NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Г. И. ШИШКИН

Институт математики и механики Уральского Научного Центра АН СССР, Свердловск, СССР

Для сингулярно возмущенных краевых задач для уравнений параболического и эллиптического типов с параболическим пограничным слоем предлагается методика построения разностных схем, сходящихся равномерно относительно параметра.

Введение

Математическое моделирование ряда технологических процессов приводит к изучению краевых задач для дифференциальных уравнений, в которых старшие производные содержат параметр, принимающий произвольные значения из полуинтервала (0, 1]. При стремлении параметра к нулю в решении таких задач появляются особенности типа пограничных и переходных слоев, что вызывает затруднения при численном их решении [1]. Так, широко распространенные разностные методы решения [2–4] требуют применения вблизи границы шага интегрирования, существенно меньшего толщины пограничного слоя. Поэтому представляют интерес методы построения разностных схем, сходящихся равномерно относительно параметра.

В настоящей работе рассматривается методика построения равномерно по параметру сходящихся разностных схем для решения краевых задач для эллиптического и параболического уравнений с параболическим пограничным слоем. Для параболического уравнения предлагается метод повышения точности (относительно шага временно́й сетки) разностных схем, использующий решения соответствующих разностных задач на последовательности вложенных сеток — экстраполяционный метод Ричардсона (см. [4, 5]).

У решений параболических уравнений, не содержащих производных первого порядка по пространственным переменным, а также эллиптических уравнений, у которых характеристики вырожденного уравнения параллельны границе области, при стремлении параметра к нулю возникают пограничные слои, описываемые уравнениями параболического типа (параболические пограничные слои). В окрестности параболического пограничного слоя решение задачи и его производные по направлению вдоль границы области ограничены равномерно по параметру, производные по нормали к границе, неограниченно возрастают при стремлении параметра к нулю. В этой окрестности исходное дифференциальное уравнение в частных производных можно рассматривать относительно переменной, ортогональной границе области как обыкновенное дифференциальное уравнение со специальным свободным членом (содержащим производные по направлению, касательному к границе). Такое поведение решения в окрестности параболического слоя позволяет строить разностные схемы для уравнений в частных производных на основе разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для аппроксимации производных, ортогональных границе области, используются соответствующие разностные производные на специальным образом сгущающихся сетках. Закон сгущения сетки такой же как и в случае обыкновенного дифференциального уравнения [2].

В § 1,3 рассматривается построение разностных схем для решения краевых задач для уравнений параболического и эллиптического типов, приводятся разностные схемы и теоремы о равномерной по параметру сходимости этих схем. В случае эллиптического уравнения в окрестности экспоненциального пограничного слоя для аппроксимации дифференциального оператора, содержащего производные по направлению вдоль границы области, используется разностный оператор схемы подгонки (для обыкновенного дифференциального уравнения) [6]. В § 2 для параболического уравнения по методу Ричардсона строятся приближенные решения более высокого порядка точности (по временной переменной). Развернутое обоснование приведенных здесь результатов и их обобщения даются в работах [8–10].

Отметим, что в [5] используется метод Ричардсона для решения уравнений параболического типа в том случае, когда уравнения не содержат малый параметр, а для решения задачи применяются равномерные сетки, у которых шаг сетки по временно́й переменной пропорционален квадрату шага сетки по пространственной переменной.

§ 1. Разностная схема для параболического уравнения

1. В области $D = \{(x, t)/0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T\}$ с границей $\Gamma = \bar{D}\backslash D$ рассмотрим задачу Дирихле для параболического дифференциального уравнения

$$(1.1)\qquad \left\{\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x, t)\frac{\partial}{\partial x}\right) - c(x, t) - p(x, t)\frac{\partial}{\partial t}\right\} = -\psi(x, t), \qquad (x, t)\in D,$$

