ELEMENTARY AND ANALYTIC THEORY OF NUMBERS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 17
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1985

ZWEIFACHE EXPONENTIALSUMMEN UND DREIDIMENSIONALE GITTERPUNKTPROBLEME

EKKEHARD KRÄTZEL

Sektion Mathematik, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, D.D.R.

1. Einführung

In den folgenden Ausführungen setzen wir von den Zahlen a, b, c stets $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ voraus. Dann bezeichne $D(a, b, c; x)$ die Anzahl der Gitterpunkte unter der Fläche $\xi^a \eta^b \zeta^c = x$ mit positiven ξ, η, ζ. Das heisst, wir betrachten die Summe

$$D(a, b, c; x) = \sum_{n_1^a n_2^b n_3^c \leqslant x} 1,$$

in der über alle natürlichen Zahlen n_1, n_2, n_3, die der Ungleichung genügen, summiert wird. Sind insbesondere a, b, c ganzzahlig, dann wird durch

$$d(a, b, c; n) = \sum_{n_1^a n_2^b n_3^c = n} 1$$

eine Teilerfunktion definiert, und $D(a, b, c; x)$ ist dargestellt durch

$$D(a, b, c; x) = \sum_{n \leqslant x} d(a, b, c; n).$$

Besonders in den letzten Jahren führten viele Probleme der analytischen Zahlentheorie auf solche Funktionen. Während das Tripel $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ das Piltzsche Teilerproblem beschreibt, ist das Tripel $(1, 2, 3)$ von grösster Wichtigkeit für die Abschätzung der Anzahl der nicht-isomorphen Abelschen Gruppen gegebener Ordnung. Aber in anderen Anwendungen treten auch solche Kombinationen wie $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 4)$, $(3, 4, 5)$ und weitere auf. Daher ist es nützlich, Abschätzungen von $D(a, b, c; x)$ für beliebige Permutationen der Zahlen a, b, c zu haben. Zu diesem Zweck nutzen wir eine Formel, die von M. Vogts [16] auf der Grundlage einer Methode von P. G. Schmidt [9] entwickelt wurde. Wir schreiben

$$D(a, b, c; x) = H(a, b, c; x) + \Delta(a, b, c; x).$$

Das Hauptglied wird hierbei dargestellt durch

$$H(a, b, c; x) = \zeta\left(\frac{b}{a}\right)\zeta\left(\frac{c}{a}\right)x^{1/a} + \zeta\left(\frac{a}{b}\right)\zeta\left(\frac{c}{b}\right)x^{1/b} + \zeta\left(\frac{a}{c}\right)\zeta\left(\frac{b}{c}\right)x^{1/c},$$

worin $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Sollte $a = b$ oder $b = c$ oder beides sein, so sind in dieser Darstellung die entsprechenden Grenzwerte zu nehmen. Das Restglied ist gegeben durch

$$\Delta(a, b, c; x) = -\sum_{(u,v,w)\in\pi} S_{u,v,w}(x) + O(x^{1/(a+b+c)}), \tag{1}$$

wobei in der Summe das Tripel (u, v, w) alle Permutationen $\pi = \pi(a, b, c)$ der Zahlen a, b, c durchläuft. Die Funktion $S_{u,v,w}(x)$ besitzt die Darstellung

$$S_{u,v,w}(x) = \sum_{\substack{n^u m^{v+w} \leqslant x \\ n \leqslant m}} \psi\left(\left(\frac{x}{n^u m^v}\right)^{1/w}\right). \tag{2}$$

Dabei bezeichne hier und in Folgendem die ψ-Funktion stets die Funktion $\psi(x) = x - [x] - 1/2$. M. Vogts hat auf der Grundlage der van der Corputschen Theorie der Exponentenpaare eine Abschätzung des Restgliedes (1) gegeben. Im wesentlichen erzielte er folgendes Ergebnis: Sei $(\varkappa, \lambda)$ irgendein Exponentenpaar, dann gilt

$$\Delta(a, b, c; x) = O(x^{\left(2 - \frac{1-\lambda}{1+\varkappa}\right)\frac{1}{a+b+c}} \log x)$$

unter den Bedingungen

$$(\varkappa + \lambda + 1)a \geqslant \varkappa(b+c), \qquad (\varkappa + 1)(a+b) \geqslant (\varkappa + \lambda)c.$$

Den besten Überblick über die Grössenordnung des Restgliedes vermittelt das Exponentenpaar

$$(\varkappa, \lambda) = A^{k-2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \left(\frac{1}{K-2}, \frac{K-k-1}{K-2}\right),$$

in dem $k \geqslant 2$ eine ganze Zahl ist und $K = 2^k$. Es entsteht durch $(k-2)$-malige Anwendung des A-Prozesses auf das spezielle Exponentenpaar $(1/2, 1/2)$. Dann erhält man

$$\Delta(a, b, c; x) = O(x^{\left(2 - \frac{k-1}{K-1}\right)\frac{1}{a+b+c}} \log x) \tag{3}$$

unter den Bedingungen

$$(2K - k - 2)a \geqslant b + c, \qquad (K-1)(a+b) \geqslant (K-k)c.$$

Die erste Bedingung ist nicht sehr hart, da sie für hinreichend grosses k immer erfüllt werden kann. Die zweite Bedingung entsteht auf ganz natürliche Weise. Denn kann man keine dieser Ungleichungen befriedigen, so ist das Problem in Wirklichkeit ein zweidimensionales. Das heisst, der Parameter c ist zu gross, so dass sich das Problem im wesentlichen auf die Abschätzung von

$$D(a, b; x) = \sum_{n^a m^b \leqslant x} 1$$

reduziert.

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit werden Verbesserungen der Abschätzung (3) auf der Grundlage zweifacher Exponentialsummen und eine Anwendung auf Zahlen dritter Art gegeben. Zu diesem Zweck werden in den nächsten drei Kapiteln einige Beiträge zu einer allgemeinen Theorie der Abschätzung zweifacher Exponentialsummen entwickelt. In Kapitel 2 wird der Zugang von E. C. Titchmarsh zu einer solchen Theorie zugrunde gelegt. In den Kapiteln 3 und 4 wird eine andere Methode dargestellt, die sich auf eine recht scharfe Transformationsformel von Exponentialsummen gründet.

2. Die Methode von E. C. Titchmarsh

Der grundlegende und einfachste Satz in der van der Corputschen Theorie der Abschätzung von Exponentialsummen ist der folgende: Sei $f(t)$ in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ $(a \leqslant b-1)$ eine reelle und zweimal differenzierbare Funktion, $f''(t)$ stets positiv oder stets negativ und $|f''(t)| \gg \lambda_2 > 0$. Dann ist

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} \ll \frac{|f'(b)-f'(a)|+1}{\sqrt{\lambda_2}}. \tag{4}$$

E. C. Titchmarsh [11], [12] verallgemeinerte die Methode von J. G. van der Corput und entwickelte eine Methode zur Abschätzung von zweifachen Exponentialsummen

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)}.$$

Für D betrachtete er nur Rechtecke, aber es ist nicht schwierig, auch allgemeinere Randkurven in die Betrachtung einzubeziehen. In Folgendem stützen wir uns auf die Arbeit [11] und setzen – auch in den Kapiteln 3 und 4 – stets die nachstehenden Bedingungen als erfüllt voraus.

(A) Es sei D ein beschränkter ebener Bereich, dessen Gitterpunktsanzahl stets von der Grössenordnung des Flächeninhaltes $|D|$ ist.

(B) D sei Teilmenge des Rechtecks

$$D' = \{(t_1, t_2);\ a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant t_2 \leqslant b_2\}$$

mit $c_1 = b_1 - a_1 \geqslant 1$, $c_2 = b_2 - a_2 \geqslant 1$, $|D'| = c_1 c_2$.

(C) Jede achsenparallele Gerade schneide D in einer beschränkten Anzahl von Geradenstücken. Zur Vereinfachung können wir sogar annehmen, dass diese Geraden die Randkurve von D in höchstens zwei Punkten oder in höchstens einem Geradenstück schneiden.

(D) $f(t_1, t_2)$ sei eine reelle Funktion in D' mit stetigen partiellen Ableitungen genügend hoher Ordnung. f_{t_1}, f_{t_2} seien monoton in t_1 beziehungsweise t_2.

(E) Bereiche, die aus D durch Schnitt mit Bereichen des Typs $f_{t_j}(t_1, t_2) \leqslant c$ oder $f_{t_j}(t_1, t_2) \geqslant c$ $(j = 1, 2)$ entstehen, mögen ebenfalls die Bedingung (C) erfüllen.

Mit $H(f)$ werde stets die Hessesche Determinante

$$H(f) = \frac{\partial(f_{t_1}, f_{t_2})}{\partial t_1\, \partial t_2} = f_{t_1 t_1} f_{t_2 t_2} - f_{t_1 t_2}^2$$

bezeichnet.

Hilfssatz 1. *Mit positiven Zahlen* λ_1, λ_2, r *sei*

$$\lambda_1 \leqslant |f_{t_1 t_1}| \ll \lambda_1, \qquad \lambda_2 \leqslant |f_{t_2 t_2}| \ll \lambda_2,$$

$$|f_{t_1 t_2}| \ll \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \qquad |H(f)| \geqslant \lambda_1 \lambda_2$$

im gesamten Rechteck D'. *Für alle Teile der Randkurve von* D *sei entweder* $t_2 = \text{const.}$ *oder* $t_1 = \varrho(t_2)$ *mit stückweise zweimal differenzierbarer Funktion* $\varrho(t)$ *und* $|\varrho''(t)| \ll r$. *Dann ist*

$$\iint_D e^{if(t_1, t_2)}\, dt_1\, dt_2 \ll \frac{1 + \log|D'| + |\log \lambda_1| + |\log \lambda_2|}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} + \frac{c_2 r}{\lambda_2}. \tag{5}$$

Beweis. Ganz entsprechend dem Vorgehen von E. C. Titchmarsh in seinem Beweis zu Lemma δ in [11] betrachten wir die Kurven

$$f_{t_1} = n_1 \sqrt{\lambda_1}, \qquad f_{t_2} = n_2 \sqrt{\lambda_2}$$

mit ganzen Zahlen n_1, n_2. Sie zerlegen D in die Teilbereiche

$$D_{n_1, n_2} = \{(t_1, t_2);\ (t_1, t_2) \in D,\ n_j \sqrt{\lambda_j} \leqslant f_{t_j} < (n_j + 1)\sqrt{\lambda_j}\ (j = 1, 2)\}.$$

Ist $t_2' \leqslant t_2 \leqslant t_2''$ auf der Seite $f_{t_1} = n_1 \sqrt{\lambda_1}$, so ist

$$\sqrt{\lambda_2} = \int_{n_2\sqrt{\lambda_2}}^{(n_2+1)\sqrt{\lambda_2}} dy = \int_{t_2'}^{t_2''} \frac{H(f)}{f_{t_1 t_1}}\, dt_2 \gg \lambda_2 (t_2'' - t_2')$$

und daher $t_2''-t_2' \ll 1/\sqrt{\lambda_2}$. Ist daselbst $t_1' \leqslant t_1 \leqslant t_1''$ so ist wegen

$$\left|\frac{dt_1}{dt_2}\right| = \left|\frac{f_{t_1t_2}}{f_{t_1t_1}}\right| \ll \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

sofort $t_1''-t_1' \ll 1/\sqrt{\lambda_1}$ ersichtlich. Da auf den anderen Seiten analoge Abschätzungen gelten, sind die totalen Änderungen von t_1, t_2 in D_{n_1,n_2} von der Ordnung $1/\sqrt{\lambda_1}$ beziehungsweise $1/\sqrt{\lambda_2}$. Nun schätzen wir in einigen Schritten die Integrale in den einzelnen Bereichen ab.

