POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CCCXXVI

ANDRZEJ DAWIDOWICZ

Méthodes homologiques dans la théorie des applications et des champs de vecteurs sphériques dans les espaces de Banach

WARSZAWA 1993

Andrzej Dawidowicz
Chaire de Mathématiques
Ecole Pédagogigue de Olsztyn
Żołnierska 14A
10-561 Olsztyn, Pologne

Published by the Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences
Typeset in TEX at the Institute
Printed and bound by
Printed and bound by
drukarnia
herman & herman
02-240 Warszawa, ul. Jakobinów 23, tel: 846-79-66, tel/fax: 49-89-95

P R I N T E D I N P O L A N D

ISBN 83-85116-98-2 ISSN 0012-3862

TABLE DES MATIÈRES

1991 *Mathematics Subject Classification*: 55M20, 55N20, 54C60.

Received 5.10.1990; revised version 15.9.1992.

Introduction

Dans cet article nous examinons les propriétés de type coïncidence pour diverses classes de transformations multivoques.

Toute transformation multivoque semi-continue supérieurement à valeurs compactes et acycliques (relativement à l'homologie de Čech) sera appelée *application acyclique*. En s'appuyant sur le théorème de Vietoris–Begle, il est possible de définir un degré pour cette classe de transformations. Un grand nombre de théorèmes furent déduits des propriétés de ce degré (voir par exemple [7], [8], [13], [16], [17], [23]–[25] etc.). Nous mentionnons à titre indicatif l'important théorème de Brouwer :

(1) Théorème. *Toute application acyclique ϕ de la boule unité K^n de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe; c'est-à-dire, il existe un point $y \in K^n$ tel que $y \in \phi(y)$.*

En 1947, O'Neill [30] formula l'exemple suivant, montrant que l'hypothèse de l'acyclicité des valeurs n'est pas négligeable. Soit $\xi : K^n \to \mathbb{R}$, $\xi(x) := 1 - \|x\| + \|x\|^2$. On définit la transformation multivoque $\psi : K^n \to K^n$ par

$$\psi(x) := \{y \in K^n : \|y - x\| = \xi(x)\} \cup \{y \in S^{n-1} : \|y - x\| \geq \xi(x)\} .$$

On vérifie par des méthodes élémentaires que ψ est semi-continue supérieurement (et aussi semi-continue inférieurement) mais elle n'admet pas de points fixes. Ses valeurs, étant des sphères topologiques de dimension $n-1$, ne sont pas acycliques.

Une des généralisations du théorème (1) à des transformations multivoques à valeurs non nécessairement acycliques fut présentée par Górniewicz [22]. On associe à chaque ensemble fermé et borné X de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ l'ensemble fermé et borné $\widetilde{X}$ ayant pour complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus \widetilde{X}$ l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{R}^n \setminus X$. Si BX denote l'union de toutes les composantes bornées de $\mathbb{R}^n \setminus X$, on a $BX = \widetilde{X} \setminus X$. Le résultat principal de [22] se lit comme suit :

(2) Théorème. *Soit $\phi : K^n \to K^n$, $n \geq 2$, une transformation multivoque semi-continue supérieurement (donc, par définition, à valeurs compactes), vérifiant :*

(2.1) $\{x \in K^n : x \in B(\phi(x))\}$ *est ouvert dans* K^n;
(2.2) $H_*(\phi(x)) = H_*(S^{n-1})$ *pour tout* $x \in K^n$.

Alors ϕ admet un point fixe.

Les transformations multivoques satisfaisant (2.1) et (2.2) sont appelées *applications sphériques* ([22]). Remarquons que ψ dans l'exemple d'O'Neill ne satisfait pas (2.1).

L'étude des applications sphériques dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, se poursuit dans [10]. On y modifie un peu leur définition (voir th. (3) ci-après) de façon à inclure les applications acycliques. L'un des résultats typiques de [10] est le suivant :

(3) THÉORÈME. *Supposons qu'une transformation multivoque $\phi : K^n \to K^n$ semi-continue supérieurement satisfasse les conditions suivantes* :

(3.1) *le graphe $\Gamma(B\phi)$ de la transformation multivoque $B\phi : K^n \to K^n$ définie par $B\phi(x) := B(\phi(x))$ pour tout $x \in K^n$ est un ouvert du produit $K^n \times K^n$*;

(3.2) $\widetilde{\phi(x)}$ *est acyclique pour tout $x \in K^n$.*

Alors ϕ admet un point fixe.

Des théorèmes de type Borsuk–Ulam, un théorème de l'invariance du domaine, ainsi qu'un théorème de coïncidence de type Poincaré, furent établis pour ce genre d'applications multivoques [10].

Des exemples d'applications sphériques s'obtiennent en utilisant une distance de continuité ϱ_C (Borsuk [4]). Soit (M, μ) un espace métrique et A, B deux parties de M. On note par $C(A, B)$ l'ensemble des transformations (univoques) continues de A dans B. La *distance de continuité* entre les parties fermées $Y, X \subset M$ est

$$\varrho_C := \max\{\inf_{f \in C(X,Y)} |f|, \inf_{g \in C(X,Y)} |g|\},$$

où $|f|$ est l'écartement de f, c'est-à-dire, la borne supérieure des $\mu(x, f(x))$, x parcourant l'ensemble de définition de f. Les transformations multivoques à valeurs compactes et connexes, continues pour ϱ_C (en tant que transformations univoques dans l'espace $\mathcal{D}(K^n)$ des parties fermées de K^n, métrisé par ϱ_C) et vérifiant (3.2) sont des exemples fondamentaux d'applications sphériques dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Cet exposé a pour but de présenter des résultats semblables dans le cadre d'un espace de Banach E arbitraire, $\dim(E) \geq 2$. Dans le chapitre I, nous commençons par rappeler la théorie de cohomologie de dimension infinie, introduite par K. Gęba et A. Granas dans les espaces normés ([18]–[20]) en la modifiant pour nos besoins. Nous appliquons cette théorie dans le paragraphe 1 du chapitre III en définissant une caractéristique topologique d'un champ de vecteurs faiblement admissible (voir [2]) et un degré d'un champ de vecteurs admissible ([7], [8], [22], [24]). Nous démontrons les théorèmes :

• de coïncidence d'un champ de vecteurs faiblement admissible et d'une application admissible (une généralisation de [8]);

• des antipodes pour les champs de vecteurs $\mathbb{Z}_2$-admissibles (voir [17]);

• de l'invariance du domaine d'un champ de vecteurs fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible qui est une ε-transformation relativement à son domaine ouvert (une généralisation de [7]).

Dans le chapitre II, nous étendons la notion de distance de continuité au cas d'un espace de Banach de dimension infinie en remplaçant les transformations continues dans la définition de ϱ_C par les champs de vecteurs compacts. Nous obtenons ainsi une distance ϱ_F sur la famille $\mathcal{D}(E)$ des parties de E fermées, bornées et non vides, distance dont les propriétés sont tout à fait analogues à celles de ϱ_C dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, si E est de dimension finie, ϱ_C et ϱ_F coïncident. Toute transformation multivoque $\phi : K \to K$ (K désignant la boule unité dans E) à valeurs fermées, continue pour la distance ϱ_F, et vérifiant :

(4.1) $\widetilde{\phi(x)}$ est convexe et non vide pour tout $x \in K$;
(4.2) la famille $\{\phi(x) : x \in K\}$ est totalement bornée dans l'espace $\mathcal{D}(K)$ métrisé par la distance de Hausdorff ϱ_S;

est un exemple fondamental d'une application sphérique dans K (pour la définition, voir (III, (2.1))).

De telles transformations ont la propriété du point fixe (III, (2.11)).

Le deuxième paragraphe du chapitre III est consacré aux champs de vecteurs sphériques (déf. (III, (2.8))). En utilisant les théorèmes du paragraphe précédent, nous y démontrons :

• le théorème de coïncidence d'une application et d'un champ de vecteurs admissibles ou sphériques (III, th. (2.9));

• le théorème des antipodes pour les champs de vecteurs $\mathbb{Z}_2$-sphériques (III, th. (2.14));

• le théorème de l'invariance du domaine d'un champ de vecteurs fortement $\mathbb{Z}_2$-sphérique (III, th. (2.17)).

La matière de cet article est incluse dans la thèse de doctorat de l'auteur à l'Université Nicolas Copernicus de Toruń. L'auteur désire exprimer toute sa gratitude à son directeur de recherche, le professeur Lech Górniewicz, pour son soutien et ses conseils, et au professeur H. Ben-El-Mechaiekh à l'Université de Brock pour son aide précieuse dans la préparation de la traduction française de ce travail.

I. Cohomologie de dimension infinie

1. Préliminaires. Nous noterons par:

- $\mathbb{N}$ — l'ensemble des nombres entiers non négatifs;
- $\mathbb{Z}$ — l'anneau des nombres entiers;
- $\mathbb{Z}_2$ — le corps des deux nombres: zéro et un;
- $\mathbb{R}$ — le corps des nombres réels;
- $\mathbb{R}^n$ — l'espace euclidien de dimension n;
- E — l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, normé ou de Banach, avec une norme $\| \ \|$;

• K (K^n) — la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans E (dans $\mathbb{R}^n$, resp.);

• S (S^n) — la sphère de centre 0 et de rayon 1 dans E (dans $\mathbb{R}^{n+1}$, resp.).

Soit (M,μ) un espace métrique muni d'une métrique μ. Posons

$$\mathcal{D}(M) := \{X \subset M : X \text{ est fermé, borné et non vide}\},$$
$$\operatorname{dist}(X,Y) := \inf\{\mu(x,y) : x \in X,\ y \in Y\},$$
$$K(X,\varepsilon) := \{y \in M : \operatorname{dist}(y,X) \le \varepsilon\}, \qquad O_\varepsilon(X) := \{y \in M : \operatorname{dist}(y,X) < \varepsilon\}.$$

Par $(H^*(\cdot;\mathbb{Z}_2),\delta)$ $((H^*(\cdot),\delta))$ on note le foncteur cohomologie de Čech sur la catégorie des espaces de Hausdorff, à coefficients dans le corps $\mathbb{Z}_2$ (dans l'anneau $\mathbb{Z}$, respectivement). $\widetilde{H}^{\mathrm{s}}$ désigne le foncteur homologie singulière réduite. Sauf mention explicite les détails et les démonstrations des faits cités dans ce chapitre se trouvent dans [14] ou [32].

(1.1) Théorème (Dualité d'Alexander, [32]). *Pour toute partie compacte $X \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout entier k, l'homomorphisme d'Alexander*

$$\widetilde{H}^{\mathrm{s}}_{n-k-1}(\mathbb{R}^n \setminus X) \to H^k(X)$$

est un isomorphisme. ∎

Nous appelons *couple* dans un espace topologique M tout couple $[(X^+,A^+),(X^-,A^-)]$ des paires (X^+,A^+) et (X^-,A^-) fermées dans la paire $(X^+\cup X^-, A^+\cup A^-)$ des sous-espaces de Hausdorff de M (les signes $+$ et $-$ n'étant ici que des indices). On ne suppose aucune inclusion entre X^+ et X^- ni entre A^+ et A^-. Si $A^+ = \emptyset = A^-$, on écrit $[X^+,X^-]$ au lieu de $[(X^+,\emptyset),(X^-,\emptyset)]$. Une paire (X,A) est dite *paracompacte* si X et A sont paracompacts. Un couple $[(X^+,A^+),(X^-,A^-)]$ est dit *paracompact* si la paire $(X^+\cup X^-, A^+\cup A^-)$ est paracompacte. Rappelons que si A est un sous-espace fermé d'un espace topologique compact X, la paire (X,A) est dite *compacte*. Le terme *application* désigne une transformation (univoque) continue. Pour tout couple paracompact $T := [(X^+,A^+),(X^-,A^-)]$ et pour tout entier n, il existe un homomorphisme

$$\Delta(T) : H^{n-1}(X^+\cap X^-, A^+\cap A^-) \to H^n(X^+\cup X^-, A^+\cup A^-)$$

appelé *homomorphisme de Mayer–Vietoris* et vérifiant les propriétés suivantes :

(1.2) Soit $f : M \to M'$ une application de $T := [(X^+,A^+),(X^-,A^-)]$ dans $T' := [(Y^+,B^+),(Y^-,B^-)]$ (c'est-à-dire $f(X^+) \subset Y^+$, $f(X^-) \subset Y^-$, $f(A^+) \subset B^+$ et $f(A^-) \subset B^-$). Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^{n-1}(X^+\cap X^-, A^+\cap A^-) & \xrightarrow{\ \Delta(T)\ } & H^n(X^+\cup X^-, A^+\cup A^-) \\
\Big\uparrow{\scriptstyle H^{n-1}(f|X^+\cap X^-)} & & \Big\uparrow{\scriptstyle H^n(f|X^+\cup X^-)} \\
H^{n-1}(Y^+\cap Y^-, B^+\cap B^-) & \xrightarrow{\ \Delta(T')\ } & H^n(Y^+\cup Y^-, B^+\cup B^-)
\end{array}$$

commute pour tout entier n.

(1.3) Si $T := [(X^+, A^+), (X^-, A^-)]$ est un couple paracompact et $T' := [A^+, A^-]$, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(X^+ \cap X^-, A^+ \cap A^-) & \xrightarrow{\Delta(T)} & H^n(X^+ \cup X^-, A^+ \cup A^-) \\ \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\ H^{n-2}(A^+ \cap A^-) & \xrightarrow{\Delta(T')} & H^{n-1}(A^+ \cup A^-) \end{array}$$

anticommute pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\Delta(T') \circ \delta := -\delta \circ \Delta(T)$ ([11], p. 69).

(1.4) A chaque couple $T := [(X^+, A^+), (X^-, A^-)]$ nous pouvons associer le *couple opposé* $-T := [(X^-, A^-), (X^+, A^+)]$. Le lien entre les homomorphismes de Mayer–Vietoris des couples opposés s'exprime par l'équation $\Delta(-T) := -\Delta(T)$.

Nous allons montrer un lemme technique sur lequel reposera la construction de la cohomologie de dimension infinie. Pour plus de simplicité nous ne présentons la formulation et la preuve que dans le cas particulier où l'on prend les couples d'espaces au lieu des couples de paires (voir aussi [19], p. 202–204). Le cas général peut s'obtenir de manière analogue.

(1.5) Lemme ([19]). *Soient $T_i' := [X_i^+, X_i^-]$ et $T_i'' := [Y_i^+, Y_i^-]$ deux couples paracompacts dans un espace topologique M satisfaisant les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} X_1^+ \cap X_1^- &= X_2^+ \cap X_2^- =: X\,, & Y_1^+ \cup Y_1^- &= Y_2^+ \cup Y_2^- =: Y\,, \\ X_1^+ \cup X_1^- &= Y_1^+ \cap Y_2^- =: Z_1\,, & X_2^+ \cup X_2^- &= Y_2^+ \cap Y_2^- =: Z_2\,. \end{aligned}$$

Si de plus

$$X_1^+ = Z_1 \cap Y_2^+\,, \quad X_1^- = Z_1 \cap Y_2^-\,, \quad X_2^+ = Z_2 \cap Y_1^+\,, \quad X_2^- = Z_2 \cap Y_1^-\,,$$

alors le diagramme des homomorphismes de Mayer–Vietoris

$$\begin{array}{ccccc} & & H^{n-1}(X) & & \\ & \swarrow^{\Delta(T_1')} & & \searrow^{\Delta(T_2')} & \\ H^n(Z_1) & & & & H^n(Z_2) \\ & \searrow_{\Delta(T_1'')} & & \swarrow_{\Delta(T_2'')} & \\ & & H^{n+1}(Y) & & \end{array}$$

anticommute pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Il suffit d'indiquer deux couples paracompacts $T_3' := [X_3^+, X_3^-]$, $T_3'' := [Y_3^+, Y_3^-]$ vérifiant

$$(1.5.1)\qquad \begin{aligned} & X_3^+ \cap X_3^- = X\,, \quad Y_3^+ \cap Y_3^- = Y\,, \quad X_3^+ \cup X_3^- = Y_3^+ \cap Y_3^- =: Z_3\,, \\ & [X_1^+, X_1^-] \subset [X_3^+, X_3^-] \supset -[X_2^+, X_2^-]\,, \\ & [Y_1^+, Y_1^-] \subset [Y_3^+, Y_3^-] \supset [Y_2^+, Y_2^-]\,. \end{aligned}$$

Ceci étant, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^{n-1}(X) \arrow[dl, "\Delta(T_1')"'] \arrow[d, "\Delta(T_3')"] \arrow[dr, "\Delta(-T_2')"] & \\
H^n(Z_1) \arrow[dr, "\Delta(T_1'')"'] & H^n(Z_3) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "\Delta(T_3'')"] & H^n(Z_2) \arrow[dl, "\Delta(T_2'')"] \\
 & H^{n+1}(Y) &
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par les injections canoniques (la commutativité de tous les triangles du diagramme découle de (1.2)). Le résultat s'ensuit.

Nous définissons les couples T_3' et T_3'' comme suit :

$$Y_3^+ := Y_1^+ \cup Y_2^+\,, \quad Y_3^- := Y_1^- \cup Y_2^-\,, \quad X_3^+ := Y_2^+ \cap Y_1^-\,, \quad X_3^- := Y_2^- \cap Y_1^+\,.$$

La vérification de (1.5.1) ne présente aucune difficulté. ■

Rappelons qu'un espace topologique est dit *acyclique* ($\mathbb{Z}_2$-*acyclique*) si son q-ième groupe de cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (dans $\mathbb{Z}_2$, resp.) est égal à celui d'un singleton. Une application $f : (X, A) \to (Y, B)$ est appelée *application de Vietoris* ($\mathbb{Z}_2$-*application de Vietoris*) si elle est propre, $f^{-1}(B) = A$, et $f^{-1}(y)$ est acyclique ($\mathbb{Z}_2$-acyclique, resp.) pour tout $y \in Y$.

(1.6) THÉORÈME (Vietoris–Begle, [32]). *Si $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une application de Vietoris ($\mathbb{Z}_2$-application de Vietoris) d'une paire compacte (X, A) dans une paire (Y, B) alors l'homomorphisme*

$$H^*(f) : H^*(Y, B) \to H^*(X, A)$$
$$(H^*(f; \mathbb{Z}_2) : H^*(Y, B; \mathbb{Z}_2) \to H^*(X, A; \mathbb{Z}_2)\,, \ \textit{resp.})$$

est un isomorphisme. ■

Une *involution* τ d'un ensemble X est une transformation $\tau : X \to X$ vérifiant $\tau^2 = \mathrm{id}_X$ (id_X étant l'identité sur X).

(1.7) THÉORÈME ([2], p. 92). *Soit X un espace métrique compact tel que $H^*(X; \mathbb{Z}_2) = H^*(S^n; \mathbb{Z}_2)$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $\tau : X \to X$ une involution continue sans points fixes. Si une application $q : X \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ satisfait*

$$(1.7.1) \qquad q(\tau(x)) \neq \lambda q(x) \quad \textit{pour tout } x \in X \textit{ et tout } \lambda > 0,$$

alors $H^n(q; \mathbb{Z}_2) : H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0; \mathbb{Z}_2) \to H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme. ■

Nous rappelons maintenant quelques faits d'algèbre linéaire. Notons par $\mathcal{L}(E)$ la famille de tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace normé E. Associons à chaque $L \in \mathcal{L}(E)$ son orientation $o(L)$ arbitrairement choisie. La classe de tous les sous-espaces de dimension finie de E, avec leurs orientations fixées, préordonnée par la relation d'inclusion, est appelée *filtration canonique*. On peut aussi considérer la filtration canonique comme une catégorie filtrante à droite, dont les morphismes sont les injections canoniques. Parmi toutes les injections canoniques, nous distinguons certaines injections dites *élémentaires*. Plus précisement, nous disons qu'un espace vectoriel L est *élémentairement* contenu dans un espace vectoriel P (et nous écrivons $L \Rightarrow P$) si $L \subset P$ et $d(P) - d(L) = 1$ ($d(Q)$ étant la dimension d'un espace vectoriel $Q \in \mathcal{L}(E)$). Dans ce cas, L définit deux demi-espaces P^+, P^- dans P. Le choix de l'orientation nous permet de les différencier de la manière suivante :

(1.8) Soit $(e) := (e_1, \ldots, e_k)$ une base de $L \in \mathcal{L}(E)$. Définissons le signe de (e) par

$$\operatorname{sgn}(e) := \begin{cases} 1 & \text{si } (e) \in o(L), \\ -1 & \text{si } (e) \notin o(L). \end{cases}$$

Complétons la base (e) en une base $(\widehat{e}) := (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1})$ de l'espace P. Posons

$$\begin{aligned} P^+ &:= \{a + \lambda e_{k+1} : a \in L,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot \operatorname{sgn}(e) \cdot \operatorname{sgn}(\widehat{e}) \geq 0\}, \\ P^- &:= \{a + \lambda e_{k+1} : a \in L,\ \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \cdot \operatorname{sgn}(e) \cdot \operatorname{sgn}(\widehat{e}) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Nous avons les propriétés immédiates :

(1.9) *Si $L \subset P$, où $L, P \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe une suite $Q_1, \ldots, Q_k$ d'espaces de la filtration $\mathcal{L}(E)$ reliant L et P par des injections élémentaires* :

$$L \Rightarrow Q_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q_k \Rightarrow P. \ \blacksquare$$

(1.10) *Tout diagramme dans $\mathcal{L}(E)$ de la forme*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ Q_1 & & Q_2 \end{tikzcd}$$

peut être complété par un espace $P \in \mathcal{L}(E)$ au diagramme

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\ Q_1 \arrow[dr, Rightarrow] & & Q_2 \arrow[dl, Rightarrow] \\ & P & \end{tikzcd}$$

De plus, si $Q_1 \neq Q_2$, l'espace P est unique. $\blacksquare$

Soit E un espace normé de dimension infinie. Rappelons qu'une transformation $r : M \to E$ définie sur un espace de Hausdorff M est dite *compacte* (*de dimension finie*) si $r(M)$ est contenu dans une partie compacte (dans un sous-espace de dimension finie, resp.) de l'espace E. Nous associons à E la catégorie $\mathcal{W}(E)$ dont les objets sont les triades (X, A, f), où la paire (X, A) est paracompacte et $f : X \to E$ est une application. Les morphismes $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ de $\mathcal{W}(E)$ sont les applications $p : (X, A) \to (Y, B)$ telles que

(1.11) $f - gp : X \to E$ se décompose en somme algébrique d'une application compacte $F : X \to E$ et d'une application de dimension finie (non nécessairement bornée) $G : X \to E$, c'est-à-dire $f - gp = F + G$.