$$(1.2)\qquad u = \varphi(x, t), \qquad (x, t)\in\Gamma,$$

где $a(x, t)$, $c(x, t)$, $p(x, t)$, $\psi(x, t)$, $(x, t)\in\bar{D}$, и $\varphi(x, t)$, $(x, t)\in\Gamma$ — достаточно гладкие функции, причем $a(x, t)$, $c(x, t)$, $p(x, t) \geqslant \alpha_0 > 0$, $(x, t)\in\bar{D}$; $\varepsilon\in(0, 1]$. При стремлении параметра к нулю в окресности боковой границы области D возникает пограничный слой — параболический пограничный слой, описываемый уравнением параболического типа. Для задачи (1.1), (1.2) построим разностную схему, сходящуюся равномерно относительно параметра.

Производная по времени решения задачи ограничена равномерно по параметру. При фиксированном значении $t\in(0, T]$ уравнение (1.1) относительно переменной x можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с правой частью $\Psi(x, t) = -\psi(x, t) + p(x, t)\times$ $\times\,\partial u(x, t)/\partial t$. Поставим ему в соответствие трехточечную разностную схему первого порядка точности, причем производную $\partial u/\partial t$, входящую в правую часть, будем аппроксимировать разностной производной. Эту схему строим интегро-интерполяционным методом [3, 4].

2. В области D введем сетку $D_{h\tau}$, полагая $\bar{D}_{h\tau} = \bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau$, $D_{h\tau} = \bar{D}_{h\tau}\cap D$, где $\bar{\omega}_\tau = \{t_k/t_k = k\tau,\ k = 0, 1, \dots, K\}$, $K\tau = T$, $\omega_h = \{x_i/i = 0, 1, \dots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}$, $\Gamma_{h\tau} = \bar{D}_{h\tau}\cap\Gamma$. Будем обозначать $f(x, t_k) = f_k(x)$, $f_k(x_i) = f_k^i$, $h = \max\limits_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Выпишем разностную схему для задачи (1.1), (1.2):

$$(1.3)\qquad \varepsilon(a_k^{h,i-1} z_{\bar{x}})_{\hat{x}} - c_k^i z - p_k^i z_{\bar{t}} = -\psi_k^i,\ (x, t)\in D_{h\tau},$$

$$(1.4)\qquad z = \varphi_k^i, \qquad (x, t) = (x_i, t_k)\in\Gamma_{h\tau},$$

где

$$(1.5)\qquad a_k^{h,i} = 2a_k^i a_k^{i+1}(a_k^i + a_k^{i+1})^{-1}.$$

Эта схема является монотонной при любых h_i, τ, ε, (см. [3, гл. VII, § 1]).

Заметим, что на произвольных сетках, максимальный шаг которых стремится к нулю, разностная схема (1.3)–(1.5) сходится при фиксированном значении параметра и не сходится равномерно относительно параметра.

3. Вместе с сеткой ω_h с произвольным расположением узлов будем рассматривать такие сетки ω_h^n со сгущающимися узлами вблизи концов отрезка [0, 1], для которых выполняются соотношения

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N-1} \delta_i^n \leqslant Mh^n, \qquad mN^{-1} \leqslant h \leqslant MN^{-1},$$

где $\delta_i^n = h_i^n + h_{i-1}^n + \min(h_i^n \varepsilon^{-n/2}\eta_h^i + h_{i-1}^n \varepsilon^{-n/2}\eta_h^{i-1};\ \eta_h^i + \eta_h^{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\eta_h^i = \exp(-m_1 x_i/\varepsilon^{1/2}) + \exp(-m_1(1 - x_{i+1})/\varepsilon^{1/2})$, $m_1 < m_0$, $n > 0$ — целое число.

Через $M(m)$ будем обозначать достаточно большие (достаточно малые) положительные постоянные, не зависящие от ε, h_i, τ и T, где $\varepsilon \in (0, 1]$, h_i, $\tau < 1$, $T \in (0, \infty)$.

