

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

И. Ф. МОРОЗОВ

Ленинград

- I. Энергетические и силовые критерии хрупкого разрушения.
 - § 1. Понятие о теоретической прочности. § 2. Концепция хрупкого разрушения Гриффитса. § 3. Общий энергетический анализ хрупкого разрушения. § 4. Силовые критерии разрушения Г. И. Баренблатта и В. В. Новожилова. § 5. Учет моментных напряжений при вычислении разрушающей нагрузки.
- II. Деформационные критерии разрушения.
 - § 1. Критерий Леонова–Панасюка–Дагдейла. § 2. О подходе Новожилова к задачам теории трещин. § 3. Новый деформационный критерий.
- III. Упругие области с угловыми вырезами.
 - § 1. Плоскость, ослабленная луночным вырезом. § 2. Плоскость, ослабленная лункой с надрывами. § 3. Кручение цилиндра с угловой выточкой.
- IV. Обсуждение подходов Гриффитса и Снеддона при идеализации реальной плоской трещины.
 - § 1. Формулы для плоскости, ослабленной тонким эллиптическим вырезом и формулы Снеддона. § 2. Обсуждение подходов Гриффитса и Снеддона в задачах теории трещин. § 3. Случай произвольного тонкого выреза. § 4. О неустойчивости плоского решения задачи о растяжении пластины с внутренним разрезом.

Основы современной теории хрупкого разрушения были заложены в известных работах А. Гриффитса ([1], [2]), опубликованных в начале 20-х годов. Однако с тех пор прошло более полувека, и представляет интерес дать систематическое изложение, полученных за этот период, результатов в качестве самостоятельного раздела науки „механики разрушения”.

Фундаментальные исследования, проведенные особенно в самое последнее время в „чистой” математике ([3]–[8]), дают основательную базу такому намерению. Для обеспечения наибольшей наглядности мы будем ориентироваться на двумерные задачи, а также рассматривать только хрупкое разрушение, то есть предполагать среду идеально упругой вплоть до разрыва, базируясь на условии нормального отрыва.

Такие ограничения способствуют более успешной математизации и аксиоматизации курса теории. В то время в критериях разрушения мы будем допускать большую свободу выбора, в частности, кроме основополагающего критерия Гриффитса, введем в рассмотрение силовые критерии Г. И. Баренблатта и В. В. Новожилова ([9], [10]), а также деформационные критерии Леонова–Панасюка–Дагдейла ([11], [12]) и другие [13].

І. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И СИЛОВЫЕ КРИТЕРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

§ 1. Понятие теоретической прочности

Анализ явления разрушения естественно начинать с введения понятия теоретической прочности, которое определяется через силы межатомного сцепления в предположении правильности атомной решетки. В этом случае взаимодействие двух слоев атомов можно задать графиком „напряжения взаимодействия слоев” — „расстояние между слоями”.

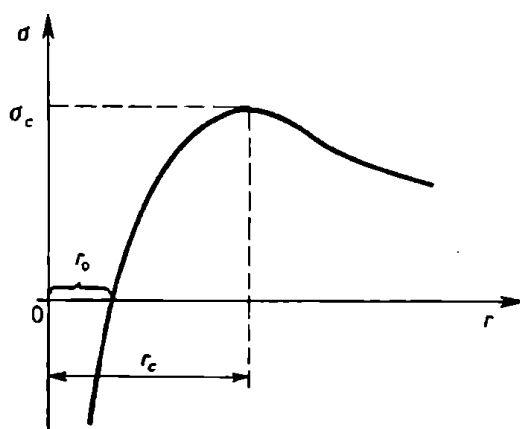


Рис. 1

Аппроксимируя кривую на участке $(r_0, +\infty)$ представлением

$$(1.1.1) \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_c \sin \frac{2\pi(r-r_0)}{r_0} & \text{при } 0 < \frac{r-r_0}{r_0} < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{r-r_0}{r_0} > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и интерпретируя $(r-r_0)/r_0$ как относительное удлинение ϵ , а E — как $(\partial\sigma/\partial\epsilon)|_{\epsilon=0}$, получаем

$$(1.1.2) \quad \sigma_c = E/2\pi \approx 0,1 E.$$

При напряжениях, меньших σ_c , разрушение, вообще говоря, не должно осуществляться, отсюда естественное название σ_c — *теоретическая прочность*.

Однако, как можно убедиться на многочисленных экспериментах, разрушение происходит при напряжениях по крайней мере на порядок ниже σ_c . Снижение прочности можно объяснить неизбежным наличием дефектов: трещин, пор, включений и прочих концентраторов напряжений. Учет дефектов может быть произведен по-разному. В теории разрушения по этому признаку определяются два основных направления. Одно направление состоит в изучении различных распределений дефектов. Это изучение осуществляется посредством введения функций, определяющих степень поврежденности, и добавлением этих функций к традиционным характеристикам сплошной среды. Другое направление заключается в изучении напряженно деформированного состояния среды в окрестности изолированных особых точек. Это направление и составляет предмет нашего исследования.

§ 2. Концепции Гриффитса

Идеологию Гриффитса можно проследить, рассмотрев две решенные им основополагающие задачи. Коротко изложим их.

А. Рассматривается задача о всестороннем растяжении бесконечной упругой плоскости с конечным прямолинейным разрезом и ставится вопрос: при каком p произойдет распространение трещины, то есть трещина $(-a, +a)$ — I-е состояние, пройдет в трещину $(-a - \Delta a, a + \Delta a)$ — II-е состояние.

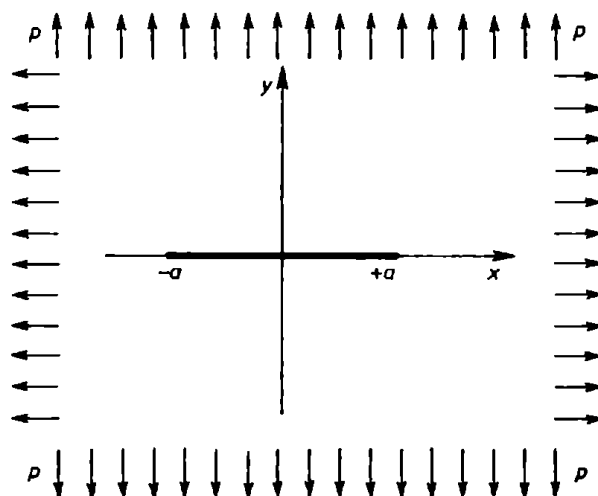


Рис. 2

Гриффитс предложил постулировать критерий: переход от одного состояния к другому возможен лишь при выполнении энергетического условия

$$\Delta U + \Delta \Pi = \Delta A$$

Здесь Π — введенная Гриффитсом поверхностная энергия трещины, равная в данной задаче $4\gamma a$, где γ — работа, необходимая для образования единицы свободной поверхности, рассматривается как константа материала. γ — еще называют *удельной поверхностной энергией*. ΔU — изменение упругой энергии области при переходе от первого состояния ко второму. ΔA — работа внешних сил.

Производя подсчеты, в силу критерия (1.2.1) имеем

$$(1.2.2) \quad -\frac{(1-\nu^2)2a\Delta ap^2}{E} + 4\gamma\Delta a = 0.$$

Таким образом, критическое значение нагрузки p^* определится формулой

$$(1.2.3) \quad p^{*2} = \frac{2\gamma E}{a(1-\nu^2)\pi}.$$

Замечание 1. Как следует из изложенного выше, при применении критерия (1.2.1)–(1.2.3) следует определять работу внешних сил ΔA и изменение упругой энергии ΔU . Напомним, что имеем бесконечную упругую плоскость, ослабленную разрезом $M = \{|x| < a, y = 0\}$. Так как энергия такой среды бесконечна, то для определения изменения \mathcal{E}

$$(1.2.4) \quad \mathcal{E} = U - A.$$

Гриффитс рассмотрел задачу о всестороннем растяжении эллипса с фокальным разрезом. Вычисляя \mathcal{E} для эллипса с трещиной и \mathcal{E} для эллипса без трещины, Гриффитс нашел их разность, а затем — предел этой разности при стремлении длин плоскостей к бесконечности. Сделано это первоначально ошибочно [1]

$$(1.2.5) \quad \mathcal{E} = -\pi a^3 p^2 \nu(1-\nu)/E,$$

а затем в [2] приведен правильный результат

$$(1.2.6) \quad \mathcal{E} = -\pi a^3 p^2(1-\nu^2)/E.$$

Однако, как указано в [14], многими авторами оспаривается справедливость формулы (1.2.6), в связи с отсутствием в [2] выкладки. Разъяснение этого вопроса дано в [15], где в частности содержится доказательство формулы (1.2.6). Изложим нашу трактовку этого вопроса.

Сконструируем асимптотику \bar{V}_D решения \bar{U}_D задачи классической теории упругости в плоской области Ω_D , содержащей трещину M .

Диаметр D является большим параметром. Пусть Ω^0 подобласть R^2 , ограниченная простым гладким замкнутым контуром $\partial\Omega^0$. Введем две функции χ_1 и χ_2 из $C^\infty(R^1)$ такие, что

$$\chi_j(D) = D + O(1) \quad \text{при} \quad D \rightarrow +\infty.$$

Положим

$$\Omega_D^0 = \left\{ (x, y) \in R^2: \left(\frac{x}{\chi_1(D)}; \frac{x}{\chi_2(D)} \right) \in \Omega^0 \right\}.$$

Предположим, что число D настолько велико, что $\Omega_D^0 \supset M = \{(x, y) \in R^2, |x| < a, y = 0\}$ и для такого D введем область $\Omega_D = \Omega_D^0 \setminus M$.

Рассмотрим задачу классической теории упругости о равномерном растяжении области Ω_D^0 , ослабленной трещиной M со свободными берегами. Граничные условия на $\partial\Omega_D$ имеют вид

$$(1.2.7) \quad \sigma^{(n)} = p^{\bar{n}} \quad \text{на} \quad \partial\Omega_D^0,$$

$$(1.2.8) \quad \sigma_{x\nu} = \sigma_{\nu\nu} = 0 \quad \text{на} \quad M.$$

Вектор смещений, являющийся решением указанной задачи, обозначим через \bar{U}_D . Введем еще векторное поле \bar{v} , отвечающее равномерному растяжению области Ω_D^0 без трещины. Известно, что

$$(1.2.9) \quad \begin{aligned} \bar{v} &= p(1-2\nu)(1+\nu)(x, y)/E, \\ \sigma_{xx}(\bar{V}) &= \sigma_{\nu\nu}(\bar{V}) = p, \quad \sigma_{xy}(\bar{V}) = 0, \\ \varepsilon_{xx}(\bar{V}) &= \varepsilon_{\nu\nu}(\bar{V}) = p(1-2\nu)(1+\nu)/E, \quad \varepsilon_{xy}(\bar{V}) = 0. \end{aligned}$$

Асимптотическое решение задачи (1.2.7), (1.2.8) ищем в виде

$$(1.2.10) \quad \bar{U}_D(x, y) = \bar{V}(x, y) + \bar{w}(x, y) + V_D(x, y)$$

где \bar{w} — решение задачи классической теории упругости в области $R^2 \setminus M$ с граничными условиями $\sigma_{\nu\nu}(\bar{w}) = -p$, $\sigma_{x\nu}(\bar{w}) = 0$ на M и традиционными условиями убывания на бесконечности. Формулы для вектора смещения \bar{w} известны (см. напр. [17]).