Nous vérifions que la composée de tels morphismes est en fait un morphisme de $\mathcal{W}(E)$. Soit $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$, $q : (Y, B, g) \to (Z, C, h)$ des morphismes de $\mathcal{W}(E)$. On a $f - gp = F + G$ et $g - hq = F' + G'$ où F et F' sont compactes et G et G' sont de dimension finie. Donc $F + F'p$ est compacte et $G + G'p$ est de dimension finie. Comme $f - hqp = (f - gp) + (g - hq)p = (F + F'p) + (G + G'p)$, la composée $qp : (X, A, f) \to (Z, C, h)$ est dans $\mathcal{W}(E)$.

Soit $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ un morphisme de $\mathcal{W}(E)$. Si $f - gp : X \to E$ est de dimension finie (compacte), p est dit *de dimension finie* (*compact*, resp.). Nous écrivons (X, f) au lieu de $(X, \emptyset, f)$, et chaque paire (X, A) dans E est identifiée à la triade (X, A, i), où $i : X \to E$ est l'injection canonique. L'application f de (X, A, f) est appelée *transporteur de filtration*.

Soit $\mathcal{W}_0(E)$ la sous-catégorie de $\mathcal{W}(E)$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{W}(E)$, et dont les morphismes sont tous les morphismes de dimension finie de $\mathcal{W}(E)$. C'est sur $\mathcal{W}_0(E)$ que nous construirons, dans le paragraphe suivant, le foncteur cohomologie de dimension infinie.

2. Cohomologie de dimension infinie sur $\mathcal{W}_0(E)$. La théorie de la cohomologie de dimension infinie fut construite par K. Gęba et A. Granas dans les années soixante. Elle fut définie sur la catégorie des paires fermées et bornées et des champs de vecteurs compacts dans un espace normé de dimension infinie ([18]–[20]). En 1975, Gelman étendit la théorie au cas des champs de vecteurs multivoques. La théorie de Gelman s'applique immédiatement aux champs de vecteurs multivoques de dimension finie. Dans le cas où ils sont complètement continus, elle devient trop compliquée ([2]). Notre tâche dans ce paragraphe est de modifier la construction de Gęba–Granas–Gelman afin d'étendre la théorie aux champs de vecteurs admissibles (déf. III, (1.1) et (1.3)).

En utilisant une idée de Gelman, nous définissons une théorie de cohomologie de dimension infinie sur $\mathcal{W}_0(E)$. Dans le paragraphe suivant, nous la prolongerons à une certaine classe de morphismes compacts de $\mathcal{W}(E)$ en utilisant l'idée d'un système approximatif ([19]). Pour nos applications, nous nous bornerons aux cas des coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Z}_2$ (en fait le caractère strictement algébrique de la construction de la cohomologie fait qu'elle reste valable pour tout anneau (tout groupe) de coefficients).

Les objets de $\mathcal{W}(E)$ seront appelés brièvement *objets*. Soient (X, A, f) un objet et n un entier. Posons $X_C := f^{-1}(C)$, $A_C := A \cap X_C$ pour toute partie C de l'espace normé E. Associons à chaque $L \in \mathcal{L}(E)$ le $(d(L) + n)$-ième groupe de cohomologie de Čech $H^{d(L)+n}(X_L, A_L)$. Si $L, P \in \mathcal{L}(E)$ et $L \Rightarrow P$, posons

$$\Delta_L^P := \Delta(T) : H^{d(L)+n}(X_L, A_L) \to H^{d(P)+n}(X_P, A_P)$$

où $\Delta(T)$ est l'homomorphisme de Mayer–Vietoris induit par le couple paracompact $T := [(X_{P^+}, A_{P^+}), (X_{P^-}, A_{P^-})]$. Si $L \subset P$ et non $L \Rightarrow P$, alors d'après (1.9) il existe une suite $Q_1, \ldots, Q_k$ de sous-espaces de E de dimension finie reliant L

et P par des injections élémentaires. Posons

$$\varDelta_L^P := \varDelta_{Q_k}^P \circ \varDelta_{Q_{k-1}}^{Q_k} \circ \ldots \circ \varDelta_L^{Q_1} .$$

Dans ce qui suit nous omettrons les indices L et P dans le symbole $\varDelta_L^P$.

Nous vérifions que $\varDelta$ est bien défini, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix de la suite $Q_1, \ldots, Q_k$. Montrons d'abord le :

(2.1) Lemme. *Soient $L \Rightarrow Q_1$ et $L \Rightarrow Q_2$ où $L, Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}(E)$. Si $P \in \mathcal{L}(E)$ complète le diagramme de* (1.10), *alors le diagramme des homomorphismes de Mayer–Vietoris*

$$\begin{tikzcd} & H^{d(L)+n}(X_L, A_L) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ H^{d(Q_1)+n}(X_{Q_1}, A_{Q_1}) \arrow[dr] & & H^{d(Q_2)+n}(X_{Q_2}, A_{Q_2}) \arrow[dl] \\ & H^{d(P)+n}(X_p, A_p) & \end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout objet (X, A, f).

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer le lemme pour $Q_1 \neq Q_2$. Choisissons une base $(e) := (e_1, \ldots, e_k)$ de L qui appartient à l'orientation $o(L)$. Trouvons des vecteurs $u_1, u_2 \in E$ tels que $(e_1) := (e_1, \ldots, e_k, u_1)$ soit une base de Q_1 appartenant à $o(Q_1)$ et $(e_2) := (e_1, \ldots, e_k, u_2)$ une base de Q_2 appartenant à $o(Q_2)$. Alors, $(u) := (e_1, \ldots, e_k, u_1, u_2)$ est une base de P.

Si $(u) \in o(P)$, l'injection $Q_1 \Rightarrow P$ nous donne les deux demi-espaces fermés

$$P_1^+ := \{a + \lambda u_2 : a \in Q_1,\ \lambda \geq 0\} \quad \text{et} \quad P_1^- := \{a + \lambda u_2 : a \in Q_1,\ \lambda \leq 0\},$$

tandis que $Q_2 \Rightarrow P$ nous donne

$$P_2^+ := \{a + \lambda u_1 : a \in Q_2,\ \lambda \leq 0\} \quad \text{et} \quad P_2^- := \{a + \lambda u_1 : a \in Q_2,\ \lambda \geq 0\},$$

Il est facile de se convaincre que les couples $[Q_1^+, Q_1^-]$, $[P_1^+, P_1^-]$ et $[Q_2^+, Q_2^-]$, $-[P_2^+, P_2^-]$ satisfont les hypothèses du lemme (1.5). Alors les couples

$$T_1' := [(X_{Q_1^+}, A_{Q_1^+}), (X_{Q_1^-}, A_{Q_1^-})], \quad T_1'' := [(X_{P_1^+}, A_{P_1^+}), (X_{P_1^-}, A_{P_1^-})],$$
$$T_2' := [(X_{Q_2^+}, A_{Q_2^+}), (X_{Q_2^-}, A_{Q_2^-})], \quad T_2'' := [(X_{P_2^+}, A_{P_2^+}), (X_{P_2^-}, A_{P_2^-})],$$

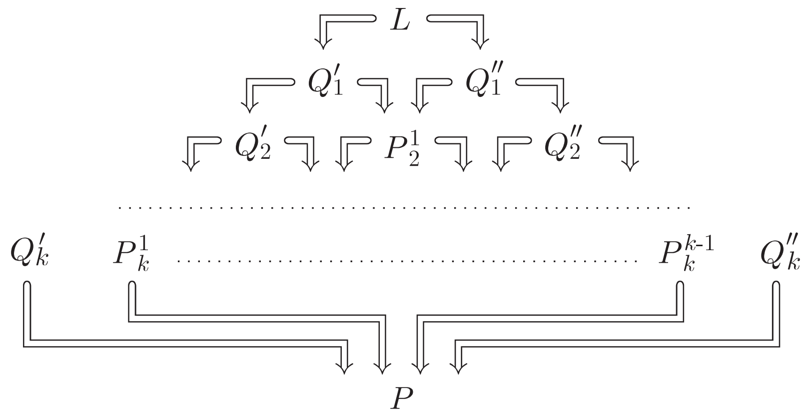
satisfont les hypothèses de ce lemme en version relative; d'où la commutativité du diagramme en question.

Le cas où $(u) \notin o(P)$ se traite de façon analogue. ∎

(2.2) Lemme. *Supposons que $L \subset P$ et soient $Q_1', \ldots, Q_k'$ et $Q_1'', \ldots, Q_k''$ deux suites d'espaces de $\mathcal{L}(E)$, reliant L et P par des injections élémentaires. Alors*

$$\varDelta_{Q_k'}^P \circ \varDelta_{Q_{k-1}'}^{Q_k'} \circ \ldots \circ \varDelta_L^{Q_1'} = \varDelta_{Q_k''}^P \circ \varDelta_{Q_{k-1}''}^{Q_k''} \circ \ldots \circ \varDelta_L^{Q_1''} .$$

D é m o n s t r a t i o n. En appliquant à plusieurs reprises (1.10), on obtient le réseau des injections élémentaires



De par (2.1), ce réseau induit le diagramme commutatif des homomorphismes de Mayer–Vietoris; on en déduit immédiatement le résultat. ∎

Ainsi nous avons obtenu un système inductif $\{H^{d(L)+n}(X_L, A_L); \varDelta\}$ sur la catégorie filtrante à droite $\mathcal{L}(E)$. Le n-ième *groupe de cohomologie de dimension infinie* de l'objet (X, A, f) se définit par

(2.3) $$\overset{\infty}{H}{}^n(X, A, f) := \varinjlim_{L\in\mathcal{L}(E)} H^{d(L)+n}(X_L, A_L)\,.$$

Supposons qu'un morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ soit de dimension finie et que n soit un entier. Notons par L_0 un sous-espace de E de dimension finie qui contient l'image de $f - gp$. Faisons correspondre à p la filtration $\mathcal{L}_p(E)$ constituée des espaces $L \in \mathcal{L}(E)$ qui contiennent L_0. Evidemment, la catégorie filtrante à droite $\mathcal{L}_p(E)$ est cofinale dans $\mathcal{L}(E)$. Soit $L \Rightarrow P$, $L, P \in \mathcal{L}_p(E)$. Par (1.2), le diagramme

(2.4) $$\begin{tikzcd} H^{d(L)+n}(X_L, A_L) & H^{d(L)+n}(Y_L, B_L) \arrow[l, "H^{d(L)+n}(p_L)"'] \\ H^{d(P)+n}(X_P, A_P) \arrow[u, "\varDelta"'] & H^{d(P)+n}(Y_P, B_P) \arrow[l, "H^{d(P)+n}(p_P)"'] \arrow[u, "\varDelta"'] \end{tikzcd}$$

commute (p_L, p_P désignent les restrictions respectives de p à X_L et X_P). Si l'injection $L \subset P$ n'est pas élémentaire, elle se décompose en injections élémentaires, chacune induisant un diagramme commutatif du type (2.4). Par suite, p détermine la transformation naturelle $\{H^{d(L)+n}(p_L)\}$ des systèmes inductifs $\{H^{d(L)+n}(X_L, A_L); \varDelta\}$ et $\{H^{d(L)+n}(Y_L, B_L); \varDelta\}$ définis sur la catégorie filtrante à droite $\mathcal{L}(E)$. Appliquant le foncteur $\varinjlim_{L\in\mathcal{L}_p(E)}$ à cette transformation, on obtient

(2.5) $$\overset{\infty}{H}{}^n(p) := \varinjlim_{L\in\mathcal{L}_p(E)} H^{d(L)+n}(p_L) : \overset{\infty}{H}{}^n(Y, B, g) \to \overset{\infty}{H}{}^n(X, A, f)\,.$$

Le fait que $\overset{\infty}{H}{}^n$ est un foncteur découle du fait que H^q est un foncteur pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et des propriétés bien connues des limites inductives.

Nous allons définir l'homomorphisme du cobord de dimension infinie.

(2.6) Lemme. *Soient* (X, A, f) *un objet*, n *un entier*, $L, P \in \mathcal{L}(E)$. *Si* $L \subset P$, *le diagramme suivant commute* :

(2.6.1)
$$\begin{array}{ccc} H^{d(L)+n}(X_L, A_L) & \xleftarrow{(-1)^{d(L)}\delta_L} & H^{d(L)+n-1}(A_L) \\ \Big\downarrow \Delta & & \Big\downarrow \Delta \\ H^{d(P)+n}(X_P, A_P) & \xleftarrow{(-1)^{d(P)}\delta_P} & H^{d(P)+n-1}(A_P) \end{array}$$

(δ_L, δ_P *étant les cobords dans la cohomologie de Čech*).

Démonstration. Si $L \Rightarrow P$, le résultat découle de (1.3). Sinon, il existe une suite d'injections élémentaires entre L et P, chacune induisant un carré commutatif du type (2.6.1). ∎

Nous définissons l'homomorphisme du cobord de dimension infinie par

(2.7)
$$\overset{\infty}{\delta} := \varinjlim_{L \in \mathcal{L}(E)} (-1)^{d(L)} \delta_L : \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(A, f|A) \to \overset{\infty}{H}{}^n(X, A, f)\,.$$

Ainsi nous venons de décrire la cohomologie de dimension infinie $(\overset{\infty}{H}{}^*, \overset{\infty}{\delta}{}^*)$ sur la catégorie $\mathcal{W}_0(E)$. Ce foncteur satisfait les axiomes d'Eilenberg–Steenrod quelque peu modifiés, que nous formulons ci-après sans vérification (les démonstrations résultent immédiatement du fait que ces axiomes sont valables dans la cohomologie de Čech et que les limites inductives préservent les monomorphismes et épimorphismes (voir aussi [2], p. 104–106 ou [19])).

Avant de formuler l'axiome d'homotopie, nous précisons la notion d'homotopie dans la catégorie $\mathcal{W}(E)$. Posons

$$(X, A, f) \times [0,1] := (X \times [0,1], A \times [0,1], \widehat{f}\,)\,,$$

où $\widehat{f}(x,t) := f(x)$ pour tous $x \in X$ et $t \in [0,1]$. Par *homotopie* dans la catégorie $\mathcal{W}(E)$, nous entendons tout morphisme $F : (X, A, f) \times [0,1] \to (Y, B, g)$. Une homotopie F est dite *compacte* (*de dimension finie*) si F est compact (de dimension finie, resp.).

(2.8) Axiome d'homotopie. *Si l'homotopie* F *est de dimension finie*, *alors* $\overset{\infty}{H}{}^*(F(\cdot,0)) = \overset{\infty}{H}{}^*(F(\cdot,1))$. ∎

(2.9) Axiome d'exactitude. *Étant donné un morphisme* $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ *de dimension finie*, *tous les carrés dans le diagramme suivant sont commutatifs et les deux lignes sont exactes* :

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \overset{\infty}{H}{}^n(X,f|X) \arrow[l] & \overset{\infty}{H}{}^n(X,A,f) \arrow[l] & \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(A,f|A) \arrow[l, "\overset{\infty}{\delta}"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & \overset{\infty}{H}{}^n(Y,g|Y) \arrow[l] \arrow[u, "\overset{\infty}{H}{}^n(p|X)"'] & \overset{\infty}{H}{}^n(Y,B,g) \arrow[l] \arrow[u, "\overset{\infty}{H}{}^n(p)"'] & \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(B,g|B) \arrow[l, "\overset{\infty}{\delta}"'] \arrow[u, "\overset{\infty}{H}{}^{n-1}(p|A)"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(2.10) Axiome d'excision. *Soient* (X, A, f) *un objet et* V *un ouvert de* X. *Si* $\overline{V} \subset \operatorname{Int} A$, *alors l'homomorphisme*

$$\overset{\infty}{H}{}^*(X, A, f) \to \overset{\infty}{H}{}^*(X \setminus V, A \setminus V, f|(X \setminus V))$$

induit par l'inclusion est un isomorphisme. ■

Au lieu de l'axiome de dimension nous avons

(2.11) Axiome de coefficients.

$$\overset{\infty}{H}{}^n(S) = \begin{cases} \textit{l'anneau (le corps) des coefficients} & \textit{si } n = -1, \\ 0 & \textit{si } n \neq -1,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$ ■

Nous appelons *rayon* dans l'espace normé E tout ensemble $U \subset E$ tel qu'il existe $a \in E$, $a \neq 0$, de sorte que $U = \{\lambda a : \lambda > 0\}$. Nous utiliserons dans le chapitre III les faits suivants, valables dans la théorie de cohomologie de dimension infinie :

(2.12.1) $$\overset{\infty}{H}{}^*(E) = \overset{\infty}{H}{}^*(K) = \overset{\infty}{H}{}^*(E \setminus U) = \overset{\infty}{H}{}^*(E \setminus 0, E \setminus 0) = 0\,,$$

(2.12.2) $$\overset{\infty}{H}{}^*(E \setminus 0) = \overset{\infty}{H}{}^*(S)\,,$$

(2.12.3) $$\overset{\infty}{H}{}^n(E, E \setminus 0) = \overset{\infty}{H}{}^n(K, S) = \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(S) \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{Z}.$$ ■

Une suite d'objets $\{(X_k, A_k, f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}(E)$ est dite *décroissante vers un objet* (X, A, f) si $X = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} X_k$, $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ et f est la restriction commune des f_k à A. Un objet (X, A, f) de $\mathcal{W}(E)$ est dit *propre* si f est propre, bornée et $A = f^{-1}(f(A))$. Les objets propres jouent dans $\mathcal{W}(E)$ le même rôle que des paires compactes dans la catégorie des paires de Hausdorff. Nous allons formuler et montrer la propriété de continuité de la cohomologie de dimension infinie.

(2.13) Continuité. *Supposons qu'une suite* $\{(X_k, A_k, f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *d'objets propres décroisse vers un objet* (X, A, f). *On a alors* :

(2.13.1) $$\overset{\infty}{H}{}^*(X, A, f) = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \overset{\infty}{H}{}^*(X_k, A_k, f_k)\,;$$

(2.13.2) $$\overset{\infty}{\delta} = \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \overset{\infty}{\delta}_k\,;$$

de plus, les deux égalités sont fonctorielles.

