où } v_1 \in \boldsymbol{R}^n,\ v_2 \in \boldsymbol{R}^k \text{ et } T \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}),$$

et $i_n(T)$: $E_n \oplus E^n \to E_n \oplus E^n$ est définie par

$$i_n(T)(x_1, x_2) = (\tilde{T}x_1, x_2), \quad \text{où } x_1 \in E_n,\ x_2 \in E^n,\ T \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R})$$

et $\tilde{T} \in \mathrm{GL}(E_n)$ est l'opérateur qui correspond à T par l'identification $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \simeq \mathrm{GL}(E_n)$.

Alors, on obtient l'application

$$i\colon \lim_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(\boldsymbol{E}).$$

(2.5) Théorème. *L' application* $i\colon \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{R}) \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$ *est une équivalence homotopique faible.*

(2.6) Lemme. *Soient* C *un compact et* $a\colon C \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{R}^n)$ *une application continue ayant la forme suivante:*

$$\lambda \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix} R_1^n & R^k & R_2^n \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{} \\ & \multicolumn{2}{c}{A(\lambda)} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{} \end{array}\right] & \begin{matrix} R_1^n \\ \\ R^k \\ \\ R_2^n \end{matrix} \end{array}$$

où $\lambda \in C$.

Alors, il existe une déformation continue:

$$H\colon C \times [0, 1] \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^k \times \boldsymbol{R}^n)$$

telle que

(i) $H(\lambda, 0) = a(\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in C$;

(ii) $H(\lambda, 1)$ *est de la forme suivante*

$$\lambda \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{matrix} R_1^n & R^k & R_2^n \end{matrix} & \\ \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{} & 0 \\ \cline{3-3} \multicolumn{2}{c|}{\tilde{A}(\lambda)} & \\ \multicolumn{2}{c|}{} & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right] & \begin{matrix} R_1^n \\ \\ R^k \\ R_2^n \end{matrix} \end{array}$$

où $\lambda \in C$.

Preuve. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale dans $\boldsymbol{R}_1^n$ et $\{f_1, \dots, f_n\}$ une base orthonormale dans $\boldsymbol{R}_2^n$. Définissons les vecteurs

$$e_i^t = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot e_i + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot f_i; \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f_j^t = \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot e_j - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot f_j; \qquad j = 1, 2, \dots, n, \; t \in [0, 1].$$

Remarquons que $\{e_1^t, \dots, e_n^t, f_1^t, \dots, f_n^t\}$ forme une base orthonormale dans

$R_1^n \oplus R_2^n$, pour chaque $t \in [0, 1]$. En effet:

$$\langle e_i^t, e_j^t \rangle = \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} + \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} = \delta_{ij};$$

$$\langle f_i^t, f_j^t \rangle = \sin^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} + \cos^2\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} = \delta_{ij};$$

$$\langle e_i^t, f_j^t \rangle = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} - \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\cdot\delta_{ij} = 0,$$

où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

On peut alors définir l'application

$$A\colon [0, 1] \to \mathrm{GL}(R_1^n \times R^k \times R_2^n)$$

par

$$A(t)|_{R^k} = I|_{R^k}\colon R^k \to R^k \qquad A(t)e_i = e_i^t, \qquad A(t)f_i = f_i^t,$$

pour $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Il est évident que $A(t) \in U(R_1^n \times R^k \times R_2^n)$. On définit $H\colon C \times [0, 1] \to \mathrm{GL}(R^n \times R^k \times R^n)$ par la formule:

$$H(\lambda, t) = A(t)^{-1} \circ a(\lambda) \circ A(t), \qquad \text{où } (\lambda, t) \in C \times [0, 1].$$

Notons que $H(\lambda, 0) = a(\lambda)$ et que

$$A(1)^{-1} \circ a(\lambda) \circ A(1) f_i = A(1)^{-1} \circ a(\lambda) e_i = A(1)^{-1} e_i = f_i,$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda \in C$. Alors l'homotopie $H(\lambda, t)$ vérifie les conditions requises. ∎