1. Mittels trivialer Abschätzung ist

$$\iint\limits_{D_{0,0}} e^{if(t_1,t_2)}\,dt_1\,dt_2 \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

2. Für die Bereiche D_{0,n_2} findet man wegen $f_{t_2} \geqslant n_2\sqrt{\lambda_2}$ durch Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes in Hinblick auf die Variable t_2

$$\sum_{1\leqslant|n_2|\ll c_2\sqrt{\lambda_2}} \iint\limits_{D_{0,n_2}} e^{if(t_1,t_2)}\,dt_1\,dt_2$$

$$\ll \sum_{1\leqslant|n_2|\ll c_2\sqrt{\lambda_2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\cdot\frac{1}{n_2\sqrt{\lambda_2}} \ll \frac{\log c_2+|\log\lambda_2|}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}.$$

3. In dem Bereich $f_{t_1} \geqslant \sqrt{\lambda_1}$ bezeichne $t_1=\alpha=\alpha(t_2)$ und $t_1=\beta=\beta(t_2)$ den links- und rechtsseitigen Rand. Dabei sind α und β entweder Lösungen von $f_{t_1}=\sqrt{\lambda_1}$, oder sie beschreiben Randkurven von D. Mit Hilfe partieller Integration ist

$$\iint\limits_{\substack{D\\ f_{t_1}\geqslant\sqrt{\lambda_1}}} e^{if(t_1,t_2)}\,dt_1\,dt_2 = I_1(\beta)-I_1(\alpha)+I_2,$$

$$I_1(\alpha) = -i\int \frac{e^{if(\alpha,t_2)}}{f_{t_1}(\alpha,t_2)}\,dt_2, \qquad I_2 = -i\iint \frac{f_{t_1t_1}}{f_{t_1}^2}\,e^{if(t_1,t_2)}\,dt_1\,dt_2$$

und analog $I_1(\beta)$.

3a. Zunächst wird das Integral I_2 betrachtet

$$I_2 = -i\sum \iint\limits_{D_{n_1,n_2}} \frac{f_{t_1t_1}}{f_{t_1}^2}\,e^{if(t_1,t_2)}\,dt_1\,dt_2.$$

In der Summe durchlaufen n_1, n_2 die Werte $1\leqslant n_1 \ll c_1\sqrt{\lambda_1}$, $0\leqslant|n_2| \ll c_2\sqrt{\lambda_2}$. Ist $n_2=0$, so wird das Integral trivial abgeschätzt. Für $|n_2|>0$ wird der zweite Mittelwertsatz auf das Integral bezüglich t_2 angewandt.

Dabei ist in beiden Fällen zu beachten, dass die Änderungen von t_1, t_2 in D_{n_1, n_2} von der Grössenordnung $1/\sqrt{\lambda_1}$, $1/\sqrt{\lambda_2}$ höchstens sind. Dann ist

$$I_2 \ll \sum \frac{1}{n_1^2 |n_2|} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$$

mit $1 \leqslant n_1 \ll c_1 \sqrt{\lambda_1}$, $1 \leqslant |n_2| \ll c_2 \sqrt{\lambda_2}$ und demzufolge

$$I_2 \ll \frac{1 + \log c_2 + |\log \lambda_2|}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

3b. Nun werde das Integral $I_1(\alpha)$ betrachtet. Sei zunächst $\alpha(t_2)$ Lösung von $f_{t_1} = \sqrt{\lambda_1}$. Dann ist

$$I_1(\alpha) = \frac{-i}{\sqrt{\lambda_1}} \int e^{if(\alpha, t)}\, dt.$$

Sei $A > 0$ eine geeignete Konstante, so ist

$$|f'(\alpha, t)| = |f_{t_2} + f_{t_1} \alpha'(t)| = \left| f_{t_2} - f_{t_1} \frac{f_{t_1 t_2}}{f_{t_1 t_1}} \right| \geqslant |f_{t_2}| - A\sqrt{\lambda_2} \geqslant A\sqrt{\lambda_2},$$

sofern $|f_{t_2}| \geqslant 2A\sqrt{\lambda_2}$ ist. Bei Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes ergibt sich für diesen Teil des Integrals

$$I_1(\alpha) \ll 1/\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Das ist aber auch richtig für $|f_{t_2}| < 2A\sqrt{\lambda_2}$, da dann die Integrationslänge höchstens von der Grössenordnung $1/\sqrt{\lambda_2}$ ist.

Beschreibt $t_1 = \alpha(t_2)$ einen Teil der Randkurve, so schreiben wir $\alpha(t) = \varrho(t)$ und zerlegen $I_1(\alpha)$ in drei Teile:

$$I_1(\alpha) = I_1(\varrho) = I_{1,1}(\varrho) + I_{1,2}(\varrho) + I_{1,3}(\varrho).$$

Dabei sei in $I_{1,1}(\varrho)$

$$|f_{t_1} \varrho' + f_{t_2}| \geqslant \sqrt{\lambda_2},$$

in $I_{1,2}(\varrho)$

$$|f_{t_1} \varrho' + f_{t_2}| < \sqrt{\lambda_2}, \quad |f_{t_1 t_1} \varrho' + f_{t_1 t_2}| \geqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

und in $I_{1,3}(\varrho)$

$$|f_{t_1} \varrho' + f_{t_2}| < \sqrt{\lambda_2}, \quad |f_{t_1 t_1} \varrho' + f_{t_1 t_2}| < \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes erhalten wir

$$I_{1,1}(\varrho) \ll 1/\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

und bei trivialer Abschätzung

$$I_{1,2}(\varrho) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int \left| \frac{f_{t_1t_1}\varrho' + f_{t_1t_2}}{f_{t_1}} \right| dt \ll \frac{1 + \log |D'| + |\log \lambda_1| + |\log \lambda_2|}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

In $I_{1,3}(\varrho)$ führen wir die Substitution

$$y = f_{t_1}\varrho' + f_{t_2}$$

aus. Es ist

$$y' = \frac{1}{f_{t_1t_1}} \{(f_{t_1t_1}\varrho' + f_{t_1t_2})^2 + H(f) + f_{t_1t_1} f_{t_1} \varrho''\}.$$

Unter der Voraussetzung

$$|f_{t_1t_1} f_{t_1} \varrho''| \leqslant \tfrac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2$$

ist

$$|y'| \gg \frac{1}{\lambda_1}(-\tfrac{1}{4} + 1 - \tfrac{1}{2})\lambda_1 \lambda_2 \gg \lambda_2$$

und daher

$$I_{1,3}(\varrho) \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int_0^{\sqrt{\lambda_2}} \frac{dt}{|y'|} \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Ist aber

$$|f_{t_1t_1} f_{t_1} \varrho''| > \tfrac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2,$$

so folgt

$$|f_{t_1t_1}| \gg \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|f_{t_1t_1}\varrho''|} \gg \frac{\lambda_2}{r}$$

und

$$I_{1,3}(\varrho) \ll c_2 r/\lambda_2.$$

3c. Analoge Ergebnisse bestehen für das Integral $I_1(\beta)$.

4. Ähnliche Betrachtungen im Fall $f_{t_1} < -\sqrt{\lambda_1}$ führen zu entsprechenden Resultaten. Damit ist insgesamt die Abschätzung (5) bewiesen.

Nun ist es nicht schwierig, aus dem Hilfssatz den folgenden Satz herzuleiten. Es soll auch bemerkt werden, dass ein ähnlicher Satz von W. G. Nowak [7] bewiesen wurde.

SATZ 1. *Sind alle Bedingungen von Hilfssatz 1 erfüllt, so ist*

$$(6) \quad \sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} \ll (c_1\lambda_1 + c_2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1)(c_2\lambda_2 + c_1\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1)\frac{R}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$$

mit

$$R = 1+\log|D'|+|\log\lambda_1|+|\log\lambda_2|+c_2 r\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}.$$

Beweis. Für $\lambda_1\lambda_2 \geqslant 1$ ist der Satz trivial. Daher sei jetzt $\lambda_1\lambda_2 < 1$ angenommen. Nun benutzen wir den folgenden Hilfssatz von J. G. van der Corput: Sei $f(t)$ in $[a, b]$ reell mit stetiger und streng monotoner Ableitung in (a, b). $g(t)$ sei in $[a, b]$ reell und in (a, b) einmal stetig differenzierbar. Dabei habe $g'(t)$ eine beschränkte Anzahl von Extremwerten. Ist $\alpha = \min f'(t)$, $\beta = \max f'(t)$, $|g(t)| \leqslant G$, $|g'(t)| \leqslant G_1$ für $t\in[a, b]$ und η eine Konstante mit $0<\eta<1$, dann gilt

$$(7) \qquad \sum_{a<n\leqslant b} g(n)e^{2\pi i f(n)} = \sum_{\alpha-\eta<\nu\leqslant\beta+\eta}\int_a^b g(t)e^{2\pi i(f(t)-\nu t)}\,dt + O\big(G\log(\beta-\alpha+2)\big)+O(G_1).$$

Einen Beweis findet man in [13]. Nun sei

$$\alpha_j = \min_{(t_1,t_2)\in D} f_{t_j}(t_1, t_2), \qquad \beta_j = \max_{(t_1,t_2)\in D} f_{t_j}(t_1, t_2).$$

Zweimalige Anwendung von (7) gibt

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} = \sum_{\nu_2}\sum_{(n_1,t_2)\in D}\int e^{2\pi i(f(n_1,t_2)-\nu_2 t_2)}\,dt_2 + O\big(c_1\log(\beta_2-\alpha_2+2)\big)$$

$$= \sum_{\nu_1,\nu_2}\iint_{(t_1,t_2)\in D} e^{2\pi i(f(t_1,t_2)-\nu_1 t_1-\nu_2 t_2)}\,dt_1\,dt_2 + O\big(c_1\log(\beta_2-\alpha_2+2)\big)+O\big((\beta_2-\alpha_2+1)\log(\beta_1-\alpha_1+2)\big).$$

Die Zahlen ν_1, ν_2 durchlaufen dabei Intervalle mit $\alpha_1 \ll \nu_1 \ll \beta_1$ und $\alpha_2 \ll \nu_2 \ll \beta_2$. Wegen

$$\beta_1-\alpha_1 \ll c_1\lambda_1+c_2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}, \qquad \beta_2-\alpha_2 \ll c_2\lambda_2+c_1\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$$

folgt aus (5)

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} \ll \frac{(\beta_1-\alpha_1+1)(\beta_2-\alpha_2+1)}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}R+c_1\log(\beta_2-\alpha_2+2)+ +(\beta_2-\alpha_2+1)\log(\beta_1-\alpha_1+2),$$

woraus sich (6) unmittelbar ergibt.

In dem folgenden Satz engen wir die zugelassenen Funktionen ein, aber so, dass das Ergebnis auf Teilerfunktionen angewandt werden kann. Wir nutzen die Abschätzung (6), indem wir noch in Bezug auf die erste Variable t_1 zusätzlich Weylsche Schritte durchführen. Bei symmetrischen Problemen.

wie etwa dem Piltzschen Teilerproblem, gibt das keine Verbesserungen der Abschätzungen, aber bei unsymmetrischen Problemen wird dadurch in gewisser Weise die Unsymmetrie ausgeglichen.