Из результатов работ [16], [6] вытекает

Лемма.

$$(1.2.11) \quad \int_{\Omega_D^0} \sigma_{ij}(\bar{V}_D) \varepsilon_{ij}(\bar{w}) dx dy = O(D^{-1}) \quad \text{при} \quad D \rightarrow +\infty.$$

Перейдем к вычислению изменения энергии. Обозначаем через U^0 и A^0 упругую энергию и работу внешних сил в задаче о равномерном растяжении области Ω_D^0 без трещин, а через U^a и A^a — в задаче

о растяжении области Ω_D с трещиной. Тогда имеем

$$(1.2.12) \quad U^0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_D^0} \varepsilon_{ij}(\bar{V}) \cdot \sigma_{ij}(\bar{V}) dx dy; \quad A^a = p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \cdot \bar{v} dS,$$

где \bar{n} — единичный вектор внешней нормали, dS — элемент длины дуги.

Из формулы (1.2.11) непосредственно следует, что

$$(1.2.13) \quad A^0 = p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \bar{V} dS + p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \cdot \bar{w} dS + P \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \cdot \bar{V}_D dS.$$

Кроме того,

$$(1.2.14) \quad \begin{aligned} U^a &= \int_{\Omega_D} \varepsilon_{ij}(\bar{u}_D) \sigma_{ij}(\bar{u}_D) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \varepsilon_{ij}(\bar{v} + \bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{v} + \bar{w}) dx dy + O(D^{-1}) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \{ \varepsilon_{ij}(\bar{v}) \sigma_{ij}(\bar{v}) + \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{w}) \} dx dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_D} \{ \varepsilon_{ij}(\bar{v}) \sigma_{ij}(\bar{w}) + \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{v}) \} dx dy + O(D^{-1}). \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{v}) = \varepsilon_{ij}(\bar{v}) \sigma_{ij}(\bar{w})$, то в силу (1.2.9) и формулы Клайнера последний интеграл в (1.2.14) преобразуется следующим образом:

$$(1.2.15) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_D} \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{v}) dx dy &= p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \bar{w} dS + \int_M w_z \sigma_{zz}(\bar{v}) dS = \\ &= p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \bar{w} dS - p \int_M w_z dS = p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \bar{w} dS - \int_{R^2 \setminus M} \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{w}) dx dy. \end{aligned}$$

Окончательно, из (1.2.14), (1.2.15) вытекает

$$(1.2.16) \quad \begin{aligned} U^a &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_D^0} \varepsilon_{ij}(\bar{v}) \sigma_{ij}(\bar{v}) dx dy - \frac{1}{2} \int_{R^2 \setminus M} \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{w}) dx dy + \\ &\quad + p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{n} \bar{w} dS + O(D^{-1}). \end{aligned}$$

Сопоставляя (1.2.12), (1.2.13), (1.2.16), получим

$$(1.2.17) \quad \lim \{ (U^0 - A^0) - (U^a - A^a) \} = \frac{1}{2} \int_{R^2 \setminus M} \varepsilon_{ij}(\bar{w}) \sigma_{ij}(\bar{w}) dx dy.$$

Таким образом, предел при $D \rightarrow +\infty$ изменения энергии совпадает с упругой энергией в задаче о растяжении плоскости с разрезом M , находящимся под действием нормальной симметричной, равномерно распределенной нагрузки. Известно, что эта энергия равна

$$(1.2.18) \quad \frac{1}{2} \int_{R^2 \setminus M} \sigma_{ij}(\bar{w}) \varepsilon_{ij}(\bar{w}) dx dy = - \int_{-a}^{+a} \sigma_{yy} w_2 dx = p \int_{-a}^{+a} w_2(x, 0) dx = \\ = \frac{1-\nu}{\mu} p^2 \int_{-a}^{+a} \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - a^2} \Big|_{y=0} dx = \frac{(1-\nu^2) p^2 a^2 \pi}{E}.$$

Из формул (1.2.17), (1.2.18) видно, что предел не зависит от формы контура $\partial\Omega$ и тем самым величина (1.2.18) является изменением энергии в задаче о равномерном растяжении бесконечной плоскости, ослабленной разрезом. Отметим также, что проведенное рассуждение может быть повторено для вырезов произвольной формы.

Любопытно проследить гипотетический путь, на котором был получен Гриффитсом первоначальный ошибочный результат (1.2.5). По-видимому все неприятности связаны с подсчетом

$$A^2 = p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{\pi} \bar{V} dS + p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{\pi} \bar{w} dS + p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{\pi} V_D dS.$$

Следуя Гриффитсу, выбираем в качестве внешнего контура эллипс, софокусный трещине ($|x| < a, y = 0$) с полуосями $a' = aD/2, b' = a\sqrt{D^2/4 - 1}$. Тогда

$$(1.2.19) \quad p \int_{\partial\Omega_D^0} \bar{\pi} \bar{V} dS = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} p 2\pi a^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{D^2}{4} - 1}.$$

В силу известных формул (см., напр., [17]) для $\bar{w}(w_1; w_2)$ при $|z| \gg a$ имеем:

$$(1.2.20) \quad 2\mu w_1 = (1-2\nu) \operatorname{Re} \left\{ pz \left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \dots \right) \right\} - py \operatorname{Im} \left\{ +\frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \dots \right\}, \\ 2\mu w_2 = 2(1-\nu) \operatorname{Im} \left\{ pz \left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \dots \right) \right\} - py \operatorname{Re} \left\{ +\frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2} + \dots \right\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 (1.2.21) \quad p \int_{\partial \Omega_D^0} \bar{w} w dS &= p \int_{\partial \Omega_D^0} w_1 dy - w_2 dx = \\
 &= \frac{p^2}{2\mu} \int_{\partial \Omega_D^0} (1-2\nu) x dy - 2(1-\nu) y dx + y dx + \frac{p^2}{2\mu} \int_{\partial \Omega_D^0} \left[(1-2\nu) \frac{4x}{D^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16xy^2}{D^4 a^2} \right] dy - \left[\frac{4(1-\nu)y}{D^2} - \frac{8y(x^2-y^2)}{\pi^4 a^2} \right] dx - O(D^{-1}) = \\
 &= \frac{p^2(1-\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{\pi a^2 D^2}{4} + \frac{p^2 a^2 \pi (1-\nu)}{E} + O(D^{-1}).
 \end{aligned}$$

Если в формуле (1.2.20), а затем (1.2.21) отбросить слагаемые порядка D^{-1} в сравнении с членами порядка D , то в правой части (1.2.21) пропадает второй интеграл, и выражение для изменения энергии будет ошибочным:

$$\lim \{(U^a - U^0) - (\bar{A}^a - A^0)\} = \frac{p^2 a^2 \pi}{E} \nu(1+\nu), \quad D \rightarrow \infty.$$

В работе [2] этот результат был Гриффитсом исправлен.

При рассмотрении задачи об одноосном растяжении получаем тождественный результат.

Замечание 2. Можно подсчитать ориентировочное значение

$$(1.2.22) \quad 2\gamma = \int_{r_c}^{\infty} \sigma dr = \int_{r_c}^{\infty} \sigma_c \sin 2\pi \frac{r-r_0}{r_0} dr = \frac{\sigma_c r_0}{2\pi},$$

$$(1.2.23) \quad \gamma = \frac{Er_0}{8\pi^2} \approx 0,01 Er_0.$$

Напомним, что для большинства металлов межатомное расстояние r_0 имеет порядок 10^{-8} – 10^{-7} см.

Замечание 3. Критерий Гриффитса удобно формулировал в виде

$$(1.2.24) \quad \frac{d\mathcal{E}}{da} + \frac{d\Pi}{da} = 0.$$

В. Второй основополагающей задачей, рассмотренной А. Гриффитсом, была задача об определении разрушающей нагрузки в случае осевого сжатия упругой плоскости, ослабленной трещиной.

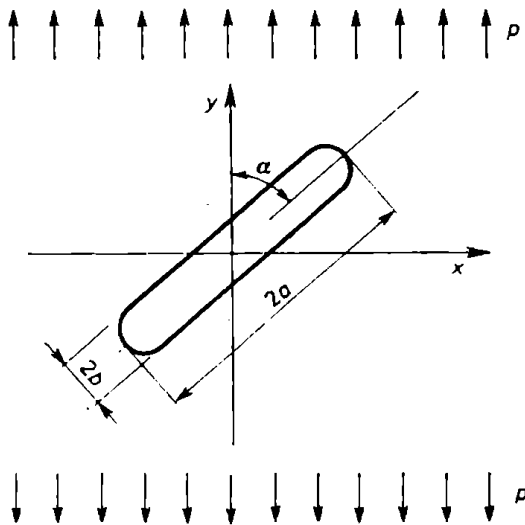


Рис. 3

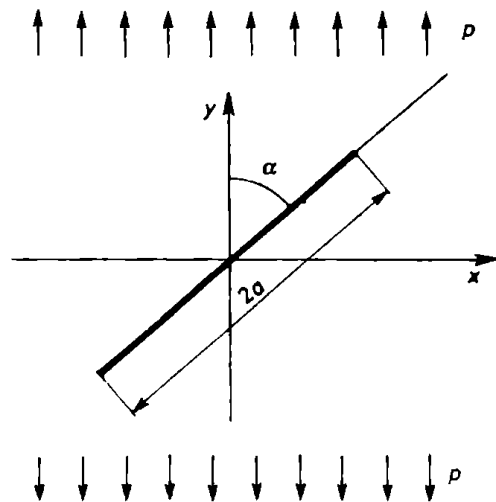


Рис. 4

При решении этой задачи Гриффитсом были выдвинуты два положения: 1) реальная трещина заменяется эллипсом с отношением полуосей существенно меньшим единицы; 2) предполагается, что разрушение при сжатии происходит вдоль площади, на которой растягивающее нормальное напряжение достигает критической величины.

Гриффитс воспользовался решением Инглиса [18] (см. также [19]), определил $p_1^*(b/a)$ разрушающую нагрузку при растяжении и $p_2^*(b/a)$ — разрушающую нагрузку при сжатии, нашел отношения $p_1^*(b/a)/p_2^*(b/a)$ и, устремив b/a к нулю, получил в пределе

$$(1.2.25) \quad \lim_{b/a \rightarrow 0} \frac{p_1^*(b/a)}{p_2^*(b/a)} = 8.$$

Замечание. Если в качестве математической идеализации реальной трещины выбрать отрезок, то (см. [20], [21]) получаем

$$(1.2.26) \quad p_1^*/p_2^* = 2,66.$$

Выводы ⁽¹⁾ Концепции А. Гриффитса могут быть охарактеризованы следующими постулатами, вытекающими из изложения задач А и В.

1. Вводится поверхностная энергия разрушения и постилируется критерий хрупкого разрушения (1.2.1).

2. В качестве математической идеализации плоской трещины, выбирается узкий эллиптический вырез в предположении $b/a \ll 1$.

⁽¹⁾ Ниже (см. раздел IV) мы проведем более подробный анализ указанных двух идеализаций реальных трещин.