Démonstration. (2.13.1) Nous employons la continuité de la cohomologie de Čech en tenant compte de la permutabilité de deux limites inductives ([19],

p. 199, lemme (5.2)) :

$$\begin{aligned}\varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \overset{\infty}{H}{}^n(X_k, A_k, f_k) &= \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \varinjlim_{L\in\mathcal{L}(E)} H^{d(L)+n}((X_k)_L, (A_k)_L)\\ &= \varinjlim_{L\in\mathcal{L}(E)} \varinjlim_{k\in\mathbb{N}} H^{d(L)+n}((X_k)_L, (A_k)_L)\\ &= \varinjlim_{L\in\mathcal{L}(E)} H^{d(L)+n}(X_L, A_L) = \overset{\infty}{H}{}^n(X, A, f)\,.\end{aligned}$$

(2.13.2) ainsi que la dernière conclusion se montrent de manière similaire. ■

Le morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ de dimension finie est appelé *morphisme de Vietoris* ($\mathbb{Z}_2$*-morphisme de Vietoris*) si $p : (X, A) \to (Y, B)$ est une application de Vietoris ($\mathbb{Z}_2$-application de Vietoris, resp.). D'après le théorème (1.6) et la définition (2.5), on a

(2.14) *Tout morphisme de Vietoris* ($\mathbb{Z}_2$*-morphisme de Vietoris*) $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ *d'un objet propre* (X, A, f) *dans un objet propre* (Y, B, g) *induit l'isomorphisme*

$$\overset{\infty}{H}{}^*(X, A, f) \xleftarrow{\overset{\infty}{H}{}^*(p)} \overset{\infty}{H}{}^*(Y, B, g) \qquad (\overset{\infty}{H}{}^*(X, A, f; \mathbb{Z}_2) \xleftarrow{\overset{\infty}{H}{}^*(p;\mathbb{Z}_2)} \overset{\infty}{H}{}^*(Y, B, g; \mathbb{Z}_2)\,,\ \textit{resp.})$$

(comp. [2], p. 110, (3.3.2)). ■

3. Prolongement du foncteur cohomologie de dimension infinie à une certaine classe de morphismes compacts de $\mathcal{W}(E)$. La définition (2.5) n'est valable que dans le cas où le morphisme p de $\mathcal{W}(E)$ est de dimension finie. Nous ne connaissons aucune méthode de prolongement du foncteur cohomologie de dimension infinie à la catégorie $\mathcal{W}(E)$ toute entière (ce serait là une extension considérable de la construction de Gelman — mais pas encore une généralisation). Toutefois, grâce à la continuité (2.13) et au concept de système approximatif (voir déf. (3.2)), nous allons prolonger le foncteur $(\overset{\infty}{H}{}^*, \overset{\infty}{\delta}{}^*)$ à une certaine classe $\mathcal{F}$ de morphismes compacts de $\mathcal{W}(E)$ (déf. (3.1)), généralisant ainsi la construction de Gęba–Granas. Les résultats obtenus suffisent aux applications dans la théorie des champs admissibles (chapitre III).

(3.1) Définition. Nous notons par $\mathcal{F}$ la classe des morphismes $p : (X, A, f) \to (Y, B, g)$ de la catégorie $\mathcal{W}(E)$ vérifiant les conditions suivantes :

(3.1.1) (X, A, f) est un objet propre;

(3.1.2) p est un morphisme compact;

(3.1.3) $g : Y \to E$ est une injection canonique (alors $Y \subset E$).

Dans la suite, nous écrirons presque toujours (Y, B) au lieu de (Y, B, g) à condition que $g : Y \to E$ soit une injection canonique. Tout morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ de la classe $\mathcal{F}$ admet la factorisation $(X, A, f) \xrightarrow{\hat{p}} (p(X), p(A)) \xrightarrow{j} (Y, B)$, où $\widehat{p}(x) := p(x)$ et j est l'injection canonique. Il est évident que j est de dimension finie. Il est facile de vérifier que la paire $(p(X), p(A))$ étant fermée et bornée dans E, elle est un objet propre de $\mathcal{W}(E)$.

(3.2) Définition. On appelle *système approximatif* d'un morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ de la classe $\mathcal{F}$ toute suite de morphismes de dimension finie $\{p_k : (X, A, f) \to (Y_k, B_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

(3.2.1) $\{(Y_k, B_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'objets propres décroissant vers la paire $(p(X), p(A))$;

(3.2.2) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une homotopie compacte $F : (X, A, f) \times [0, 1] \to (Y_k, B_k)$ dans la catégorie $\mathcal{W}(E)$ telle que $F(x, 0) = p(x)$ et $F(x, 1) = p_k(x)$ quel que soit $x \in X$;

(3.2.3) si $k \geq l$, il existe une homotopie $G : (X, A, f) \times [0, 1] \to (Y_l, B_l)$ de la catégorie $\mathcal{W}_0(E)$ telle que $G(x, 0) = p_k(x)$ et $G(x, 1) = p_l(x)$ quel que soit $x \in X$.

(3.3) Lemme. *Tout morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ de la classe $\mathcal{F}$ admet un système approximatif.*

Démonstration. L'application $f - p : X \to E$ étant compacte, en vertu du théorème d'approximation de Schauder on a une application de dimension finie $(f - p)_k : X \to E$ telle que $\|(f - p)_k(x) - (f - p)(x)\| < 1/k$ pour tout $x \in X$ et $k \in \mathbb{N}$. Posons

$$p_k := f - (f - p)_k\,, \qquad Y_k := K(p(X), 1/k)\,, \qquad B_k := K(p(A), 1/k)\,.$$

L'homotopie $F : (X, A, f) \times [0, 1] \to (Y_k, B_k)$, $F(x, t) := tp_k(x) + (1 - t)p(x)$ pour $x \in X$ et $t \in [0, 1]$, vérifie (3.2.2). L'homotopie $G : (X, A, f) \times [0, 1] \to (Y_l, B_l)$, $G(x, t) := tp_k(x) + (1 - t)p_l(x)$, où $k \geq l$ et $t \in [0, 1]$, réalise (3.2.3). ■

Soit $\{(Y_k, B_k), p_k\}$ un système approximatif d'un morphisme $p : (X, A, f) \to (Y, B)$. D'après (3.2.3) il induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{\infty}{H}{}^*(X, A, f) & \\
\overset{\infty}{H}{}^*(Y_k, B_k) \arrow[ur, "\overset{\infty}{H}{}^*(p_k)"] & & \overset{\infty}{H}{}^*(Y_l, B_l) \arrow[ul, "\overset{\infty}{H}{}^*(p_l)"'] \arrow[ll, "\overset{\infty}{H}{}^*(i_k^l)"]
\end{tikzcd}$$

où $i_k^l : (Y_k, B_k) \to (Y_l, B_l)$, $k \geq l$, est l'injection canonique.

Nous définissons l'homomorphisme induit par le morphisme p de la classe $\mathcal{F}$ par

$$\overset{\infty}{H}{}^*(p) := (\varinjlim_{k\in\mathbb{N}} \overset{\infty}{H}{}^*(p_k)) \circ \overset{\infty}{H}{}^*(j)\,, \tag{3.4}$$

où $\{(Y_k, B_k, p_k)\}$ est un système approximatif de p et $j : (p(X), p(A)) \to (Y, B)$ est l'injection canonique. Pour vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du système approximatif, nous montrerons trois lemmes techniques (voir [19], p. 186–187).

(3.5) Lemme. *Soient* $\{(Y_k, B_k), p_k\}$ *et* $\{(Y'_k, B'_k), p'\}$ *deux systèmes approximatifs d'un morphisme* $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ *tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & (X,A) \arrow[dl, "p'_k"'] \arrow[dr, "p_k"] & \\ (Y'_k, B'_k) & & (Y_k, B_k) \arrow[ll, "i_k"] \end{tikzcd}$$

commute pour tout $k \in \mathbb{N}$ (i_k *étant une injection canonique*). *Alors*

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p'_k) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p_k)\,.$$

Démonstration. En vertu de (2.13.1), on a

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p'_k) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(i_k p_k) = (\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p_k)) \circ (\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(i_k)) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p_k)\,. \ \blacksquare$$

(3.6) Lemme. *Si* $\{(Y_k, B_k), p\}$ *et* $\{(Y_k, B_k), p'_k\}$ *sont deux systèmes approximatifs d'un morphisme* p, *alors*

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p_k) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p'_k)\,.$$

Démonstration. De par (3.2.2), p_k et p'_k sont homotopes dans (Y_k, B_k) pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème d'approximation de Schauder, chacune de ces homotopies admet une approximation de dimension finie arbitrairement proche. Il ne reste plus qu'à invoquer (2.8) et (3.5). ■

(3.7) Lemme. *Si* $\{(Y'_k, B'_k), p'_k\}$ *et* $\{(Y''_k, B''_k), p''_k\}$ *sont deux systèmes approximatifs quelconques d'un morphisme* p, *on a*

$$\underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p'_k) = \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathbf{Lim}}}\, \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p''_k)\,.$$

Démonstration. Posons $(Y_k, B_k) := (Y'_k \cup Y''_k, B'_k \cup B''_k)$. Soient $i'_k : (Y'_k, B'_k) \to (Y_k, B_k)$ et $i''_k : (Y''_k, B''_k) \to (Y_k, B_k)$ les injections canoniques. Considérons les deux systèmes approximatifs $\{(Y_k, B_k), i'_k p'_k\}$ et $\{(Y_k, B_k), i''_k p''_k\}$. En employant les lemmes (3.6) et (3.5) nous obtenons l'équation voulue. ■

(3.8) Corollaire. *La définition* (3.4) *est bien posée.* ■

(3.9) Corollaire. *Si un morphisme* $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ *de dimension finie est de la classe* $\mathcal{F}$, *les définitions* (3.4) *et* (2.5) *coïncident.* ■

Le prolongement du foncteur $(\overset{\infty}{\check{H}}, \overset{\infty}{\delta})$ à la classe $\mathcal{F}$ garde les propriétés fondamentales de cohomologie (comp. [19], p. 189–190).

(3.10.1) *Si* $F : (X, A, f) \times [0, 1] \to (Y, B)$ *appartient à* $\mathcal{F}$, *alors* $\overset{\infty}{\check{H}}{}^*(F(\cdot, 0)) = \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(F(\cdot, 1))$. ■

(3.10.2) *Si* $p : (X, A, f) \to (Y, B)$ *et* $q : (Y, B) \to (Z, C)$ *appartiennent à* $\mathcal{F}$, *il en est de même pour* qp; *de plus* $\overset{\infty}{\check{H}}{}^*(qp) = \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(p) \circ \overset{\infty}{\check{H}}{}^*(q)$. ■

(3.10.3) *Si p appartient à $\mathcal{F}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \overset{\infty}{H}{}^n(X,A,f) & \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(A,f|A) \arrow[l, "\overset{\infty}{\delta}"'] \\ \overset{\infty}{H}{}^n(Y,B) \arrow[u, "\overset{\infty}{H}{}^n(p)"'] & \overset{\infty}{H}{}^{n-1}(B) \arrow[l, "\overset{\infty}{\delta}"'] \arrow[u, "\overset{\infty}{H}{}^{n-1}(p|A)"'] \end{tikzcd}$$

commute pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ∎

Nous allons prouver une version du théorème (1.7) pour le cas de la dimension infinie en utilisant la cohomologie de dimension infinie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$. Notons par $\alpha : E \to E$ l'application antipodale dans un espace normé E. Par *involution de l'objet* (X, f) nous entendons toute involution continue $\tau : X \to X$ vérifiant $f\tau = \alpha f$. Observons qu'une telle involution n'est pas un morphisme dans $\mathcal{W}(E)$.

(3.11) Théorème. *Soient $q : (X,f) \to E \setminus 0$ un morphisme de la classe $\mathcal{F}$, $g : (X,f) \to S$ un $\mathbb{Z}_2$-morphisme de Vietoris et τ une involution de l'objet (X,f) sans points fixes. Supposons en outre que X soit métrique et que q vérifie* (1.7.1). *Alors*

$$\overset{\infty}{H}{}^{-1}(q;\mathbb{Z}_2) : \overset{\infty}{H}{}^{-1}(E\setminus 0;\mathbb{Z}_2) \to \overset{\infty}{H}{}^{-1}(X,f;\mathbb{Z}_2)$$

est un isomorphisme.

Démonstration (en trois étapes, comp. [28], p. 41–43). (1) Supposons que q soit de dimension finie et qu'un espace $L_0 \subset E$ de dimension finie contienne $(f-g)(X)$ et $(f-q)(X)$. Fixons un espace $L \supset L_0$, $L \in \mathcal{L}(E)$, et considérons le diagramme $S_L \overset{g_L}{\leftarrow} X_L \overset{q_L}{\to} E_L \setminus 0$. Comme g_L est une $\mathbb{Z}_2$-application de Vietoris, on a

$$H^{d(L)-1}(X_L;\mathbb{Z}_2) = H^{d(L)-1}(S_L;\mathbb{Z}_2) = H^{d(L)-1}(S^{d(L)-1};\mathbb{Z}_2)\,.$$

Il est facile de vérifier que la restriction de τ à X_L est une involution continue sans points fixes. De plus, q_L vérifie (1.7.1). Donc, d'après (1.7),

$$H^{d(L)-1}(q_L;\mathbb{Z}_2) : H^{d(L)-1}(E_L\setminus 0;\mathbb{Z}_2) \to H^{d(L)-1}(X_L;\mathbb{Z}_2)$$

est un isomorphisme. Ceci restant valable pour les limites inductives contenues dans la définition et $L \in \mathcal{L}(E)$, $L \supset L_0$, étant arbitraire, nous obtenons le théorème.

(2) Supposons que q est compact et que $q\tau(x) = -q(x)$ pour tout $x \in X$. Alors, étant donné un système approximatif $\{Y_k, q_k\}$ de q, les morphismes q_k de dimension finie vérifient (1.7.1) pour tout $k \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. En vertu de (1), les $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(q_k;\mathbb{Z}_2)$ sont des isomorphismes, et $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(q;\mathbb{Z}_2)$ l'est donc aussi.

(3) (Le cas général). Définissons une application F sur $X \times [0,1]$ par

$$F(x,t) := \frac{q(x)}{1+t} - \frac{tq(\tau(x))}{1+t}\,.$$

De par (1.7.1), $F(x,t) \neq 0$ pour tout $x \in X$ et $t \in [0,1]$. Puisque

$$f(x) - F(x,t) = \frac{(f-q)(x) - t(f-q)(\tau(x))}{1+t}$$

et que $f-q$ est compacte, $F : (X,f) \times [0,1] \to E \setminus 0$ est une homotopie dans la classe $\mathcal{F}$. D'après (3.10.1),

$$\overset{\infty}{\check{H}}{}^{-1}(q;\mathbb{Z}_2) = \overset{\infty}{\check{H}}{}^{-1}(F(\cdot,0);\mathbb{Z}_2) = \overset{\infty}{\check{H}}{}^{-1}(F(\cdot,1);\mathbb{Z}_2)\,.$$

Mais puisque $F(\cdot,1) = \frac{1}{2}(q(x) - q(\tau(x)))$ satisfait l'hypothèse de (2), l'homomorphisme induit est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration. ∎

II. Distances de Borsuk

Ce chapitre nous permettra de fournir, dans le chapitre III, des exemples d'applications et de champs de vecteurs faiblement admissibles, fortement admissibles et sphériques.

Dans le premier paragraphe, nous rappelons des notions et des notations concernant les transformations multivoques qui nous seront utiles ultérieurement. Nous établissons certaines relations entre un espace métrique (M,μ) et l'espace $\mathcal{D}(M)$ de toutes les parties fermées, bornées et non vides de M, métrisé par la distance de Hausdorff ϱ_S. Nous introduisons la notion de famille d'ensembles totalement bornée inférieurement ou supérieurement (déf. (1.2)) et nous montrons le théorème (1.9) des sélections multivoques complètement continues, à valeurs non vides, pour une certaine classe de transformations multivoques contenant les m-applications ϱ_S-hypercontinues (déf. (2.4)). Ce théorème nous permettra d'obtenir des exemples d'applications et de champs de vecteurs faiblement et fortement admissibles (considérées dans le paragraphe 1 du chapitre III).

Dans le deuxième paragraphe, nous donnons une définition générale d'une certaine distance (formule (2.3)). La distance de Hausdorff ϱ_S, celle de continuité de Borsuk ϱ_C ([4]) ainsi que la distance ϱ_F définie sur les parties fermées, bornées et non vides d'un espace normé — en sont des cas particuliers. La propriété la plus importante de ϱ_F consiste en ce que les ensembles peu éloignés dans ϱ_F disconnectent l'espace normé ¡¡de la même façon¿¿ (voir th. (2.8)).

Dans le troisième paragraphe, nous nous intéressons tout d'abord à l'opération $\widetilde{\ }$ introduite dans [22]. On fait correspondre à chaque partie fermée et bornée X d'un espace normé E un ouvert BX qui est l'union de toutes les composantes bornées de $E \setminus X$, et on note par $\widetilde{X}$ l'union $X \cup BX$. Si une transformation multivoque $\phi : M \to E$ est à valeurs fermées, bornées et non vides, nous définissons deux transformations multivoques $B\phi : M \to E$ et $D\phi : M \to E$ de la manière suivante : $(B\phi)(x) := B(\phi(x))$ et $(D\phi)(x) := E \setminus \widetilde{\phi(x)}$. Nous montrons que dans le cas où $\phi : M \to E$ est ϱ_S-semi-continue supérieurement et ϱ_F-semi-continue inférieurement les graphes de $B\phi$ et $D\phi$ sont des ouverts du produit $M \times E$

(th. (3.6)). En outre, nous trouvons des conditions suffisantes sur une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(E)$ pour que la famille $\widetilde{\mathcal{A}} := \{\widetilde{X} : X \in \mathcal{A}\}$ soit totalement bornée dans l'espace métrique $(\mathcal{D}(E), \varrho_S)$. Ces énoncés nous permettront de présenter ultérieurement des exemples d'applications et de champs de vecteurs sphériques (par. 2 du chapitre III).

1. Transformations multivoques et distance de Hausdorff. On appelle *transformation multivoque* (ou en abrégé *m-transformation*) toute relation ϕ de graphe $\Gamma(\phi)$ d'un ensemble M vers un ensemble M'. Nous employons les notations et les notions suivantes :

- $\phi : M \to M'$ — une m-transformation de M dans M';
- $\phi(x) := \{y \in M' : (x, y) \in \Gamma(\phi)\}$ — la *valeur* de la m-transformation ϕ au point $x \in M$;
- $\phi(A) := \bigcup_{x \in A} \phi(x)$ — l'*image* d'un ensemble A par la m-transformation ϕ;
- $\{\phi(x) : x \in A\}$ — l'*hyperimage* de l'ensemble A par ϕ.

Une m-transformation $\phi : M \to M'$ est dite

- *sélection multivoque* (en abrégé : *m-sélection*) d'une m-transformation $\psi : M \to M'$ si $\phi(x) \subset \psi(x)$ pour tout $x \in M$;
- *involution multivoque* (en abrégé : *m-involution*) si $M = M'$ et ϕ est symétrique (comme relation);
- *fortement injective* si $\phi(x) \cap \phi(y) \neq \emptyset$ entraîne $x = y$ pour tous $x, y \in M$.

Soient M, M' deux espaces topologiques de Hausdorff. Une m-transformation $\phi : M \to M'$ est appelée

- *localement compacte* si tout $x \in M$ admet un voisinage $V \subset M$ dont l'image $\phi(V)$ est contenue dans un compact de M';
- *compacte* si $\phi(M)$ est inclus dans un compact de M';
- *semi-continue supérieurement* si ses valeurs sont compactes et l'ensemble $\{x \in M : \phi(x) \subset U\}$ est ouvert pour tout ouvert U de M';
- *acyclique* ($\mathbb{Z}_2$-*acyclique*) si elle est semi-continue supérieurement et à valeurs acycliques ($\mathbb{Z}_2$-acycliques).

Soient M, Γ, M' des espaces métriques. Les deux applications $M \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} M'$ sont dites former une

- *paire sélective* d'une m-transformation $\phi : M \to M'$ si $\phi(x) \supset qp^{-1}(x)$ pour tout $x \in M$;
- *paire déterminant* une m-transformation $\phi : M \to M'$ si $\phi(x) = qp^{-1}(x)$ pour tout $x \in M$;
- *paire faiblement admissible* si p est propre et surjective et pour tout borné X de M, $q(p^{-1}(X))$ est contenu dans un compact de M';

• *paire admissible* ($\mathbb{Z}_2$-admissible) (voir [7], [8], [23], [24]) si elles forment une paire faiblement admissible, p étant de plus une application de Vietoris (une $\mathbb{Z}_2$-application de Vietoris, respectivement).

Soient (M,μ) un espace métrique et M' un espace de Hausdorff. Une m-transformation $\phi : M \to M'$ est appelée

• *ε-transformation* pour un $\varepsilon > 0$ ([23], [28]) si $\phi(x) \cap \phi(y) \neq \emptyset$ implique $\mu(x,y) < \varepsilon$ quels que soient $x, y \in M$;

• *ε-transformation locale relativement à un ouvert V de M* ([7], [28]) si pour tout $x \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule $K(x,\varepsilon)$ soit contenue dans V et la restriction $\phi|K(x,\varepsilon)$ soit une ε-transformation (par *restriction* d'une m-transformation ϕ à une partie X de M on entend la m-transformation $\phi|X : X \to M'$ de graphe $\Gamma(\phi|X) := \Gamma(\phi) \cap (X \times M')$);

• *complètement continue* si elle est semi-continue supérieurement et l'image $\phi(X)$ de toute partie bornée X de M par ϕ est contenue dans un compact de M'.