SATZ 2. *Mit festen positiven Zahlen* u_1, u_2 *sei* $1 \leqslant a_1 < b_1 < a_1 u_1$, $1 \leqslant a_2 < b_2 < a_2 u_2$, $k \geqslant 2$, $K = 2^k$, $\lambda \gg a_1, a_2$ *und*

$$\left|\frac{\partial^\nu f}{\partial t_1^\nu}\right| \asymp \frac{\lambda}{a_1^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial t_1^{k-2}\,\partial t_2^2}\right| \asymp \frac{\lambda}{a_1^{k-2} a_2^2}, \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial t_1^{k-1}\,\partial t_2}\right| \ll \frac{\lambda}{a_1^{k-1} a_2},$$

$$\left|H\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial^{k-2} f(t_1', t_2)}{\partial t_1^{k-2}}\, d\tau_1 \ldots d\tau_{k-2}\right)\right| \gg \frac{\lambda^2}{a_1^{2k-2} a_2^2} \prod_{\nu=1}^{k-2} \frac{1}{h_\nu}$$

mit $t_1' = t_1 + h_1 \tau_1 + \ldots + h_{k-2}\tau_{k-2}$, $1 \leqslant h_1, \ldots, h_{k-2} \leqslant c_1$. *Für alle Teile der Randkurve von D sei entweder* $t_2 = \text{const.}$ *oder* $t_1 = \varrho(t_2)$ *mit stückweise zweimal differenzierbarer Funktion* $\varrho(t)$, $|\varrho''(t)| \ll a_1/a_2^2$. *Dann gilt*

$$\sum_{(n_1, n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} \ll (a_1^{3K-4k-4} a_2^{3K-12} \lambda^4)^{1/(3K-8)} \log \lambda, \tag{8}$$

$$\sum_{(n_1, n_2)\in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll (a_1^{3K-4k} a_2^{3K-8} \lambda^4)^{1/(3K-4)} \log \lambda. \tag{9}$$

Beweis. Wir wenden Satz 1 an mit

$$\lambda_1 = \lambda/a_1^2, \quad \lambda_2 = \lambda/a_2^2, \quad r = a_1/a_2^2,$$

so dass

$$R \ll \log\left(a_1 a_2 (\lambda + 2)\right).$$

Aus (6) erhalten wir dann

$$S = \sum_{(n_1, n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} \ll (\lambda + a_1 + a_2 + a_1 a_2/\lambda) \log\left(a_1 a_2(\lambda+2)\right). \tag{10}$$

Dies ist auch ohne die Bedingung $\lambda \gg a_1, a_2$ richtig, es wird nur $\lambda > 0$ benötigt. Ist aber die Bedingung erfüllt, dann folgt (8) aus (10) für $k = 2$ sofort. Nun fahren wir induktiv fort und nehmen (8) für $k-1$ anstatt k als richtig an. Den Schluss auf k führen wir mit Hilfe eines Weylschen Schrittes:

$$S \ll \frac{a_1 a_2}{\sqrt{H}} + \left\{\frac{a_1 a_2}{H} \sum_{h=1}^{H-1} \left|\sum e^{2\pi i (f(n_1+h, n_2) - f(n_1, n_2))}\right|\right\}^{1/2} \tag{11}$$

mit $1 \leqslant H \leqslant c_1$. Die Summationsbedingung SB$(\sum)$ für die innere Summe ist gegeben durch

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum)\colon\ (n_1, n_2) \in D,\ (n_1+h, n_2) \in D.$$

Einen Beweis von (11) findet man in [13]. Wegen

$$f(t_1+h, t_2) - f(t_1, t_2) = h \int_0^1 f_{t_1}(t_1+h\tau, t_2)\, d\tau$$

hat man in der Anwendung von (8) mit $k-1$ anstatt k die Zahl λ zu ersetzen durch $h\lambda/a_1$. Wir zerlegen die Summe über h in (11) in drei Teile und erhalten

$$S \ll \frac{a_1 a_2}{\sqrt{H}} + S_1 + S_2 + S_3,$$

$$S_j = \left\{ \frac{a_1 a_2}{H} \sum\nolimits_j \left| \sum e^{2\pi i (f(n_1+h, n_2) - f(n_1, n_2))} \right| \right\}^{1/2}.$$

Dabei ist die Summationsbedingung für die innere Summe die gleiche wie oben, und die Summationsbedingungen $\mathrm{SB}(\sum_j)$ für die äusseren Summen lauten

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_1)\colon\ \lambda h/a_1 \leqslant a_1, a_2,$$
$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_2)\colon\ \lambda h/a_1 > a_1, a_2,$$
$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_3)\colon\ \lambda h/a_1 \text{ zwischen } a_1 \text{ und } a_2.$$

In der ersten Summe nutzen wir (10).

$$S_1 \ll \left\{ \frac{(a_1 a_2)^2}{H} \sum\nolimits_1 \frac{a_1}{\lambda h} \log \lambda \right\}^{1/2} \ll \frac{a_1 a_2}{\sqrt{H}} \log \lambda.$$

Auch in der dritten Summe wenden wir (10) an. Wenn $a_1 \leqslant a_2$ ist, dann folgt

$$S_3 \ll \left\{ \frac{a_1 a_2}{H} \sum\nolimits_3 a_2 \log \lambda \right\}^{1/2} \ll \left\{ \frac{(a_1 a_2)^2}{H} \cdot \frac{a_2}{\lambda} \log \lambda \right\}^{1/2} \ll \frac{a_1 a_2}{\sqrt{H}} \log \lambda.$$

Ist aber $a_2 \leqslant a_1$, so erhalten wir

$$S_3 \ll \left\{ \frac{a_1 a_2}{H} \sum\nolimits_3 a_1 \log \lambda \right\}^{1/2} \ll \left\{ \frac{(a_1 a_2)^2}{H} \cdot \frac{a_1^2}{a_2 \lambda} \log \lambda \right\}^{1/2} \ll \frac{a_1 a_2}{\sqrt{H}} \cdot \frac{a_1}{\sqrt{a_2 \lambda}} \log \lambda.$$

In der zweiten Summe wenden wir (8) mit $k-1$ anstatt k an.

$$S_2 \ll \left\{ \frac{(a_1 a_2)^2}{H} \sum_{h=1}^{H} \left(\frac{\lambda h}{a_1^{k-1} a_2} \right)^{8/(3K-16)} \right\}^{1/2} \ll a_1 a_2 \left(\frac{\lambda H}{a_1^{k-1} a_2} \right)^{4/(3K-16)} \log \lambda.$$

Fassen wir alle Teilergebnisse zusammen, so bekommen wir

$$S \ll a_1 a_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{H}} \left(1 + \frac{a_1}{\sqrt{a_2 \lambda}} \right) + \left(\frac{\lambda H}{a_1^{k-1} a_2} \right)^{4/(3K-16)} \right\} \log \lambda.$$

Ist $a_2 \lambda \gg a_1^2$, so sind die verbleibenden beiden Summanden von gleicher Grössenordnung, wenn man

$$H = [(a_1^{k-1} a_2 \lambda^{-1})^{8/(3K-8)}]$$

unter der Bedingung $1 \leqslant H \leqslant c_1$ setzt. Damit folgt (8). Natürlich ist (8) trivial, wenn $\lambda > a_1^{k-1} a_2$ ist. Für $H > c_1$ ergibt sich bei trivialer Abschätzung

$$S \ll c_1 c_2 \ll H a_2 \ll (a_1^{8k-8} a_2^{3K} \lambda^{-8})^{1/(3K-8)} \ll (a_1^{3K-4k-4} a_2^{3K-12} \lambda^4)^{1/(3K-8)},$$

sofern $k \geqslant 4$ ist. Für $k = 3$ erhält man aus (4)

$$S \ll \sum_{a_1 \leqslant n_1 \leqslant b_1} \sqrt{\lambda} \ll c_1 \sqrt{\lambda} \ll H \sqrt{\lambda} \ll (a_1^2 a_2)^{1/2} \ll (a_1^2 a_2^3 \lambda)^{1/4}.$$

In dem Fall $\lambda \ll a_1^2/a_2$ und $a_2 \leqslant a_1$ wenden wir die van der Corputsche Methode der Exponentenpaare (siehe [8]) bezüglich der ersten Variablen t_1 in $f(t_1, t_2)$ mit dem Exponentenpaar

$$(p, q) = A^{k-3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{K-4}, \frac{K-2k}{K-4}\right)$$

an. Dann ergibt sich für $k \geqslant 3$

$$S \ll \sum_{a_2 \leqslant n_2 \leqslant b_2} \left(\frac{\lambda}{a_1}\right)^p a_1^q \ll a_1 a_2 \left(\frac{\lambda}{a_1^{k-1}}\right)^{2/(K-4)}.$$

Wegen $a_2^{K-8} \ll a_1^{(k-3)K}$ ist

$$\lambda^K \ll (a_1^2/a_2)^K \ll a_1^{(k-1)K} a_2^{8-2K}$$

und daher

$$S \ll a_1 a_2 \left(\frac{\lambda}{a_1^{k-1} a_2}\right)^{4/(3K-8)}.$$

Damit ist (8) vollständing bewiesen. Der Übergang von (8) zu (9) erfolgt in einfacher Weise mit der wohlbekannten Formel

$$(12) \qquad \sum_{(n_1,n_2)\in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll \frac{a_1 a_2}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \min\left(\frac{z^s}{\nu^{s+1}}, \frac{1}{\nu}\right) \Big| \sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i \nu f(n_1,n_2)} \Big|,$$

wobei wir in diesem konkreten Fall $s = 2$ und

$$z = (a_1^{k-1} a_2/\lambda)^{4/(3K-4)}$$

zu nehmen haben.

3. Eine andere Methode der Abschätzung zweifacher Exponentialsummen

In diesem Kapitel entwickeln wir eine Abschätzung zweifacher Exponentialsummen, die insofern bemerkenswert ist, da die Hessesche Determinante $H(f)$ beliebig klein sein kann. Ein ähnliches Resultat erzielte G. Kolesnik [5] in seinem Lemma 4. Hier erreichen wir im wesentlichen dieselbe Abschätzung, jedoch sind die Restglieder teilweise schärfer, was sich in den Anwendungen als günstig erweist. Unser Satz basiert auf einer sehr scharfen Form der van der Corputschen Transformation von Exponentialsummen, welche in Hilfssatz 3 beschrieben ist. Mit einigen Einschränkungen wurde dieser Weg von G. Kolesnik in [4] ebenfalls beschritten. Hilfssatz 3 wurde in seinen wesentlichen Teilen von I. M. Vinogradov entwickelt. In [14] kann man ein etwas schwächeres Resultat mit Beweis finden und in [15] eine schärfere Version, aber ohne Beweis. Da Hilfssatz 3 in dieser Fassung ein noch etwas allgemeineres Ergebnis darstellt, soll hier ein Beweis gegeben werden. Einen Beweis von Hilfssatz 2 kann man in [14] (122–124) finden. In den Anwendungen dieser Arbeit nutzen wir Satz 3 nicht, aber der Beweis bereitet die in Satz 4 ausgesprochene wichtige Transformationsformel ganz wesentlich vor.

HILFSSATZ 2. *$f(t)$ sei eine reelle Funktion in $[c, b]$ mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Es sei $f'(c) = 0$ und*

$$|f''(t)| \asymp \lambda_2, \quad 0 < |f'''(t)| \ll \lambda_3.$$

Die Funktion

$$f'^6(t) - 8f''(c)f''^2(t)(f(t) - f(c))$$

habe nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen. $g(t)$ sei reell in $[c, b]$ mit stetiger und monotoner Ableitung und

$$|g(t)| \leqslant G, \quad |g'(t)| \leqslant G_1.$$

Mit

$$\varepsilon = \begin{cases} e^{\pi i/4} & \text{für } f''(t) > 0, \\ e^{-\pi i/4}. & \text{für } f''(t) < 0 \end{cases} \tag{13}$$

ist dann

$$\int_c^b g(t)\, e^{if(t)}\, dt = \varepsilon g(c) \sqrt{\frac{\pi}{2|f''(c)|}}\, e^{if(c)} + O\left(G\,|b-c|\,\frac{\lambda_3^2}{\lambda_2^3}\right) +$$

$$+O\left(G\,\frac{\lambda_3}{\lambda_2^2}\right) + O\left(G \min\left(\frac{1}{|f'(b)|}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\right) + O\left(\frac{G_1}{\lambda_2}\right).$$

HILFSSATZ 3. *Es sei $f(t)$ eine reelle Funktion in $[a, b]$ mit stetigen Ableitungen bis zur dritten Ordnung und*

$$|f''(t)| \asymp \lambda_2, \quad 0 < |f'''(t)| \ll \lambda_3,$$

$\alpha = \min f'(t)$, $\beta = \max f'(t)$. *Für jedes $c \in [a, b]$ habe die Funktion*

$$F(t, c; f) = (f'(t) - f'(c))^6 - 8f''(c) f''^2(t) (f(t) - f(c) - f'(c)(t-c))^3$$

nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen. $g(t)$ sei reell in $[a, b]$ mit stetiger und monotoner Ableitung und

$$|g(t)| \leqslant G, \quad |g'(t)| \leqslant G_1.$$

Die Funktion $\varphi(t)$ sei durch $f'(\varphi(t)) = t$ definiert. ε sei durch (13) *gegeben. Mit*