Сделаем некоторые преобразования

$$\begin{aligned}\Delta A &= \int_{S_1} (\overline{\sigma^{(n)}} + \Delta \overline{\sigma^{(n)}}) \Delta \bar{u} dS = \int_{S_1 + S_2} (\overline{\sigma^{(n)}} + \Delta \overline{\sigma^{(n)}}) \cdot \Delta \bar{u} dS = \\ &= \int_{S_1 + S_2 + \Sigma + \Delta \Sigma} (\overline{\sigma^{(n)}} + \Delta \overline{\sigma^{(n)}}) \Delta \bar{u} dS = \int_{V - \Delta V} (\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij} dV.\end{aligned}$$

Введем обозначение $U - A = \mathfrak{D}$; тогда

$$\begin{aligned}(1.3.4) \quad \Delta \mathfrak{D} &= \Delta U - \Delta A = -\frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{V - \Delta V} \{(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij})(\varepsilon_{ij} + \Delta \varepsilon_{ij}) - \\ &\quad - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - 2(\sigma_{ij} + \Delta \sigma_{ij}) \Delta \varepsilon_{ij}\} dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_{V - \Delta V} \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_{S_1 + S_2 + \Sigma + \Delta \Sigma} \Delta \overline{\sigma^{(n)}} \cdot \Delta \bar{u} dS = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV - \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma} \Delta \overline{\sigma^{(n)}} \cdot \Delta \bar{u} dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Delta V} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV + \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma} \overline{\sigma^{(n)}} \cdot \Delta \bar{u} dS.\end{aligned}$$

Если предполагать, что разрушение происходит в результате образования трещин, то есть $\Delta V = 0$, то

$$\begin{aligned}(1.3.5) \quad \Delta \mathfrak{D} &= \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma} \overline{\sigma^{(n)}} \cdot \Delta \bar{u} dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^+} \overline{\sigma^{(n)}}^+ \cdot \Delta \bar{u}^+ dS + \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^-} \overline{\sigma^{(n)}}^- \cdot \Delta \bar{u}^- dS = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Delta \Sigma^+} \overline{\sigma^{(n)}}^+ [\Delta \bar{u}] dS,\end{aligned}$$

где $[\Delta \bar{u}] = \Delta \bar{u}^+ - \Delta \bar{u}^-$, а $\overline{\sigma^{(n)}}^- = -\overline{\sigma^{(n)}}^+$. Напомним, что ситуация устойчивая по Гриффитсу, если

$$\Delta \mathfrak{D} + \Delta \Pi < 0, \quad \text{где} \quad \Delta \Pi = \gamma \Delta \Sigma = 2\gamma \Delta \Sigma^+$$

и, следовательно, критерий устойчивости Гриффитса имеет в общем случае вид

$$(1.3.6) \quad \Delta \mathfrak{D} + 2\gamma \Delta \Sigma^+ = U.$$

Проанализируем подробнее случай плоской деформации и конечной прямолинейной трещины в поле растяжения. Рассматриваем ситуацию в окрестности только одного конца. Учет второго конца в силу симметрии задача приводит, естественно, к тому же результату.

Из (1.3.5) следует

$$(1.3.7) \quad \begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} \overline{\sigma^{(n)}} \cdot (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\Delta a} [\sigma_{yy}(V^+ - V^-) + \sigma_{xy}(u^+ - u^-)] dx. \end{aligned}$$

Для подсчета можно применить формулы Снеддона, учитывая, что σ_{yy} и σ_{xy} находится непосредственно при $\theta = 0$; $r = x$, а u^\pm и v^\pm при $\theta = \pi$, $r = \Delta a - x$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= -\frac{k_1^2}{4\pi G} (\kappa + 1) \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\zeta}{\zeta}} d\zeta = -\frac{k_1^2}{8G} (\kappa + 1) \Delta a, \\ \Delta \Pi &= 2\gamma \Delta a, \quad \kappa = 3 - 4\nu, \quad \mu = G = E/2(1 + \nu). \end{aligned}$$

Из критерия Гриффитса

$$(1.3.8) \quad \frac{d\mathcal{E}}{da} + \frac{d\Pi}{da} = 0,$$

получаем

$$k_1^2 = \frac{2\gamma E}{1 - \nu^2},$$

а так для прямолинейной трещины в поле растяжения [17] $k_1^2 = p^2 \pi a$, то определяется

$$(1.3.9) \quad p^{*2} = \frac{2\gamma E}{\pi a (1 - \nu^2)},$$

что, естественно, совпадает с критерием разрушения Гриффитса (1.2.3).

§ 4. Силовые критерии разрушения Г. И. Баренблатта и В. В. Новожилова

I. Как известно, линейная теория упругости дает в модельной задаче о растяжении плоскости, ослабленной конечным вырезом, угол раскрытия трещины равным π . В то же время более физическим представляется плавное смыкание берегов трещины, то есть угол

раскрытия θ . Эти соображения послужили основанием для Г. И. Баренблатта [9] ввести в концевой зоне трещины силы сцепления, оставаясь в рамках линейной теории упругости. Коротко суть предложения Баренблатта сводится к следующему.

1. Берега трещины смыкаются плавно и конфигурация концевой зоны не меняется при развитии трещины.
2. В малой зоне у вершины трещины действуют силы сцепления.
3. Напряжения в окрестности вершины трещины конечны.

Получим теперь на основе предложенной схемы критерий разрушения для задачи о растяжении упругой плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной.

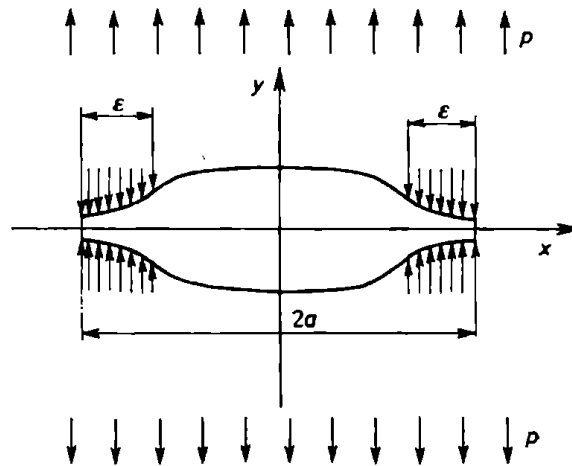


Рис. 6

Снимая основное напряженное состояние, имеем задачу о растяжении плоскости силами заданными на границе трещины

$$(1.4.1) \quad p(x), \quad 0 < |x| < a - \varepsilon; \quad p(x) - q(x), \quad a - \varepsilon < |x| < a.$$

Тогда условие конечности напряжений приводит к равенству нулю нового коэффициента интенсивности и, следовательно, к равенству

$$(1.4.2) \quad \int_{-a}^{+a} p(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx - \int_{a-\varepsilon}^a q(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx - \int_{-a}^{-a+\varepsilon} q(x) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 0.$$

Отсюда в силу малости третьего интеграла получаем

$$(1.4.3) \quad \sqrt{\pi a} \cdot k_1 = \sqrt{2a} \int_0^a \frac{q(a-x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2a} \cdot K.$$

Постоянная K называется *коэффициентом сцепления* и является, по Баренблатту, постоянной материала.

Как мы видим, критерий Баренблатта (1.4.3) совпадает математически с критерием Гриффитса (1.2.3). Это становится наиболее наглядным при постоянном p , тогда $k_1 = p\sqrt{\pi a}$ и достаточно сравнить (1.4.3) и (1.2.3).

Подкупающим в теории В. И. Баренблатта является новое механическое видение задачи: вместо несколько абстрактной поверхностной энергии вводится доступные пониманию силы сцепления, с помощью которых осуществляется „подправление” классической механики твердого деформируемого тела.

И. В. В. Новожиловым [10] дана нетрадиционная трактовка появления трещины в сплошной среде как перехода среды из одной формы равновесного состояния в другое

В настоящем параграфе нам представляется возможным на основе [10] формулировать силовой критерий В. В. Новожилова применительно к модельной задаче (рис. 7).

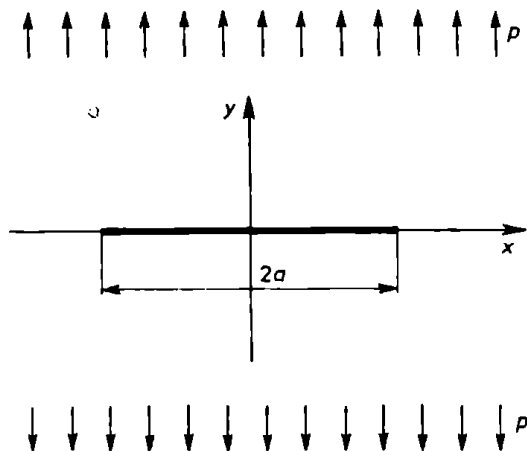


Рис. 7

Требование Г. И. Баренблатта конечности напряжений в вершине трещины заменяется условием

$$(1.4.4) \quad \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sigma_{yy} dx = \sigma_c,$$

характеризующем критическое состояние. Здесь r_0 — межатомное расстояние или другой параметр среды, σ_c — теоретическая прочность.

Замечание. Критерии Г. И. Баренблатта и В. В. Новожилова связывают хрупкие разрушения с напряженным состоянием в конце

трещин, отсюда название — *силовые критерии*. Несмотря на анализ с разных позиций, в задачах, где применимы и энергетические, и силовые критерии, они приводят к близким величинам разрушающей критической нагрузки.

§ 5. Учёт моментных напряжений при вычислении Гриффитской разрушающей нагрузки

В последние годы среди упругистов утвердилось мнение, что моментные напряжения, влияние которых в классических задачах сплошной среды исчезающе мало, в задачах теории трещин могут давать определенный заметный эффект и в то же время способствовать выяснению механизма разрушения.

Проведем аналогично § 3 общий энергетический анализ, учитывая моментность среды. Рассмотрим линейно-упругое тело, ослабленное идеальными щелями (рис. 8).

Пусть для простоты объемные силы не рассматриваются, а граничные условия имеют вид

$$(1.5.1) \quad \bar{u}|_{S_1} = u_0; \quad \bar{\omega}|_{S_1} = \bar{\omega}_0,$$

$$(1.5.2) \quad \bar{\sigma}^{(n)}|_{S_2} = \bar{\sigma}_0^{(n)}, \quad \bar{\mu}^{(n)}|_{S_2} = 0.$$

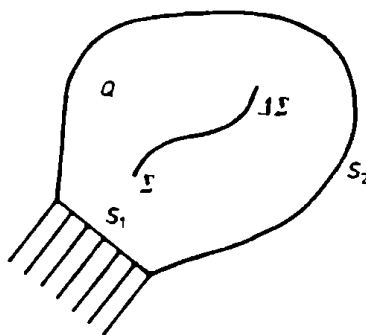


Рис. 8

$$(1.5.3) \quad \bar{\sigma}^{(n)}|_{\Gamma} = 0, \quad \bar{\mu}^{(n)}|_{\Gamma} = 0.$$

Баланс энергии при переходе от первоначального состояния к состоянию с разрушением, как и выше, имеет вид

$$\Delta U + \Delta \Pi = \Delta A.$$

Для ΔU в соответствии с линейной моментной теорией упругости

(см., напр. [23]) имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= \int_V \{ [\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij})(\epsilon_{ij} + \Delta\epsilon_{ij}) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij}] + \\
 (1.5.4) \quad &+ [\frac{1}{2}(\mu_{ij} + \Delta\mu_{ij})(\kappa_{ij} + \Delta\kappa_{ij}) - \frac{1}{2}\mu_{ij}\kappa_{ij}] \} dV, \\
 \Delta A &= \int_{S_2} [\bar{\sigma}^{(n)} \cdot \Delta \bar{u} + \bar{\mu}^{(n)} \cdot \Delta \bar{\omega}] dS.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в силу граничных условий

$$\begin{aligned}
 (1.5.5) \quad \Delta A &= \int_{S_1 + S_2 + \Sigma + \Delta\Sigma} [(\bar{\sigma}^{(n)} + \Delta\bar{\sigma}^{(n)}) \Delta \bar{U} + (\bar{\mu}^{(n)} + \Delta\bar{\mu}^{(n)}) \Delta \bar{\omega}] dS = \\
 &= \int_V [(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \Delta\epsilon_{ij} + (\mu_{ij} + \Delta\mu_{ij}) \Delta\kappa_{ij}] dV.
 \end{aligned}$$