Построим сетку ω_h^n, подобную приведенной в [2]. Пусть $\lambda_i = M_0 \varepsilon^{1/2} \ln(1 - i/N_0)^{-1}$, где $N_0 = h^{-1}$, N_0 — целое число, а R — наибольший номер i, для которого выполняются неравенства: $\lambda_i - \lambda_{i-1} \leqslant h$, $\lambda_i \leqslant 1/2$. Пусть узлы сетки располагаются симметрично относительно середины отрезка [0, 1]: $x_i = 1 - x_{N-i}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $x_N = 1$, причем середина отрезка [0, 1] принадлежит сетке. Положим $x_i = \lambda_i$ при $i \leqslant R$ и $x_i = x_R + (i - R)h$ при $x_R < 1/2$. Нетрудно видеть, что $(N-1)^{-1} \leqslant h \leqslant 3(N-1)^{-1}$. Используя технику оценок работы [2] (примененную в оценке погрешности решения), можно показать справедливость неравенства

$$\max_i \delta_i^n \leqslant Mh^n, \qquad i = 0, 1, \ldots, N-1 \text{ при } m_1 M_0 \geqslant n.$$

Таким образом, построена сетка ω_h^n.

Будем рассматривать сетки, узлы которых в окрестности боковой границы области $\bar{D}$ сгущаются по пространственной переменной. Пусть $D_{h\tau}^1$ — такая сетка $D_{h\tau}$ для которой имеет место неравенство

$$\max_{i,k} \sigma_{ik} \leqslant Mh, \qquad (x_i, t_k) \in D_{h\tau}$$

σ_{ik} при $t = t_k$ есть δ_i^1, где $\eta_h^i = \eta_h^i(m_1)$, $m_1 < m_0$, $m_0 = \min_x [c(x, t_k)/a(x, t_k)]^{1/2}$.

Так, сетка $\omega_h^1 \times \omega_\tau$, где ω_h^1 — сетка на отрезке [0, 1], построенная с использованием функции

$$\lambda_i = M_0 \varepsilon^{1/2} \ln(1 - i/N_0)^{-1} \quad \text{при } m_1 M_0 \geqslant 1, \quad m_1 < \min_D [c(x, t)/a(x, t)]^{1/2}$$

есть сетка $D_{h\tau}^1$.

Будем обозначать $f(x, t) \in H^{l+k, l/2}(\bar{D})$, если $\partial^k f(x, t)/\partial x^k \in H^{l, l/2}(\bar{D})$, $k \geqslant 0$ — целое число (см. [7]), $H^{l, l/2}(\bar{D}) = H^{(l)}(\bar{D})$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $a(x, t) \in H^{l+5, l/2}(\bar{D})$, $c(x, t)$, $p(x, t) \in H^{l+4, l/2}(\bar{D})$, $l > 0$. *Тогда при* $l > 2$ *и любых* $\psi(x, t) \in H^{l+4, l/2}(\bar{D})$, $\varphi(x, 0) \in H^{l+4}([0, 1])$, $\varphi(0, t)$,

$\varphi(1, t)\in H^{1+l/2}([0, T])$, удовлетворяющих условию согласования порядка $[l/2]+1$, функция z (решение задачи (1.3)–(1.5) на сетке $D^1_{h\tau}$) при $h, \tau\to 0$ сходится к решению задачи (1.1), (1.2) со скоростью $O(h+\tau)$ равномерно относительно параметра и величины интервала T. Для решения задачи (1.3)–(1.5) на сетках $\bar D_{h\tau}$, $\bar D^1_{h\tau}$ при любых h и τ справедливы оценки

$$|u-z|\leqslant M(h+\tau),\qquad (x, t)\in\bar D^1_{h\tau}, \tag{1.6}$$

$$|u-z|\leqslant M(\max_{i,k}\sigma_{ik}+\tau),\qquad (x, t)\in\bar D_{h\tau}. \tag{1.7}$$

§ 2. Замечания и обобщения

1. Схема (1.3), (1.4) остается монотонной, если положить

$$a_k^{h,i}=(a_k^i+a_k^{i+1})/2, \tag{2.1}$$

либо использовать другие формулы (см., например, [3, гл. VII, § 1, п. 10]), аппроксимирующие $a(x, t)$ на множестве $x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}$, $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$, при условии, что $a_k^{h,i}>0$ при $(x_i, t_k)\in\bar D_{h\tau}$.