(14) $$\chi(x) = \min(x - [x], 1 - (x - [x]))$$

werde $T(z)$ durch

$$T(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } f'(z) \in Z, \\ \min\left(\dfrac{1}{\chi(f'(z))}, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) & \text{für } f'(z) \notin Z \end{cases}$$

definiert. Ist

$$\Delta = (b-a)^2 \lambda_3^2 \lambda_2^{-2} + (b-a) \lambda_3^2 \lambda_2^{-3} + (b-a) \lambda_3 \lambda_2^{-1} + \lambda_3 \lambda_2^{-2} + \log((b-a)\lambda_2 + 2),$$

so gilt

(15) $$\sum_{a<n\leqslant b} g(n)\, e^{2\pi i f(n)} = \varepsilon \sum_{\alpha\leqslant\nu\leqslant\beta}'' \frac{g(\varphi(\nu))}{\sqrt{|f''(\varphi(\nu))|}}\, e^{2\pi i (f(\varphi(\nu)) - \nu\varphi(\nu))} +$$

$$+ G\{O(T(a)) + O(T(b)) + O(\Delta)\} + G_1\{O(b-a) + O(1/\lambda_2)\},$$

wobei die Striche am Summenzeichen Faktoren 1/2 *für die möglichen Werte $\nu = \alpha, \beta$ anzeigen.*

Beweis. Wir können $f''(t) > 0$ annehmen, so dass $f'(t)$ streng monoton wachsend ist. Bei Anwendung von (7) mit $\eta = 1/2$ finden wir

$$(16)\quad \sum_{a<n\leqslant b} g(n)\, e^{2\pi i f(n)}$$
$$= \sum\nolimits_1 \int_a^b g(t)\, e^{2\pi i (f(t)-\nu t)}\, dt + O\big(G \log((b-a)\lambda_2+2)\big) + O(G_1)$$
$$= \sum\nolimits_2 \int_a^b g(t)\, e^{2\pi i (f(t)-\nu t)}\, dt + G\,\big\{O\big(T(a)\big) + O\big(T(b)\big) +$$
$$+ O\big(\log((b-a)\lambda_2+2)\big)\big\} + O(G_1),$$

wobei die Summationsbedingungen für die beiden Summen durch

$$\mathrm{SB}\big(\textstyle\sum_1\big)\colon\ f'(a)-1/2 < \nu \leqslant f'(b)+1/2,$$
$$\mathrm{SB}\big(\textstyle\sum_2\big)\colon\ f'(a) \leqslant \nu \leqslant f'(b)$$

gegeben sind. Das neue Glied $O\big(GT(b)\big)$ in der zweiten Darstellung von (16) entsteht, sofern es eine ganze Zahl k mit $k+1/2 \leqslant f'(b) < k+1$ gibt, weil dann in der Summe $\sum_2$ der Summand

$$A = \int_a^b g(t)\, e^{2\pi i (f(t)-(k+1)t)}\, dt$$

fehlt. A wird auf zwei verschiedene Weisen abgeschätzt. Wegen der Monotonie von $g'(t)$ wird das Integrationsintervall in höchstens drei Teilintervalle mit $g'(t) < 0$, $= 0$, > 0 zerlegt. Sei etwa $g'(t) > 0$ in (a_1, b_1) mit $a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b$. Dann ergibt zweimalige Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes

$$A_1 = \int_{a_1}^{b_1} g(t)\, e^{2\pi i (f(t)-(k+1)t)}\, dt \ll G \left| \int_{a_1}^{\xi} e^{2\pi i (f(t)-(k+1)t)}\, dt \right| \qquad (a_1 < \xi \leqslant b_1)$$
$$\ll \frac{G}{k+1-f'(b)} = \frac{G}{\chi\big(f'(b)\big)}.$$

Andererseits ist nach Lemma 4.4 von [13] $A_1 \ll G/\sqrt{\lambda_2}$. Entsprechend verfährt man in den Fällen $g'(t) = 0, < 0$. Dies führt zu

$$A \ll G \min\left(\frac{1}{\chi\big(f'(b)\big)}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)$$

und zu $O\big(GT(b)\big)$ in (16). Ähnlich erhält man den Term $O\big(GT(a)\big)$.

Nun wenden wir Hilfssatz 2 auf die Integrale von (16) an, lassen aber in $\sum_2$ die möglichen Randwerte $\nu = f'(a)$, $f'(b)$ zunächst weg. Sei also für $\sum_3$

die Summationsbedingung durch

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_3)\colon f'(a) < v < f'(b)$$

gegeben, dann folgt

$$\sum\nolimits_3 \int_a^b g(t)\, e^{2\pi i(f(t)-vt)}\, dt = \varepsilon \sum\nolimits_3 \left\{ \frac{g(\varphi(v))}{\sqrt{f''(\varphi(v))}} e^{2\pi i(f(\varphi(v))-v\varphi(v))} + \right.$$

$$+O(G(b-a)\lambda_3^2\lambda_2^{-3})+O(G\lambda_3\lambda_2^{-2})+O(G_1\lambda_2^{-1})+$$

$$\left. +O\left(G\min\left(\frac{1}{f'(b)-v}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\right)+O\left(G\min\left(\frac{1}{v-f'(a)}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right)\right)\right\}.$$

Nun gilt mit

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum_4)\colon f'(a) < v \leqslant f'(b)-1$$

die Abschätzung

$$\sum\nolimits_3 \min\left(\frac{1}{f'(b)-v}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) \leqslant \sum\nolimits_4 \frac{1}{f'(b)-v} + T(b)$$

$$\ll \log(f'(b)-f'(a)+2)+T(b)$$

$$\ll \log((b-a)\lambda_2+2)+T(b)$$

und analog

$$\sum\nolimits_3 \min\left(\frac{1}{v-f'(a)}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) \ll \log((b-a)\lambda_2+2)+T(b).$$

Folglich ist

$$\sum\nolimits_3 \int_a^b g(t)\, e^{2\pi i(f(t)-vt)}\, dt$$

$$= \varepsilon \sum\nolimits_3 \frac{g(\varphi(v))}{\sqrt{f''(\varphi(v))}} e^{2\pi i(f(\varphi(v))-v\varphi(v))} +$$

$$+G\{O(T(a))+O(T(b))+O(\Delta)\}+G_1\{O(b-a)+O(\lambda_2^{-1})\}.$$

Das ergibt über (16) die Behauptung (15), wenn $f'(a)$ und $f'(b)$ nicht ganzzahlig sind. Ist aber $f'(b)$ eine ganze Zahl, so ist in (16) noch zusätzlich der Summand mit $v=f'(b)$ zu berücksichtigen. Hier verschwindet die Ableitung von $f(t)-vt$ am Endpunkt $t=b$ des Intervalls $[a, b]$, so dass gemäss Hilfssatz 2 ein Faktor 1/2 in der Entwicklung des Integrals zu beachten ist. Weiter ändert sich nichts. Ebenso verhält es sich mit der Möglichkeit $v=f'(a)\in Z$. Insgesamt folgt nunmehr (15).

In folgendem Satz sollen die Voraussetzungen (A) bis (D) des zweiten Kapitels erfüllt sein.

SATZ 3. *Mit positiven Zahlen λ_1, λ_1', Λ sei im Bereich D*

$$|f_{t_1 t_1}| \asymp \lambda_1, \quad |f_{t_1 t_1 t_1}| \asymp \lambda_1', \quad |H(f)| \asymp \Lambda.$$

Die Funktion

$$f_{t_1 t_1} f_{t_1 t_1 t_2} - f_{t_1 t_2} f_{t_1 t_1 t_1}$$

habe in D konstantes Vorzeichen. Für jeden Punkt $(\gamma_1, \gamma_2) \in D$ habe die in Hilfssatz 3 definierte Funktion $F(t_1, \gamma_1; f(t_1, \gamma_2))$ nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen. Für alle Teile der Randkurve sei entweder $t_2 = \text{const.}$ oder $t_1 = \varrho(t_2)$ mit stückweise zweimal stetig differenzierbarer Funktion $\varrho(t)$. Mit der Bezeichnung (14) *sei*

$$T(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{für } f_{t_1}(a, b) \in Z, \\ \min\left(\dfrac{1}{\chi(f_{t_1}(a, b))}, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) & \text{für } f_{t_1}(a, b) \notin Z. \end{cases} \tag{17}$$

Das Bild D_1 von D unter der Abbildung

$$y_1 = f_{t_1}(t_1, t_2), \quad y_2 = t_2$$

genüge der Voraussetzung (C) *des Kapitels* 2. *Der Bildbereich D_2 von D unter der Abbildung*

$$y_1 = f_{t_1}(t_1, t_2), \quad y_2 = f_{t_2}(t_1, t_2)$$

liege in einem achsenparallelen Rechteck mit den Seitenlängen $c_1' \geqslant 1$, $c_2' \geqslant 1$. Dann ist

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} \ll |D| \sqrt{\Lambda} + \sum_{t_1 = \varrho(n_2)} T(t_1, n_2) + (c_1' + c_2')/\sqrt{\Lambda} + \\ + c_1'/\sqrt{\lambda_1} + c_2 (\lambda_1' \lambda_1^{-2} + \log(c_1 \lambda_1 + 2)). \tag{18}$$

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 3 für die Summe über n_1 an. Bezeichnet $\varrho_1(t_2)$ den unteren und $\varrho_2(t_2)$ den oberen Teil der Randkurve von D, so ist

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} = \sum_{a_2 \leqslant n_2 \leqslant b_2} \sum_{\varrho_1 \leqslant n_1 \leqslant \varrho_2} e^{2\pi i f(n_1, n_2)}$$

mit $\varrho_1 = \varrho_1(n_2)$, $\varrho_2 = \varrho_2(n_2)$. In Hilfssatz 3 setzen wir $g(n) = 1$, $G = 1$, $G_1 = 0$ und

$$\Delta = \lambda_1' \lambda_1^{-2} + \log(c_1 \lambda_1 + 2),$$

da hier $(\varrho_2 - \varrho_1) \lambda_1' \ll \lambda_1$ ist. Nehmen wir etwa $f_{t_1 t_1} > 0$ an, so erhalten wir

$$\sum_{\varrho_1 \leqslant n_1 \leqslant \varrho_2} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} = \varepsilon \sum{}'' \frac{1}{\sqrt{f_{t_1 t_1}(\varphi, n_2)}} e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)} + $$
$$+ O\big(T(\varrho_1, n_2)\big) + O\big(T(\varrho_2, n_2)\big) + O(\lambda_1' \lambda_1^{-2}) + O\big(\log(c_1 \lambda_1 + 2)\big),$$
$$\mathrm{SB}\big(\textstyle\sum''\big)\colon f_{t_1}(\varrho_1, n_2) \leqslant m_1 \leqslant f_{t_1}(\varrho_2, n_2).$$

Dabei wurde die Bezeichnung

$$f_1(y_1, t_2) = f\big(\varphi(y_1, t_2), t_2\big) - y_1 \varphi(y_1, t_2)$$

($y_1 = m_1$, $t_2 = n_2$) benutzt, wobei $\varphi(y_1, t_2)$ Lösung von $f_{t_1}(\varphi, t_2) = y_1$ ist. Damit ergibt sich

$$(19)\qquad \sum_{(n_1, n_2) \in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)}$$
$$= \varepsilon \sum_{\substack{m_1 \\ (m_1, n_2) \in D_1}} \sum_{n_2}{}'' \frac{1}{\sqrt{f_{t_1 t_1}(\varphi, n_2)}} e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)} +$$
$$+ O\Big(\sum_{t_1 = \varrho(n_2)} T(t_1, n_2)\Big) + O(c_2 \lambda_1' \lambda_1^{-2}) + O\big(c_2 \log(c_1 \lambda_1 + 2)\big).$$

Auf die Summe über n_2 soll nun (4) angewandt werden. Dazu haben wir die Funktion $f_1(m_1, t_2)$ zu betrachten. Es ist

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} f_1\right| = \left|\frac{H(f)}{f_{t_1 t_1}}\right| \asymp \frac{\Lambda}{\lambda_1}.$$

Nehmen wir etwa $\partial^2 f_1 / \partial t_2^2 > 0$ an und bezeichne $\gamma = \gamma(m_1)$, $\delta = \delta(m_1)$ den unteren und oberen Rand von D_1, so ist nach (4) für jedes τ mit $\gamma < \tau \leqslant \delta$

$$\sum_{\gamma \leqslant n_2 \leqslant \tau}{}'' e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)} \ll \left(\frac{\partial}{\partial t_2} f_1(m_1, \delta) - \frac{\partial}{\partial t_2} f_1(m_1, \gamma) + 1\right) \sqrt{\frac{\lambda_1}{\Lambda}} + 1,$$

$$\sum_{\substack{(m_1, n_2) \in D_1 \\ n_2 \leqslant \tau}}{}'' e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)} \ll \Big\{ \sum_{(m_1, m_2) \in D_2} 1 + c_1' \Big\} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\Lambda}} + c_1'$$

$$\ll \{|D| \Lambda + c_1' + c_2'\} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\Lambda}} + c_1'.$$

Partielle Summation gibt dann

$$\sum_{(m_1, n_2) \in D_1}{}'' \frac{1}{\sqrt{f_{t_1 t_1}(\varphi, n_2)}} e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)} \ll \{|D| \Lambda + c_1' + c_2'\} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{c_1'}{\sqrt{\lambda_1}},$$

woraus über (19) die Behauptung (18) folgt.