Обозначим $U - A = \mathcal{E}$ и соответственно $\Delta\mathcal{E} = \Delta U - \Delta A$, тогда имеем в силу вышенаписанного

$$\begin{aligned}
 (1.5.6) \quad \Delta\mathcal{E} &= -\frac{1}{2} \int_V [\Delta\sigma_{ij} \Delta\epsilon_{ij} + \Delta\mu_{ij} \Delta\kappa_{ij}] dV = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{S_1 + S_2 + \Sigma + \Delta\Sigma} [\Delta\bar{\sigma}^{(n)} \cdot \Delta \bar{u} + \Delta\bar{\mu}^{(n)} \cdot \Delta \bar{\omega}] dS = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} [\Delta\bar{\sigma}^{(n)} \Delta \bar{u} + \Delta\bar{\mu}^{(n)} \Delta \bar{\omega}] dS = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} [\bar{\sigma}^{(n)} \cdot \Delta \bar{u} + \bar{\mu}^{(n)} \cdot \Delta \bar{\omega}] dS = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma} \{ \bar{\sigma}^{(n)} [\Delta \bar{u}] + \bar{\mu}^{(n)} [\Delta \bar{\omega}] \} dS,
 \end{aligned}$$

где $[\Delta \bar{u}] = \Delta \bar{u}^+ - \Delta \bar{u}^-$, $[\Delta \bar{\omega}] = \Delta \bar{\omega}^+ - \Delta \bar{\omega}^-$. Окончательно определяющее соотношение по Гриффитсу имеет вид

$$(1.5.7) \quad \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma^+} \{ \bar{\sigma}^{(n)+} [\Delta \bar{u}] + \bar{\mu}^{(n)+} [\Delta \bar{\omega}] \} dS + 2\gamma \Delta\Sigma^+ = 0.$$

Для случая плоской деформации соотношение преобразуется к виду

$$(1.5.8) \quad -\frac{1}{2} \int_0^{2a} [\sigma_{yy}^+(u_y^+ - u_y^-) + \sigma_{yz}^+(u_z^+ - u_z^-) + \mu_y^+(\omega^+ - \omega^-)] dx + 2\gamma \Delta a = 0.$$

Рассмотрим основную модельную задачу о растяжении упругой плоскости, ослабленной конечным прямолинейным разрезом длиной $2a$.

В силу результатов [24], [25] имеем

$$\begin{aligned}
 u_x &= C_3^{(3)} \frac{r^{1/2}}{8\mu(1-\nu)} [- (7-6\nu) \cos \frac{3}{2}\theta + 3(1-2\nu) \cos \frac{1}{2}\theta], \\
 (1.5.9) \quad u_y &= C_3^{(3)} \frac{r^{1/2}}{8\mu(1-\nu)} [(7-6\nu) \cos \frac{3}{2}\theta - (1-2\nu) \sin \frac{1}{2}\theta], \\
 \omega &= - \frac{C_1^{(1)}}{4\mu e^2} r^{1/2} \sin \frac{1}{2}\theta.
 \end{aligned}$$

Подставляя (1.5.9) в (1.5.8), имеем

$$(1.5.10) \quad \frac{\pi}{4\mu} \left[\frac{3-2\nu}{1-\nu} C_3^{(3)^2} + \frac{1}{4l^2} C_1^{(1)^2} \right] = 2\gamma.$$

Коэффициенты $C_1^{(1)}$ и $C_3^{(3)}$ вычислены в работе [26]. Сравнивая с (1.3.9), подсчитываем зависимость между критической нагрузкой, подсчитанной по моментной и по классической теориям.

$$(1.5.11) \quad p_{*}^{*2} = p_{гр}^{*2} \frac{4(3-2\nu)(1-\nu)}{4(1-\nu)\chi_1^2 + (3-2\nu)\chi_2^2},$$

где функции χ_1 и χ_2 определяются из таблицы:

	χ_1		χ_2	
	$b/a = 0,01$	$b/a = 0,1$	$b/a = 0,01$	$b/a = 0,1$
$\nu = 0$	1,30	1,27	1,28	1,04
$\nu = \frac{1}{4}$	1,24	1,22	1,04	0,86
$\nu = \frac{1}{2}$	1,18	1,16	0,76	0,64

II. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ

Изложенные выше критерии можно объединить общим названием „Силовые критерии разрушения”. Роль силовых критериев в развитии теории хрупкого разрушения трудно переоценить. Однако поскольку мы не можем непосредственно измерять напряжения в окрестности вершины трещины, то экспериментальная проверка силовых критериев осуществляется косвенным образом.

В связи с этим, перспективными представляются деформационные критерии разрушения, которые на основе современной измерительной аппаратуры могут, вообще говоря, достаточно точно непосредственно экспериментально проверяться. Упрощенно говоря, деформационный критерий должен иметь такую схему: замеряются характерные дефор-

мации в районе головки трещин и устанавливаются, что после некоторого их критического значения начинается разрушение.

Наиболее известным деформационным критерием является критерий Леонова-Панасюка [11]-Дардейла [12].

§ 1. Схема М. Л. Леонова-В. В. Панасюка

Как и все предыдущие схемы рассматриваем ее на примере упругой плоскости с разрезом (рис. 9). Принимается, что в зоне

1) берега притягиваются силой σ_c , где σ_c -- теоретическая хрупкая прочность;

2) берега в концевой зоне $a - \epsilon < |x| < a$ взаимодействуют, если расстояние между ними меньше δ_k ; при расстоянии большем δ_k , взаимодействие отсутствует. Постоянная δ_k есть постоянная материала;

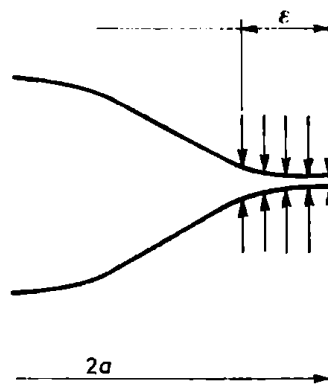


Рис. 9

3) длина концевой зоны ϵ определяется из условия ограниченности напряжений в вершине трещины.

4) Трещина распространяется, если ее раскрытие достигает критического значения δ_k , то есть, если

$$(2.1.1) \quad 2v|_{y=0}^{x=a-\epsilon} = \delta_k.$$

Проведя рассуждения, аналогичные § 1 настоящей главы, имеем

$$(2.1.2) \quad \sqrt{\pi a} k_1 - \sigma_c \int_{a-\epsilon}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx - \sigma_c \int_{-a}^{-a+\epsilon} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 0$$

и далее

$$(2.1.3) \quad \sqrt{\pi a} k_1 - 2a\sigma_c \arccos(1 - \epsilon/a) = 0,$$

а так как при $p = \text{const}$, $k_1 = p\sqrt{\pi a}$, то получаем

$$(2.1.4_I) \quad \varepsilon/a = 1 - \cos(\pi p/2\sigma_c)$$

и при $\varepsilon \ll a$

$$(2.1.4_{II}) \quad \varepsilon/a = \frac{1}{2}(\pi p/2\sigma_c)^2.$$

Введем обозначение $a_0 = a - \varepsilon$. Из общих формул Колосова-Мусхелишвили имеем, при $|x| < a$

$$(2.1.5_I) \quad v(x, 0) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \{2\pi p \sqrt{a^2 - x^2} + \sigma_c [(x - a_0) \Gamma(a, x, a_0) - \\ - (x + a_0) \Gamma(a, x, -a_0) - 4\sqrt{a^2 - x^2} \arccos(a_0/a)]\},$$

где

$$\Gamma(a, x, k) = \ln \frac{a^2 - xk - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2)}}{a^2 - xk + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2)}}$$

и при $|x| > a$

$$(2.1.5_2) \quad \sigma_{\nu\nu}(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \left\{ \pi(p - \sigma_c)(x - \sqrt{x^2 - a^2}) + \right. \\ \left. + 2\sigma_c x \arcsin \frac{a_0}{a} + \sigma_c \sqrt{x^2 - a^2} \left[\arcsin \frac{a^2 - xa_0}{a(x - a_0)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \arcsin \frac{a^2 + a_0 x}{a(x + a_0)} \right] \right\}.$$

В силу $a_0 = a \cos(\pi p/2\sigma_c)$ формула (2.1.5₁) упрощается к виду

$$(2.1.6) \quad v(x, 0) = \sigma_c \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \{(x - a_0) \Gamma(a, x, a_0) - (x + a_0) \Gamma(a, x, -a_0)\}.$$

Теперь имеем возможность выписать соотношение для определения p^* .

$$(2.1.7) \quad \delta_k = 2v(a_0, 0) = - \frac{4a_0(1 - \nu^2)}{\pi E} \sigma_c \ln \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 = \\ = - \frac{8a_0(1 - \nu^2)}{\pi E} \sigma_c \ln \cos \frac{\pi p^*}{2\sigma_c}.$$

Отсюда

$$(2.1.8) \quad p^* = \frac{2\sigma_c}{\pi} \arccos e^{-\frac{\delta_k \pi E}{8a_0(1 - \nu^2)\sigma_c}}.$$

При $\varepsilon \ll a$

$$\delta_k = \frac{8a_0(1 - \nu^2)}{\pi E} \cdot \frac{\sigma_c}{2} \left(\frac{\pi p^*}{2\sigma_c} \right)^2 = \frac{a_0(1 - \nu^2)}{E} \cdot \frac{\pi p^{*2}}{\sigma_c}$$

и отсюда

$$(2.1.9) \quad p^{*1} = \frac{\delta_k E \sigma_c}{a_0 (1 - \nu^2) \pi} \approx \frac{\delta_k E \sigma_c}{a (1 - \nu^2) \pi}.$$

В силу формулы

$$(2.1.10) \quad 2\gamma = \sigma_c \delta_k$$

непосредственно следующей из принятой схемы сил взаимодействия берегов (рис. 10) получаем

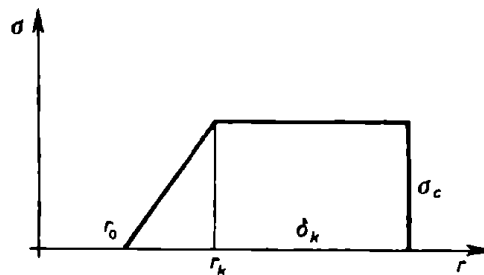


Рис. 10

$$p^{*1} = \frac{2\gamma E}{a(1 - \nu^2) \pi},$$

что совпадает с известным критерием Гриффитса.

Схема Дагдейла [12]. В случае *плоского напряженного состояния* экспериментаторы обратили внимание на специфический характер пластической зоны в районе трещины. Приблизительно эта зона может быть определена как узкая полоса длиной ε ($\varepsilon \ll a$), продолжающая трещину. Это дало основание Дагдейлу предложить следующую схему (рис. 11)

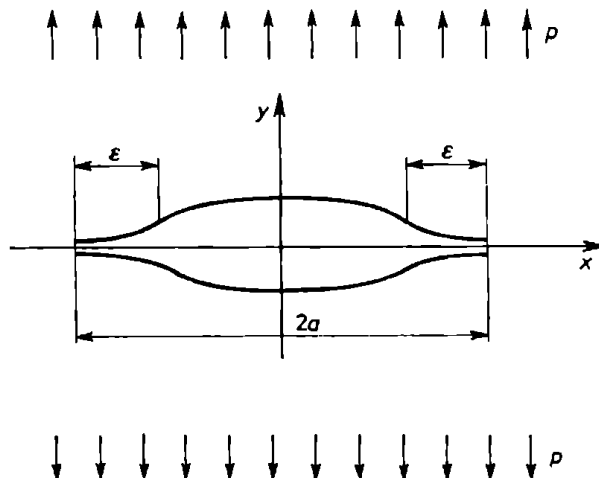


Рис. 11

1) концевых зонах $a - \varepsilon \leq |x| \leq a$ действуют напряжения

$$\sigma_{yy} = \sigma_T \text{ (текущее)}.$$

Таким образом, если снять основное напряженное состояние, то получим задачу

$$(2.1.11) \quad \sigma_{xy}|_{|x| \leq a, y=0} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{0 \leq |x| \leq a-\varepsilon} = p, \quad \sigma_{yy}|_{a-\varepsilon \leq |x| \leq a} = p - \sigma_T.$$

2) Коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины полагается равным нулю. Тогда следует соотношение:

$$(2.1.12) \quad \sqrt{\pi a} \cdot k_1 - \sigma_T \int_{a-\varepsilon}^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx - \sigma_T \int_{-a}^{-a+\varepsilon} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx = 0.$$

Здесь k_1 — коэффициент интенсивности основной задачи.