Для решения задачи (1.3), (1.4) выполняется утверждение теоремы 1, если $a_k^{h,i}$ аппроксимирует $a((x_i+x_{i+1})/2, t_k)$, $i=0, 1, \ldots, N-1$, $t_k\in\omega_\tau$ с точностью $O(h_i^2)$.

2. При использовании формул (1.5) или (2.1) для решения задачи (1.3), (1.4) на сетке $\bar D_{h\tau}=\bar\omega_h^2\times\bar\omega_\tau$ выполняется оценка $|u-z|\leqslant M(h^2+\tau)$, $(x_i, t_k)\in\bar D_{h\tau}$; $\omega_h^2=\omega_h$ из работы [2].

3. Если применяется сетка с переменным шагом интегрирования по t, то в оценках (1.6), (1.7)

$$\tau=\max_k\tau_k,\qquad \tau_k=t_{k+1}-t_k,$$

t_k — точки разбиения интервала $[0, T]$.

4. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевым условиям третьего рода

$$-\alpha_{01}(t)\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}+\alpha_{00}(t)u(0, t)=\varphi_0(t),$$

$$\alpha_{11}(t)\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u(1, t)}{\partial x}+\alpha_{10}(t)u(1, t)=\varphi_1(t),$$

где $\alpha_{01}(t)$, $\alpha_{11}(t)\geqslant\alpha>0$, $\alpha_{00}(t)$, $\alpha_{10}(t)>0$, $t\in[0, T]$. Этой задаче поставим в соответствие разностную схему: во внутренних узлах сетки $\bar D_{h\tau}$ —

уравнения (1.3), а в граничных узлах — уравнения

$$
(2.2)\qquad \begin{cases} -\alpha_{01k}\varepsilon^{1/2}(a_k^0)^{-1}A_k^0(\psi, z)+\alpha_{00k}z_k^0 = \varphi_{0k}, \\ \alpha_{11k}\varepsilon^{1/2}(a_k^N)^{-1}A_k^{N-1}(\psi, z)+\alpha_{10k}z^0 = \varphi_{1k}, \\ k = 1, 2, \ldots, K; \quad z_0^i = \varphi_0^i, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \end{cases}
$$

где $A_k^0(\psi, z) = a_k^{h,0}[z_{kx}^0 - \varepsilon^{-1}h_0(z_k^0 - \varphi_k^0)/(2a_k^0)]$, $A_k^{N-1}(\psi, z) = a_k^{h,N-1}[z_{k\bar{x}}^N + \varepsilon^{-1}h_{N-1}(z_k^N - \psi_k^N)/(2a_k^N)]$.

Если $a\in H^{l+5,l/2}(\bar{D})$, c, p, $\psi\in H^{l+4,l/2}(\bar{D})$, α_{00}, α_{01}, α_{10}, α_{11}, φ_0, $\varphi_1\in H^{(l+1)/2}([0, T])$, $\varphi\in H^{l+4}([0, 1])$, $l > 2$, и выполнены условия согласования порядка $[(l+1)/2]$, то для решения задачи (1.3), (1.5), (2.2) сохраняется утверждение теоремы 1.