In den Anwendungen des Satzes verbleibt noch die Notwendigkeit, die Summe über $T(t_1, n_2)$ abzuschätzen. Dazu dient der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 4. *Sei $z > 0$ und $f(t)$ in $[a, b]$ $(a < b)$ reell und einmal stetig differenzierbar mit $|f'(t)| \geqslant q > 0$. Mit der Bezeichnung* (14) *ist*

$$S = \sum_{a \leqslant n \leqslant b} \min\left(\frac{1}{\chi(f(n))}, z\right) \ll (|f(b)-f(a)|+1)\left(z+\frac{1}{q}\log(b-a+2)\right).$$

Beweis. Wir nehmen $|f(b)-f(a)| < b-a$ an, da sonst das Ergebnis trivial ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f'(t) > 0$. Sei zunächst $[f(a)] = [f(b)]$, dann haben wir

$$f(n)-[f(n)] \geqslant \int_a^n f'(t)\,dt \geqslant q(n-a),$$

$$1-(f(n)-[f(n)]) > \int_n^b f'(t)\,dt \geqslant q(b-n).$$

Folglich ist

$$S \leqslant 2z+\frac{1}{q}\sum_{a<n<b}\frac{1}{\min(n-a,\, b-n)} \ll z+\frac{1}{q}\log(b-a+2).$$

Im Fall $[f(a)] < [f(b)]$ wird die Summe S zerlegt in

$$S = \sum_{k=[f(a)]}^{[f(b)]} S_k,$$

$$S_k = \sum \min\left(\frac{1}{\chi(f(n))}, z\right)$$

mit der Summationsbedingung für S_k

$$\mathrm{SB}\left(\sum\right)\colon\ a \leqslant n \leqslant b,\ k \leqslant f(n) < k+1.$$

Ist $f(n-1) < k$ oder $k = [f(a)]$,

$$k \leqslant f(n) < f(n+1) < \ldots < f(n+r) < k+1$$

und $f(n+r+1) \geqslant k+1$ oder $k = [f(b)]$, so findet man entsprechend oben

$$f(n+v)-[f(n+v)] \geqslant qv,$$

$$1-(f(n+v)-[f(n+v)]) > q(r-v).$$

Damit ist

$$S_k \leqslant 2z+\frac{1}{q}\sum_{v=1}^{r-1}\frac{1}{\min(v,\, r-v)} \ll z+\frac{1}{q}\log(b-a+2),$$

und die Behauptung folgt sofort.

In den Anwendungen von Satz 3 auf dreidimensionale Gitterpunktprobleme hat man meist die Situation vorliegen, dass $f_{t_1}(\varrho(t), t)$ eine ganze Zahl oder eine Konstante (unabhängig von den Parametern des Problems) ist oder f_{t_1} untere und obere Schranken von gleicher Ordnung hat. Ist T_1 ein Teil der Summe

$$\sum_{t_1=\varrho(n_2)} T(t_1, n_2),$$

bei dem $f_{t_1}(\varrho(t), t)$ eine ganze Zahl ist, dann ist $T_1 = 0$. Bezeichnet T_2 einen Teil mit $f_{t_1}(\varrho(n_2), n_2) = c \notin Z$, so ist

$$T_2 \leqslant \sum \frac{1}{\chi(c)} \ll c_2.$$

Nun sei T_3 ein Abschnitt der Summe mit

$$\left|\frac{d}{dt} f_{t_1}(\varrho(t), t)\right| \asymp q.$$

Dann können wir Hilfssatz 4 mit $z = 1/\sqrt{\lambda_1}$, $a_2 \leqslant a < b \leqslant b_2$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} T_3 &\ll \sum_{a \leqslant n \leqslant b} \min\left(\frac{1}{\chi(f_{t_1}(\varrho(n), n))}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right) \\ &\ll \left(|f_{t_1}(\varrho(b), b) - f_{t_1}(\varrho(a), a)| + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \frac{\log c_2}{q}\right) \\ &\ll \frac{c_1'}{\sqrt{\lambda_1}} + \left(c_2 + \frac{1}{q}\right) \log c_2. \end{aligned}$$

4. Die Transformation zweifacher Exponentialsummen

In den folgenden Ausführungen sollen wiederum die Voraussetzungen (A) bis (D) des zweiten Kapitels erfüllt sein.

SATZ 4. *Mit positiven Zahlen λ_1, λ_1', Λ sei im Bereich D*

$$|f_{t_1 t_1}| \asymp \lambda_1, \quad |f_{t_1 t_1 t_1}| \asymp \lambda_1', \quad |H(f)| \asymp \Lambda,$$
$$|g(t_1, t_2)| \ll G, \quad |g_{t_1}(t_1, t_2)| \ll G_1.$$

Für jeden Punkt $(\gamma_1, \gamma_2) \in D$ habe die in Hilfssatz 3 definierte Funktion $F(t_1, \gamma_1; f(t_1, \gamma_2))$ nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen. Die Funktion $g_{t_1}(t_1, t_2)$ sei bezüglich t_1 monoton. Für alle Teile der Randkurve sei entweder $t_2 = \text{const.}$ oder $t_1 = \varrho(t_2)$ mit stückweise zweimal stetig differenzierbarer Funktion $\varrho(t)$. $T(a, b)$ sei wie in (17) gegeben.

Die Funktionen $\varphi_j(y_1, y_2)$ $(j = 1, 2)$ *seien definiert durch*

$$f_{t_1}(\varphi_1, \varphi_2) = y_1, \quad f_{t_2}(\varphi_1, \varphi_2) = y_2.$$

D_1 *sei das Bild von* D *unter der Abbildung*

$$y_1 = f_{t_1}(t_1, t_2), \quad y_2 = t_2$$

und D_2 *das Bild von* D *unter der Abbildung*

$$y_1 = f_{t_1}(t_1, t_2), \quad y_2 = f_{t_2}(t_1, t_2).$$

D_2 *liege in einem achsenparallelen Rechteck* D'_2 *mit den Seitenlängen* $c'_1 \geqslant 1$, $c'_2 \geqslant 1$.

In D_1 *sei* $f_1(y_1, y_2)$ *definiert durch*

$$f_1(y_1, y_2) = f(\varphi_1(y_1, y_2), y_2) - y_1 \varphi_1(y_1, y_2),$$

und es sei

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial y_2^3} f_1(y_1, y_2)\right| \begin{smallmatrix}\smile\\\frown\end{smallmatrix} \lambda''_1, \qquad \left|\frac{\partial}{\partial y_2} \frac{g(\varphi_1, y_2)}{\sqrt{|f_{t_1 t_1}(\varphi_1, y_2)|}}\right| \ll G_2.$$

Für jeden Punkt $(\gamma_1, \gamma_2) \in D_1$ *habe die Funktion* $F(y_2, \gamma_2; f_1(\gamma_1, y_2))$ *nur eine beschränkte Anzahl von Nullstellen. Die Funktion*

$$\frac{\partial}{\partial y_2} \frac{g(\varphi_1, y_2)}{\sqrt{|f_{t_1 t_1}(\varphi_1, y_2)|}}$$

sei bezüglich y_2 *monoton. Für alle Teile der Randkurve von* D_1 *sei* $y_2 = \text{const.}$ *oder* $y_1 = \sigma(y_2)$ *mit stückweise zweimal stetig differenzierbarer Funktion* $\sigma(y)$. D_1 *genüge der Bedingung* (C) *des Kapitels* 2.

In D_2 *sei die Funktion* $f_2(y_1, y_2)$ *definiert durch*

$$f_2(y_1, y_2) = f(\varphi_1, \varphi_2) - y_1 \varphi_1(y_1, y_2) - y_2 \varphi_2(y_1, y_2).$$

Schliesslich sei

$$\varepsilon = \begin{cases} i & \text{für } H(f) > 0, f_{t_1 t_1} > 0, \\ -i & \text{für } H(f) > 0, f_{t_1 t_1} < 0, \\ 1 & \text{für } H(f) < 0. \end{cases}$$

Dann ist

$$(20) \quad \sum_{(n_1, n_2) \in D} g(n_1, n_2) e^{2\pi i f(n_1, n_2)}$$

$$= \varepsilon \sum_{(m_1, m_2) \in D_2} \frac{g(\varphi_1, \varphi_2)}{\sqrt{|H(f(\varphi_1, \varphi_2))|}} e^{2\pi i f_2(m_1, m_2)} +$$

$$+ O(G \sum_{t_1 = \varrho(n_2)} T(t_1, n_2)) + O(G\Delta) + O(G_1 \Delta_1) + O(G_2 \Delta_2),$$

$$\Delta = \frac{c_1'+c_2'}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{c_1'}{\sqrt{\lambda_1}} \{\lambda_1'' \lambda_1^2/\Lambda^2 + \log (c_2 \Lambda/\lambda_1 + 2)\} + c_2 \{\lambda_1'/\lambda_1^2 + \log (c_1 \lambda_1 + 2)\},$$

$$\Delta_1 = |D| + c_2/\lambda_1, \quad \Delta_2 = |D_1| + c_1' + c_2 + c_1' \lambda_1/\Lambda.$$

Beweis. Der Beweis verläuft zunächst in der gleichen Weise wie der Beweis zu Satz 3 bis (19). Schreibt man abkürzend S für die linke Seite von (20), so folgt gemäss (19) aus Hilfssatz 3

$$(21) \quad S = e^{\pm \pi i/4} \sum_{\substack{m_1 \quad n_2 \\ (m_1,n_2) \in D_1}} \sum{}'' \frac{g(\varphi_1, n_2)}{\sqrt{|f_{t_1 t_1}(\varphi_1, n_2)|}} e^{2\pi i f_1(m_1,n_2)} +$$
$$+ O\Big(G \sum_{t_1 = \varrho(n_2)} T(t_1, n_2)\Big) + O\big(Gc_2 \{\lambda_1'/\lambda_1^2 + \log (c_1 \lambda_1 + 2)\}\big) + O(G_1 \Delta_1')$$

mit $\varphi_1 = \varphi_1(m_1, n_2)$. Bezeichnet wieder $\varrho_1(t_2)$ den unteren und $\varrho_2(t_2)$ den oberen Teil des Randes, so erscheint nach (15) das Restglied Δ_1' in der Form

$$\Delta_1' = \sum_{n_2} \{\varrho_2(n_2) - \varrho_1(n_2) + 1/\lambda_1\} \ll \sum_{(n_1,n_2) \in D} 1 + c_2/\lambda_1 \ll |D| + c_2/\lambda_1 = \Delta_1.$$