Preuve du théorème (2.5). Il faut prouver que l'homomorphisme

$$i_*\colon \lim_{n\to\infty} \pi_k(\mathrm{GL}(n, R)) \to \pi_k(\mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E))$$

est un isomorphisme pour tous $k = 1, 2, \ldots$

i_* est injectif. Soient $\sigma\colon S^k \to i(\lim_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, R)) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$ une application continue et $\tilde{h}\colon S^k \times [0, 1] \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$ une homotopie entre σ et l'application constante. D'après (2.4) on peut supposer qu'il existe une homotopie $h\colon S^k \times [0, 1] \to \mathrm{GL}_{\mathscr{P}}(E)$ entre σ et l'application constante telle que $h(\lambda, t) = I + T(\lambda, t)$ où $T(\lambda, t)$ est de rang fini, et qu'il existe $L_0 \subset E$, $\dim L_0$

$= n+k < \infty$, et $E^0 \subset E$, $E = E^0 \oplus L_0$, tels que $h(\lambda, t)|_{E^0} = I|_{E^0}$ pour tout $(\lambda, t) \in S^k \times [0, 1]$. L'application $h(\lambda, t)$: $E \to E$ est donc de la forme

$$
(\lambda, t) \longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \tilde{E}^0 & \tilde{E}_n & L_0 \cap E_{n+k} & \tilde{L}_0 \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|c|cc}
I & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & I & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{I+T(\lambda, t)} \\
0 & 0 & &
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \tilde{E}^0 \\ \tilde{E}_n \\ L_0 \cap E_{n+k} \\ \tilde{L}_0 \end{array}
$$

où $\tilde{E}^0$, $\tilde{E}_n$, $\tilde{L}_0$ sont définis par les décompositions suivantes:

$$(L_0 \cap E_{n+k}) \oplus \tilde{L}_0 = L_0; \quad (L_0 \cap E_{n+k}) \oplus \tilde{E}_n = E_{n+k}; \quad E^0 = \tilde{E}^0 \oplus E^{n+k}.$$

Notons aussi que $\dim(\tilde{E}_n) = \dim(\tilde{L}_0) = n$. Alors, d'apres (2.6), il existe une déformation de l'homotopie h à une homotopie de la forme suivante:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \tilde{E}^0 & \tilde{E}_n & E_{n+k} \cap L_0 & \tilde{L}_0 \end{array} \\
\left[\begin{array}{c|cc|c}
I & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \multicolumn{2}{c|}{I+\tilde{T}(\lambda, t)} & 0 \\
0 & & & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & I
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \tilde{E}^0 \\ \tilde{E}_n \\ E_{n+k} \cap L_0 \\ \tilde{L}_0 \end{array}
$$

où $\lambda \in C$, $t \in [0, 1]$. Il en résulte que i_* est injectif.

Pour prouver que i_* est un *épimorphisme* il faut faire une construction analogue. ∎

(2.7) COROLLAIRE. *Toutes les inclusions suivantes sont des équivalences homotopiques faibles*:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{GL}(n, R) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{F}}(E) \subset \mathrm{GL}_c(E) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{D}}(E) \subset \mathrm{GL}_{\mathscr{C}}(E).$$

Commentaires

Pour des informations plus précises concernant les mesures de non compacité abstraites, présentées dans le Chapitre I, nous renvoyons à J. Banaś, K. Goebel [1].

Les notions de transversalité topologique et d'application essentielle ont été introduites par A. Granas pour la classe des applications compactes. Pour plus de détails sur ce sujet nous référons à Granas [1] et Dugundji, Granas [1]. Nous voulons aussi signaler qu'on peut retrouver certaines idées du § 2, Chapitre II et du § 3, Chapitre IV dans Volkmann [1].