Пренебрегая третьим относительно малым слагаемым в правой части (2.1.12), получаем

$$(2.1.13) \quad \sqrt{\pi a} k_1 - 2a\sigma_T \arccos(1 - \varepsilon/a) = 0.$$

В том числе для частного случая $p = \text{const}$, $k_1 = p\sqrt{\pi a}$

$$(2.1.14) \quad \frac{\varepsilon}{a} = 1 - \cos \frac{\pi p}{2\sigma_T}.$$

3) Затем по формулам плоской задачи линейной теории упругости подсчитывается характеристика δ раскрытия трещины.

$$(2.1.15) \quad \delta = 2v|_{\substack{x=a-\varepsilon \\ y=0}}.$$

4) При $\delta = \delta_{кр}$ считаем, по схеме Дагдейла, что происходит дальнейшее распространение трещины. Тем самым определяется критическая нагрузка.

Замечание. Как мы видим, схема Дагдейла и схема Леонова-Панасюка формально совпадают, но механическое содержание их разное.

§ 2. О подходе В. В. Новожилова к задачам теории трещин

В. В. Новожиловым [10] было предпринято развитие схемы М. Л. Леонова-В. В. Панасюка по двум направлениям:

I. Отказ от требования конечности напряжений в вершине трещины.

II. Учет падающей ветви в зависимости $\sigma \sim r$ и рассмотрения тем самым возможности для трещины нескольких равновесных сос-

тояний. Постараемся коротко изложить схему В. В. Новожилова на примере основной модельной задачи.

Требование конечности напряжений в вершине трещины заменяется условием

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} \sigma_{vv} dx = \sigma_c,$$

характеризующим критическое состояние. Здесь r_0 — межатомное расстояние. Введение этой величины определяет границы смякания дискретной атомной решетки и сплошной среды. График „напряжения взаимодействия слоев” — „расстояние между слоями” (см. рис. 1) аппроксимируем следующим образом (рис. 12). Причем r' определяется из соотношения $\sigma_c \cdot r' = 2\gamma$.

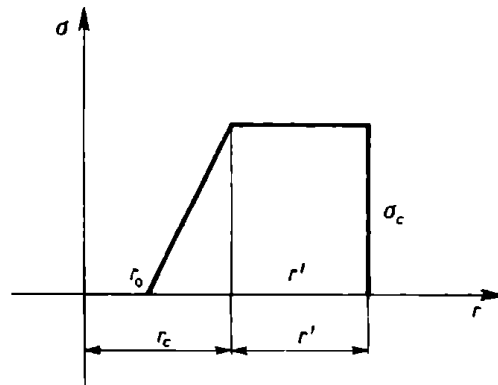


Рис. 12

Снимая основное напряженное состояние и подставляя в формулу (2.2.1) значение σ_{vv} из формулы (2.1.5), получаем вместо (2.2.1) следующее выражение:

$$(2.2.2) \quad 2 \sqrt{\frac{2a}{r_0}} \frac{p}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sqrt{a} + (1+a) \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a-1}{a+1} \right], \quad a = \frac{\varepsilon}{r_0}.$$

Условие же δ_k

$$(2.2.3) \quad 2v(a - \varepsilon, 0) = r' = 2\gamma/\sigma_c$$

в силу соотношения (2.1.5₁)

$$\begin{aligned} (2.2.4) \quad v(a - \varepsilon, 0) &= \frac{2}{E} \left(p - \frac{2}{\pi} \sigma_c \sqrt{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \right) \sqrt{a \cdot 2 \cdot \varepsilon} - \frac{2\sigma_c}{\pi E} a_0 \ln \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 = \\ &= \frac{2}{E} \left(p \sqrt{2a\varepsilon} - \frac{4}{\pi} \varepsilon \sigma_c + \frac{2\sigma_c}{\pi} \varepsilon \right) = \\ &= \frac{2}{E} \left(p \sqrt{a2\varepsilon} - \frac{2}{\pi} \sigma_c \varepsilon \right) \end{aligned}$$

трансформируется к виду

$$(2.2.5) \quad \frac{2}{E} \left(p\sqrt{2a\varepsilon} - \frac{2}{\pi} \sigma_c \varepsilon \right) = \frac{\gamma}{\sigma_c}$$

или

$$(2.2.6) \quad \frac{2p}{\sigma_c} \sqrt{\frac{2a}{r_0}} = \frac{4}{\pi} \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\gamma E}{r_0 \sigma_0^2}.$$

Обозначаем $\beta = \gamma E / r_0 \sigma_c^2$ и вычисляем из (2.2.3) (2.2.6), тогда имеем

$$(2.2.7) \quad \beta = \sqrt{a}(1+a) \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{a-1}{a+1} \right].$$

Полученное уравнение определяет a как функцию β , которое в свою очередь зависит лишь от физических констант задачи. Зная a , по формуле (2.2.2) определяем $p_{кр}$.

§ 3. Новый деформационный критерий

В настоящем пункте предлагается новый деформационный критерий применительно к проблемам разрушения металлов. Критерий основан на экспериментальных, изложенных в [27], где подмечено, что процесс разрушения характеризуется расхождением субструктурных „зернышек” на $6^\circ-8^\circ$.

Сформулируем критерий разрушения следующим образом: поскольку рассмотрение ведется в районе головки трещины или вершины углового выреза, то целесообразно использовать моментную теорию упругости; рассчитав напряженно-деформированное состояние и, в частности, ω , идентифицируем ω с поворотом субзерен; затем проводя сравнение по всем точкам $(x_0; y_0)$ и $(x_0 + x', y_0 + y')$ исследуемой среды, определим максимальное расхождение субзерен

$$(2.3.1) \quad \max \Delta \omega = \max [\omega(x_0 + x', y_0 + y') - \omega(x_0; y_0)], \\ x'^2 + y'^2 = l^2.$$

Если $\max \Delta \omega$ достигает критического значения $\Delta \omega^*$, то постулируем, что имеет место разрушение.

Значение $\Delta \omega^*$ есть постоянная материала. Схематическую картину расхождения зерен в окрестности головки трещины можно изобразить следующими рисунками:



Рис. 13

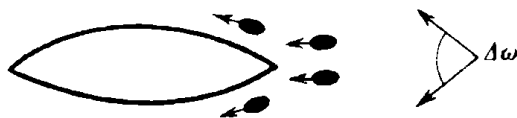


Рис. 14

Проведем некоторые ориентировочные расчеты на примере стандартной задачи о растяжении плоской области, ослабленной прямой конечной трещиной.

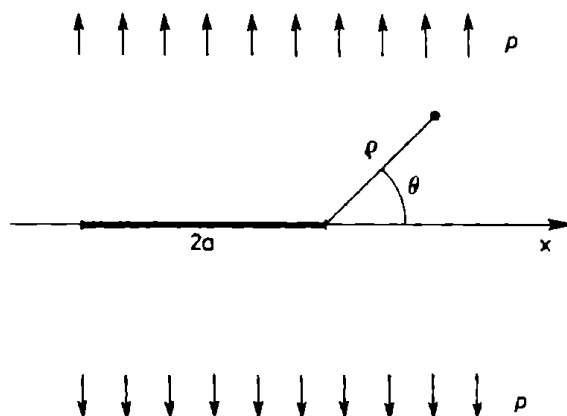


Рис. 15

Вычисляем критическое значение p по методу Гриффитса-Ирвина, тогда имеем

$$(2.3.2) \quad p_{II}^{*2} = \frac{2E\gamma_n}{\pi a(1-\nu^2)}.$$

В силу

$$(2.3.3) \quad \gamma_n = 10^3 \gamma_r \quad \text{и} \quad 2 \cdot \gamma_r = Er_0/(10 \cdot 2\pi)$$

выбрав $\nu = 0,25$, получаем

$$p_{II}^{*2} = E^2 r_0 \cdot 10/2a$$

и, следовательно,

$$(2.3.4) \quad p_{II}^* = \frac{E\sqrt{r_0}}{\sqrt{2a}} \cdot 3.$$

Воспользуемся теперь формулой (2.3.11), подсчитав предварительно ω по моментной теории со стесненным вращением. Асимптотика для ω в окрестности вершины трещины известна (см., например, [25])

$$(2.3.5) \quad \omega = c\sqrt{\rho} \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Выберем постоянный множитель c в формуле (2.3.5) на основе расчетов, проделанных в работе [26]. Тогда имеем

$$(2.3.6) \quad \omega = \frac{1}{8} \frac{2a(1+\nu)}{El^3} K_2(\nu) \frac{2lp}{\sqrt{a}} \sqrt{2} \varrho \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Здесь l — параметр моментности, p постоянная металла. Преобразуем (4.3.6), учитывая $\nu = 0,25$ и $K_2(0,25) = 1,3$ (см. таблицу к формуле (1.5.11)), к виду

$$(2.3.7) \quad \omega = \frac{\sqrt{ap}}{El} 0,8\sqrt{2} \varrho \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Подставляя (2.3.7) в (2.3.1), после несложных рассуждений получаем

$$\frac{\sqrt{ap}}{El} 0,8\sqrt{2} l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \Delta\omega^*$$

или далее

$$(2.3.8) \quad p^* = \frac{\Delta\omega^* E \sqrt{l^2}}{\sqrt{2a} \cdot 0,8}.$$

Выберем $\Delta\omega^*$ в соответствии с результатами [27]

$$(2.3.9) \quad 0,050 < \Delta\omega^* < 0,065$$

а l примем равным

$$(2.3.10) \quad l = 0,2 \cdot 10^4 r_0.$$

Проведя расчеты в силу (2.3.9) и (2.3.10) окончательно получаем

$$(2.3.11) \quad \frac{5E\sqrt{r_0}}{\sqrt{2a}} < p^* < \frac{6E\sqrt{r_0}}{\sqrt{2a}}.$$

Учитывая приближенный характер соотношений (2.3.3), (2.3.9) и (2.3.10), видим, что формулы (2.3.4) и (2.3.11) определяют близкие значения критических нагрузок.

Замечание 1. Постоянные материалов ν , l и r_0 брались для сплавов молибдена, который использовался в экспериментах, описанных [5].

Замечание 2. Деформационный критерий (2.3.11) носит универсальный характер и может быть применен при анализе ситуации в головке трещины, в окрестности вершины углового выреза и вблизи включений различного рода.

Общее замечание к § 2 и § 3. Полезно отметить, что критерии, изложенные в § 2 и § 3, могут быть применены к широкому классу задач разрушения, в частности к задачам с условными вырезами (гл. III), в которых критерий Гриффитса неприменим.