Nun soll Hilfssatz 3 nochmals angewandt werden und zwar auf die Summe über n_2 in (21). Die Bedingung (C) für D_1 impliziert die stückweise Monotonie der Randkurve $y_1 = \sigma(t_2)$ und die Möglichkeit $\sigma(t_2) = \text{const.}$ nur am untersten und obersten Teil des Randes von D_1. An den nicht-konstanten Teilen $y_1 = \sigma(t_2)$ können wir die Striche am Summenzeichen weglassen, wobei ein Fehler der Grössenordnung $G/\sqrt{\lambda_1}$ entsteht. In Anwendung von Hilfssatz 3 ist

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} f_1 \right| = \left| \frac{H(f)}{f_{t_1 t_1}} \right| \asymp \frac{\Lambda}{\lambda_1}.$$

Die T-Werte in (15) werden trivial zu $\sqrt{\lambda_1/\Lambda}$ abgeschätzt. Bezeichnet $\gamma = \gamma(m_1)$ und $\delta = \delta(m_1)$ den linken und rechten Rand von D_1, so ist

$$\sum_{\gamma \leqslant n_2 \leqslant \delta}{}'' \frac{g(\varphi_1, n_2)}{\sqrt{|f_{t_1 t_1}(\varphi_1, n_2)|}} e^{2\pi i f_1(m_1,n_2)}$$
$$= e^{\pm \pi i/4} \sum_{m_2} \frac{g(\varphi_1, \varphi_2)}{\sqrt{|H(f(\varphi_1, \varphi_2))|}} e^{2\pi i f_2(m_1,m_2)} + O(G/\sqrt{\Lambda}) +$$
$$+ O\left(\frac{G}{\sqrt{\lambda_1}} \{\lambda_1'' \lambda_1^2/\Lambda^2 + \log (c_2 \Lambda/\lambda_1 + 2)\}\right) + O\big(G_2(\delta - \gamma + \lambda_1/\Lambda)\big).$$

Wenn wir die Striche am Summenzeichen an den Teilen des Randes mit konstanten $\sigma(t_2)$ weglassen wollen, so können wir die Summe in der gleichen Weise wie eben darstellen, erhalten jedoch zusätzlich die Hälfte der rechts stehenden Summe. Dies gibt zu einem zusätzlichen Fehler der Ordnung $c_2' \; G/\sqrt{\Lambda}$ Anlass. Folglich ist

$$\sum_{m_1} \sum_{\substack{n_2 \\ (m_1, n_2) \in D_1}}'' \frac{g(\varphi_1, n_2)}{\sqrt{|f_{t_1 t_1}(\varphi_1, n_2)|}} e^{2\pi i f_1(m_1, n_2)}$$

$$= e^{\pm \pi i/4} \sum_{(m_1, m_2) \in D_2} \frac{g(\varphi_1, \varphi_2)}{\sqrt{|H(f(\varphi_1, \varphi_2))|}} e^{2\pi i f_2(m_1, m_2)} + O\left(G \frac{c_1' + c_2'}{\sqrt{\Lambda}}\right)$$

$$+ O\left(\frac{Gc_1'}{\sqrt{\lambda_1}} \{\lambda_1'' \lambda_1^2/\Lambda^2 + \log(c_2 \Lambda/\lambda_1 + 2)\}\right) + O(G_2 \Delta_2')$$

mit

$$\Delta_2' = \sum_{m_1} \{\delta(m_1) - \gamma(m_1) + \lambda_1/\Lambda\} \ll \sum_{(m_1, n_2) \in D_1} 1 + c_1' + c_2 + c_1' \lambda_1/\Lambda$$

$$\ll |D_1| + c_1' + c_2 + c_1' \lambda_1/\Lambda = \Delta_2.$$

Benutzt man dies in (21), so ergibt sich sofort (20).

In den nächsten Sätzen wird die Transformationsformel genutzt, um mit zusätzlichen Weylschen Schritten verbesserte Abschätzungen zu erhalten. Dabei werden sogleich solche speziellen Bereiche betrachtet, wie sie später ausschliesslich benötigt werden.

SATZ 5. *Seien u_1, u_2 feste Zahlen grösser als 1 und $1 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant u_1 a_1$, $1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant u_2 a_2$. In D' sei $g(t_1, t_2) = 1$ und $f(t_1, t_2)$ erfülle alle Bedingungen des Satzes 4 mit $c_1 \asymp a_1$, $c_2 \asymp a_2$, $\Lambda = \lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda/a_1^2$, $\lambda_2 = \lambda/a_2^2$, $\lambda_1' = \lambda/a_1^3$, $\lambda_1'' = \lambda/a_2^3$, $G = 1$, $G_1 = 0$, $G_2 = a_1/a_2 \sqrt{\lambda}$. Auf dem Rand von D sei stückweise entweder $f_{t_1}(\varrho(t), t)$ eine ganze Zahl oder eine Konstante (unabhängig von den Parametern des Problems) oder*

$$\left|\frac{d}{dt} f_{t_1}(\varrho(t), t)\right| \asymp \frac{\lambda}{a_1 a_2}.$$

Für $k \geqslant 3$ genüge die Funktion $f_2(y_1, y_2)$ in D_2' allen Bedingungen des Satzes 2 mit demselben λ, aber λ/a_1, λ/a_2 an Stelle von a_1, a_2. Die Funktionen

$$H_{y_1}(f(\varphi_1, \varphi_2)), \quad H_{y_2}(f(\varphi_1, \varphi_2)), \quad H_{y_1 y_2}(f(\varphi_1, \varphi_2))$$

mögen dort festes Vorzeichen haben. Ist $\lambda \gg a_1$, a_2, dann gilt

$$(22) \qquad \sum_{(n_1, n_2) \in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} \ll \{\lambda (a_1^{k-1} a_2 \lambda^{1-k})^{4/(3K-8)} + a_2\} \log \lambda.$$

Beweis. Zuerst wird die Transformationsformel (20) angewendet. Es ist leicht zu sehen, dass $c_1' \ll \lambda/a_1$, $c_2' \ll \lambda/a_2$ und

$$\Delta \ll (a_1 + a_2 + \sqrt{\lambda}) \log \lambda, \qquad \Delta_2 \ll a_2 \lambda/a_1.$$

Ausgehend von den Bemerkungen am Ende des dritten Kapitels ergibt sich

$$\sum_{t_1=\varrho(n_2)} T(t_1, n_2) \ll (a_2+\sqrt{\lambda}) \log \lambda.$$

Damit erhalten wir aus (20)

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} = \varepsilon \sum_{(m_1,m_2)\in D_2} \frac{1}{\sqrt{|H(f(\varphi_1, \varphi_2))|}} e^{2\pi i f_2(m_1,m_2)} +$$

$$+O\left((a_1+a_2+\sqrt{\lambda}) \log \lambda\right).$$

Wir betrachten die Summe

$$S_1 = \sum e^{2\pi i f_2(m_1,m_2)},$$

wobei (m_1, m_2) in beliebigen Teilbereichen von D_2 mit $m_1 \leqslant x_1$, $m_2 \leqslant x_2$ variiert. Diese Bereiche liegen alle in einem achsenparallelen Rechteck, dessen Seitenlängen von der Ordnung λ/a_1 und λ/a_2 sind. Mit Hilfe von (6) findet man ohne weiteres

$$S_1 \ll \frac{\lambda^2}{a_1 a_2} (a_1^{k-1} a_2 \lambda^{1-k})^{4/(3K-8)} \log \lambda.$$

Partielle Summation liefert nun sofort (22), wobei man offensichtlich die Grössen a_1 und $\sqrt{\lambda}$ vernachlässigen kann.

Nun betrachten wir die später benötigten Anwendungen des Satzes für $k = 3$ und 4.

Satz 6. *Sind alle Voraussetzungen von Satz 5 für $k = 3$ erfüllt, so ist*

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll (a_1^4 a_2^3 \lambda^2)^{1/6} \log \lambda. \tag{23}$$

Beweis. Für $k = 3$ gibt (22)

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} \ll \{(a_1^2 a_2 \lambda^2)^{1/4}+a_2\} \log \lambda \ll (a_1^2 a_2 \lambda^2)^{1/4} \log \lambda,$$

sofern $a_1^2 \lambda^2 \gg a_2^3$. Andererseits benutzen wir van der Corputs Abschätzung (4) bezüglich n_2. Es ist

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} e^{2\pi i f(n_1,n_2)} \ll a_1 \sqrt{\lambda} \ll (a_1^2 a_2 \lambda^2)^{1/4},$$

da aus $a_1^2 \lambda^2 \ll a_2^3$ und $a_2 \ll \lambda$ auf $a_1^2 \ll a_2$ geschlossen werden kann. Aus (12) ergibt sich dann

$$\sum_{(n_1,n_2)\in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll \frac{a_1 a_2}{z} + (a_1^2 a_2 \lambda^2 z^2)^{1/4} \log (\lambda z).$$

Das Resultat (23) folgt nun aus der Wahl von z zu

$$z = (a_1^2 a_2^3 \lambda^{-2})^{1/6}.$$

SATZ 7. *Sind alle Voraussetzungen des Satzes 5 für $k = 4$ erfüllt, so ist*

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll (a_1^{10} a_2^8 \lambda^7)^{1/17} \log \lambda. \tag{24}$$

Beweis. Für $k = 4$ gibt (22)

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} e^{2\pi i f(n_1, n_2)} \ll \{(a_1^3 a_2 \lambda)^{1/10} + a_2\} \log \lambda.$$

Über (12) folgt aus

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll \frac{a_1 a_2}{z} + \{(a_1^3 a_2 \lambda^7 z^7)^{1/10} + a_2 \log z\} \log (\lambda z)$$

mit

$$z = (a_1^7 a_2^9 \lambda^{-7})^{1/17},$$

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll \{(a_1^{10} a_2^8 \lambda^7)^{1/17} + a_2 \log \lambda\} \log \lambda$$

$$\ll (a_1^{10} a_2^8 \lambda^7)^{1/17} \log \lambda,$$

sofern $a_1^{10} \lambda^7 \gg a_2^9 \log^{17} \lambda$. Wendet man andererseits (4) bezogen auf n_2 an, so erhält man

$$\sum_{(n_1, n_2) \in D} \psi(f(n_1, n_2)) \ll a_1 (a_2 \lambda)^{1/3}.$$

Aus $a_2 \ll \lambda$ und

$$a_1^{10} \lambda^7 \ll a_2^9 \log^{17} \lambda$$

findet man

$$a_1 (a_2 \lambda)^{1/3} \ll (a_1^{10} a_2^{17/3 + 63/10} \lambda^{17/3 - 49/10})^{1/17} \log \lambda \ll (a_1^{10} a_2^8 \lambda^7)^{1/17} \log \lambda,$$

so dass (24) auch in diesem Falle folgt.

5. Anwendungen auf Teilerprobleme

In diesem Kapitel werden Anwendungen der Sätze 2, 6 und 7 auf die Funktion $D(a, b, c; x)$ betrachtet, welche zu den Sätzen 8, 9 und 10 führen.