Soit (M,μ) un espace métrique. Nous rappelons que $\mathcal{D}(M)$ désigne la famille de toutes les parties non vides, fermées et bornées de M. La *distance de Hausdorff* entre deux éléments X et Y de $\mathcal{D}(M)$ se définit par

$$\varrho_S(X,Y) := \inf\{\varepsilon > 0 : X \subset O_\varepsilon(Y) \text{ et } Y \subset O_\varepsilon(X)\}.$$

Dans ce qui suit l'espace $\mathcal{D}(M)$ sera muni de la distance de Hausdorff. Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$ est dite *totalement bornée* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ε-dense dans $\mathcal{A}$. Notons par $\mathcal{D}_0(M)$ la famille de toutes les parties totalement bornées, fermées et non vides de M.

(1.1) Nous avons :

(1.1.1) *le plongement $x \rightarrowtail \{x\}$ de M dans $\mathcal{D}(M)$ est fermé*;
(1.1.2) *si X est un fermé de M, $\mathcal{D}(X)$ est fermé dans $\mathcal{D}(M)$*;
(1.1.3) *$\mathcal{D}_0(M)$ est fermé dans $\mathcal{D}(M)$*;
(1.1.4) *$\mathcal{D}(M)$ est complet si et seulement si M est complet*;
(1.1.5) *$\mathcal{D}(M)$ est totalement borné si et seulement si M est totalement borné.* ■

Nous allons introduire deux notions liées à celle de famille totalement bornée.

(1.2) Définition. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$. On dit que $\mathcal{A}$ est *bornée supérieurement* (*inférieurement*) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une famille finie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ telle que pour tout $X \in \mathcal{A}$ on puisse trouver un $Y \in \mathcal{B}$ tel que $X \subset O_\varepsilon(Y)$ ($Y \subset O_\varepsilon(X)$, respectivement).

On a bien que si $\mathcal{A}$ est totalement bornée alors elle est bornée supérieurement et inférieurement. Nous allons établir d'autres relations entre ces trois notions.

(1.3) Lemme. *Si une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$ se compose d'ensembles totalement bornés, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(1.3.1) *$\mathcal{A}$ est totalement bornée*;

(1.3.2) *$\mathcal{A}$ est bornée supérieurement;*
(1.3.3) $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{X\in\mathcal{A}} X$ *est totalement borné dans M.*

Démonstration. L'implication (1.3.1)⇒(1.3.2) est immédiate.

(1.3.2)⇒(1.3.3). Pour $\varepsilon > 0$ donné il existe une famille finie $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ telle que pour tout $X \in \mathcal{A}$ il existe $Y \in \mathcal{B}$ vérifiant $X \subset O_{\varepsilon/2}(Y)$. De chaque $Y \in \mathcal{B}$ choisissons un ensemble fini $Z_Y \subset Y$, $\frac{\varepsilon}{2}$-dense dans Y. $\mathcal{B}$ étant finie, $\bigcup_{Y\in\mathcal{B}} Z_Y$ est fini et ε-dense dans $\bigcup \mathcal{A}$.

(1.3.3)⇒(1.3.1). L'adhérence de $\bigcup \mathcal{A}$ étant totalement bornée, il résulte de (1.1.5) que l'espace métrique $\mathcal{D}(\overline{\bigcup \mathcal{A}})$ l'est aussi. Puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\overline{\bigcup \mathcal{A}})$, la propriété (1.3.1) est vérifié. ■

Dans le cas général, les notions de famille bornée supérieurement, bornée inférieurement et totalement bornée sont presque indépendantes :

(1.4) EXEMPLE. Soit l^2 l'espace des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$. Désignons par e_i la suite dont le i-ème terme est 1 et tous les autres sont 0. Posons $X := \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, $X_i := \{e_0, e_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$ On voit facilement que la famille $\mathcal{A}_1 := \{X_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$ est bornée supérieurement et inférieurement mais qu'elle n'est pas totalement bornée. N'étant pas bornée supérieurement, la famille $\mathcal{A}_2 := \{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ est bornée inférieurement. $\mathcal{A}_3 := \{\{e_i\} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$ est bornée supérieurement mais elle n'est pas bornée inférieurement. Enfin, $\mathcal{A}_4 := \{X\}$ est totalement bornée alors que $\bigcup \mathcal{A}_4 = X$ n'est pas totalement borné dans l^2. ■

La notion de famille bornée inférieurement apparaît dans le résultat intéressant suivant :

(1.5) THÉORÈME. *Pour toute famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$ non vide et bornée inférieurement on peut trouver une partie totalement bornée A de M telle que* $\operatorname{dist}(A, X) = 0$ *quel que soit $X \in \mathcal{A}$.*

Avant de montrer le théorème nous énonçons le :

(1.6) LEMME. *Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$ bornée inférieurement et $A \subset M$ totalement borné. Si pour un $\varepsilon > 0$ on a*

(1.6.1) $\operatorname{dist}(A, X) < \varepsilon$ *pour tout $X \in \mathcal{A}$,*

alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $B \subset M$ totalement borné tel que

(1.6.2) *$A \subset B \subset O_\varepsilon(A)$ et $B \setminus A$ est fini,*
(1.6.3) $\operatorname{dist}(B, X) < \alpha$ *pour tout $X \in \mathcal{A}$.*

Démonstration. Donnons-nous $\alpha > 0$ et choisissons une sous-famille finie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant

(1.6.4) pour tout $X \in \mathcal{A}$ il existe $Y \in \mathcal{B}$ tel que $Y \subset O_\alpha(X)$.

De chaque $Y \in \mathcal{B}$, choisissons un $b_Y \in Y$ tel que $\operatorname{dist}(A, \{b_Y\}) < \varepsilon$ et posons $B := A \cup \{b_Y : Y \in \mathcal{B}\}$. La condition (1.6.2) est immédiate. Fixons maintenant $X \in \mathcal{A}$

et, en vertu de (1.6.4), prenons $Y \in \mathcal{B}$ tel que $Y \subset O_\alpha(X)$. Alors $\operatorname{dist}(B, X) < \operatorname{dist}(\{b_Y\}, X) < \alpha$. ∎

D é m o n s t r a t i o n d u t h é o r è m e. Pour $\varepsilon = 1$ choisissons une sous-famille finie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant (1.6.4). Choisissons un élément de chaque $Y \in \mathcal{B}$; l'ensemble de ces éléments, soit Y_0, est totalement borné (étant fini). D'après (1.6) il existe une famille $\mathcal{C} := \{Y_1, Y_2, \ldots\}$ vérifiant

(1.6.5) $Y_n \subset Y_{n+1} \subset O_{1/2^n}(Y)$, $n \in \mathbb{N}$,
(1.6.6) $\operatorname{dist}(Y_n, X) < 1/2^n$ quels que soient $X \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'après (1.6.5), $\mathcal{C}$ est totalement bornée. Il résulte donc de (1.3) que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n =: A$ l'est aussi. Nous avons $\operatorname{dist}(A, X) < \operatorname{dist}(Y, X) < 1/2^n$ quels que soient $X \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$, d'où $\operatorname{dist}(A, X) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{A}$. ∎

(1.7) COROLLAIRE. *Si l'espace métrique M est complet et une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(M)$ bornée inférieurement est non vide, il existe un compact A de M tel que $A \cap X \neq 0$ pour tout $X \in \mathcal{A}$.* ∎

Par *application multivoque* (ou simplement *m-application*) nous entendons une m-transformation $\phi : M \to M'$ à valeurs non vides, fermées et bornées dans un espace métrique M'.

Nous allons maintenant exploiter le corollaire (1.7) afin d'obtenir un théorème de m-sélection, qui nous sera utile dans le chapitre III (voir (III, (1.2))). Nous montrons tout d'abord le :

(1.8) LEMME. *Soit $\phi : M \to M'$ une m-application d'un espace de Hausdorff M dans un espace métrique complet M' vérifiant*

(1.8.1) $\{\phi(x) : x \in M\}$ *est borné inférieurement dans* $\mathcal{D}(M')$;
(1.8.2) $\Gamma(\phi)$ *est fermé dans* $M \times M'$.

En outre, soit $\eta : M \to M'$ une m-sélection compacte de ϕ, à valeurs arbitraires (même vides) non nécessairement semi-continue supérieurement. Alors il existe une m-application $\psi : M \to M'$ compacte et semi-continue supérieurement telle que

$$\eta(x) \subset \psi(x) \subset \phi(x) \quad \textit{pour tout } x \in M. \tag{1.8.3}$$

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de (1.7) il existe un compact A de M' tel que

$$A \cap \phi(x) \neq \emptyset \quad \text{pour tout } x \in M. \tag{1.8.4}$$

Notons par B un compact de M' qui contient $\eta(M)$. Définissons la m-application $\psi : M \to M'$ par

$$\psi(y) := (A \cup B) \cap \phi(y)\,, \qquad y \in M\,. \tag{1.8.5}$$

D'après (1.8.4) nous avons $\emptyset \neq \psi(y) \subset \phi(y)$ pour tout $y \in M$. De plus $\psi(M) \subset A \cup B$, ψ est donc compacte. Puisque $\Gamma(\psi) = (M \times (A \cup B)) \cap \Gamma(\phi)$, (1.8.2) entraîne que le graphe de ψ est fermé dans $M \times M'$. Par conséquent, ψ est semi-continue supérieurement. Enfin $\eta(x) \subset B \cap \phi(x)$ pour tout $x \in M$, d'où (1.8.3). ∎

(1.9) Théorème. *Supposons qu'une m-application* $\phi : M \to M'$ *d'un espace métrique* M *dans un espace métrique complet* M' *soit à graphe fermé et satisfasse*

(1.9.1) $\{\phi(x) : x \in X\}$ *est borné inférieurement pour toute partie bornée* X *de* M.

Soit $\eta : M \to M'$ *une m-sélection complètement continue de* ϕ (*à valeurs peut-être vides*). *Alors il existe une m-application* $\psi : M \to M'$ *complètement continue vérifiant* (1.8.3). *En outre, si* M' *est un espace de Banach et les valeurs de* ϕ *sont convexes, on peut trouver une m-application complètement continue* $\psi' : M \to M'$ *vérifiant* (1.8.3) *et à valeurs convexes.*

Démonstration. Prenons un recouvrement $\mathcal{C}$ de M formé d'ensembles fermés et bornés, tel que

(1.9.2) la famille $\mathcal{C}_W := \{X \in \mathcal{C} : X \cap W \neq \emptyset\}$ est finie pour tout borné W de M (par exemple, pour $a \in M$ fixé la famille des couronnes fermées $\{K(a, n+1) \setminus O_n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ constitue un tel recouvrement).

Fixons $X \in \mathcal{C}$ et considérons les restrictions $\phi|X$ et $\eta|X$. D'après le théorème (1.8) on a une m-application $\psi_X : X \to M'$ semi-continue supérieurement et compacte telle que

$$\eta(y) \subset \psi_X(y) \subset \phi(y) \quad \text{pour tout } y \in X\,. \tag{1.9.5}$$

Nous définissons une m-application $\psi : M \to M'$ en posant

$$\psi(y) := \bigcup \{\psi_X(y) : y \in X \in \mathcal{C}\}\,.$$

Par (1.9.5) nous avons $\eta(y) \subset \psi(y) \subset \phi(y)$ pour tout $y \in M$. $\mathcal{C}$ étant un recouvrement de M et les valeurs de ψ_X n'étant pas vides pour tout $X \in \mathcal{C}$, il s'ensuit que $\psi(y) \neq \emptyset$ pour tout $y \in M$. Désignons par Z_X un compact de M' contenant $\psi_X(X)$. Si W est borné dans M, $\psi(W)$ est contenue dans l'union finie $\bigcup_{X \in \mathcal{C}_W} Z_X$ des ensembles compacts Z_X. Pour montrer que ψ est complètement continue il suffit de vérifier qu'elle est semi-continue supérieurement. Soit D un fermé de M'. Nous montrons que $Y := \{y \in M : \psi(y) \cap D \neq \emptyset\}$ est fermé. Pour tout $X \in \mathcal{C}$ posons $X(D) := \{y \in X : \psi_X(y) \cap D \neq \emptyset\}$. La famille $\mathcal{C}$ étant localement fini, il en résulte que $\{X(D) : X \in \mathcal{C}\}$ l'est aussi. Par conséquent, $Y = \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X(D)$ est fermé.

Au cas où M' est un espace de Banach, nous définissons la m-application $\psi' : M \to M'$ en posant $\psi'(y) := \overline{\mathrm{conv}}(\psi(y))$, où $\overline{\mathrm{conv}}(X)$ désigne l'enveloppe convexe fermée de X. Par des méthodes élémentaires nous vérifions que ψ' satisfait les conditions exigées. ∎

2. Distances de Borsuk et séparation. Dans ce paragraphe nous présentons la notion de distance de Borsuk ϱ et celle de m-application ϱ-(semi)-continue. Nous étudions par la suite diverses conditions de continuité pour une m-application $\phi : M \to M'$ reliées à la propriété suivante : si $\phi(x)$ sépare des points a

et b dans M', alors a et b sont séparés par toutes les images $\phi(y)$, y parcourant un voisinage de x dans M. Le résultat principal de cette section est le théorème (2.8).

Soit (M, μ) un espace métrique.

(2.1) DÉFINITION. On appelle *semi-distance* sur $\mathcal{D}(M)$ toute fonction $\overline{\varrho}$ de $\mathcal{D}(M) \times \mathcal{D}(M)$ dans l'intervalle $[0, +\infty]$ vérifiant les conditions suivantes :

(2.1.1) $\overline{\varrho}(X, Y) = 0$ si et seulement si $X \subset Y$;
(2.1.2) $\overline{\varrho}(X, Y) \le \overline{\varrho}(X, Z) + \overline{\varrho}(Z, Y)$ quels que soient $X, Y, Z \in \mathcal{D}(M)$.

Nous désignons par $\mathcal{K}_M$ une catégorie dont la classe des objets coïncide avec $\mathcal{D}(M)$ et dont les morphismes sont des transformations. Toutes les injections canoniques sont cependant supposées être des morphismes de $\mathcal{K}_M$. A chaque catégorie $\mathcal{K}_M$ nous faisons correspondre une semi-distance $\overline{\varrho}$ sur $\mathcal{D}(M)$ en posant

$$\overline{\varrho}(X, Y) := \inf\{|f| : f \in \mathcal{K}_M(X, Y)\}, \tag{2.2}$$

où $\mathcal{K}_M(X, Y)$ désigne l'ensemble des transformations $f : X \to Y$ qui sont des morphismes de $\mathcal{K}_M$ et par $|f|$ nous notons la borne supérieure des nombres $\mu(x, f(x))$, x parcourant X, que nous appellerons l'*écartement* de f.

Nous vérifions que (2.2) définit en effet une semi-distance. Si $X \subset Y$, l'injection canonique $X \to Y$ appartient à $\mathcal{K}_M(X, Y)$, donc $\overline{\varrho}(X, Y) = 0$. D'autre part, si $X \not\subset Y$, il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\operatorname{dist}(x, Y) \ge \varepsilon$. Par conséquent, l'écartement de toute transformation $f : X \to Y$ est supérieure ou égale à ε, d'où $\overline{\varrho}(X, Y) \ge \varepsilon$. La condition (2.1.1) est ainsi vérifiée. Maintenant donnons-nous $f \in \mathcal{K}_M(X, Z)$ et $g \in \mathcal{K}_M(Z, Y)$. Pour tout $x \in X$ nous avons $\mu(x, gf(x)) \le \mu(x, f(x)) + \mu(f(x), gf(x))$. En prenant les bornes supérieures pour x parcourant X, nous avons $|gf| \le |f| + |g|$. En prenant les bornes inférieures pour f parcourant $\mathcal{K}_M(X, Z)$ et g parcourant $\mathcal{K}_M(Z, Y)$, nous obtenons (2.1.2).

La *distance de Borsuk* sur $\mathcal{D}(M)$ se définit comme suit :

$$\varrho(X, Y) := \max\{\overline{\varrho}(X, Y), \overline{\varrho}(Y, X)\}, \qquad X, Y \in \mathcal{D}(M). \tag{2.3}$$

Il est facile de se convaincre que (2.3) donne en fait une distance (généralisée). D'ailleurs, max peut être remplacé par une fonction arbitraire de deux variables, non négative, symétrique, subadditive par rapport à chaque variable et qui ne s'annule qu'au cas où les deux variables sont égales à zéro. Nous introduisons maintenant la notion de continuité selon la distance de Borsuk ϱ.

(2.4) DÉFINITION. Soit M' un espace métrique. Une m-application $\phi : M \to M'$ est dite :

- *ϱ-semi-continue supérieurement* (*ϱ-semi-continue inférieurement*) *en* $x \in M$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x dans M tel que $\overline{\varrho}(\phi(y), \phi(x)) < \varepsilon$ ($\overline{\varrho}(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon$, resp.) pour tout $y \in V$;
- *ϱ-continue en* $x \in M$ lorsqu'elle est à la fois ϱ-semi-continue supérieurement et inférieurement en x;

• *localement bornée* si tout $x \in M$ admet un voisinage $V \subset M$ avec $\phi(V)$ borné dans M';

• *ϱ-hypercontinue* lorsqu'elle est ϱ-semi-continue supérieurement et $\{\phi(x) : x \in X\}$ est totalement borné dans $(\mathcal{D}(M'), \varrho)$ pour tout borné X de M.

Pour $X, Y \in \mathcal{D}(M)$ posons $\mathcal{K}_M(X, Y) := Y^X$, où Y^X désigne l'ensemble de toutes les transformations de X dans Y. Alors (2.3) détermine la distance de Hausdorff ϱ_S.

Nous allons maintenant examiner la relation entre l'hypothèse de ϱ_S-continuité d'une m-application et le problème posé au début du paragraphe.

(2.5) LEMME. *Soit $\phi : M \to M'$ une m-application d'un espace de Hausdorff M dans un espace métrique M', ϱ_S-semi-continue supérieurement en un point $x \in M$ donné. Considérons des points a et b appartenant à la même composante connexe de $M' \setminus \phi(x)$. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de x dans M tels que les ε-voisinages $O_\varepsilon(a)$ et $O_\varepsilon(b)$ sont contenus dans la même composante connexe de $M' \setminus \phi(y)$ pour tout $y \in V$.*

Démonstration. Donnons-nous un arc L dans $M' \setminus \phi(x)$ reliant a et b. L étant compact, et puisque par hypothèse il existe un $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de x dans M tels que $O_\varepsilon(L) \cap \phi(V) = \emptyset$, il en découle que $O_\varepsilon(a)$ et $O_\varepsilon(b)$ sont contenus dans la même composante connexe de $M' \setminus \phi(y)$ pour tout $y \in V$. ∎

Il est important de remarquer que lorsque $\phi(x)$ sépare des points a et b de M', il se peut qu'il existe un voisinage V de x dans M tel que a et b appartiennent à la même composante connexe de $M' \setminus \phi(y)$ pour tout $y \in V$, $y \neq x$. L'hypothèse de ϱ_S-continuité de ϕ ne suffit donc pas à assurer la séparation des points. L'exemple suivant en est une illustration.

(2.6) EXEMPLE. Posons $M := [0, 1]$, $M' := \mathbb{R}^2$, $\phi(s) := \{(\cos t, \sin t); 0 \le t \le 2\pi - s\}$, et choisissons $a := (0, 0)$, $b := (2, 0)$. Il est clair que a et b appartiennent à la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \phi(s)$ pour $s > 0$ et qu'ils sont séparés par $\phi(0)$. ∎

L'exemple de O'Neill présenté dans l'introduction est un exemple supplémentaire illustrant l'inaptitude de la distance de Hausdorff à séparer les points.

Nous allons définir sur la famille $\mathcal{D}(E)$ des parties fermées, bornées et non vides d'un espace de Banach E une distance ϱ_F qui nous sera utile. Étant donnés $X, Y \in \mathcal{D}(E)$, rappelons qu'une application $f : X \to Y$ est dite un *champ de vecteurs compact* (en abrégé : *champ compact*) lorsque $i - f : X \to E$ est compacte, $i : X \to E$ désignant l'injection canonique. Notons par $CF(X, Y)$ l'ensemble de tous les champs compacts de X dans Y et posons $\mathcal{K}_E(X, Y) := CF(X, Y)$. La formule (2.3) nous donne une distance notée par ϱ_F et vérifiant $\varrho_F \ge \varrho_S$. Dans le cas où E est de dimension finie, ses parties fermées et bornées sont compactes. L'ensemble $CF(X, Y)$ coïncide alors avec l'ensemble $C(X, Y)$ de toutes les applications de X dans Y. Par conséquent, ϱ_F n'est autre que la distance de continuité de Borsuk ϱ_C ([4]). Nous y reviendrons ultérieurement.