III. УПРУГИЕ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Оценке хрупкой прочности областей с трещинами посвящено большое количество работ. В то же время влияние угловых вырезов на величину разрушающей нагрузки изучено недостаточно. Это объясняется прежде всего тем обстоятельством, что все известные критерии разрушения не приспособлены к угловым точкам. Следует отметить, однако, что в инженерной практике такого рода проблематика встречается часто. Изложенный выше подход Новожилова и прежде всего условие (2.2.1) позволяют оценить критическую нагрузку и для случая угловых вырезов.

§ 1. Плоскость, ослабленная луночным вырезом

Рассмотрим растяжение плоской области, ослабленной вырезом в виде симметричной луны (рис. 16). Такая задача была решена независимо Е. Вейнцлаем [28] и Ч. Лингом [29]. Приводим решение в изложении Я. С. Уфлянда [30].

Вводятся биполярные координаты по формулам (рис. 17)

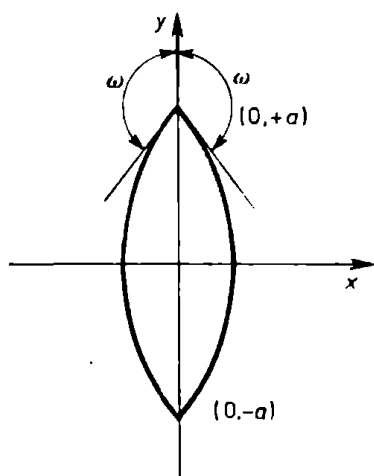


Рис. 16

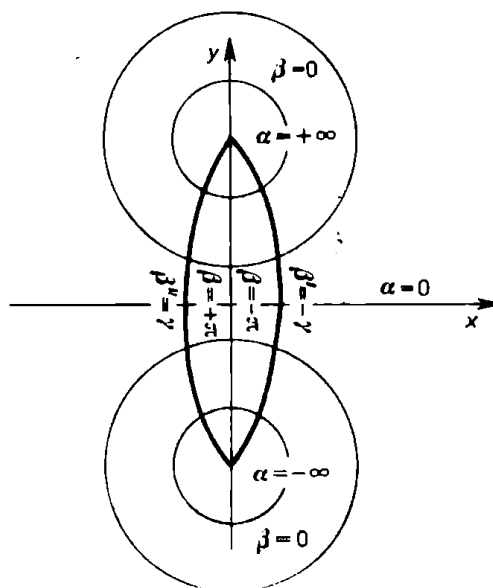


Рис. 17

$$(3.1.1) \quad \frac{x}{a} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} a - \cos \beta}, \quad \frac{y}{a} = \frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a - \cos \beta}.$$

Координатные линии $\beta = \text{const}$ суть дуги окружностей, имеющих центры на оси Ox и проходящие через точки $(0, -a)$, $(0, +a)$.

В частности $\beta = 0$ соответствует $\{x = 0, (-\infty < y < -a) \cup (a < y < +\infty)\}$, $\beta = -\pi$ соответствует первый берег отрезка $\{-a < y < +a, x = 0\}$, $\beta = +\pi$ соответствует левый берег отрезка $\{-a < y < +a, x = 0\}$ и т. д. Координатные линии $a = \text{const}$ суть окружности, центры которых расположены на оси ординат, в частности $a = 0$ есть ось абсцисс — окружность бесконечного радиуса, $a = +\infty$ есть точка $(0, a)$ — окружность нулевого радиуса, $a = -\infty$ есть точка $(0, -a)$ — окружность нулевого радиуса.

Формулы для напряжений имеют вид

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} a\sigma_{aa} &= \left[(\operatorname{ch} a - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} a \frac{\partial}{\partial a} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} a \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\sigma_{\beta\beta} &= \left[(\operatorname{ch} a - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial a^2} - \operatorname{sh} a \frac{\partial}{\partial a} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] \left(\frac{\Phi}{h} \right), \\ a\sigma_{a\beta} &= -(\operatorname{ch} a - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \beta} \left(\frac{\Phi}{h} \right), \end{aligned}$$

$$h = a/(\operatorname{ch} a - \cos \beta).$$

Функция Эри Φ ищется в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где Φ_1 определяет одноосное расстояние плоскости вдоль оси абсцисс и равна

$$(3.1.3) \quad \Phi_1 = h a p \frac{\operatorname{ch}^2 a - (\operatorname{ch} a - \cos \beta)^2}{2(\operatorname{ch} a - \cos \beta)},$$

а Φ_2 при условии симметрии по x равна

$$(3.1.4) \quad \Phi_2 = p a h \left\{ (2K - 1) \cos \beta + K (\operatorname{ch} a - \cos \beta) \ln \frac{\operatorname{ch} a - \cos \beta}{\operatorname{ch} a + \cos \beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [A \cos \beta \operatorname{ch} \lambda \beta + \beta \sin \beta \operatorname{sh} \lambda \beta] e^{-i\lambda a} d\lambda \right\},$$

$$(3.1.5) \quad K = \frac{1 - 2\sin^2 \omega \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda \omega + \lambda \sin 2\omega}}{4 \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \omega - \lambda^2 \sin^2 \omega}{\lambda(\lambda^2 + 1)(\operatorname{sh} 2\lambda \omega + \lambda \sin 2\omega)} d\lambda}.$$

Удовлетворяя граничным условиям на сторонах выреза, находим

A и B и определяем искомое напряженно деформированное состояние

$$(3.1.6) \quad A = \frac{2K\sqrt{2\pi}}{\lambda(\lambda^2+1)} \left[\frac{\lambda^2 - \operatorname{sh}^2(\pi\lambda/2)}{\operatorname{sh} \pi\lambda} + \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda\omega - \lambda^2 \sin \omega}{\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega} \right] - \frac{\sqrt{2\pi}\lambda \sin 2\omega}{\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega},$$

$$B = \frac{2K\sqrt{2\pi}}{\lambda^2+1} \left[\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi\lambda}{2} - \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda\omega + \sin^2 \omega}{\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega} \right] - \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \left[\operatorname{cth} \pi\lambda - \frac{2\operatorname{ch}^2 \omega}{\operatorname{sh} 2\lambda\omega + \lambda \sin 2\omega} \right].$$

Выпишем $\sigma_{\alpha\alpha}$ и $\sigma_{\beta\beta}$ при $\beta = 0$; $a \rightarrow +\infty$

$$(3.1.7) \quad \sigma_{\beta\beta}(a, 0) = \frac{\pi(r/2a)^{\mu_0-1} \cdot p}{2\omega \cos 2\mu_0\omega + \sin 2\omega} \left[\frac{2K(\mu_0^2 \sin^2 \omega - \sin^2 \mu_0\omega)}{1 - \mu_0} - \mu_0^2(1 + \mu_0) \sin^2 \omega \right],$$

$$(3.1.8) \quad \sigma_{\alpha\alpha}(a, 0) = \frac{\pi(r/2a)^{\mu_0-1} \cdot p}{2\omega \cos 2\mu_0\omega + \sin 2\omega} \left[\frac{2K(\mu_0^2 \sin^2 \omega - \sin^2 \mu_0\omega)}{1 + \mu_0} + \mu_0^2(1 - \mu_0) \sin^2 \omega + \frac{4K\mu_0(\sin^2 \omega - \sin^2 \mu_0\omega)}{1 - \mu_0^2} - 2\mu_0 \cos^2 \mu_0\omega \right].$$

Асимптотические формулы были получены Б. Н. Семеновым [31], там же приведен подсчет μ_0 (график I)

$$(3.1.9) \quad \mu = -i\lambda_0, \quad \operatorname{sh} 2\lambda_0\omega + \lambda_0 \sin 2\omega = 0.$$

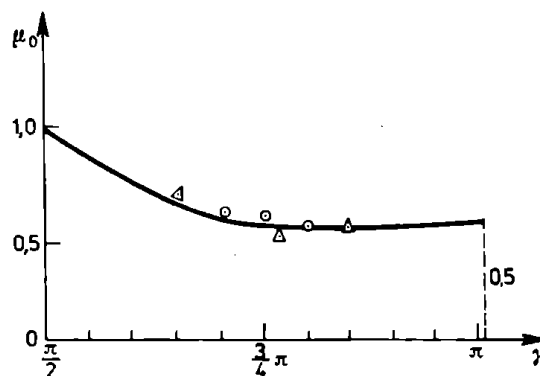


График 1

Переходя к пределу при $a \rightarrow +\infty$, получаем

$$(3.1.10) \quad \sigma_{yy}|_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow a}} = pC_1(\omega) \left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu_0(\omega)-1} + o\left(\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu_0-1}\right).$$

Таким образом, для $\pi/2 < \omega \leq \pi$ напряжения имеют особенность в точках $(0, a)$ и $(0, -a)$. В свою очередь $C_1(\omega)$ может быть подсчитано и представлено в виде графика 2, где $\chi C_1(\omega) = C_1(\pi)$, а $C_1(\pi) = \frac{1}{2}$.

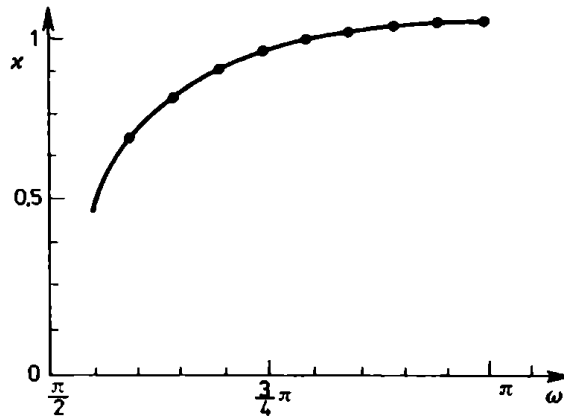


График 2

Поскольку главные члены асимптотики решения искомой задачи совпадают с главными членами асимптотики решения задачи для угла раствором 2ω , которые имеют вид (3.1.11) (см. [32]),

$$(3.1.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= C\mu_0(\mu_0+1)\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu_0-1} \left[\cos(\mu_0+1)\theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos(\mu_0+1)\omega}{\cos(\mu_0-1)\omega} \cos(\mu_0-1)\theta \right], \\ \sigma_{rr} &= C\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu_0-1} \left\{ (\mu_0+1) \left[\cos(\mu_0+1)\theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos(\mu_0+1)\omega}{\cos(\mu_0-1)\omega} \cos(\mu_0-1)\theta \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[(\mu_0+1)^2 \cos(\mu_0+1)\theta - (\mu_0-1)^2 \frac{\cos(\mu_0+1)\omega}{\cos(\mu_0-1)\omega} \cos(\mu_0-1)\theta \right] \right\}, \\ \sigma_{r\theta} &= C\mu_0\left(\frac{r}{2a}\right)^{\mu_0-1} \left[(\mu_0+1) \sin(\mu_0+1)\theta - \right. \\ &\quad \left. - (\mu_0-1) \frac{\cos(\mu_0+1)\omega}{\cos(\mu_0-1)\omega} \sin(\mu_0-1)\theta \right], \end{aligned}$$

то, сравнивая (3.1.10) и (3.1.11), находим неизвестный коэффициент $C(\omega)$:

$$(3.1.12) \quad C(\omega) = \frac{p \cdot C_1(\omega)}{\mu_0(\mu_0 + 1) \left[1 - \frac{\cos(\mu_0 + 1)\omega}{\cos(\mu_0 - 1)\omega} \right]}.$$

формулы (3.1.11), (3.1.12) полностью определяют асимптотику напряженного состояния в окрестности угловой точки $(0, a)$.

Перейдем к рассмотрению задачи разрушения.