HILFSSATZ 5. *Es seien $M, N \geqslant 1$, k eine ganze Zahl mit $k \geqslant 2$, $K = 2^k$ und $u, v, w \geqslant 1$. Es bezeichne*

$$S_{u,v,w}(x; M, N) = \sum \psi\left(\left(\frac{x}{n^u m^v}\right)^{1/w}\right)$$

unter der Summationsbedingung

$$\mathrm{SB}(\textstyle\sum): \; n^u m^{v+w} \leqslant x, \; n \leqslant m, \; M \leqslant m \leqslant \alpha M, \; N \leqslant n \leqslant 2N.$$

Dabei sei $\alpha = 2$ *für* $k = 2$ *und* $\alpha > 1$ *so, dass für* $k > 2$

$$(k-1)w+u+v > (\alpha-1)(k-2)u\big((k-2)w+v\big).$$

Dann gilt

$$(25) \qquad S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll \left(x^4 M^{(3K-4k)w-4v} N^{(3K-8)w-4u}\right)^{\frac{1}{3K-4}\frac{1}{w}} \log x.$$

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass α immer so gewählt werden kann, dass obige Eigenschaft erfüllt ist. α muss nur hinreichend nahe bei 1 liegen. Nun soll Saz 2 auf die Funktion

$$f(t_1, t_2) = -\left(\frac{x}{t_1^v t_2^u}\right)^{1/w}$$

und den Bereich

$$D = \{(t_1, t_2);\, t_1^{v+w} t_2^u \leqslant x,\, t_2 \leqslant t_1,\, M \leqslant t_1 \leqslant \alpha M,\, N \leqslant t_2 \leqslant 2N\}$$

angewandt werden. Wir setzen dort $u_1 = \alpha$, $u_2 = 2$, $a_1 = M$, $b_1 = \alpha M$, $a_2 = N$, $b_2 = 2N$ und überprüfen die sämtlichen Bedingungen des Satzes. Es ist

$$\frac{\partial^\nu f}{\partial t_1^\nu} = (-1)^{\nu-1} \prod_{r=0}^{\nu-1} \left(r + \frac{v}{w}\right) \frac{f}{t_1^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial t_1^{k-2}\, \partial t_2^2} = (-1)^{k-1} \frac{u}{w} \left(1 + \frac{u}{w}\right) \prod_{r=0}^{k-3} \left(r + \frac{v}{w}\right) \frac{f}{t_1^{k-2} t_2^2},$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial t_1^{k-1}\, \partial t_2} = (-1)^{k-1} \frac{u}{w} \prod_{r=0}^{k-2} \left(r + \frac{v}{w}\right) \frac{f}{t_1^{k-1} t_2}.$$

Setzt man

$$\lambda = \left(\frac{x}{M^v N^u}\right)^{1/w},$$

so ist natürlich $\lambda \gg M \gg N$, und die Bedingungen des Satzes 2 bezogen auf diese Ableitungen sind erfüllt. Weiterhin haben wir die Hessesche Determinante

$$H = H\left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial^{k-2} f(t_1', t_2)}{\partial t_1^{k-2}}\, d\tau_1 \ldots d\tau_{k-2}\right)$$

mit

$$t_1' = t_1 + h_1 \tau_1 + \ldots + h_{k-2} \tau_{k-2}$$

und $1 \leqslant h_1, \ldots, h_{k-1} \leqslant (\alpha-1)M$ zu betrachten. Da in dieser zweireihigen Determinante zwei Gruppen von Integralen auftreten, benutzen wir in der einen Gruppe die Bezeichnung t_1' und in der anderen

$$t_1'' = t_1 + h_1 \tau_1' + \ldots + h_{k-2} \tau_{k-2}'.$$

Benutzen wir die Kurzbezeichnungen $\int g(t_1', t_2)$, $\int g(t_1'', t_2)$ für die entsprechenden Integrale und Funktionen, so findet man ohne Schwierigkeiten

$$H = \frac{u}{w}\left(k-2+\frac{v}{w}\right)\prod_{r=0}^{k-3}\left(r+\frac{v}{w}\right)\int \frac{f(t_1', t_2)}{t_1'^k}\int \frac{f(t_1'', t_2)}{t_1''^{k-1}}\frac{\omega(t_1', t_1'')}{t_2^2},$$

$$\begin{aligned}\omega(t_1', t_1'') &= \left(k-1+\frac{v}{w}\right)\left(1+\frac{u}{w}\right)t_1'' - \left(k-2+\frac{v}{w}\right)\frac{u}{w}\, t_1' \\ &\geqslant \left(k-1+\frac{v}{w}\right)\left(1+\frac{u}{w}\right)t_1 - \left(k-2+\frac{v}{w}\right)\frac{u}{w}\left(t_1 + (\alpha-1)(k-2)M\right) \\ &\geqslant M\left\{k-1+\frac{u+v}{w} - (\alpha-1)(k-2)\left(k-2+\frac{v}{w}\right)\frac{u}{w}\right\}.\end{aligned}$$

Daher ist die Hessesche Determinante stets positiv und die entsprechende Bedingung des Satzes 2 ebenfalls erfüllt.

Für die Teile der Randkurve von D haben wir entweder $t_2 = \text{const.}$ oder $t_1 = \varrho(t_2)$ mit den Möglichkeiten

$$\varrho(t_2) = \text{const}, \quad t_2, \quad (x t_2^{-u})^{1/(v+w)}.$$

Nur die letzte Möglichkeit bietet Interesse. In diesem Fall ist

$$\varrho''(t_2) = \frac{u}{v+w}\left(1+\frac{u}{v+w}\right) t_2^{-2} (x t_2^{-u})^{1/(v+w)} \ll M N^{-2}.$$

Folglich ergibt sich (25) aus (9).

SATZ 8. *Für $k = 2, 3, \ldots$ und $K = 2^k$ gilt*

$$\Delta(a, b, c; x) \ll x^{\left(2-\frac{4(k-1)}{3K-4}\right)\frac{1}{a+b+c}} \log^3 x \tag{26}$$

unter den Bedingungen

$$(3K-2k-4)\,a \geqslant 2(b+c),$$

$$(3K-8)(a+b) \geqslant (3K-4k+4)\,c.$$

Beweis. Aus (25) ergibt sich

$$S_{u,v,w}(x; M, N) \ll \left(x^4 (N^u M^{v+w})^y (N/M)^z\right)^{\frac{1}{3K-4}\frac{1}{w}} \log x,$$

$$(u+v+w)y = 2\big((3K-2k-4)w-2(u+v)\big),$$
$$(u+v+w)z = w\big((3K-8)(v+w)-(3K-4k+4)u\big).$$

Unter den Bedingungen des Satzes ist immer $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Aus den Ungleichungen

$$N^u M^{v+w} \ll x, \qquad N \ll M$$

erhält man

$$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll x^{\left(2-\frac{4(k-1)}{3K-4}\right)\frac{1}{a+b+c}} \log x.$$

Der Summationsbereich in der Darstellung (2) der Funktion $S_{u,v,w}(x)$ kann in $O(\log^2 x)$ Teilbereiche der Art $S_{u,v,w}(x;\, M,\, N)$ zerlegt werden, so dass

$$S_{u,v,w}(x) \ll x^{\left(2-\frac{4(k-1)}{3K-4}\right)\frac{1}{a+b+c}} \log^3 x.$$

Daraus ergibt sich über (1) die Abschätzung (26).

Nun sollen Abschätzungen auf Grundlage der Sätze 6 und 7 gegeben werden. Das heisst, wir nutzen die Transformationsformel für zweifache Exponentialsummen und wenden dann ein oder zwei Weylsche Schritte an.

HILFSSATZ 6. *Für $M, N, u, v, w \geqslant 1$ gilt*

(27) $$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll (x^2 M^{3w-2v} N^{4w-2u})^{1/6w} \log x,$$

(28) $$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll (x^7 M^{8w-7v} N^{10w-7u})^{1/17w} \log x.$$

Dabei ist $S_{u,v,w}(x;\, M,\, N)$ durch

$$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) = \sum \psi\left(\left(\frac{x}{n^u m^v}\right)^{1/w}\right)$$

unter der Summationsbedingung

$$\mathrm{SB}\left(\sum\right):\ n^u m^{v+w} \leqslant x,\ n \leqslant m,\ M \leqslant m \leqslant 2M,\ N \leqslant n \leqslant 2N$$

gegeben.

Beweis. Die Sätze 6 und 7 liefern die Abschätzungen (27) und (28). Daher sind alle Bedingungen des Satzes 5 für $k = 3$ und $k = 4$ zu überprüfen. Wir haben den Bereich

$$D = \{(t_1,\, t_2);\ t_1^u t_2^{v+w} \leqslant x,\ t_1 \leqslant t_2,\ N \leqslant t_1 \leqslant 2N,\ M \leqslant t_2 \leqslant 2M\}$$

und die Funktion

$$f(t_1,\, t_2) = -\left(\frac{x}{t_1^u t_2^v}\right)^{1/w}$$

zu betrachten. In Satz 5 setzen wir $u_1 = u_2 = 2$, $a_1 = N$, $b_1 = 2N$, $a_2 = M$, b_2

$= 2M$ und

$$\lambda = \left(\frac{x}{N^u M^v}\right)^{1/w},$$

so dass $\lambda \gg M \gg N$ ist.

Nun sind alle Bedingungen des Satzes 4 zu überprüfen. Es ist nicht schwierig zu sehen, dass die Bedingungen für die Ableitungen von $f(t_1, t_2)$ und die Hessesche Determinante $H(f)$ erfüllt sind mit $\Lambda = \lambda_1 \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda/N^2$, $\lambda_2 = \lambda/M^2$, $\lambda_1' = \lambda/N^3$. Natürlich hat die Funktion $F(t_1, \gamma_1; f(t_1, \gamma_2))$ in jedem Punkt $(\gamma_1, \gamma_2) \in D$ die geforderte Eigenschaft. Für die Teile der Randkurve von D haben wir die Möglichkeiten $t_2 = \text{const}$ oder $t_1 = \varrho(t_2)$ mit

$$\varrho(t) = \text{const}, \quad t, \quad \left(\frac{x}{t^{v+w}}\right)^{1/u}.$$

Es ist

$$\frac{d}{dt} f_{t_1}(\varrho(t), t) = \frac{u}{w} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\varrho^{u+w} t^v}\right)^{1/w}.$$

Man übersieht in allen drei Fällen sofort

$$\left|\frac{d}{dt} f_{t_1}(\varrho(t), t)\right| \begin{smallmatrix}\cup\\\cap\end{smallmatrix} \frac{\lambda}{MN}$$

wegen $t = t_2 \begin{smallmatrix}\cup\\\cap\end{smallmatrix} M$, $t_1 = \varrho(t_2) \begin{smallmatrix}\cup\\\cap\end{smallmatrix} N$.

D_1 ist das Bild von D unter der Abbildung

$$y_1 = \frac{u}{w} \left(\frac{x}{t_1^{u+w} t_2^v}\right)^{1/w}, \qquad y_2 = t_2.$$

Damit ergibt sich

$$\varphi_1(y_1, y_2) = \left(\frac{u^w x}{w^w y_1^w y_2^v}\right)^{1/(u+w)}, \qquad f_1(y_1, y_2) = s_1 \left(\frac{x y_1^u}{y_2^v}\right)^{1/(u+w)}$$

mit einer uninteressanten, negativen Konstanten s_1. Hieraus erkennt man sogleich $\lambda_1'' = \lambda/M^3$, $G_2 = N/M\sqrt{\lambda}$. Die übrigen sich auf D_1 beziehenden Bedingungen sind selbstverständlich auch erfüllt.

D_2 ist das Bild von D unter der Abbildung

$$y_1 = \frac{u}{w} \left(\frac{x}{t_1^{u+w} t_2^v}\right)^{1/w}, \quad y_2 = \frac{v}{w} \left(\frac{x}{t_1^u t_2^{v+w}}\right)^{1/w},$$

und wir erhalten hier

$$\varphi_1(y_1, y_2) = \left(\frac{u^{v+w} y_2^v x}{v^v w^w y_1^{v+w}}\right)^{1/(u+v+w)}, \qquad \varphi_2(y_1, y_2) = \left(\frac{v^{u+w} y_1^u x}{u^u w^w y_2^{u+w}}\right)^{1/(u+v+w)},$$

$$f_2(y_1, y_2) = s_2 (x y_1^u y_2^v)^{1/(u+v+w)}$$

mit einer uninteressanten, negativen Konstanten s_2. Damit sind alle Bedingungen von Satz 4 überprüft.