La propriété principale de ϱ_F est décrite par le théorème (2.8). Pour commencer, nous montrons le

(2.7) LEMME. *Soient $X, Y \in \mathcal{D}(E)$ et supposons que deux points a et b de l'espace de Banach E appartiennent au complémentaire de l'union $X \cup Y$. Si ces points sont dans la même composante connexe de $E \setminus Y$ tout en étant séparés l'un de l'autre par X, alors*

$$\overline{\varrho}_F(X, Y) \geq \min\{r_a, r_b\},$$

où $r_a := \operatorname{dist}(\{a\}, X) + \operatorname{dist}(\{a\}, Y)$ *et* $r_b := \operatorname{dist}(\{b\}, X) + \operatorname{dist}(\{b\}, Y)$.

Démonstration. Fixons un champ compact $f : X \to Y$ et considérons l'homotopie $F : X \times [0,1] \to E$ définie par $F(x,t) := (1-t)x + tf(x)$ pour $x \in X$ et $t \in [0,1]$. D'après le théorème de balayage ([28], page 56, corollaire 6) au moins un des points mentionnés — disons a — appartient à l'image de F. Il existe alors $y \in X$ et $s \in [0,1]$ tels que $a = (1-s)y + sf(y)$. Par conséquent, $r_a \leq \|y - f(y)\| \leq |f|$, d'où $\min\{r_a, r_b\} \leq \overline{\varrho}_F(X, Y)$. ∎

(2.8) THÉORÈME. *Soit $\phi : M \to E$ une m-application d'un espace de Hausdorff M dans un espace de Banach E, ϱ_S-semi-continue supérieurement et ϱ_F-semi-continue inférieurement en $x \in M$. Si deux points a et b sont séparés par $\phi(x)$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de x dans M tels que $O_\varepsilon(a)$ et $O_\varepsilon(b)$ sont séparés par $\phi(y)$ pour tout $y \in V$.*

Démonstration. ϕ étant ϱ_S-semi-continue supérieurement, il existe un voisinage V_1 de x dans M et un $\varepsilon > 0$ tels que

$$O_\varepsilon(\{a,b\}) \cap \phi(y) = \emptyset \quad \text{pour tout } y \in V_1\,. \tag{2.8.1}$$

Comme ϕ est ϱ_F-semi-continue inférieurement, il existe un voisinage V_2 de x dans M tel que

$$\overline{\varrho}_F(\phi(x), \phi(y)) < 2\varepsilon \quad \text{pour tout } y \in V_2\,. \tag{2.8.2}$$

Les ε-voisinages dans l'espace de Banach E étant connexes, en vertu de (2.8.1) tout revient à démontrer que $\phi(y)$ sépare a de b quel que soit $y \in V := V_1 \cap V_2$. Supposons au contraire que a et b appartiennent à la même composante connexe de $E \setminus \phi(z)$ pour un $z \in V$. En posant, dans (2.7), $Y := \phi(z)$, $X := \phi(x)$ nous obtenons $\overline{\varrho}_F(\phi(x), \phi(z)) \geq 2\varepsilon$, car $r_a \geq 2\varepsilon$ et $r_b \geq 2\varepsilon$ en vertu de (2.8.1), ce qui contredit (2.8.2) et établit le théorème. ∎

Pour terminer ce paragraphe, nous présentons un exemple montrant qu'en dimension infinie, la distance de continuité de Borsuk ϱ_C ne préserve pas la propriété de la séparation. Rappelons d'abord que la distance ϱ_C métrisant la famille $\mathcal{D}(M)$ s'obtient en posant $\mathcal{K}_M(X, Y) := C(X, Y)$ dans (2.3), $C(X, Y)$ étant l'ensemble de toutes les applications de X dans Y. Notre exemple montre que la sphère S dans un espace de Banach E de dimension infinie est limite relativement à ϱ_C d'une suite d'ensembles de $\mathcal{D}(E)$ dont les complémentaires dans E sont connexes.

(2.9) EXEMPLE. Soient E un espace de Banach et $e \in S \subset E$. On considère la suite $\{S_n\}$, où $S_n := S \setminus O_{1/n}(e)$. Bien évidemment le complémentaire de tout S_n dans E est connexe. Nous montrons que $\{S_n\}$ converge selon ϱ_C vers S. Fixons n et remarquons que $K(e, 1/n) \cap S$ est homéomorphe à une boule fermée de dimension infinie. Il existe alors une rétraction continue $r : K(e, 1/n) \cap S \to \mathrm{Fr}(K(e, 1/n) \cap S)$ (la frontière dans S). Il est facile de vérifier que la transformation $f : S \to S_n$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{pour } x \in S_n, \\ r(x) & \text{pour } x \in K(e, 1/n) \cap S \end{cases}$$

est continue, et que son écartement $|f|$ est inférieur ou égal à $2/n$. Par conséquent, $\overline{\varrho}_C(S, S_n) \leq 2/n$. Comme $S_n \subset S$, il en découle que $\overline{\varrho}_C(S_n, S) = 0$, d'où $\varrho_C(S, S_n) < 2/n$. ■

Dans le chapitre III les m-applications ϱ_S-hypercontinues, dorénavant appelées *applications hypercontinues*, joueront un rôle important car elles admettent des m-sélections complètement continues (th. (1.9)).

3. L'opération $\widetilde{\ }$. Dans ce paragraphe, E désigne un espace de Banach fixé de dimension ≥ 2. Soit X une partie de E, bornée et fermée. Notons par DX l'unique composante connexe non bornée de $E \setminus X$. Par BX notons la réunion de toutes les composantes connexes bornées de $E \setminus X$. On voit que DX et BX sont des ouverts de E. L'ensemble $BX \cup X = E \setminus DX$ est noté par $\widetilde{X}$. Les ensembles ci-dessus jouissent des propriétés suivantes :

(3.1) LEMME. *Soient X, Y des parties fermées, bornées et non vides de l'espace de Banach E $(\dim(E) \geq 2)$. On a alors :*

(3.1.1) $DX \neq \emptyset$;
(3.1.2) $X \subset Y$ *entraîne* $DY \subset DX$;
(3.1.3) *si X est connexe on a l'alternative suivante* : $X \subset BY$, *ou bien* $X \cap Y \neq \emptyset$, *ou bien* $X \subset DY$;
(3.1.4) X *et* DX *ne sont pas séparés*;
(3.1.5) $DX = D(\widetilde{X})$;
(3.1.6) $X \subset \widetilde{Y}$ *entraîne* $\widetilde{X} \subset \widetilde{Y}$;
(3.1.7) $\widetilde{X}$ *est fermé et borné*;
(3.1.8) $X \subset BY$ *implique que* $DX \cap BY \neq \emptyset$ *et* $BX \cap DY = \emptyset$;
(3.1.9) $D(X \cup Y) \subset DX \cap DY$;
(3.1.10) $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y} = \widetilde{X \cap Y}$ *si et seulement si* $DX \cap DY = D(X \cup Y)$;
(3.1.11) $X \cap Y = \emptyset$ *entraîne* $DX \cap DY \subset D(X \cup Y)$;
(3.1.12) *si $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$ sont connexes, on a l'alternative suivante* : $X \subset BY$, *ou bien* $Y \subset BX$, *ou bien* $\widetilde{X} \cap \widetilde{Y} = \emptyset$, *ou bien* $X \cap Y \neq \emptyset$.

D é m o n s t r a t i o n. (3.1.1)–(3.1.10) sont élémentaires. Pour montrer (3.1.11) nous utilisons le fait que les points a et b appartiennent à la même composante connexe de $E \setminus X$ si et seulement si les champs compacts $i - a : X \to E \setminus 0$ et $i - b : X \to E \setminus 0$ sont homotopes dans la classe de tous les champs compacts (th. 1, page 54, [28]). Choisissons $b \in D(X \cup Y)$ et $a \in DX \cap DY$. Puisque $b \in DX$ d'après (3.1.9), il existe une homotopie $h_X : X \times [0,1] \to E \setminus 0$ telle que $h_X(x,0) = x - a$ et $h_X(x,1) = x - b$ pour tout $x \in X$. Comme $b \in DY$, il existe une homotopie $h_Y : Y \times [0,1] \to E \setminus 0$ telle que $h_Y(y,0) = y - a$ et $h_Y(y,1) = y - b$ pour tout $y \in Y$. X et Y étant disjoints, l'homotopie $h : (X \cup Y) \times [0,1] \to E \setminus 0$ définie par

$$h(z,t) := \begin{cases} h_X(z,t) & \text{pour } z \in X \text{ et } t \in [0,1], \\ h_Y(z,t) & \text{pour } z \in Y \text{ et } t \in [0,1] \end{cases}$$

est continue, $h(z,0) = z - a$ et $h(z,1) = z - b$ pour tout $z \in X \cup Y$. On en déduit que a et b appartiennent à la même composante connexe de $E \setminus (X \cup Y)$, donc $a \in D(X \cup Y)$.

Passons maintenant à (3.1.12). Le fait que les quatre conditions s'excluent mutuellement découle facilement de (3.1.1)–(3.1.10). Nous montrons qu'il n'y a pas d'autres positions possibles des ensembles X et Y l'un par rapport à l'autre dans E. Supposons pour une contradiction que

$$(1)\ \widetilde{X} \cap \widetilde{Y} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad (2)\ X \cap Y = \emptyset \quad \text{et} \quad (3)\ X \not\subset BY \quad \text{et} \quad (4)\ Y \not\subset BX\,.$$

(1) entraîne l'alternative

$$(5)\ BX \cap BY \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad (6)\ X \cap BY \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad (7)\ BX \cap Y \neq \emptyset\,,$$

et d'après (2), (3) et (4) nous avons

$$(8)\ X \cap DY \neq \emptyset \quad \text{et} \quad (9)\ Y \cap DX \neq \emptyset\,.$$

(3.1.12.1) Supposons que (7) soit vérifiée. Alors, en vertu de (2) et (9), Y se décompose en union des ensembles disjoints bornés fermés et non vides $BX \cap Y$ et $DX \cap Y$. D'après (3.1.9)–(3.1.11), $\widetilde{Y} = (\widetilde{BX \cap Y}) \cup (\widetilde{DX \cap Y})$. $\widetilde{Y}$ étant connexe, nous obtenons (10) $(\widetilde{BX \cap Y}) \cap (\widetilde{DX \cap Y}) \neq \emptyset$. D'autre part, puisque $DX \cap Y \subset DX$, nous avons $\widetilde{X} \subset D(DX \cap Y) \cup B(DX \cap Y)$. Mais $\widetilde{X}$ étant connexe, il en découle que (11) $\widetilde{X} \subset D(DX \cap Y)$ ou bien que (12) $\widetilde{X} \subset B(DX \cap Y)$. Si $\widetilde{X} \subset B(DX \cap Y)$ alors $\widetilde{X} \subset \widetilde{Y}$, ce qui contredit (8). Si $\widetilde{X} \subset D(DX \cap Y)$, alors $\widetilde{X} \cap (\widetilde{DX \cap Y}) = \emptyset$. Toutefois, $BX \cap Y \subset BX$ implique que $\widetilde{BX \cap Y} \subset \widetilde{X}$ contredisant ainsi (10).

(3.1.12.2) Si (6) est vérifiée, d'après (2) et (8) l'ensemble X est union des ensembles $BY \cap X$ et $DY \cap X$, qui sont disjoints, bornés, fermés et non vides. La fin de la démonstration de ce cas est symétrique à celle du cas précédent, c'est-à-dire qu'il suffit de remplacer les symboles X et Y l'un par l'autre dans (3.1.12.1).

(3.1.12.3) Si (5) est vérifiée, d'après (8) et l'hypothèse de connexité de $\widetilde{X}$ nous obtenons $\widetilde{X} \cap Y \neq \emptyset$. En vertu de (2) nous avons $BX \cap Y \neq \emptyset$ et nous nous ramenons au cas (3.1.12.1). ∎

Remarquons que cette démonstration se simplifie considérablement si l'on suppose la connexité des ensembles X et Y eux-mêmes.

Dans la suite, nous appliquerons les propriétés (3.1.1)–(3.1.10) implicitement.

(3.2) LEMME. *Soit* $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(E)$ *totalement bornée. Si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite* :

(3.2.1) E *est de dimension finie*;

(3.2.2) $\widetilde{X} = \overline{\mathrm{conv}}(X)$ *pour tout* $X \in \mathcal{A}$,

alors $\widetilde{\mathcal{A}} := \{\widetilde{X} : X \in \mathcal{A}\}$ *est totalement bornée dans* $\mathcal{D}(E)$.

Démonstration. Dans le cas (3.2.1), la conclusion découle du lemme (1.3) et du fait que dans tout espace de Banach de dimension finie, la notion d'ensemble borné coïncide avec celle d'ensemble totalement borné. Si (3.2.2) est vérifiée, nous utilisons le fait élémentaire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tous $X, Y \in \mathcal{D}(E)$, $\varrho_S(X, Y) < \varepsilon$ implique $\varrho_S(\overline{\mathrm{conv}}\, X, \overline{\mathrm{conv}}\, Y) \le \varepsilon$. ■

Dans le cas où E est de dimension infinie, nous pouvons trouver une famille totalement bornée $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(E)$ telle que $\widetilde{\mathcal{A}}$ ne soit pas totalement bornée.

A chaque m-application $\phi : M \to E$ on associe une m-application $\widetilde{\phi} : M \to E$ donnée par $\widetilde{\phi}(x) := \phi(x)$ pour tout $x \in M$. Ainsi ϕ est une m-sélection de $\widetilde{\phi}$. De façon analogue nous associons à $\phi : M \to E$ deux m-transformations à valeurs ouvertes $B\phi, D\phi : M \to E$. Nous présentons maintenant certaines conditions suffisantes pour que les graphes $\Gamma(D\phi)$ et $\Gamma(B\phi)$ soient ouverts dans $M \times E$ (voir III, (2.1.2)).

(3.3) THÉORÈME. *Si une* m*-application* $\phi : M \to E$ *d'un espace de Hausdorff* M *dans un espace de Banach* E *est* ϱ_S*-semi-continue supérieurement*, *le graphe* $\Gamma(D\phi)$ *est ouvert dans* $M \times E$.

Démonstration. Choisissons $a \in D\phi(x)$ pour un x fixé de M. La m-application ϕ étant localement bornée, il existe $b \in E$ et un voisinage V_1 de x dans M tels que $b \in D\phi(y)$ pour tout $y \in V_1$. Par hypothèse et en vertu de (2.5), il existe un voisinage V_2 de x dans M et $\varepsilon > 0$ tels que les ε-voisinages de a et b sont contenus dans la même composante connexe de $E \setminus \phi(y)$ pour tout $y \in V_2$. Donc $O_\varepsilon(a) \subset D\phi(y)$ pour tout $y \in V_1 \cap V_2$. Par conséquent, $(V_1 \cap V_2) \times O_\varepsilon(a)$ est un voisinage de (x, a) dans $M \times E$, contenu dans $\Gamma(D\phi)$. ■

(3.4) COROLLAIRE. *Si une* m*-application* $\phi : M \to E$ *est* ϱ_S*-semi-continue supérieurement*, *alors* $\widetilde{\phi} : M \to E$ *est localement bornée et son graphe* $\Gamma(\widetilde{\phi})$ *est fermé.* ■

Lorsque la dimension de E est infinie, nous pouvons trouver une m-application ϕ ϱ_S-semi-continue supérieurement (même ϱ_S-continue) sans que la m-application $\widetilde{\phi}$ ne le soit. Étant donné que la notion de m-application localement bornée équivaut à celle de m-application localement compacte au cas de dimension finie, nous obtenons :

(3.5) COROLLAIRE. *Si une* m*-application* $\phi : M \to E$ *dans l'espace de Banach* E *de dimension finie est* ϱ_S*-semi-continue supérieurement*, *alors* $\widetilde{\phi}$ *l'est aussi.* ■

Il résulte aisément de l'exemple (2.6) que $\Gamma(B\phi)$ ne peut pas être ouvert, même si la m-application $\phi : M \to \mathbb{R}^2$ est ϱ_S-continue. C'est sur la distance ϱ_F de Borsuk que repose le résultat suivant :

(3.6) THÉORÈME. *Soit $\phi : M \to E$ une m-application d'un espace de Hausdorff M dans un espace de Banach E, ϱ_S-semi-continue supérieurement et ϱ_F-semi-continue inférieurement. Alors le graphe $\Gamma(B\phi)$ est un ouvert de $M \times E$.*

Démonstration. Si $\Gamma(B\phi)$ est vide, il est évidemment ouvert. Sinon, choisissons $a \in B\phi(x)$ et $b \in D\phi(x)$ pour x fixé de M. En vertu de (3.3) on a un voisinage V_1 de x dans M tel que $b \in D\phi(y)$ pour tout $y \in V_1$. D'après (2.8) il existe un voisinage V_2 de X dans M et $\varepsilon > 0$ tels que les ε-voisinages de a et b soient separés par $\phi(y)$ pour tout $y \in V_2$. La composante connexe à l'infini de $E \setminus \phi(y)$ étant unique, nous avons $O_\varepsilon(a) \subset B\phi(y)$ pour tout $y \in V_1 \cap V_2$. Par conséquent, $(V_1 \cap V_2) \times O_\varepsilon(a)$ est un voisinage de (x, a) dans $M \times E$, contenu dans $\Gamma(B\phi)$. ∎

III. Applications et champs de vecteurs admissibles et sphériques dans les espaces de Banach

Les m-applications considérées dans cet article admettent les valeurs non compactes. Nous supposons en outre qu'elles possèdent des m-sélections complètement continues à valeurs non vides; auquel cas, elles sont dites *applications faiblement admissibles*. A mesure que nous imposons des conditions supplémentaires sur ces m-sélections, nous obtenons les applications admissibles, fortement admissibles et strictement admissibles. Nous associons à ces m-transformations des champs de vecteurs multivoques.

La théorie des applications et champs de vecteurs (faiblement, fortement, strictement) admissibles est rappelée et complétée dans le paragraphe 1 de ce chapitre. En utilisant la cohomologie de dimension infinie du chapitre I, nous définissons une caractéristique topologique d'un champ de vecteurs faiblement admissible, et un degré d'un champ de vecteurs admissible dans un espace de Banach.

La notion de caractéristique topologique d'un champ de vecteurs multivoque complètement continu fut introduite par Gelman en 1975 en employant la cohomologie de Gęba–Granas étendue à tous les espaces topologiques avec filtration. Certains théorèmes principaux de point fixe furent ainsi généralisés ([2]).

La classe des applications admissibles a été introduite par Górniewicz ([23]). Le degré d'un champ de vecteurs admissible fut défini sans la cohomologie de dimension infinie (voir par exemple [7], [8], [23]). Dans cet exposé, grâce à la cohomologie de dimension infinie, la définition (1.8) du degré est naturelle et les méthodes pour s'en servir ressemblent à celles utilisées dans le cadre des espaces euclidiens (où est habituellement utilisée la cohomologie de Čech).

Ajoutons que la notion d'application admissible que nous avons établie est plus restrictive que celle de [7], [8] ou [12], car elle contient une condition de type continuité complète (voir ¡¡la paire admissible¿¿, II, (1)). Or, dans un espace de Banach de dimension infinie, les champs de vecteurs admissibles ne sont pas des applications admissibles.

Dans le paragraphe 2, nous introduisons les notions d'application et de champ de vecteurs sphériques (comp. [22]). Nous utilisons les résultats des chapitres I et II pour illustrer ces deux notions par des exemples ((2.4)). Par la suite, dans (2.5), (2.6) et (2.7), nous présentons des méthodes caractéristiques de la théorie des applications et des champs de vecteurs sphériques. Nous en déduisons pour terminer des résultats suivants :

• un théorème de la coïncidence entre une application et un champ de vecteurs admissibles ou sphériques ((2.9)),
• un théorème des antipodes pour les champs $\mathbb{Z}_2$-sphériques ((2.14)),
• un théorème de l'invariance du domaine pour les champs fortement $\mathbb{Z}_2$-sphériques qui sont des transformations locales par rapport à leurs domaines ouverts.

1. Utilisation de la cohomologie de dimension infinie à la théorie des applications et champs de vecteurs admissibles. Nous ne considérons dans ce chapitre que des m-applications $\phi : M \to M'$ d'un espace métrique M dans un espace métrique M' dont les valeurs sont non vides, bornées et fermées dans M'.

(1.1) Définition. Une m-application $\phi : M \to M'$ est dite :

(1.1.1) *application faiblement admissible* (*application admissible*) (comp. [7], [8], [23], [24]) lorsqu'elle admet une paire sélective faiblement admissible (resp. admissible);

(1.1.2) *application fortement admissible* si pour toute m-sélection complètement continue η de ϕ, il existe une paire sélective admissible $(p, q) \subset \phi$ telle que $\eta(x) \subset q(p^{-1}(x))$ quel que soit $x \in M$;

(1.1.3) *application strictement admissible* (comp. [7], [8], [23], [24]) s'il existe une paire admissible déterminant ϕ.