Традиционный расчет по Гриффитсу в данном случае „не работает“, проведем подсчет разрушающей нагрузки в силу критерия, предложенного В. В. Новожиловым [10], что для *хрупкого* разрушения приводит к формуле

$$(3.1.13) \quad \frac{\int_0^{r_0} \max_{-\omega < \theta < +\omega} \sigma_{\theta\theta} dr}{r_0} = \frac{1}{r_0} \int_a^{a+r_0} \sigma_{\theta\theta}|_{x=0} dy \leq \sigma_c.$$

В силу (3.1.11) и (3.1.12) получаем

$$(3.1.14) \quad \frac{p^*(\omega) C_1(\omega)}{(2a)^{\mu_0-1}} \frac{r_0^{\mu_0-1}}{\mu_0} = \sigma_c,$$

в частности для трещины $\omega = \pi$

$$(3.1.15) \quad p^*(\pi) = \sigma_c \sqrt{\frac{r_0}{2a}},$$

что практически совпадает с известным соотношением Гриффитса.

Сравнивая формулы (3.1.14) и (3.1.15), получаем

$$(3.1.16) \quad p^*(\omega) = A(\omega) p^*(\pi),$$

где

$$(3.1.17) \quad A(\omega) = \frac{2\mu_0}{\kappa} \left(\frac{2a}{r_0} \right)^{\mu_0-1/2},$$

$A(\omega)$ — убывающая на $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ функция, равная 1 при $\omega = \pi$.

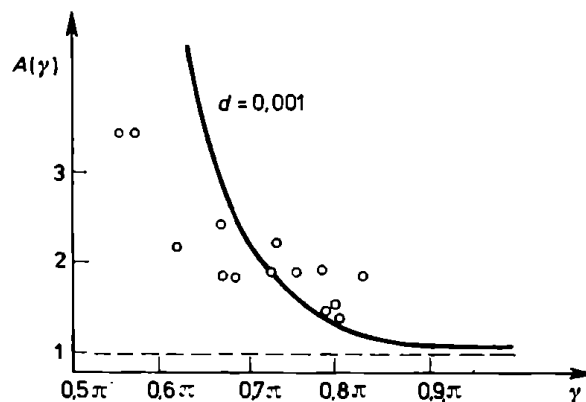


График 3

Качественный вид функции $A(\omega)$ определен формулой (3.1.17), количественное значение для хрупких и упругих сред известно, когда известен параметр r_0 — величина межатомного расстояния.

Приведенные теоретические исследования были дополнены экспериментами, осуществленными И. И. Бугаковым и И. И. Демидовой [33] для стеклообразного эпоксидного полимера на основе Э. Д. — 20. Входные данные: $E = 30\,000$ кг/см², $\sigma_c = 450$ кг/см², $2a = 1$ см, влиянием конечности области и влиянием трехмерности задачи пренебрегалось, среда рассматривалась как упругая.

На графике 1 кружочками и треугольниками обозначены экспериментальные значения показателя сингулярности $\mu_0(\omega)$, которые определены оптическим методом измерения значений разности напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ на лучах $\theta = \text{const}$. Измерения ближе чем 0,02 см от вершины выреза осуществить не удалось, так как методы фотоупругости там „не работают”. Сплошная линия — теоретическая кривая.

На графике 3 кружками представлены результаты эксперимента по определению разрушающих напряжений для различных ω . По оси ординат отложены величины $p^*(\omega)/p^*(\pi)$. Поскольку r_0 для полимера, вообще говоря, не определено, то при построении теоретической кривой $p^*(\omega)/p^*(\pi)$ можно рассуждать следующим образом: разрушающее экспериментальное напряжение для полимерного образца с трещиной ($\omega = \pi$) определено равным 92 кг/см², то есть $p^*(\omega) = 91$ кг/см², тогда из формулы (4.4.22) можно определить $r_{\text{эфф}}$, равным 0,04 см. Подставляя найденное r в формулы (3.1.16) и (3.1.17), получаем значения $p^*(\omega)/p^*(\pi)$ (на графике 3 — сплошная линия). Можно считать, что $r_{\text{эфф}}$ для полимера является характеристикой, моделирующей величину межатомного расстояния для хрупких сред.

Замечание. Из формул (3.1.11) или аналогичных формул для других угловых точек следует, что напряженное состояние в угловых точках асимптотически представляется формулой

$$(3.1.18) \quad \sigma_{ij} = kr^{\mu_0-1} f_{ij}(\theta)$$

и коэффициент интенсивности k зависит от раствора угла ω

$$(3.1.19) \quad k = k(\omega, p, a),$$

что делает затруднительным применение критерия типа

$$(3.1.20) \quad k < k^*.$$

В то же время критерий В. В. Новожилова, как мы видели, позволяет определить разрушающую нагрузку в зависимости от угла выреза ω .

§ 2. Плоскость, ослабленная лункой с надрезами

В § 1 (см. также [37]) рассмотрена задача о хрупком разрушении области, ослабленной вырезом в виде лунки. Поскольку в результате разрушения в углах лунки образуются надрывы (надрезы) и возникает другая геометрия, то представляет интерес сравнить разрушающую нагрузку для области с лункой и разрушающую нагрузку для области с лункой и надрезами.

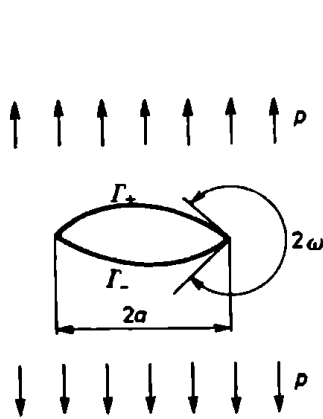


Рис. 18

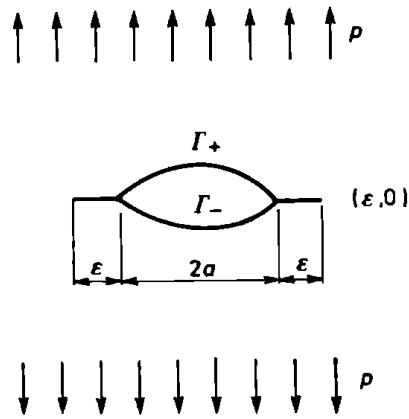


Рис. 19

Будем в дальнейшем обозначать соответственно задача I и задача II.

Для нахождения разрушающей нагрузки в задаче II необходимо определить напряженно деформированное состояние в окрестности точек $(\epsilon, 0)$, $(-\epsilon - 2a, 0)$. Аналогичные задачи для областей ослабленных круглым отверстием с надрезами, исследовались в работах [34]; [35].

Рассматриваем случай $\epsilon \ll a$ и будем для построения приближенного решения пользоваться методикой, изложенной в [36]. В качестве нулевого приближения выбираем решение задачи I, обозначая его \mathcal{F} , и напомним, что асимптотика \mathcal{F} вблизи вершины лунки имеет вид

$$(3.2.1) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + o(r^{\mu_0+1}),$$

где

$$(3.2.2) \quad \mathcal{F}_0 = C(2a)^2 \left(\frac{r}{2a} \right)^{\mu_0+1} \left[\cos(\mu_0+1)\theta - \frac{\cos(\mu_0+1)\omega}{\cos(\mu_0-1)\omega} \cos(\mu_0-1)\theta \right].$$

Затем осуществим преобразование координат (x, y) таким образом, чтобы надрез (например, правый) не деформировался, а граница лунки, примыкающая к правому надрезу, перешла в стороны прямолинейного угла того же раствора 2ω .

В качестве такого преобразования координат можно выбрать

$$(3.2.3) \quad 1 - 2x \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega} = \left(1 - \xi \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^2, \quad y = \eta.$$

Проводим растяжение плоскости

$$(3.2.4) \quad \bar{\eta} = \eta/\varepsilon, \quad \bar{\xi} = \xi/\varepsilon.$$

Тогда имеем

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \Delta_{x,y}^2 &= \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} + 2 \frac{1}{\left(1 - \xi \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^2} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \\ &+ 2 \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega} \frac{1}{\left(1 - \xi \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^2} \frac{\partial^3}{\partial \xi \partial \eta^2} + \frac{1}{\left(1 - \xi \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^4} \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + \\ &+ 6 \left(\frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^3 \frac{1}{\left(1 - \xi \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega}\right)^4} \frac{\partial}{\partial \xi} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{\varepsilon^2} (\Delta_{\bar{\xi}, \bar{\eta}}^2 + O(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Следующий член приближения к решению II ищем через вспомогательную задачу (3.2.6)–(3.2.10)

$$(3.2.6) \quad \Delta_{\bar{\xi}, \bar{\eta}}^2 w(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = 0,$$

$$(3.2.7) \quad \sigma_{nn}(w)|_{\substack{\bar{\xi} < 0 \\ \bar{\eta} = \pm \bar{\xi} \operatorname{tg} \omega}} = \sigma_{nt}(w)|_{\substack{\bar{\xi} < 0 \\ \bar{\eta} = \pm \bar{\xi} \operatorname{tg} \omega}} = 0,$$

$$(3.2.8) \quad \sigma_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^\infty = \sigma_{\bar{\eta}\bar{\eta}}^\infty = \sigma_{\bar{\xi}\bar{\eta}}^\infty = 0,$$

$$(3.2.9) \quad \frac{\partial^2 w(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial \bar{\xi} \partial \bar{\eta}} \bigg|_{\substack{\bar{\eta}=0 \\ 0 < \bar{\xi} < 1}} = 0,$$

$$(3.2.10) \quad \frac{\partial^2 w(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial \bar{\xi}^2} + C(\mu_0 + 1) \mu_0 \left(\frac{\bar{\xi}}{2a}\right)^{\mu_0 - 1} \left[1 - \frac{\cos(\mu_0 + 1)\omega}{\cos(\mu_0 - 1)\omega}\right] \bigg|_{\substack{\bar{\eta}=0 \\ 0 < \bar{\xi} < 1}} = 0,$$

$$(3.2.11) \quad C(\omega) = \frac{p \kappa^{\frac{1}{2}}}{\mu_0(\mu_0 + 1) \left[1 - \frac{\cos \omega(\mu_0 + 1)}{\cos \omega(\mu_0 - 1)}\right]}, \quad \bar{r}^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2.$$

Положим $2a = 1^{(2)}$, κ и μ_0 — затабулированные в [37] числовые параметры решения задачи I.

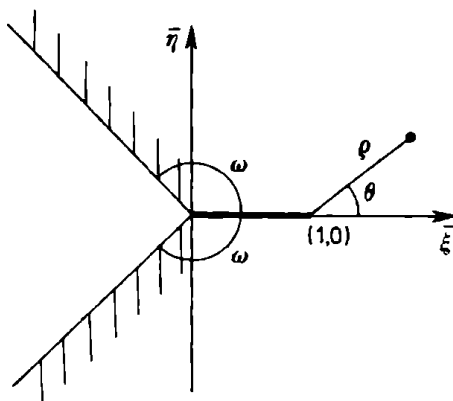


Рис. 20

Задача (3.2.6)–(3.2.10) может быть решена методами, изложенными в [38], [39]. Асимптотика в окрестности точки ($\xi = 1$, $\bar{\eta} = 0$), как известно, имеет вид

$$(3.2.12) \quad w(\xi; \bar{\eta}) = p \{ K(\omega) \tilde{\rho}^{3/2} (3 \cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{3}{2} \theta) + \dots \},$$

$$\tilde{\rho}^2 = (\xi - 1)^2 + \bar{\eta}^2.$$

Проводя подсчеты по указанной в [38], [39] методике, получаем⁽³⁾

ω	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$K(\omega)$	0,022	0,066	0,099	0,117	0,129	0,136	0,150

Возвращаясь к исходной задаче II, представляем приближенное

⁽²⁾ Для того, чтобы решать задачу с произвольной длиной лунки $2a$, сжимаем область в $2a$ раз, то есть получаем длину лунки I и длину надрыва $\epsilon/2a$, находим решение $\Phi^*(x^*; y^*)$, а затем конструируем искомое решение по правилу

$$\Phi(x, y) = (2a)^2 \Phi^*(x/2a; y/2a).$$

Заметим, что если определены

$$k^* = \lim_{x^* \rightarrow \epsilon/2a} \frac{\Phi^*(x^*, 0)}{(x^* - \epsilon/2a)^{3/2}}, \quad \text{а} \quad k = \lim_{x \rightarrow \epsilon} \frac{\Phi(x, 0)}{(x - \epsilon)^{3/2}},$$

то

$$k = \sqrt{2a} k^*.$$

⁽³⁾ Величина K для 180° получена экстраполяцией.