5. Пусть коэффициент a не зависит от t, $a\in H^{l+3}([0, 1])$, c, $p\in H^{l+2,l/2}(\bar{D})$. Тогда при $l > 4$ и любых $\psi\in H^{l+2,l/2}(\bar{D})$, $\varphi(x, 0)\in H^{l+2}([0, 1])$, $\varphi(0, t)$, $\varphi(1, t)\in H^{1+l/2}([0, T])$, удовлетворяющих условию согласования порядка $[l/2]+1$, выполняется утверждение теоремы 1. В этом случае при $(x_i, t_k)\in \bar{D}_{h\tau}^1$ для решения задачи (1.3)–(1.5) выполняются также оценки

$$
\left|\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} - z_{k\bar{t}}^i\right| \leqslant M(h+\tau), \qquad k \neq 0,
$$

$$
\varepsilon^{1/2}\left|\frac{\partial u(x_i, t_k)}{\partial t} - z_{kx}^j\right| \leqslant M(h+\tau), \qquad i-1 \leqslant j \leqslant i,\ j \neq N,
$$

$$
\varepsilon\left|\frac{\partial^2 u(x_i, t_k)}{\partial x^2} - z_{k\bar{x}x}^j\right| \leqslant M(h+\tau), \qquad |i-j| \leqslant 1,\ j \neq 0,\ N.
$$

При выводе этих оценок используются уравнения, полученные применением оператора первой разностной производной по t к уравнениям (1.1), (1.3).

6. Пусть $a(x, t)\in H^{(l+1)}(\bar{D})$, $c(x, t)$, $p(x, t)\in H^{(l)}(\bar{D})$, $l > 0$ — нецелое число. Если функции φ и ψ в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$ удовлетворяют соотношениям

$$
(2.3)\qquad \frac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi,\ \frac{\partial^n}{\partial t^n}\varphi = 0, \quad k, 2n \leqslant [l]+2, \qquad \frac{\partial^{k+n}}{\partial x^k \partial t^n}\psi = 0, \quad k+2n \leqslant [l],
$$

то для задачи (1.1), (1.2) выполнены условия согласования порядка $[l/2]+1$. Построим приближенные решения повышенной точности, используя решения разностных задач (1.3), (1.4) на неравномерных сетках.

Пусть $z^{(j)}$ — решение задачи (1.3), (1.4) при $D_{h\tau} = D(h,\tau^{(j)})$ $D(h, \tau^{(j)}) = \omega_h \times \omega(\tau^{(j)})$, ω_h — неравномерная сетка на отрезке $[0, 1]$, $\omega(\tau^{(j)}) = \omega_\tau$ при $\tau = \tau^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, p$;

p — целое число. Пусть $|\tau^{(j)}|\tau^{(j+1)}-1|\geqslant\alpha$, $\alpha>0$. На пересечении сеток

$$\bigcap_{0\leqslant j\leqslant p} D(h,\,\tau^{(j)})=D_1(p)$$

(пусть $D_1(p)\neq\varnothing$) определим функцию Z^p:

$$Z^p(x,\,t)=\sum_{j=0}^{p}\gamma^{(j)}z^{(j)}(x,\,t),\qquad (x,\,t)\in D_1(p),$$

где $\gamma^{(j)}$ — решение системы

$$\sum_{s=0}^{p}\gamma^{(s)}=1,\qquad \sum_{s=0}^{p}\gamma^{(s)}(\tau^{(s)})^n=0,\qquad n=1,2,\ldots,\,p.$$

Через ω_h^α обозначим такую сетку ω_h со сгущающимися вблизи концов отрезка $[0,\,1]$ узлами, для которой выполняются соотношения

$$\max_{1\leqslant j\leqslant N-1}\varrho_j(\alpha)\leqslant Mh^\alpha\quad\text{при}\quad 0<\alpha\leqslant 2,\quad h\leqslant MN^{-1},$$