De façon analogue, nous définissons la notion *d'application $\mathbb{Z}_2$-admissible, fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible et strictement $\mathbb{Z}_2$-admissible*. Tous les énoncés de ce paragraphe, formulés pour les applications admissibles (fortement, strictement) s'étendent aux applications $\mathbb{Z}_2$-admissibles (resp. fortement, strictement). Par définition, toute application strictement admissible est fortement admissible, toute application fortement admissible est admissible, et toute application admissible est faiblement admissible. Toute application strictement admissible est ϱ_S-semi-continue supérieurement et possède des valeurs compactes et connexes (elle est donc semi-continue supérieurement). En s'appuyant sur la notion d'application hypercontinue, nous illustrons la définition (1.1) par des exemples.

(1.2) Exemple. *Soit* $\phi : M \to E$ *une application hypercontinue d'un espace métrique* M *dans un espace de Banach* E. *Alors* :

(1.2.1) ϕ *est faiblement admissible*;

(1.2.2) ϕ *est strictement admissible à condition que ses valeurs soient compactes et acycliques*;

(1.2.3) ϕ *est fortement admissible à condition que ses valeurs soient convexes.*

Démonstration. En vertu de (II, (1.9)), ϕ admet une m-sélection complètement continue $\psi : M \to E$. Considérons la paire $M \overset{p_\psi}{\leftarrow} \Gamma(\psi) \overset{q_\psi}{\rightarrow} E$ des applications $p_\psi(x,y) := x$ et $q_\psi(x,y) := y$. On vérifie aisément qu'elle est faiblement admissible et sélective pour ϕ, ce qui établit (1.2.1). (1.2.2) découle du fait élémentaire que l'image $\phi(X)$ de tout compact X de M est compacte lorsque ϕ est complètement continue. Passons maintenant à (1.2.3). Si une m-application $\eta : M \to E$ est une m-sélection complètement comtinue de ϕ, il existe d'après (II, (1.9)) une m-sélection $\psi : M \to E$ de ϕ complètement continue, à valeurs convexes, telle que $\eta \subset \psi$. De par (1.2.2), ψ est strictement admissible, donc ϕ est fortement admissible. ■

Toutefois, nous ne savons pas si toute application hypercontinue $\phi : M \to E$ à valeurs acycliques (non nécessairement compactes) est admissible.

La classe des applications hypercontinues à valeurs convexes fut étudiée dans [1]. Les auteurs y ont défini un degré pour les champs de vecteurs multivoques correspondant à ces m-applications en se servant d'une méthode d'approximation, obtenant ainsi une version faible du théorème de point fixe. La propriété (1.2.3) entraîne que non seulement le théorème classique de point fixe, mais aussi tous les autres théorèmes de ce paragraphe s'étendent à ces m-applications.

(1.3) Définition. Soient X, Y des parties d'un espace de Banach E. Une m-application $\phi : X \to Y$ est appelée *champ de vecteurs* (ou en abrégé : *champ*) *faiblement admissible* (*admissible*, *fortement admissible*, *strictement admissible*) si $i - \phi : X \to E$ est une application faiblement admissible (admissible, fortement admissible, strictement admissible, respectivement).

Les *champs faiblement* $\mathbb{Z}_2$*-admissibles* etc. se définissent de manière analogue. Tous les énoncés présentés ci-après pour les champs de vecteurs admissibles (fortement, strictement) demeurent valides pour les champs $\mathbb{Z}_2$-admissibles (fortement, strictement).

Nous allons définir, pour des champs faiblement admissibles, une caractéristique topologique sur la boule $K \subset E$ (comp. [2], [21]). Supposons qu'un champ faiblement admissible ϕ ne s'annule pas sur la sphère S, c'est-à-dire $\phi(S) \subset E \setminus 0$. Choisissons une paire sélective $K \overset{p}{\leftarrow} \Gamma \overset{q}{\rightarrow} E$ de la m-application $i - \phi$ et posons $\Theta := p^{-1}(S)$. Puisque $(p-q)(\Theta) \subset \phi(S) \subset E \setminus 0$, $p - q$ détermine un morphisme compact $p - q : (\Gamma, \Theta, p) \to (E, E \setminus 0)$ de la catégorie $\mathcal{W}(E)$. Appartenant à $\mathcal{F}$ (déf. (I, (3.1))), ce morphisme induit un homomorphisme de groupes de cohomologie de dimension infinie.

(1.4) Définition (comp. [2]). Par *caractéristique topologique* $\varkappa(\phi)$ d'un champ faiblement admissible $\phi : K \to E$ ne s'annulant pas sur la sphère S, nous entendons l'ensemble de tous les homomorphismes $\overset{\infty}{H}{}^0(p-q) : \overset{\infty}{H}{}^0(E, E \setminus 0) \to \overset{\infty}{H}{}^0(\Gamma, \Theta, p)$ indexés par les paires sélectives (p, q) de $i - \phi : K \to E$, faiblement admissibles.

Nous énonçons maintenant des propriétés principales de la caractéristique topologique.

(1.5) *Soit $\phi : K \to E$ un champ faiblement admissible ne s'annulant pas sur la sphère S. Alors :*

(1.5.1) *si $\psi : K \to E$ est un champ faiblement admissible en plus d'être une m-sélection de ϕ, alors $\varkappa(\psi) \subset \varkappa(\phi)$;*

(1.5.2) *si $\varkappa(\phi) \neq \{0\}$ (c'est-à-dire $\varkappa(\phi)$ contient un homomorphisme non nul), alors il existe $y \in K$ tel que $0 \in \phi(y)$.*

Démonstration. La propriété (1.5.1) est immédiate. Pour montrer (1.5.2), donnons-nous une paire sélective (p, q) faiblement admissible de la m-application $i-\phi$, et supposons que $0 \notin \phi(K)$. Alors le morphisme $p-q : (\Gamma, \Theta, p) \to (E, E\setminus 0)$ de $\mathcal{F}$ se factorise comme

$$(\Gamma, \Theta, p) \xrightarrow{r} (E \setminus 0, E \setminus 0) \xrightarrow{i} (E, E \setminus 0),$$

où le morphisme $r(y) := p(y) - q(y)$, $y \in \Gamma$, appartient à $\mathcal{F}$ et i désigne l'injection canonique. Comme $\overset{\infty}{H}{}^0(E \setminus 0, E \setminus 0) = 0$ (I, (2.12.1)), nous avons $\overset{\infty}{H}{}^0(p-q) = \overset{\infty}{H}{}^0(r) \circ \overset{\infty}{H}{}^0(i) = 0$. Donc $\varkappa(\phi) = \{0\}$, contrairement à l'hypothèse. ∎

Notre but maintenant est de formuler un théorème de coïncidence d'un champ faiblement admissible et d'une application admissible en un point $y \in K \subset E$ (th. (1.7)), généralisant ainsi un résultat de [8]. Notons par $]a, b[$ l'intervalle sans extremités $\{(1-t)a + tb : 0 < t < 1\}$ dans l'espace de Banach E, $a, b \in E$ et $a \neq b$. Si $a = b$ on pose $]a, b[:= \emptyset$. Étant donné un sous-ensemble quelconque X de E, l'ensemble $\mathrm{Sw}(X) := \{y \in E :]y, 0[\cap X \neq \emptyset\}$ est appelé *ombre* de X.

(1.6) Lemme. *Supposons qu'un champ faiblement admissible $\phi : K \to E$ ne s'annule pas sur S. Si une application admissible $T : K \to E$ vérifie*

$$(\mathrm{Sw}(\phi(x)) \cup \phi(x)) \cap T(x) = \emptyset \quad \textit{pour tout } x \in S, \tag{1.6.1}$$

alors $\varkappa(\phi) \neq \{0\}$ implique $\varkappa(\phi - T) \neq \{0\}$.

Démonstration. Remarquons qu'en vertu de (1.6.1), $\phi - T$ ne s'annule pas non plus sur S. Donnons-nous une paire faiblement admissible $K \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} E$ de $i - \phi$ et une paire admissible $K \xleftarrow{r} \Theta \xrightarrow{s} E$ de T. Notre but est de construire une paire faiblement admissible $K \xleftarrow{k} \Xi \xrightarrow{m} E$ telle que $K \xleftarrow{k} \Xi \xrightarrow{k-m} E \setminus 0$ soit une paire sélective de $\phi - T$. Ainsi nous aurons montré que $\phi - T$ est un champ faiblement admissible.

Posons $\varXi := \{(\gamma,\delta) \in \varGamma \times \varTheta : p(\gamma) = r(\delta)\}$, $k(\gamma,\delta) := p(\gamma) = r(\delta)$, $m(\gamma,\delta) := q(\gamma) + s(\delta)$. Les applications r et p étant propres, k l'est aussi. Puisque $q(\varGamma)$ est contenu dans un compact $A \subset E$ et que l'image $s(\varTheta)$ est contenue dans un compact $B \subset E$, alors $m(\varXi)$ est contenu dans la somme algébrique $A + B$ qui est un compact de E. Le fait que $(k, k-m)$ soit une paire sélective de $\phi - T$ est immédiat. Donc $\phi - T$ est un champ faiblement admissible. Remarquons encore que la projection $\pi : \varXi \to \varGamma$ est une application de Vietoris, car r en est une. Cette projection détermine le morphisme de Vietoris $\pi : (\varXi, k^{-1}(S), k) \to (\varGamma, p^{-1}(S), p)$ dans la catégorie $\mathcal{W}(E)$.

Posons $\varLambda := k^{-1}(S)$ et définissons l'homotopie f sur $\varXi \times [0,1]$ par $f(\gamma,\delta,t) := k(\gamma,\delta) - (q(\gamma) + ts(\delta))$. Nous vérifions que $f(\varLambda \times [0,1]) \subset E$ ne contient pas l'origine. Supposons par contre qu'il existe $t \in [0,1]$ et $(\gamma,\delta) \in \varLambda$ tels que $r(\gamma,\delta) - (q(\gamma) + ts(\delta)) = 0$. Si $t = 1$ ou $ts(\delta) = 0$, en vertu de $r(\gamma,\delta) - q(\gamma) = p(\gamma) - q(\gamma) \in \phi(p(\gamma))$ et $s(\delta) \in T(r(\delta))$, nous obtenons $\phi(x) \cap T(x) \neq \emptyset$ ou $0 \in \phi(x)$ pour un $x \in S$, ce qui contredit l'hypothèse. Si $t < 1$ et $ts(\delta) \neq 0$, l'intervalle $]s(\delta), 0[$ et l'ensemble $\phi(p(\gamma))$ se coupent au point $ts(\delta) = p(\gamma) - q(\gamma)$, contrairement à (1.6.1).

Or, f détermine une homotopie compacte $f : (\varXi, \varLambda, k) \times [0,1] \to (E, E \setminus 0)$ appartenant à la classe $\mathcal{F}$. On a

$$f(\gamma,\delta,0) = p(\gamma) - q(\gamma) = (p-q)\pi(\gamma,\delta)\,,$$
$$f(\gamma,\delta,1) = p(\gamma) - (q(\gamma) + s(\delta)) = (k-m)(\gamma,\delta).$$

D'après (I, (3.10.1)), $\overset{\infty}{H}{}^0(k-m) = \overset{\infty}{H}{}^0(\pi) \circ \overset{\infty}{H}{}^0(p-q)$, $\overset{\infty}{H}{}^0(\pi)$ étant un isomorphisme (voir I, (2.14)). Donc, si (p,q) est choisie de façon que $\overset{\infty}{H}{}^0(p-q)$ soit non nul, la caractéristique $\varkappa(\phi - T)$ contiendrait l'homomorphisme non nul $\overset{\infty}{H}{}^0(k-m)$. ■

(1.7) THÉORÈME. *Supposons qu'un champ de vecteurs faiblement admissible $\phi : K \to E$ ne s'annule pas sur S et que $\varkappa(\phi) \neq \{0\}$. Si une application admissible $T : K \to E$ satisfait*

(1.7.1) $$\mathrm{Sw}(\phi(x)) \cap T(x) = \emptyset \qquad \textit{pour tout } x \in S\,,$$

alors il existe $y \in K$ tel que $\phi(y) \cap T(y) \neq \emptyset$.

Démonstration. Si $\phi(x) \cap T(x) \neq \emptyset$ pour un $x \in S$ alors la conclusion est vraie. Sinon, $\varkappa(\phi - T) \neq \{0\}$ d'après (1.6). D'où, en vertu de (1.5.2), il existe $y \in K$ tel que $0 \in \phi(y) - T(y)$. ■

Passons maintenant aux applications et champs admissibles définis sur K ou S. Nous commençons par une description du degré topologique à l'aide de la cohomologie en dimension infinie. Soit $\phi : K \to E$ un champ admissible ne s'annulant pas sur S. Choisissons une paire sélective admissible $K \overset{p}{\leftarrow} \varGamma \overset{q}{\to} E$ de $i - \phi : K \to E$. Cette paire détermine les deux paires de morphismes de la catégorie $\mathcal{W}(E)$:

$$(K,S) \overset{p}{\leftarrow} (\varGamma, \varTheta, p) \overset{p-q}{\to} (E, E \setminus 0) \quad \text{et} \quad S \overset{\overline{p}}{\leftarrow} (\varTheta, \overline{p}) \overset{\overline{p-q}}{\to} E \setminus 0\,,$$

où $\overline{p}$, $\overline{p-q}$ sont les restrictions de p, $p-q$, resp., à $\Theta := p^{-1}(S)$. Remarquons que $p-q$ et $\overline{p-q}$ appartiennent à $\mathcal{F}$.

(1.8) Définition (comp. [23], [7], [8], [9]). On appelle *degré* d'un champ admissible ϕ ne s'annulant pas sur la sphère S (en symbole : $\mathrm{Deg}(\phi)$) l'ensemble de tous les homomorphismes de la forme

$$(\overset{\approx}{H}{}^{-1}(r))^{-1} \circ \overset{\approx}{H}{}^{-1}(s) : \overset{\approx}{H}{}^{-1}(E \setminus 0) \to \overset{\approx}{H}{}^{-1}(S)$$

indexés par les paires admissibles sélectives (p, q) de la m-application $i - \phi$, avec

(1.8.1) $r := \overline{p}$, $s := \overline{p-q}$, lorsque ϕ est définie sur la boule K, ou

(1.8.2) $r := p$, $s := p - q$, lorsque ϕ est définie sur la sphère S.

La définition s'étend sans difficulté au cas où le champ est défini sur la boule (la sphère) de rayon $\varepsilon > 0$ et de centre $x \in E$ arbitraires.

Nous allons maintenant établir des relations entre le degré et la caractéristique topologique.

(1.9.1) *Si deux champs admissibles ϕ et ψ sont définis sur K ou sur S, et si $\phi(S) \subset E \setminus 0$ et $\psi \subset \phi$, alors* $\mathrm{Deg}(\psi) \subset \mathrm{Deg}(\phi)$.

(1.9.2) *Si un champ admissible ϕ ne s'annule pas sur S et si* $\mathrm{Deg}(\phi) \neq \{0\}$, *alors $\varkappa(\phi) \neq \{0\}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Donnons-nous une paire admissible sélective $K \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} E$ de $i - \phi$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc}
\overset{\approx}{H}{}^0(K,S) & \xrightarrow{\overset{\approx}{H}{}^0(p)} & \overset{\approx}{H}{}^0(\Gamma,\Theta,p) & \xleftarrow{\overset{\approx}{H}{}^0(p-q)} & \overset{\approx}{H}{}^0(E,E\setminus 0) \\
\uparrow{\scriptstyle \overset{\approx}{\delta}{}'} & & \uparrow{\scriptstyle \overset{\approx}{\delta}} & & \uparrow{\scriptstyle \overset{\approx}{\delta}{}''} \\
\overset{\approx}{H}{}^{-1}(S) & \xrightarrow{\overset{\approx}{H}{}^{-1}(\overline{p})} & \overset{\approx}{H}{}^{-1}(\Theta,p|\Theta) & \xleftarrow{\overset{\approx}{H}{}^{-1}(\overline{p-q})} & \overset{\approx}{H}{}^{-1}(E\setminus 0)
\end{array}$$

D'après (I, (2.9)) et (I, (2.12.1)), les cobords $\overset{\approx}{\delta}{}'$ et $\overset{\approx}{\delta}{}''$ sont des isomorphismes. Supposons à présent que $\overset{\approx}{H}{}^{-1}(\overline{p-q})$ soit non nul. Puisque, par (I, (2.14)), $\overset{\approx}{H}{}^{-1}(\overline{p})$ et $\overset{\approx}{H}{}^{0}(p)$ sont des isomorphismes, $\overset{\approx}{\delta}$ l'est aussi. Par suite, $\overset{\approx}{H}{}^{0}(p-q) \neq 0$; donc $\varkappa(\phi)$ contient un homomorphisme non nul. ∎

(1.10) Corollaire (comp. [8]). *Soit $\phi : K \to E$ un champ admissible tel que $\phi(S) \subset E \setminus 0$ et* $\mathrm{Deg}(\phi) \neq \{0\}$. *Pour toute application admissible $T : K \to E$ vérifiant* (1.7.1) *il existe $y \in K$ tel que $\phi(y) \cap T(y) \neq \emptyset$.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous utilisons (1.9.2) et (1.7). ∎

(1.11) Corollaire (théorème du point fixe). *Toute application admissible $T : K \to K$ admet un point fixe.*

D é m o n s t r a t i o n. Appliquons (1.10) à T en prenant pour ϕ l'injection canonique $i : K \to E$. $\overset{\approx}{H}{}^{-1}(i) : \overset{\approx}{H}{}^{-1}(E \setminus 0) \to \overset{\approx}{H}{}^{-1}(S)$ étant un isomorphisme,

$\mathrm{Deg}(i)$ ne se réduit pas au seul homomorphisme nul. La condition (1.7.1) est manifestement vérifiée et l'existence de $y \in K$ tel que $y \in T(y)$ s'ensuit. ∎

En particulier, toute application hypercontinue $\phi : K \to K$ à valeurs convexes admet un point fixe. La question suivante reste toutefois sans réponse :

(1.12) Problème. Est-ce que toute application hypercontinue $\phi : K \to K$ à valeurs acycliques ou $\mathbb{Z}_2$-acycliques (non nécessairement compactes) admet un point fixe?