Des cas particulieurs du Théorème de Bijection (Th.II.3.1) ont été traités dans les travaux suivants: Ewert [1], Nussbaum [1,2,3], Webb [1] et dans le cas multivoque par Ma [1].

Dans le Chapitre III nous présentons une série de corollaires du Théorème de Bijection. Plusieurs de ces résultats ont été trouvés ultérieurement dans Petryshyn [1], Webb [1,2], Nussbaum [1,2,3]. La formulation du Théorème (III.1.3) et des corollaires (III.1.4) et (III.1.5) dans un convexe quelconque C, est originale, de même que les résultats concernant les applications quasi-bornées et asymptotiquement linéaires. Les théorèmes et corollaires (III.2.10) à (III.2.16) sont également nouveaux.

La théorie de coïncidence, présentée dans le §l, Chapitre IV, possède des points communs avec l'article de J. Pejsachowicz et A. Vignoli [1]. Dans le § 3, Chapitre IV, on utilise la notion d'application L-condensante, intruduite par P. Volkmann [1], et les résultats de ce paragraphe (présentés ici pour la première fois) sont des généralisations des résultats de Mawhin [1, 2, 3] et Gaines, Mawhin [1]. Les résultats du § 4, Chapitre IV, ont été suggérés par ceux de M. Martelli [1] et la plupart d'entre eux est originale.

Dans le Chapitre V on donne plusieurs applications des théorèmes précédents aux équations différentielles. Le théorème (V.3.3) généralise une version d'un résultat classique de Bernstein, déjà considéré dans Granas, Guenther, Lee [1]. Le théorème (V.3.4) et la corollaire (V.3.5) sont également des généralisations de certains résultats de Granas, Guenther, Lee [1]. Nous voulons signialer que le théorème (V.3.4) est vrai aussi pour les conditions au bord périodiques. Le théorème (V.3.6) a été prouvé dans Fitzpatrick [1], mais la preuve présentée ici comporte des modifications essentielles. On peut retrouver certaines idées du Chapitre V dans Appell [1], Appell, Zabrejko [1], Banaś, Goebel [1], Petryshyn, Yu [1, 2, 3].

Dans l'Appendice A2 nous généralisons un résultat de K. Gęba [1] sur la structure homotopique de l'ensemble des isomorphismes condensants (voir le corrollaire (A2.2.7)).

Références

J. Appell

[1] *Implicit function, nonlinear integral equations and the measure of noncompactness of superposition operator*, J. Math. Anal. Appl. 83 (1) (1981), 251–263.

J. Appell et P. Zabrejko

[1] *On a theorem of M. A. Krasnosielskij*, Nonlinear Analysis, Theory Meth. Appl. 7 (7) (1983), 695–706.

J. Banaś et K. Goebel

[1] *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*. Lectures Notes in Pure Appl. Math., Marcel Dekker Inc., 60 (1980), New York.

S. N. Bernstein

[1] *Sur les équations du calcul des variations*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 29 (1912), 431–485.

J. Dugundji et A. Granas

[1] *Fixed Point Theory*, vol. 1, Monografie Mat. 61, Polish Sci. Publishers, Warszawa 1982.

J. Ewert

[1] *Homotopical properties and the topological degree for γ-contraction vector fields*, Bull. Acad. Polon. Sci. 28 (5–6) (1980).

P. M. Fitzpatrick

[1] *Existence results for equation involving noncompact perturbations of Fredholm mappings with applications to differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 66 (1978), 151–177.

M. Furi, M. Martelli et A. Vignoli

[1] *On the solvability of nonlinear operator equations in normed spaces*, Ann. Mat. Pure ed Appl. 124 (1980), 321–343.

R. E. Gaines et J. Mawhin

[1] *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Lecture Notes in Math. 568 (1977).

K. Gęba

[1] *On the homotopy groups of* $GL_c(E)$, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (9) (1968), 699–702.