Nun sind noch die Bedingungen des Satzes 2 in Hinblick auf den Bereich D_2, die Funktion $f_2(y_1, y_2)$ und $k = 3, 4$ zu überprüfen. Wir benutzen dasselbe λ, beachten aber, dass dort a_1, a_2 von der Grössenordnung λ/N, λ/M sind. Wegen $|f_2(y_1, y_2)| \asymp \lambda$ überblickt man schnell, dass die Ableitungen von $f_2(y_1, y_2)$ und die Hessesche Determinante, welche stets negativ ist, die geforderten Bedingungen erfüllen. Für die Teile der Randkurve von D_2 erscheinen die Möglichkeiten $y_2 = \text{const}$ oder $y_1 = \varrho(y_2)$ mit

$$\varrho(y_2) = \frac{v}{u}\, y_2, \quad s_3\left(\frac{y_2^{u+w}}{x}\right)^{1/u}, \quad s_4(xy_2^v)^{1/(v+w)}$$

mit gewissen von Null verschiedenen Konstanten s_3, s_4. In den letzten beiden Fällen ist

$$y_1'' = \varrho''(y_2) \asymp \frac{y_1}{y_2^2} \asymp \frac{M^2}{\lambda N}.$$

Damit sind auch die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt.

Schliesslich ist

$$H\big(f(\varphi_1, \varphi_2)\big) = -\left(\frac{w^{u+v}}{u^u v^v}\, xy_1^u y_2^v\right)^{1/(u+v+w)},$$

und die ersten partiellen Ableitungen nach y_1 beziehungsweise y_2 haben festes Vorzeichen. Nunmehr sind sämtliche Bedingungen des Satzes 5 überprüft, und die Abschätzungen (27), (28) ergeben sich mit den angegebenen Werten von a_1, a_2, λ sofort aus (22).

Satz 9. *Die Abschätzung*

$$\Delta(a, b, c; x) \ll x^{\frac{3}{2}\frac{1}{a+b+c}} \log^3 x$$

besteht unter den Bedingungen

$$7a \geqslant 2(b+c), \qquad 4(a+b) \geqslant 5c.$$

Beweis. Aus (27) ergibt sich

$$S_{u,v,w}(x; M, N) \ll \left(x^2 (N^u M^{v+w})^y (N/M)^z\right)^{1/6w} \log x,$$

$$(u+v+w)\, y = 7w - 2(u+v),$$

$$(u+v+w)\, z = w\big(4(v+w) - 5u\big).$$

Alles Weitere verläuft wie im Beweis zu Satz 8.

Satz 10. *Die Abschätzung*

$$\Delta(a, b, c; x) \ll x^{\frac{25}{17}\frac{1}{a+b+c}} \log^3 x$$

besteht unter den Bedingungen

$$18a \geqslant 7(b+c), \qquad 2(a+b) \geqslant 3c.$$

Beweis. Aus (28) folgt

$$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll \left(x^7 (N^u M^{v+w})^y (N/M)^z\right)^{1/17w} \log x,$$
$$(u+v+w)\,y = 18w - 7(u+v),$$
$$(u+v+w)\,z = 2w\bigl(2(v+w)-3u\bigr).$$

Wieder ergibt sich wie im Beweis zu Satz 8 die Behauptung.

6. Eine Anwendung auf Zahlen dritter Art

Es sei k eine natürliche Zahl. Wir nennen die natürliche Zahl n_k eine Zahl k-ter Art, wenn entweder $n_k = 1$ ist oder wenn jeder Primteiler von n_k mindestens in der k-ten Potenz vorkommt. Mit $N_k(x)$ bezeichnen wir die Anzahl der Zahlen k-ter Art, die kleiner oder gleich x sind. Es ist leicht zu sehen, dass das Problem der Abschätzung der Anzahl der Zahlen k-ter Art in direkter Weise mit Teilerproblemen verknüpft ist.

Für Zahlen zweiter Art bewiesen P. T. Bateman und E. Grosswald [1] die Abschätzung

$$N_2(x) = \gamma_{2,2}\, x^{1/2} + \gamma_{3,2}\, x^{1/3} + O\left(x^{1/6} e^{-a\delta(x)}\right)$$

mit einer gewissen Konstanten $a > 0$,

$$\gamma_{2,2} = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}, \qquad \gamma_{3,2} = \frac{\zeta(2/3)}{\zeta(2)}$$

und

$$\delta(x) = (\log x)^{4/7} (\log \log x)^{-3/7}.$$

Später verbesserten D. Suryanarayana und Sitaramachandra Rao [10] dieses Ergebnis, indem sie für $\delta(x)$ den Wert (29) angaben. All dies ist eine Konsequenz der Darstellung

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2^s} = \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}.$$

Für Zahlen dritter Art erhalten wir die Dirichlet-Reihe (siehe [6])

$$\sum_{n_3=1}^{\infty} \frac{1}{n_3^s} = \prod_p \left(1 + \frac{p^{-3s}}{1-p^{-s}}\right) = \frac{\zeta(3s)\zeta(4s)\zeta(5s)}{\zeta(8s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_3(n)}{n^s},$$

in der $f_3(n)$ eine gewisse, nicht sehr interessante zahlentheoretische Funktion bezeichnet, deren Dirichlet-Reihe für $\operatorname{Re} s > 1/9$ absolut konvergiert. Diese Darstellung zeigt, dass das Problem der Abschätzung der Anzahl der Zahlen dritter Art verknüpft ist mit der Abschätzung von $D(3, 4, 5;\ x)$. Hat man hierfür eine Abschätzung erhalten, dann ist es nicht schwierig, diese auf $N_3(x)$ zu übertragen. Die bisher beste Abschätzung wurde von A. Ivić [2] gewonnen, nämlich

$$\Delta(3, 4, 5;\ x) \ll x^{\frac{655}{4643}}.$$

Man sieht, dass das Tripel (3, 4, 5) die Bedingungen des Satzes 9 erfüllt. Daher gilt

$$\Delta(3, 4, 5;\ x) \ll x^{1/8} \log^3 x.$$

Will man aber ein Resultat von der Güte der Bateman-Grosswaldschen Abschätzung für $N_2(x)$ erzielen, so benötigt man eine Abschätzung der Art

$$\Delta(3, 4, 5;\ x) \ll x^{\vartheta+\varepsilon}$$

mit $1/9 < \vartheta < 1/8$, $\varepsilon > 0$. Dies ist jedoch möglich mit Hilfe der Ergebnisse dieser Arbeit.

SATZ 11. *Mit*

$$\gamma_{\nu,3} = \frac{1}{\nu} \operatorname*{res}_{s=1/\nu} \sum_{n_3=1}^{\infty} 1/n_3^s \qquad (\nu = 3, 4, 5),$$

einer gewissen Konstanten $a > 0$ *und*

$$\delta(x) = (\log x)^{3/5} (\log \log x)^{-1/5} \tag{29}$$

gilt die Abschätzung

$$N_3(x) = \gamma_{3,3}\, x^{1/3} + \gamma_{4,3}\, x^{1/4} + \gamma_{5,3}\, x^{1/5} + O(x^{1/8} e^{-a\delta(x)}). \tag{30}$$

Beweise. Wir beweisen

$$\Delta(3, 4, 5;\ x) \ll x^{\frac{22}{177}} \log^3 x. \tag{31}$$

Dann ist (30) eine unmittelbare Konsequenz von (31) mit Hilfe eines Faltungssatzes von A. Ivić [3], was hier nicht näher ausgeführt werden soll. Da das Tripel (3, 4, 5) nicht den Bedingungen des Satzes 10 genügt, haben wir die sechs Permutationen der Zahlen 3, 4, 5 einzeln zu betrachten. Zunächst entnehmen wir (28) und dem Beweis zu Satz 10 die Abschätzung

$$S_{u,v,w}(x) \ll x^{\frac{25}{204}} \log^3 x, \tag{32}$$

falls

$$18w \geqslant 7(u+v), \qquad 2(v+w) \geqslant 3u.$$

Diese Bedingungen erfüllen die drei Tripel

$$(u,\, v,\, w) = (3,\, 5,\, 4), \quad (4,\, 3,\, 5), \quad (3,\, 4,\, 5).$$

Nun betrachten wir die übrigen Tripel

$$(u,\, v,\, w) = (5,\, 4,\, 3), \quad (4,\, 5,\, 3), \quad (5,\, 3,\, 4).$$

Hier zerlegen wir die Summen $S_{u,v,w}(x)$ in solche mit $n \geqslant z$ und $n < z$ und wählen z geeignet später. Für $n \geqslant z$ wenden wir (28) an und erhalten bei Verwendung von

$$z \ll N \ll M \ll (xN^{-u})^{1/(v+w)}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} S_{5,4,3}(x;\, M,\, N) &\ll (x^7 M^{-4} N^{-5})^{1/51} \log x \ll (x^7 z^{-9})^{1/51} \log x, \\ S_{4,5,3}(x;\, M,\, N) &\ll (x^7 M^{-11} N^2)^{1/51} \log x \ll (x^7 z^{-9})^{1/51} \log x, \\ S_{5,3,4}(x;\, M,\, N) &\ll (x^7 M^{11} N^5)^{1/68} \log x \\ &\ll (x^7 M^{-4} N^{-5})^{1/51} \log x \ll (x^7 z^{-9})^{1/51} \log x. \end{aligned}$$

Für $n < z$ erhalten wir bei Verwendung von

$$N \ll z, \qquad N \ll M \ll (xN^{-u})^{1/(v+w)}$$

aus (27) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} S_{5,4,3}(x;\, M,\, N) &\ll (x^2 MN^2)^{1/18} \log x \ll (x^5 z^3)^{1/42} \log x, \\ S_{4,5,3}(x;\, M,\, N) &\ll (x^2 M^{-1} N^4)^{1/18} \log x \\ &\ll (x^2 MN^2)^{1/18} \log x \ll (x^5 z^3)^{1/42} \log x, \\ S_{5,3,4}(x;\, M,\, N) &\ll (xM^3 N^3)^{1/12} \log x \\ &\ll (x^2 MN^2)^{1/18} \log x \ll (x^5 z^3)^{1/42} \log x. \end{aligned}$$

Für $z = x^{13/177}$ erhält man für alle drei Tripel $(u,\, v,\, w)$ und sowohl für $N \ll z$ als auch $N \gg z$

$$S_{u,v,w}(x;\, M,\, N) \ll x^{\frac{22}{177}} \log x$$

und damit

$$S_{u,v,w}(x) \ll x^{\frac{22}{177}} \log^3 x.$$

Das beweist in Verbindung mit (32) die Abschätzung (31).

Literatur

[1] P. T. Bateman, E. Grosswald, *On a theorem of Erdös and Szekeres*, Illinois J. Math. 2 (1958), 88–98.

[2] A. Ivić, *On the asymptotic formulas for powerful numbers*, Publications de l'Institut Math. (Belgrade) 23 (37), (1978), 85–94.

[3] —, *A convolution theorem with applications to some divisor functions*, ibid. 24 (38) (1978), 67–78.

[4] G. Kolesnik, *On the estimation of multiple exponential sums*; in *Recent progress in analytic number theory*, vol. 1 (Durham 1979), Academic Press, London 1981, 231–246.

[5] —, *On the order of* $\zeta(1/2+it)$ *and* $\Delta(R)$, Pacific J. Math. 98 (1982), 107–122.

[6] E. Krätzel, *Zahlen k-ter Art*, Amer. J. Math. 94 (1972), 309–328.

[7] W. G. Nowak, *Ein Satz zur Behandlung dreidimensionaler Gitterpunktprobleme*, J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 125–142.

[8] E. Phillips, *The zeta-function of Riemann*; *further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. (Oxford) 4 (1933), 209–225.

[9] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), 34–42.

[10] D. Suryanarayana, R. Sitaramachandra Rao, *The distribution of square-full integers*, Arkiv för Mat. 11 (2), (1973), 195–201.

[11] E. C. Titchmarsh, *On Epstein's zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1934), 485–500.

[12] —, *The lattice-points in a circle*, ibid. 38 (1934), 96–115. (Corrigendum 555).

[13] —, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

[14] I. M. Vinogradov, *Izbrannye Trudy*, Moskau 1952.

[15] —, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugel* (Russ.), Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 27 (1963), 957–968.

[16] M. Vogts, *Teilerprobleme in drei Dimensionen*, Math. Nachr. 101 (1981), 243–256.

Presented to the Semester
Elementary and Analytic Theory of Numbers
September 1–November 13, 1982