La dernière partie du chapitre est consacrée aux théorèmes de Borsuk–Ulam pour les champs $\mathbb{Z}_2$-admissibles et aux théorèmes de l'invariance du domaine pour les champs fortement $\mathbb{Z}_2$-admissibles dans un espace de Banach. Nous employons le degré $\mathrm{Deg}(\ ;\mathbb{Z}_2)$ obtenu à l'aide de la cohomologie de dimension infinie à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

(1.13) Théorème (premier théorème des antipodes [7], voir aussi [28]). *Soit $\phi : S \to E$ un champ $\mathbb{Z}_2$-admissible ne s'annulant pas. Si pour tout rayon U* (voir (I, (2.12.1)), *$U \cap \phi(x) = \emptyset$ ou $U \cap \phi(-x) = \emptyset$ quel que soit $x \in S$, alors* $\mathrm{Deg}(\phi;\mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Donnons-nous une paire $\mathbb{Z}_2$-admissible sélective $S \xleftarrow{p} \Theta \xrightarrow{q} E$ de $i - \phi$. Posons

$$\Lambda := \{(x,\gamma,\gamma') : x \in S,\ \gamma \in p^{-1}(x),\ \gamma' \in p^{-1}(-x)\}\,,$$
$$r(x,\gamma,\gamma') := x\,, \quad h(x,\gamma,\gamma') := \gamma\,, \quad s(x,\gamma,\gamma') := p(\gamma) - q(\gamma)\,.$$

Nous avons le diagramme commutatif des morphismes de $\mathcal{W}(E)$ suivant :

$$\begin{tikzcd} & (\Theta,p) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p-q"] & \\ S & (\Lambda,r) \arrow[l, "r"] \arrow[u, "h"] \arrow[r, "s"'] & E \setminus 0 \end{tikzcd}$$

Le morphisme r, étant la composée de deux $\mathbb{Z}_2$-morphismes de Vietoris $(x,\gamma,\gamma') \rightarrowtail (x,\gamma) \rightarrowtail x$, est aussi un morphisme de Vietoris. Définissons l'involution continue τ sur Λ par $\tau(x,\gamma,\gamma') := (-x,\gamma,\gamma')$. Puisque $s(\tau(x,\gamma,\gamma')) = p(\gamma') - q(\gamma') \in \phi(-x)$ et que $s(x,\gamma,\gamma') = p(\gamma) - q(\gamma) \in \phi(x)$ par hypothèse, la condition (I, (1.7.1)) est vérifiée pour s. Par (I, (3.11)), $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(s;\mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme. Puisque $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(h;\mathbb{Z}_2)$ l'est aussi, alors $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(p-q;\mathbb{Z}_2) \neq 0$. Par conséquent, $\mathrm{Deg}(\phi;\mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$. ∎

Avant de montrer le deuxième théorème des antipodes, nous établissons le lemme suivant :

(1.14) Lemme. *Si $\phi : S \to E$ est une application $\mathbb{Z}_2$-admissible dont l'image est disjointe d'un rayon U, alors* $\mathrm{Deg}(\phi;\mathbb{Z}_2) = \{0\}$.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $S \xleftarrow{p} \Theta \xrightarrow{q} E$ une paire $\mathbb{Z}_2$-admissible sélective de $i - \phi$. Le morphisme $p - q$ se factorise selon

$$(\Theta, p) \xrightarrow{s} E \setminus U \xrightarrow{i} E \setminus 0\,,$$

où $s(\gamma) := (p-q)(\gamma)$, et i désigne l'injection canonique. En vertu de (I, (2.12.1)), $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(E \setminus U; \mathbb{Z}_2) = 0$, donc $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(p-q; \mathbb{Z}_2) = \overset{\infty}{H}{}^{-1}(s; \mathbb{Z}_2) \circ \overset{\infty}{H}{}^{-1}(i; \mathbb{Z}_2) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Deg}(\phi; \mathbb{Z}_2) = \{0\}$. ■

(1.15) THÉORÈME (deuxième théorème des antipodes, voir [17], [7] et aussi [9], [23], [28]). *Soit $\phi : S \to E_1$ un champ $\mathbb{Z}_2$-admissible, E_1 étant un sous-espace vectoriel de codimension 1 d'un espace de Banach E. Il existe alors un $x \in S$ tel que $\phi(x) \cap \phi(-x) \neq \emptyset$.*

D é m o n s t r a t i o n. Supposons par contre que

$$\phi(x) \cap \phi(-x) = \emptyset \quad \text{pour tout } x \in S\,. \tag{1.15.1}$$

Nous construirons ci-après un champ $\mathbb{Z}_2$-admissible $\psi : S \to E$ satisfaisant les conditions :

$$\psi(S) \subset E_1 \setminus 0\,, \tag{1.15.2}$$

$$\mathrm{Deg}(\psi; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}\,. \tag{1.15.3}$$

Mais d'après (1.14) ces deux conditions ne peuvent être vérifiées simultanément. Cette contradiction achève ainsi la démonstration.

Donnons-nous une paire $\mathbb{Z}_2$-admissible sélective $S \xleftarrow{p} \Theta \xrightarrow{q} E$ quelconque de $i - \phi$. Définissons Λ et r comme dans la démonstration de (1.13). L'application $s : \Lambda \to E$ définie par $s(x, \gamma, \gamma') := \frac{1}{2}(q(\gamma) - q(\gamma'))$ étant compacte et r étant une $\mathbb{Z}_2$-application de Vietoris, la paire (r, s) est $\mathbb{Z}_2$-admissible. Donc $(r, r - s)$ détermine un champ (strictement) $\mathbb{Z}_2$-admissible $\psi : S \to E$. Par hypothèse et par (1.15.1),

$$\begin{aligned}
\psi(S) &= \{(r-s)(x, \gamma, \gamma') : (x, \gamma, \gamma') \in \Lambda\} \\
&= \{\tfrac{1}{2}((p-q)(\gamma) - (p-q)(\gamma')) : (x, \gamma, \gamma') \in \Lambda\} \\
&\subset \{\tfrac{1}{2}(\phi(x) - \phi(-x)) : x \in S\} \subset E_1 \setminus 0\,.
\end{aligned}$$

La propriété (1.15.2) est donc vérifié.

Définissons l'involution continue τ sur Λ comme dans la démonstration de (1.13). Puisque $(r-s)(\tau(x, \gamma, \gamma')) = -(r-s)(x, \gamma, \gamma')$, les hypothèses de (I, (3.11)) sont vérifiées pour le morphisme $r - s : (\Lambda, r) \to E \setminus 0$ de la classe $\mathcal{F}$. Par conséquent, $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(r - s; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme et $\mathrm{Deg}(\psi; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$. (1.15.3) est donc montrée. ■

De manière similaire, nous allons prouver un théorème de l'invariance du domaine pour les champs fortement $\mathbb{Z}_2$-admissibles dans un espace de Banach. Les deux lemmes ci-dessous sont necéssaires pour cette preuve.

(1.16) LEMME (comp. [7], p. 92 et [23], p. 60). *Supposons qu'une* 1*-transformation* $\phi : K \to E$ (voir (II, (1))) *est un champ strictement* $\mathbb{Z}_2$*-admissible et que* $0 \in \phi(0)$. *Alors* $\mathrm{Deg}(\phi; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$.

Démonstration. ϕ étant une 1-transformation et $0 \in \phi(0)$, nous avons $\phi(S) \subset E \setminus 0$, ce qui rend la conclusion bien posée. Prenons une paire $\mathbb{Z}_2$-admissible $K \overset{p}{\leftarrow} \Gamma \overset{q}{\rightarrow} E$ qui détermine $i - \phi$. Alors $\phi(y) = \{(p-q)(\gamma) : \gamma \in p^{-1}(y)\}$ pour tout $y \in K$. Par hypothèse, il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $p(\gamma_0) = 0 = q(\gamma_0)$. Posons

$$\Lambda := \{(x,t,\gamma,\gamma') : x \in S,\ t \in [0,1],\ \gamma \in p^{-1}((1-t)x),\ \gamma' \in p^{-1}(-tx)\},$$
$$\Theta := p^{-1}(S), \qquad r(x,t,\gamma,\gamma') := x,$$
$$h(\gamma) := (x,0,\gamma,\gamma_0), \qquad s(x,t,\gamma,\gamma') := q(\gamma) - q(\gamma').$$

Puisque $(p-q)(\gamma) \in \phi((1-t)x)$, $(p-q)(\gamma') \in \phi(-tx)$ et que $\|(1-t)x - (-tx)\| = \|x\| = 1$, alors $(r-s)(x,t,\gamma,\gamma') \neq 0$ pour tout $(x,t,\gamma,\gamma') \in \Lambda$. Il est facile de vérifier que le diagramme des morphismes de la catégorie $\mathcal{W}(\mathcal{E})$

$$\begin{tikzcd} & (\Theta, \overline{p}) \arrow[dl, "\overline{p}"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "\overline{p-q}"] & \\ S & (\Lambda, r) \arrow[l, "r"] \arrow[r, "r-s"'] & E \setminus 0 \end{tikzcd}$$

commute. Le morphisme r est un $\mathbb{Z}_2$-morphisme de Vietoris étant la composée de trois morphismes de Vietoris : $(x,t,\gamma,\gamma') \rightarrowtail (x,t,\gamma) \rightarrowtail (x,t) \rightarrowtail x$.

Le morphisme $r - s$ de la catégorie $\mathcal{W}(E)$ est compact et appartient à $\mathcal{F}$. Définissons l'involution continue τ sur Λ par $\tau(x,t,\gamma,\gamma') := (-x, 1-t, \gamma', \gamma)$. Puisque $s(\tau(x,t,\gamma,\gamma')) = -s(x,t,\gamma,\gamma')$, alors $r - s$ vérifie les hypothèses de (I, (3.11)). Ainsi $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(r-s; \mathbb{Z}_2)$ est un isomorphisme. Puisque $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(h; \mathbb{Z}_2)$ l'est aussi, alors $\overset{\infty}{H}{}^{-1}(\overline{p-q}; \mathbb{Z}_2) \neq 0$, d'où $\mathrm{Deg}(\phi; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$. ∎

(1.17) LEMME. *Pour toute* 1*-transformation* $\phi : K \to E$ *qui est un champ strictement* $\mathbb{Z}_2$*-admissible*, $\phi(0) \subset \mathrm{Int}_E(\phi(K))$.

Démonstration. Fixons $a \in \phi(0)$ et considérons le champ strictement $\mathbb{Z}_2$-admissible $\psi : K \to E$, $\psi(y) := \phi(y) - a$. ψ étant une 1-transformation et $0 \in \phi(0)$, d'après (1.16) nous obtenons

(1.17.1) $$\mathrm{Deg}(\psi; \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}.$$

Comme $\psi(S)$ est fermé dans E, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

(1.17.2) $$\psi(S) \cap O_\varepsilon(0) = \emptyset.$$

Prenons un point arbitraire $b \in O_\varepsilon(0)$, et considérons la m-application constante $T : K \to E$, $T(y) := \{b\}$. En vertu de (1.17.1) et de (1.17.2), les m-applications ψ et T satisfont les hypothèses de (1.10). Or, il existe $z \in K$ tel que $b \in \psi(z)$, d'où $a + b \in \phi(z)$. Nous avons montré que $a + O_\varepsilon(0) = O_\varepsilon(a) \subset \phi(K)$, ce qui signifie que $a \in \mathrm{Int}_E(\phi(K))$. ∎

Observons que les lemmes (1.16) et (1.17) restent vrais lorsque l'on substitue à la boule K une autre boule $K(x,\varepsilon)$ de centre $x \in X$ et de rayon $\varepsilon > 0$ et à la 1-transformation une ε-transformation.

(1.18) THÉORÈME (de l'invariance du domaine, comp. [7], voir aussi [23], [9]). *Soient V un ouvert de E et $\phi : V \to E$ un champ fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible. Si ϕ est une ε-transformation locale par rapport à V, alors $\phi(V)$ est un ouvert de E.*

Démonstration. Soit $a \in \phi(x)$ pour un $x \in V$ arbitraire. Par hypothèse, il existe un champ strictement $\mathbb{Z}_2$-admissible $\psi : V \to E$ qui est une m-sélection de ϕ avec $a \in \psi(x)$. Le champ ψ est évidemment une ε-transformation locale par rapport à V. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que $\psi|K(x,\varepsilon)$ soit une ε-transformation. Par le lemme (1.17) et le commentaire après ce lemme, $a \in \psi(x) \subset \mathrm{Int}_E\, \psi(K(x,\varepsilon)) \subset \phi(V)$. ■

Toute ε-transformation $\phi : E \to E$ étant une ε-transformation locale par rapport à E tout entier, nous obtenons :

(1.19) COROLLAIRE (comp. [7]). *Pour tout champ fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible $\phi : E \to E$ qui est une ε-transformation pour un $\varepsilon > 0$, l'image $\phi(E)$ est ouverte dans E.* ■

Puisque toute m-transformation strictement injective définie sur un ouvert $V \subset E$ est une ε-transformation locale par rapport à V, nous avons :

(1.20) COROLLAIRE (comp. [23], p. 62). *Pour tout champ fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible $\phi : V \to E$, strictement injectif, défini sur l'ouvert V, l'image $\phi(V)$ est ouverte dans E.* ■

2. Applications et champs de vecteurs sphériques dans un espace de Banach. Nous supposerons dans ce qui suit que la dimension d'un espace de Banach E donné est supérieure à 1.

(2.1) DÉFINITION (comp. [10], [22]). Une m-application $\phi : M \to E$ d'un espace métrique M dans un espace de Banach E est appelée *application* (*fortement*) *sphérique* si

(2.1.1) $\widetilde{\phi} : M \to E$ est une application (fortement) admissible à valeurs connexes, et

(2.1.2) les graphes $\Gamma(B\phi)$ et $\Gamma(D\phi)$ sont des ouverts de $M \times E$.

Si nous remplaçons (2.1.1) par

(2.1.3) $\widetilde{\phi} : M \to E$ est une application (fortement) $\mathbb{Z}_2$-admissible à valeurs connexes,

nous obtenons la définition d'*une application* (*fortement*) $\mathbb{Z}_2$*-sphérique*.

Tous les résultats et commentaires concernant les applications (fortement) sphériques s'étendent aux applications (fortement) $\mathbb{Z}_2$-sphériques. Par définition, le graphe $\Gamma(\phi)$ de l'application sphérique ϕ est fermé dans $M \times E$. Les valeurs des applications sphériques peuvent être non connexes. Au cas où E est de dimension finie, toute application sphérique est ϱ_S-semi-continue supérieurement (ou semi-continue supérieurement — ceci revenant au même).

Les deux lemmes suivants nous seront utiles pour la présentation d'exemples.

(2.2) LEMME ([10]). *Supposons qu'une partie X de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, soit fermée et bornée. Alors* :

(2.2.1) $X = \widetilde{X}$ *lorsque X est acyclique*;

(2.2.2) $H^*(X) = H^*(S^{n-1})$ *implique que $\widetilde{X}$ est acyclique*;

(2.2.3) *si X est connexe et $n = 2$, $\widetilde{X}$ est acyclique.* ■

Ce lemme reste valable pour la cohomologie de Čech à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$.

(2.3) LEMME. *Supposons qu'un espace de Banach E est de dimension infinie. Pour toute partie X de E compacte ou convexe, fermée et bornée, on a $X = \widetilde{X}$.*

Démonstration. Dans le cas où X est compacte, $E \backslash X$ est connexe d'après le théorème de Klee ([12], p. 33, th. (6.3)). Donc $X = \widetilde{X}$. Dans le cas où X est convexe, fermée et bornée la conclusion est évidente. ■

Au cas où E est de dimension infinie, l'opération $\widetilde{\ }$ étant triviale, il résulte de (2.3) que l'étude des applications sphériques à valeurs compactes est sans intérêt.

(2.4) EXEMPLES. *Supposons qu'une m-application $\phi : M \to E$ définie sur un espace métrique M est hypercontinue.*

(2.4.1) *Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée* :

(2.4.1.1) *les valeurs de ϕ sont acycliques et $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; ou*

(2.4.1.2) *les valeurs de ϕ sont convexes.*

Alors ϕ est une application fortement sphérique.

(2.4.2) *Supposons que ϕ soit ϱ_F-semi-continue inférieurement et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée* :

(2.4.2.1) $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *et les valeurs $\widetilde{\phi}(x)$ sont acycliques pour tout $x \in M$; ou*

(2.4.2.2) *les valeurs $\widetilde{\phi}(x)$ sont convexes pour tout $x \in M$.*

Alors ϕ est une application fortement sphérique.

(2.4.3) *Supposons que ϕ soit ϱ_F-semi-continue inférieurement et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée* :

(2.4.3.1) $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *et $H^*(\phi(x)) = H^*(S^{n-1})$ pour tout $x \in M$; ou*

(2.4.3.2) *les $\phi(x)$ sont des sphères géométriques dans E pour tout $x \in M$.*

Alors ϕ est une application fortement sphérique.

(2.4.4) *Si $E = \mathbb{R}^2$ et ϕ est ϱ_F-semi-continue inférieurement à valeurs connexes, alors ϕ est une application fortement sphérique.*

D é m o n s t r a t i o n. Nous montrons d'abord (2.4.1) et (2.4.2). Nous déduisons de l'hypothèse (2.4) et de (II, (1.2)) que $\Gamma(D\phi)$ est ouvert dans $M \times E$. Dans le cas (2.4.1.1), nous utilisons (2.2.1) et (1.2.2), et pour (2.4.1.2), nous utilisons (2.3) et (1.2.3). Nous obtenons ainsi que $\phi = \widetilde{\phi}$ est fortement admissible et que $\Gamma(B\phi) = \emptyset$, d'où (2.4.1).

Dans les cas (2.4.2.1) et (2.4.2.2), le fait que $\Gamma(B\phi)$ soit ouvert résulte de l'hypothèse (2.4.2) et de (II, (3.6)). Il reste à vérifier que $\widetilde{\phi}$ est fortement admissible. En vertu de (1.2.2) et de (1.2.3), il suffit de montrer que $\widetilde{\phi}$ est hypercontinue. D'après (II, (3.2)) et l'hypothèse (2.4), les hyperimages des parties bornées de M par $\widetilde{\phi}$ sont totalement bornées dans $(\mathcal{D}(E), \varrho_S)$. Pour montrer que $\widetilde{\phi}$ est ϱ_S-semi-continue supérieurement, nous utilisons le corollaire (II, (3.5)) dans le cas (2.4.2.1) et l'égalité $\widetilde{\phi} = \overline{\mathrm{conv}}(\phi)$ dans le cas (2.4.2.2) (il est alors immédiat que si ϕ est ϱ_S-semi-continue supérieurement alors $\overline{\mathrm{conv}}(\phi)$ l'est aussi). Nous avons ainsi prouvé la propriété (2.4.2).

Dans le cas (2.4.3.1), l'assertion découle de (2.4.2.1) et de (2.2.2). Dans le cas (2.4.3.2), le résultat découle de la propriété (2.4.2.2) déjà montrée.

Enfin, pour (2.4.4), nous utilisons les propriétés (2.2.3) et (2.4.3.1) déjà montrées. ■

Nous allons maintenant énoncer trois lemmes nous fournissant des conditions suffisantes pour que deux applications sphériques admettent des points de coïncidence. Nous utiliserons ces lemmes dans les démonstrations des théorèmes de coïncidence, de Borsuk–Ulam et de l'invariance du domaine pour les champs (fortement) $\mathbb{Z}_2$-sphériques (déf. (2.8)).

(2.5) LEMME (comp. [10]). *Soient* $\phi, T : M \to E$, $\dim(E) \geq 2$, *deux* m-*applications vérifiant* :

(2.5.1) $\Gamma(BT)$ *et* $\Gamma(DT)$ *sont ouverts dans* $M \times E$;

(2.5.2) ϕ *est à valeurs connexes et possède une* m-*sélection* ϱ_S-*semi-continue supérieurement*, *à valeurs compactes et connexes.*

Alors,

$$M = M_B \cup M_D \cup M_K \,, \tag{2.5.3}$$

où

$$M_D := \{x \in M : \phi(x) \subset DT(x)\}\,, \quad M_B := \{x \in M : \phi(x) \subset BT(x)\}\,,$$
$$M_K := \{x \in M : \phi(x) \cap T(x) \neq \emptyset\}\,;$$

(2.5.4) M_B *et* M_D *sont séparés*,

(2.5.5) *si* M *est connexe et* M_B *et* M_D *sont non vides*, *on a* $M_K \neq \emptyset$.

D é m o n s t r a t i o n. (2.5.3) résulte de (II, (3.1.3)) et de la connexité des valeurs de ϕ. Pour montrer (2.5.4), soit $\xi : M \to E$ une m-sélection ϱ_S-semi-continue supérieurement de ϕ à valeurs compactes et connexes. Les ensembles $M'_B := \{x \in M : \xi(x) \subset BT(x)\}$ et $M'_D := \{x \in M : \xi(x) \subset DT(x)\}$ sont ouverts et disjoints. Comme $M_B \subset M'_B$ et $M_D \subset M'_D$, M_B et M_D sont séparés. (2.5.5) découle immédiatement de (2.5.4). ∎

(2.6) LEMME. *Soient* $\phi, T : M \to E$, $\dim(E) \geq 2$, *deux* m*-applications vérifiant :*

(2.6.1) $\Gamma(B\phi)$, $\Gamma(D\phi)$, $\Gamma(BT)$ *et* $\Gamma(DT)$ *sont ouverts dans* $M \times E$;

(2.6.2) $\widetilde{\phi}, \widetilde{T} : M \to E$ *sont à valeurs connexes et possèdent des* m*-sélections* $\xi_\phi, \xi_T : M \to E$, ϱ_S*-semi-continues supérieurement à valeurs compactes et connexes.*

Alors,

$$M = M_\phi \cup M_T \cup M_K \cup M_0\,, \tag{2.6.3}$$

où

$$M_\phi := \{x \in M : \phi(x) \subset BT(x)\}\,, \qquad M_T := \{x \in M : T(x) \subset B\phi(x)\}\,,$$
$$M_K := \{x \in M : \widetilde{\phi}(x) \cap \widetilde{T}(x) \neq \emptyset\}\,, \qquad M_0 := \{x \in M : \phi(x) \cap T(x) = \emptyset\}\,;$$

(2.6.4) M_ϕ, M_T *et* M_0 *sont mutuellement séparés;*

(2.6.5) *si* M *est connexe et au moins deux des ensembles* M_ϕ, M_T, M_0 *sont non vides, alors* $M_K \neq \emptyset$.