где

$$\varrho_j(\alpha)=\begin{cases}(h_j+h_{j+1})^\alpha+\min\{(h_j\varepsilon^{-1/2})^\alpha\eta_j^h+(h_{j+1}\varepsilon^{-1/2})^\alpha\eta_{j+1}^h,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \eta_j^h+\eta_{j+1}^h\},\qquad \alpha\in(0,1],\\ (h_j+h_{j+1})^\alpha+\varepsilon|h_{j+1}-h_j|+\min\{(h_j\varepsilon^{-1/2})^\alpha\eta_j^h\\ \;+(h_{j+1}\varepsilon^{-1/2})^\alpha\eta_{j+1}^h+|h_{j+1}-h_j|\varepsilon^{-1/2}\eta_j,\ \eta_j^h+\eta_{j+1}^h\},\qquad \alpha\in(1,2].\end{cases}$$

Определим $\nu(q)$, где q — произвольное неотрицательное число, полагая $\nu(q)=q-1$, если q — целое положительное число, $\nu(q)=[q]-l$ — в противном случае ($[q]$ — целая часть числа). Положим $D_2^\alpha(p)=\bigcap_{0\leqslant j\leqslant p} D(h,\tau^{(j)})$, где $D(h,\tau^{(j)})=\omega_h^\alpha\times\omega(\tau^{(j)})$.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $l>0$ — нецелое число, коэффициенты $c(x,t)$, $p(x,t)\in\in H^{r,s}(\bar D)$, $a(x,t)\in H^{r-1,s}(\bar D)$, где $r=l+2[l/2]+4$, $s=l/2$, причем $\psi(x,t)\in\in H^{r,s}(\bar D)$, $\varphi(x,0)\in H^r([0,1])$, $\varphi(x,t)\in H^{s+1}([0,T])$, $x=0,1$, удовлетворяют условиям* (2.3). *Тогда функция $Z^p(x,t)$, $0\leqslant p\leqslant[l/2]$, при $h,\tau\to 0$ ($N=N(h)\to\infty$) сходится равномерно относительно параметра ε. Для функции Z^p при $h,\tau<1$, $\varepsilon\in(0,1]$ справедлива оценка*

$$|u(x,t)-Z^p(x,t)|\leqslant M(h^{\lambda_1}+\tau^{\lambda_2}),\qquad (x,t)\in D_2^\alpha(p),$$

где $\lambda_1=\min(\alpha,\vartheta(\lambda_2,l))$, $0\leqslant\lambda_2\leqslant\min(p+1,l/2)$, $\vartheta(\lambda_2,l)=\min[2,l-\nu(2\lambda_2)]$.

Пусть, например, $\alpha=2$, $l>2$, и $p=[l/2]-1$. В этом случае приближенное решение $Z^p(x,t),(x,t)\in D_2^2(p)$ при $h,\tau\to 0$ сходится равномерно относительно параметра $\varepsilon\in(0,1]$ со скоростью $O(h^2+\tau^\lambda)$, $\lambda=l/2-1$.

§ 3. Разностная схема для эллиптического уравнения

1. В прямоугольнике $D = \{x \mid 0 < x_i < d_i = 1,2\}$ с границей $\Gamma = \bar{D} \backslash D$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\left\{\varepsilon \sum_{i=1,2} a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x_2} - c(x)\right\} u = f(x), \qquad x \in D, \tag{3.1}$$

$$u = \varphi(x), \qquad x \in \Gamma. \tag{3.2}$$

Здесь $a_i(x)$, $b(x)$, $f(x)$ $c(x)$, $x \in \bar{D}$, $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$ — достаточно гладкие функции, причем $a_i(x)$, $b(x) \geqslant \alpha > 0$, $c(x) \geqslant 0$, $x \in \bar{D}$.

При стремлении параметра к нулю в окрестности боковых сторон прямоугольника D возникают параболические пограничные слои, а в окрестности верхней стороны — экспоненциальный пограничный слой. В окрестности параболического пограничного слоя производные по x_2 являются ограниченными равномерно по ε, а произведение параметра на производную второго порядка $\partial^2 u/\partial x_2^2$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому главный член сингулярной части решения в параболическом пограничном слое описывается параболическим уравнением. Разностную схему для аппроксимации решения в окрестности боковых границ прямоугольника удобно строить, используя схему на сгущающейся сетке для параболического уравнения.