K. Gęba, A. Granas, T. Kaczyński et W. Krawcewicz

[1] *Homotopie et équations non linéaires dans les espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris, 300, Série I, no 10, 1985.

A. Granas

[1] *Homotopy extension theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of non-linear equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), 387–394.

[2] *A note on Schauder's theorem on invariance of domain*, Bull. Acad. Polon. Sci. 10 (1962), 233–238.

[3] *The theory of compact vector fields and some of its applications to the topology of functional space (I)*, Rozprawy Mat. 30 (1962), 1–93.

[4] *Points fixes pour les applications compactes: espaces de Lefschetz et théorie de l'indice*, Notes de cours Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal 1973, La Presse de l'Université de Montréal, 1980.

[5] *Sur la méthode de continuité de Poincaré*, C. R. Acad. Sci. Paris, 282 (1976), 983–985.

A. Granas, R. B. Guenther et J. W. Lee
[1] *Applications of topological transversality to differential equations, I et II*, Pacific J. Math. 89 (1980), 53–67; Pacific J. Math. 104 (1983), 95–109.
G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya
[1] *Inequalities*, Cambridge Univ. Press., London–New York, 1943.
M. A. Krasnoselskii et P. P. Zabrejko
[1] *Méthodes géométriques de l'analyse non linéaire*, Nauka, Moscou 1975 (en russe).
N. G. Lloyd
[1] *Degree Theory*, Cambridge Tracts in Math. 73, Cambridge Univ. Press 1978.
T. Ma
[1] *Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces*, Diss. Math. 92 (1972), 1–47.
M. Martelli
[1] *Semi-Fredholm operators and hyperbolic problems*, Lecture Notes in Math. 886 (1980), 249–264.
J. Mawhin
[1] *Equivalence theorems for nonlinear equations and coincidence degree theory for some mappings in locally convex topological vector spaces*, J. Diff. Equations 12 (1972), 610–636.
[2] *Nonlinear Perturbations of Fredholm Mappings in Normed Spaces and Applications to Differential Equations*, Univ. de Bresila, Trabalho de Mat. 61 (1974).
[3] *The solvability of some operator equations with a quasibounded nonlinearity in normed spaces*, J. Math. Analysis and Appl. 45 (2) (1974), 455–467.
L. Nirenberg
[1] *Functional Analysis*, Lectures Notes, New York 1960.
R. D. Nussbaum
[1] *The fixed point index and fixed point theorems for k-set contractions*, Ph. D. Thesis, Univ. of Chicago 1969.
[2] *The fixed point index for locally condensing maps*, Math. Ann. 191 (1977), 181–195.
[3] *Degree theory for local condensing maps*, J. Math. Anal. Appl. 35 (1972).
J. Pejsachowicz et A. Vignoli
[1] *On the topological coincidence degree for perturbations of Fredholm operators*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), 17–B (1980), 1457–1466.
W. V. Petryshyn
[1] *Fredholm alternative for nonlinear k-ball contractive mappings with applications*, J. Diff. Equations 17 (1) (1975), 82–95.
W. V. Petryshyn et Z. S. Yu
[1] *Periodic solutions of nonlinear second-order differential equations which are not solvable for the highest derivative*, J. Math. Anal. Appl. 89 (2) (1982), 462–488.
[2] *Existence theorems for higher order nonlinear periodic boundary value problems*, Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 6 (9) (1982), 943–969.
[3] *Periodic solutions of certain higher order nonlinear differential equations*, Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 7 (1) (1983), 1–13.
P. Volkmann
[1] *Démonstration d'un théorème de coïncidence par la méthode de Granas*, Bull. Soc. Math. Belgique, Série B (1983).
J. R. L. Webb
[1] *Remarks on k-set contractions*, Boll. Un. Mat. Ital. 4 (1971), 614–629.
[2] *On a characterisations of k-set contractions*, Rend. Acad. Naz. Lincei, (1971), 686–689.