Démonstration. (2.6.3) résulte de (II, (3.1.12)). Afin de prouver (2.6.4), nous montrons que M_ϕ et M_T sont séparés. Supposons au contraire qu'il existe $x \in \overline{M}_\phi \cap M_T$. Comme $x \in \overline{M}_\phi$, dans tout voisinage $V \ni x$ dans M il existe $y \in V$ tel que $\phi(y) \subset BT(y)$, d'où (1) $DT(y) \subset D\phi(y)$. Mais $x \in M_T$, donc $T(x) \subset B\phi(x)$, d'où $DT(x) \cap B\phi(x) \neq \emptyset$. Les graphes des m-applications DT et $B\phi$ étant ouverts, il existe un voisinage W de x dans M tel que (2) $DT(y) \cap B\phi(y) \neq \emptyset$ pour tout $y \in W$. D'après (1) et (2) nous avons la contradiction : $D\phi(y) \cap B\phi(y) \neq \emptyset$ pour un $y \in W$. Le fait que $\overline{M}_T \cap M_\phi = \emptyset$ se démontre symétriquement. Nous avons ainsi prouvé que M_ϕ et M_T sont séparés. Considérons à présent M_ϕ et M_0. Donnons-nous un $x \in \overline{M}_\phi \cap M_0$. Comme $x \in \overline{M}_\phi$, dans tout voisinage V de x dans M il existe y tel que $\phi(y) \subset BT(y)$. D'où $\widetilde{\phi}(y) \subset \widetilde{T}(y)$ et donc (3) $\xi_\phi(y) \subset T(y)$ pour un $y \in V$. Mais $x \in M_0$, donc $\widetilde{\phi}(x) \cap \widetilde{T}(x) = \emptyset$. D'où $\xi_\phi(x) \subset DT(x)$ et il existe un voisinage W de x dans M tel que $\xi_\phi(y) \subset DT(y)$ pour tout $y \in W$. En vertu de (3), nous obtenons $\widetilde{T}(y) \cap DT(y) \neq \emptyset$ pour un $y \in W$, ce qui est contradictoire.

Soit $x \in M_\phi \cap \overline{M}_0$. Comme $x \in M_0$, dans tout voisinage V de x dans M il existe y tel que $\widetilde{\phi}(y) \cap \widetilde{T}(y) = \emptyset$. C'est-à-dire (4) $\widetilde{\phi}(y) \subset DT(y)$ pour un $y \in V$. D'autre part, puisque $x \in M_\phi$, nous avons (5) $B\phi(x) \subset T(x) \cup BT(x)$ et (6) $\phi(x) \cap T(x) = \emptyset$. La condition (5) entraîne l'alternative (7) $B\phi(x) \cap BT(x) \neq \emptyset$ ou bien (8) $B\phi(x) \subset T(x)$. Au cas où (7) est vérifiée, $\Gamma(B\phi)$ et $\Gamma(BT)$ étant ouverts, il existe un voisinage W de x dans M tel que $B\phi(y) \cap BT(y) \neq \emptyset$ pour tout $y \in W$. Cela contredit (4). Si (8) est vérifiée, grâce à (4) nous obtenons

$B\phi(x) = \emptyset$. Alors $\xi_\phi(x) \subset \widetilde{\phi}(x) = \phi(x) \subset BT(x)$. L'application ξ_ϕ étant ϱ_S-semi-continue supérieurement, il existe un voisinage W de x dans M tel que $\xi_\phi(y) \subset BT(y)$ pour tout $y \in W$, ce qui contredit (4). Ainsi, nous avons montré que M_ϕ et M_0 sont séparés.

En procédant symétriquement, nous montrons que M_T et M_0 sont séparés. (2.6.5) découle immédiatement de (2.6.4). ∎

(2.7) LEMME. *Soit $\beta : M \to M$ une m-involution à graphe connexe, définie sur un espace métrique M. Supposons en outre qu'une m-application $\phi : M \to E$ vérifie* (2.1.2) *et la condition suivante* :

(2.7.1) *$\widetilde{\phi} : M \to E$ est à valeurs connexes et possède une m-sélection $\xi : M \to E$, ϱ_S-semi-continue supérieurement, à valeurs compactes et connexes.*

Alors, s'il y a une paire $x = (x_1, x_2) \in \Gamma(\beta)$ telle que $\widetilde{\phi}(x_1) \cap \widetilde{\phi}(x_2) \neq \emptyset$, il existe une paire $y = (y_1, y_2) \in \Gamma(\beta)$ telle que $\phi(y_1) \cap \phi(y_2) \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons que $\phi(z_1) \cap \phi(z_2) = \emptyset$ pour tout $z = (z_1, z_2) \in \Gamma(\beta)$. D'après (II, (3.1.12)), il n'y a que deux situations possibles :

$$(1)\ \phi(x_1) \subset B\phi(x_2)\,, \quad \text{ou bien} \quad (2)\ \phi(x_2) \subset B\phi(x_1)\,.$$

Notons par $\pi_1, \pi_2 : \Gamma(\beta) \to M$ les projections canoniques. Prenons, dans le lemme (2.6), $M := \Gamma(\beta)$, $T := \phi\pi_2$, $\phi := \phi\pi_1$. Les projections π_1 et π_2 étant continues, les hypothèses (2.6.1) et (2.6.2) sont satisfaites. Supposons maintenant que (1) soit vérifiée. Alors $x \in M_\phi$. $\Gamma(\beta)$ étant symétrique, il existe $y \in \Gamma(\beta)$ tel que $(\pi_1(x), \pi_2(x)) = (\pi_2(y), \pi_1(y))$, d'où $y \in M_T$. D'après (2.6.5), M_K est non vide, ce qui contredit l'hypothèse.

La démonstration dans le cas (2) est similaire. ∎

Nous introduisons maintenant la notion de champ (fortement) sphérique.

(2.8) DÉFINITION. Soit X une partie d'un espace de Banach E, et soit $E_0 \subset E$ un sous-espace vectoriel de E de dimension ≥ 2. Une m-application $\phi : X \to E_0$ est appelée *champ* (*fortement*) *sphérique* si

(2.8.1) $\widetilde{\phi} : X \to E_0$ est un champ (fortement) admissible à valeurs connexes;
(2.8.2) $\Gamma(B\phi)$ et $\Gamma(D\phi)$ sont ouverts dans $X \times E_0$.

En remplaçant la notion de champ (fortement) admissible par celle de champ (fortement) $\mathbb{Z}_2$-admissible dans (2.8.1), nous obtenons la définition de *champ* (*fortement*) *$\mathbb{Z}_2$-sphérique*. La discussion concernant les champs (fortement) sphériques qui suit concerne aussi les champs (fortement) $\mathbb{Z}_2$-sphériques. Nous allons tenter d'étendre les théorèmes principaux du chapitre 1 au cas des applications et des champs sphériques. Cependant, afin de pouvoir formuler ces nouveaux théorèmes, nous devons disposer d'un degré pour les champs sphériques. Nous allons définir un tel degré de manière assez naturelle en s'appuyant sur la relation étroite entre les champs admissibles et les champs sphériques. Soit $\phi : M \to E$

un champ sphérique avec $X := K$ ou $X := S$, et $\phi(S) \subset E \setminus 0$. Posons

$$\mathrm{Deg}(\phi) := \begin{cases} \mathrm{Deg}(\widetilde{\phi}) & \text{lorsque } 0 \in D\phi(x) \text{ pour tout } x \in S, \\ \{0\} & \text{lorsqu'il existe } x \in S \text{ tel que } 0 \in B\phi(x). \end{cases}$$

Le symbole $\{0\}$ désigne le singleton composé de l'homomorphisme nul $\overset{\approx}{H}{}^{-1}(E \setminus 0) \to \overset{\approx}{H}{}^{-1}(S)$.

Nous sommes à même de présenter la partie fondamentale de ce chapitre. Nous montrons d'abord un théorème de coïncidence de type Poincaré pour des champs et des applications sphériques ou admissibles.

(2.9) THÉORÈME. *Supposons qu'un champ admissible ou sphérique $\phi : K \to E$ ne s'annule pas sur la sphère S et que* $\mathrm{Deg}(\phi) \neq \{0\}$. *Soit $T : K \to E$ une application admissible ou sphérique vérifiant* (1.7.1). *Alors, il existe $y \in K$ tel que $\phi(y) \cap T(y) \neq \emptyset$.*

Démonstration. (1) Si ϕ est un champ admissible et T est une application admissible, la conclusion découle de (1.10).

Supposons alors que les hypothèses de (1) ne sont pas satisfaites et, de plus, que

(2.9.1) ϕ et T ne coïncident pas sur S.

(2) Si ϕ est un champ admissible et T une application sphérique, d'après (1) il existe $z \in K$ tel que $\phi(z) \cap \widetilde{T}(z) \neq \emptyset$. Si $\phi(z) \cap T(z) \neq \emptyset$, la démonstration est terminée. Sinon, nous utilisons (2.5) pour $M := K$. Comme $z \in M_B$ et que, d'après (1.7.1) et (2.9.1), $S \subset M_D$, l'existence de $y \in K$ tel que $\phi(y) \cap T(y) \neq \emptyset$ découle de (2.5.5).

(3) Dans le cas où ϕ est un champ sphérique et T est une application admissible, la démonstration est semblable à celle de (2).

(4) Si ϕ est un champ sphérique et T une application sphérique, d'après (1) il existe $z \in K$ tel que $\widetilde{\phi}(z) \cap \widetilde{T}(z) \neq \emptyset$. Il n'y a rien à prouver dans le cas où $\phi(z) \cap T(z) \neq \emptyset$. Sinon, nous utilisons (2.6) avec $M := K$. D'après (1.7.1) et (2.9.1), $S \subset M_0$. Comme $z \notin M_K \cup M_0$, alors $z \in M_\phi \cup M_T$ (voir II, (3.1.12)). Donc, en vertu de (2.6.5), il existe $y \in K$ tel que $\phi(y) \cap T(y) \neq \emptyset$. ∎

(2.10) COROLLAIRE. *Si l'image de S par une application sphérique $T : K \to E$ est contenue dans K, alors T admet un point fixe.* ∎

(2.11) COROLLAIRE. *Toute application sphérique $T : K \to K$ admet un point fixe.* ∎

Nous obtenons comme conséquence de (2.11) et (2.4.4) le

(2.12) COROLLAIRE. *Si une m-application $T : K^2 \to K^2$ à valeurs connexes est ϱ_S-semi-continue supérieurement et ϱ_F-semi-continue inférieurement, alors elle admet un point fixe.* ∎

Observons que dans ce dernier corollaire aucune hypothèse sur le caractère homologique des valeurs de T n'est postulée. La faiblesse des hypothèses topologiques y est compensée par une condition de continuité extraordinaire. La question suivante demeure sans réponse :

(2.13) QUESTION. Est-ce que toute m-application ϱ_F-continue $T : K^n \to K^n$, $n > 2$, à valeurs connexes (et compactes) admet un point fixe?

(2.14) THÉORÈME (des antipodes). *Soit E_1 un sous-espace de codimension* 1 *d'un espace de Banach E*, $\dim(E) \geq 3$, *et soit $\phi : S \to E_1$ un champ $\mathbb{Z}_2$-sphérique. Alors il existe $x \in S$ tel que $\phi(x) \cap \phi(-x) \neq \emptyset$.*

Démonstration. $\widetilde{\phi} : S \to E_1$ étant un champ $\mathbb{Z}_2$-admissible, d'après (1.15) il existe $z \in S$ tel que $\widetilde{\phi}(z) \cap \widetilde{\phi}(-z) \neq \emptyset$. Définissons la m-involution $\beta : S \to S$ par $\beta(y) := \{-y\}$. Comme $\Gamma(\beta)$ est connexe, d'après (2.7) il existe $x \in S$ tel que $\phi(x) \cap \phi(-x) \neq \emptyset$. ■

Avant de démontrer le théorème de l'invariance du domaine, nous énonçons un lemme et un corollaire sur la nature des ε-transformations.

(2.15) LEMME. *Soient $x \in E$ et $r > 0$*, $\dim(E) \geq 2$. *Supposons qu'une m-application $\phi : K(x, r) \to E$ satisfasse* (2.1.2) *et* (2.7.1). *Alors pour tout nombre réel positif $\varepsilon < r$, ϕ est une ε-transformation si et seulement si $\widetilde{\phi}$ l'est aussi.*

Démonstration. L'implication ($\Leftarrow$) est évidente. Afin de montrer la réciproque, supposons que $\widetilde{\phi}(a) \cap \widetilde{\phi}(b) \neq \emptyset$ et que $\|a - b\| \geq \varepsilon$ pour $a, b \in K(x, r)$. Définissons la m-involution $\beta : K(x, r) \to K(x, r)$ par $\beta(y) := \{z \in K(z, r) : \|z - y\| > \varepsilon\}$. Nous vérifions aisément que $\Gamma(\beta)$ est connexe (et même connexe par arcs). Comme $(a, b) \in \Gamma(\beta)$, d'après (2.7) il existe une paire $(c, d) \in \Gamma(\beta)$ telle que $\phi(c) \cap \phi(d) \neq \emptyset$. Comme $\|c - d\| \geq \varepsilon$, nous en déduisons que ϕ ne peut être une ε-transformation, d'où la contradiction. ■

(2.16) COROLLAIRE. *Soit V un ouvert de E* ($\dim(E) \geq 2$) *et soit $\phi : V \to E$ une m-application vérifiant* (2.1.2) *et* (2.7.1). *Alors ϕ est une ε-transformation locale par rapport à V si et seulement si $\widetilde{\phi}$ l'est aussi.* ■

Ainsi, dans le cas $V := E$ pour tout $\varepsilon > 0$, ϕ est une ε-transformation si et seulement si $\widetilde{\phi}$ l'est.

(2.17) THÉORÈME (de l'invariance du domaine). *Soit V un ouvert d'un espace de Banach E* ($\dim(E) \geq 2$). *Supposons qu'un champ fortement $\mathbb{Z}_2$-sphérique $\phi : V \to E$ soit une ε-transformation locale par rapport à V. Alors l'image de V par ϕ est ouverte dans E.*

Démonstration. D'après (1.18) et (2.16), l'image $\widetilde{\phi}(V)$ est ouverte dans E. Il s'agit de démontrer que $\widetilde{\phi}(V) \subset \phi(V)$, l'inclusion dans l'autre sens étant évidente. Donnons-nous un point $a \in B\phi(x)$ pour un $x \in V$ quelconque. Le champ fortement $\mathbb{Z}_2$-admissible $\widetilde{\phi}$ étant une ε-transformation locale par rapport à V, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K(x, \varepsilon)$ soit contenue dans V et que $\widetilde{\phi}|K(x, \varepsilon)$ soit une ε-transformation. Comme $a \notin \widetilde{\phi}(y)$, nous avons $a \in D\phi(y)$ pour tout $y \in S(x, \varepsilon)$.

Posons, dans (2.5), $M := K(x,\varepsilon)$, $\phi(y) := \{a\}$ pour tout $y \in K(x,\varepsilon)$, et $T := \phi$. Il est facile de vérifier que $x \in M_B$ et que $S \subset M_D$; il existe donc, d'après (2.5.5), un $z \in K(x,\varepsilon)$ tel que $a \in \phi(z)$. ■

(2.18) COROLLAIRE. *Soit* $\phi : E \to E$ *un champ fortement* $\mathbb{Z}_2$*-sphérique* $(\dim(E) \geq 2)$. *Si* ϕ *est une* ε*-transformation pour un* $\varepsilon > 0$, *alors l'image* $\phi(E)$ *est ouverte dans* E.

Démonstration. Toute ε-transformation définie sur E tout entier est une ε-transformation locale par rapport à E. ■

Il n'y a aucun intérêt à formuler un théorème sur l'invariance du domaine pour les champs fortement $\mathbb{Z}_2$-sphériques et à la fois fortement injectifs; de tels champs de vecteurs multivalents sont immédiatement fortement $\mathbb{Z}_2$-admissibles :

(2.19) LEMME. *Soit* V *un ouvert d'un espace de Banach* E $(\dim(E) \geq 2)$. *Pour tout champ sphérique* $\phi : V \to E$ *fortement injectif l'ensemble* $B\phi(x)$ *est vide quel que soit* $x \in V$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in E$ tel que $a \in B\phi(x)$ pour un $x \in V$. L'ensemble V étant ouvert dans E et le graphe $\Gamma(B\phi)$ étant ouvert dans $V \times E$, il existe $r > 0$ et $y \in V$ tels que $K(x,r) \subset V$, $y \in K(x,r) \setminus \{x\}$ et $a \in B\phi(y)$. D'où

$$\widetilde{\phi}(x) \cap \widetilde{\phi}(y) \neq \emptyset\,. \tag{2.19.1}$$

D'autre part, $\phi|K(x,r)$ est une ε-transformation pour tout $\varepsilon > 0$. D'après (2.15), $\widetilde{\phi}|K(x,r)$ est aussi une ε-transformation pour tout positif $\varepsilon \leq r$, elle est donc fortement injective; ceci contredit (2.19.1). ■

Bibliographie

[1] F. S. de Blasi and J. Myjak, *A remark on the definition of topological degree for set-valued mappings*, J. Math. Anal. Appl. 92 (1983), 445–451.

[2] G. Borisovich, B. D. Gel'man, L. Myshkis et V. V. Obukhovskiĭ, *Méthodes topologiques dans la théorie des points fixes des applications multivoques*, Uspekhi Mat. Nauk 35 (1980), 58–126 (en russe).

[3] K. Borsuk, *On a metrization of the hyperspace of a metric space*, Fund. Math. 94 (1977), 191–207.

[4] —, *On some metrization of the hyperspace of compact sets*, ibid. 41 (1954), 168–202.

[5] —, *Remark on the Birkhoff–Kellogg theorem*, Bull. Acad. Polon. Sci. 31 (1983), 167–169.

[6] C. Bowszyc, *Certains théorèmes sur les champs de vecteurs compacts dans les espaces localement compacts*, Zeszyty Naukowe WSP w Gdańsku, Mat. Fiz. Chem. 10 (1970), 9–21 (en polonais).

[7] J. Bryszewski, *On a class of multi-valued vector fields in Banach spaces*, Fund. Math. 97 (1977), 79–94.

[8] J. Bryszewski and L. Górniewicz, *A Poincaré type coincidence theorem for multi-valued maps*, Bull. Acad. Polon. Sci. 24 (1976), 593–598.

[9] —, —, *Multi-valued maps of subsets of Euclidean spaces*, Fund. Math. 90 (1976), 233–251.

[10] A. Dawidowicz, *Spherical maps*, ibid. 127 (1987), 187–196.
[11] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin 1972.
[12] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory I*, PWN, Warszawa 1982.
[13] Z. Dzedzej, *Fixed point index theory for a class of nonacyclic multivalued maps*, Dissertationes Math. 253 (1985).
[14] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.
[15] R. Engelking, *General Topology*, Monografie Mat. 60, PWN, Warszawa 1977.
[16] K. Gęba and L. Górniewicz, *On the Bourgin–Jang theorem for multi-valued maps I*, Bull. Polon. Acad. Sci. 34 (1986), 315–322.
[17] —, —, *On the Bourgin–Jang theorem for multi-valued maps II*, ibid., 323–328.
[18] K. Gęba and A. Granas, *Algebraic topology in linear normed spaces*, *I–V*, Bull. Acad. Polon. Sci., I: 13 (1965), 287–290; II: 13 (1965), 341–346; III: 15 (1967), 137–143; IV: 15 (1967), 145–152; V: 17 (1969), 123–130.
[19] —, —, *Infinite dimensional cohomology theories*, J. Math. Pures Appl. 52 (1973), 147–270.
[20] —, —, *On the cohomology theory in linear normed spaces*, in: Sympos. on Infinite-Dimensional Topology (1967), Ann. of Math. Stud. 69, Princeton Univ. Press, Princeton 1972, 93–106.
[21] B. D. Gel'man, *The topological characteristic of multivalued mappings and a fixed point theorem*, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 260–264.
[22] L. Górniewicz, *Fixed point theorems for multi-valued maps of subsets of Euclidean spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 27 (1979), 111–115.
[23] —, *Homological methods in fixed point theory of multi-valued maps*, Dissertationes Math. 129 (1975).
[24] —, *On the Birkhoff–Kellogg theorem*, in: Proc. Internat. Conf. on Geometric Topology, PWN, Warszawa 1980, 155–160.
[25] L. Górniewicz and A. Granas, *Some general theorems in coincidence theory*, J. Math. Pures Appl. 60 (1981), 361–373.
[26] A. Granas, *Sur la notion du degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), 191–194.
[27] —, *Theorem on antipodes and theorem on fixed points for a certain class of multi-valued mappings in Banach spaces*, ibid., 271–275.
[28] —, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces I*, Rozprawy Mat. 30 (1962).
[29] K. Kuratowski, *Sur une méthode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles compacts*, Fund. Math. 48 (1956), 114–138.
[30] B. O'Neill, *A fixed point theorem for multivalued functions*, Duke Math. J. 14 (1947), 689–693.
[31] K. Sieklucki, *A generalization of the Borsuk theorem on antipodal points*, Bull. Acad. Polon. Sci. 17 (1969), 629–631.
[32] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York 1966.