Производные решения задачи по x_1 в окрестности экспоненциального пограничного слоя ограничены равномерно по ε. Уравнение (3.1) в этой окрестности можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной x_2. Для аппроксимации решения воспользуемся разностной схемой (метода экспоненциальной подгонки) для обыкновенного дифференциального уравнения. Производные по x_1 аппроксимируем разностными производными на неравномерной сетке.

2. На множестве $\bar{D}$ введем сетку $\bar{D}_h = \bar{\omega}_{h1} \times \bar{\omega}_{h2}$, где

$$\bar{\omega}_{h1} = \{x_1^i \mid i = 0, 1, \ldots, N_1,\ x_1^0 = 0,\ x_1^{N_1} = d_1\},$$

$$\bar{\omega}_{h2} = \{x_2^j = jh_2^*,\ j = 0, 1, \ldots, N_2,\ x_2^0 = 0,\ x_2^{N_2} = d_2\}.$$

Положим $\Gamma_h = \bar{D}_h \cap \Gamma$, $D_h = \bar{D}_h \cap D$. Задаче (3.1), (3.2) сопоставим разностную схему

$$\varepsilon a_1(x) z_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + \gamma(x) z_{x_2 \bar{x}_2} + b(x) z_{\bar{x}_2} - c(x) z = f(x), \tag{3.3}$$

$$x \in D_h;\ z = \varphi(x),\ x \in \Gamma_h.$$

Здесь $\gamma(x) = 2^{-1} h_2^* b(x) \operatorname{cth} \vartheta(x)$, $\vartheta(x) = h_2^* b(x)[2\varepsilon a_2(x)]^{-1}$. Схема (3.3) является монотонной. На сетке $\bar{D}_h^1 = \bar{\omega}_{h1} \times \bar{\omega}_{h2}$, где $\bar{\omega}_{h1} \equiv \bar{\omega}_h^1$, равномерную по параметру сходимость схемы устанавливает

Теорема 3. *Пусть* $a_1(x)$, $a_2(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $f(x)\in C^3(\bar{D})$, $u(x)\in C^4(\bar{D})$. *Пусть, короме того, функции* $f(x)$, $\varphi(x)$ *в угловых точках* $(0,d_2)$, (d_1,d_2) *удовлетворяют условию*: $b(x)\partial\varphi(x)/\partial x_2-c(x)\varphi(x)-f(x)=0$. Тогда разностная схема (3.3) при $h\to 0$ сходится в прямоугольнике $\bar{D}$ со скоростью $O(h^{1/4})$ равномерно относительно параметра

$$|u-z|\leqslant Mh^{1/4},\qquad x\in\bar{D}_h^1.$$

Заметим, что при фиксированном значении параметра разностная схема (3.3) на сетке $\bar{D}_h$ сходится со скоростью $O(h)$, а на сетке $D_h^2=\omega_{h_1}\times\omega_{h_2}$, где $\omega_{h_1}\equiv\omega_h^2$, со скоростью $O(h^2)$.

Литература

[1] Э. Дулан, Дж. Миллер и У. Шилдерс, *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*, Мир, Москва 1983.

[2] Н. С. Бахвалов, *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 9 (4) (1969), 841–859.

[3] А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва 1977.

[4] Г. И. Марчук, *Методы вычислительной математики*, Наука, Москва 1980.

[5] Г. И. Марчук и В. В. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, Наука, Москва 1979.

[6] А. М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Матем. заметки, вып. 2 1969, 237–248.

[7] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва 1967.

[8] Г. И. Шишкин, *Разностная схема на неравномерной сетке для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 23 (3) (1983), 609–619.

[9] —, *Повышение точности решений разностных схем для параболических уравнений с малым параметром при старшей производной*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 24 (6) (1984), 864–875.

[10] —, *Решение краевой задачи для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 26 (7) (1986), 1019–1031.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25 – May 29, 1987