решение в виде суммы

$$(3.2.13) \quad \Phi(x, y) = \mathcal{F}(x, y) + \varepsilon^{\mu_0+1} \cdot pw(\xi, \bar{\eta}) \eta_0(x, y),$$

где η_0 — срезающая функция из $C^\infty(R_2)$, отличная от нуля лишь в окрестностях точек $(\varepsilon, 0)$ и $(-\varepsilon - 2a, 0)$. В частности, в окрестности правого конца надрыва η_0 имеет вид

$$(3.2.14) \quad \eta_0 = \eta_0(r) \begin{cases} 1 & \text{при } r < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } r > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Анализируем приближенное решение $\Phi(x, y)$, замечая, что граничные условия на берегах лунки и на бесконечности удовлетворяются тождественно

$$(3.2.15) \quad \Phi(x, y)|_{r \pm} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{r \pm} = 0.$$

$$(3.2.16) \quad \sigma_{yy}^\infty = p, \quad \sigma_{xy}^\infty = \sigma_{xx}^\infty = 0.$$

Известна [7] асимптотика $w(\xi, \bar{\eta})$ при $|\xi| \gg 1, \|\bar{\eta}\| \gg 1$

$$(3.2.17) \quad \begin{aligned} w &= O[(\sqrt{\xi^2 + \bar{\eta}^2})^{-\mu_0+1}] = o[(r/\varepsilon)^{-\mu_0+1}], \\ |\nabla_{xy} w| &= \frac{1}{\varepsilon} o[(r/\varepsilon)^{-\mu_0}], \quad |\nabla_{xy}^2 w| = \frac{1}{\varepsilon^2} o[(r/\varepsilon)^{-\mu_0-1}], \\ |\nabla_{xy}^3 w| &= \frac{1}{\varepsilon^3} o[(r/\varepsilon)^{-\mu_0-2}]. \end{aligned}$$

На основе (3.2.17) можно оценить $\Delta_{xy}^2 \Phi$:

$$(3.2.18) \quad \begin{aligned} \Delta_{x,y}^2 \Phi &= \varepsilon^{\mu_0+1} p \Delta_{xy}^2 \{w(\xi/\varepsilon; \eta/\varepsilon) \eta_0\} = \\ &= \varepsilon^{\mu_0+1} \{w \Delta_{xy}^2 \eta_0 + \dots + \nabla_{xy}^3 w \cdot \nabla_{xy} \eta_0\} = o(\varepsilon^{2\mu_0}), \end{aligned}$$

так как в силу определения среды η_0, ξ и η в правой части (3.2.18) имеют порядок единицы.

Далее, поскольку решение Φ — симметрично относительно оси абсцисс, то

$$(3.2.19) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{\substack{0 < x < \varepsilon \\ y=0}} = 0$$

и, наконец, в силу (3.2.2) и (3.2.11)

$$(3.2.20) \quad \Phi|_{\substack{0 < x < \varepsilon \\ y=0}} = o(x^{\mu_1}),$$

где μ , следующий за μ_0 ($\text{Re } \mu_1 > \text{Re } \mu_0$) корень характеристического

уравнения (3.1.9). Известно, что главный член асимптотики точного решения задачи II в окрестности точки $(\varepsilon, 0)$ имеет вид

$$(3.2.21) \quad K^*[(x-\varepsilon)^2 + y^2]^{3/4}(3 \cos \frac{1}{2} \theta + \cos \frac{3}{2} \theta).$$

Воспользуемся представлением Мазыи-Пламеневского [5] и оценками (3.2.17)–(3.2.20).

Тогда имеем

$$\begin{aligned} (3.2.22) \quad K^* - p\mathcal{K}\varepsilon^{\mu_0-1/2} &= \frac{1}{32\pi} \left\{ \int_{\Omega} \psi \Delta^2 [\varepsilon^{\mu_0+1} w \eta] d\Omega - \right. \\ &- 2 \int_0^{\cdot} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Phi dx + 2 \int_{-2a}^{-2a-\cdot} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Phi dx + 2 \int_0^{\cdot} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx - \\ &- 2 \int_{-2a-\cdot}^{-2a} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx \Big\} \\ &= \frac{1}{32\pi} \left\{ \int_{\Omega} \psi \Delta^2 [\varepsilon^{\mu_0+1} w \eta] d\Omega - 2 \int_0^{\cdot} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} O(x^{\mu_1+1}) dx \right\} = \\ &= O(\varepsilon^{2\mu_0}) + \int_0^{\cdot} x^{\mu_1-\mu_0-1} dx = O(\varepsilon^{2\mu_0}) + O(\varepsilon^{\mu_1-\mu_0}). \end{aligned}$$

Здесь $\psi(x, y)$ — собственная функция задачи II из соответствующего неэнергетического пространства [5] с особенностями в точках $(0, 0)$ и $(\varepsilon, 0)$. Следовательно, из (3.2.22) получаем

$$(3.2.23) \quad K^* = p\mathcal{K}\varepsilon^{\mu_0-1/2} + O(\varepsilon^{2\mu_0}) + O(\varepsilon^{\mu_1-\mu_0}).$$

Таким образом, разрушающая нагрузка определяется здесь из условия

$$(3.2.24) \quad p\mathcal{K}\varepsilon^{\mu_0-1/2} \cdot 6\delta^{-1/2} = \sigma^*,$$

а для лунки длиной $(2a)$, в силу сделанного на стр. (42) замечания, получаем

$$(3.2.24) \quad p\sqrt{2a}\mathcal{K}(\varepsilon/2a)^{\mu_0-1/2} \cdot 6\delta^{-1/2} = \sigma^*.$$

Окончательно

$$(3.2.25) \quad p = \frac{\sigma^* \sqrt{\delta}}{6\sqrt{2a}\mathcal{K}(\varepsilon/2a)^{\mu_0-1/2}}$$

и

$$(3.2.26) \quad p(\omega) = \frac{\mathcal{K}(\pi)}{\mathcal{K}(\omega)} \cdot \frac{1}{(\varepsilon/2a)^{\mu_0(\omega)-1/2}} p(\pi).$$

Обозначим коэффициент в формуле (3.2.26) через α :

$$\alpha\left(\omega, \frac{\varepsilon}{2a}\right) = \frac{\mathcal{K}(\pi)}{\mathcal{K}(\omega)} \frac{1}{(\varepsilon/2a)^{\mu_0(\omega)-1/2}}$$

и приведем таблицу для $\varepsilon/2a = 0,1$ и $\varepsilon/2a = 0,01$.

ω	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\alpha(\omega; 0,1)$	63,28	6,90	2,46	1,45	1,14	1,03	1,00
$\alpha(\omega; 0,01)$	13,98	3,81	1,86	1,32	1,11	1,03	1,00

Сравнивая (3.2.25) с разрушающей нагрузкой для лунки $p_{\text{лунки}}^z \geq \sigma^* \sqrt{\delta/\sqrt{2a}}$ видим, что разрушающая нагрузка для лунки с надрезом для всех ω при $\varepsilon < a$ всегда меньше лунки, что и определяет динамическое распространение трещины при разрушении в окрестности угловой точки.

§ 3. Кручение цилиндра с угловой выточкой

В § 1 настоящего раздела была рассмотрена задача о хрупком разрушении плоской угловой области, ослабленной луночным вырезом, и на основе критерия В. В. Новожилова оценена величина разрушающей нагрузки в зависимости от величины входящего угла. Рассмотрим аналогичную задачу для кручения. Пусть для простоты имеем сплошное цилиндрическое тело с круговым сечением радиуса R . Продольная угловая выточка проходит по всей длине цилиндра, причем вершина угла находится на расстоянии a от центра, $0 < a < R$ (рис. 21). Величину угла 2ω будем менять.

Задача кручения (см. [17]) сводится к нахождению функции

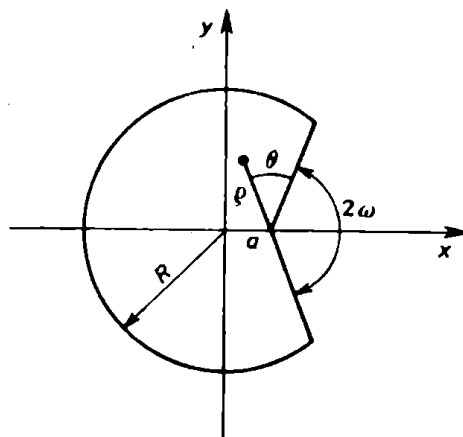


Рис. 21

Прандтля Ψ

$$(3.3.1) \quad \Delta \Psi = -2,$$

$$(3.3.2) \quad \Psi|_r = 0.$$

Как известно, Ψ в окрестности точки $(a, 0)$ имеет асимптотику вида

$$(3.3.3) \quad \Psi(\varrho, \theta) = C \varrho^{\pi/(2(\pi-\omega))} \sin(\pi/2(\pi-\omega)) \theta.$$

Постоянная C может быть подсчитана с помощью программы И. В. Царицной [01]. Подсчет производился для $R = 1$, $a = \frac{1}{2}$. Одновременно подсчитана необходимая далее величина $\int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega$. Составим таблицу.

2ω	20°	40°	60°	80°	100°	120°
$C(\omega)$	-0,574	-0,546	-0,549	-0,559	-0,587	-0,598
$\int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega$	0,633	0,625	0,615	0,601	0,584	0,563

Исходя из идеологии нормального отрыва, определяем площадку, на которую действует максимальное растягивающее напряжение. Эта площадка проходит через $(\cdot)(a, 0)$ и наклонение под углом 45° к оси цилиндра, и нормальное напряжение, действующее на нее, равняется τ_{\max} .

В свою очередь τ_{\max} связано с функцией Прандтля Ψ формулой

$$(3.3.4) \quad \tau_{\max} = |\text{grad } \Psi| \frac{M}{2 \left| \int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega \right|}.$$

В силу (3.3.3) и (3.3.4) имеем

$$(3.3.5) \quad \sigma_{\max}^{(n)} = \tau_{\max} = C \frac{\pi}{2(\pi-\omega)} e^{\pi/(2\pi-\omega)-1} \frac{M}{2 \left| \int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega \right|}.$$

Определим разрушающую по критерию В. В. Новожилова

$$(3.3.6) \quad \frac{1}{r_{\text{эфф.}}^0} \int_0^{r_{\text{эфф.}}} \sigma_{\max}^{(n)} dx = \sigma_c$$

и далее

$$(3.3.7) \quad |C(\omega)| \frac{M}{2 \left| \int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega \right|} r_{\text{эфф.}}^{\pi/(2(\pi-\omega))} = \sigma_c.$$

Остюда окончательно

$$(3.3.8) \quad M^x = \frac{2\sigma_c \int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega}{C(\omega)} r_{\text{эфф.}}^{1-\pi/2(\pi-\omega)}.$$

Здесь $r_{\text{эфф.}}$ — некоторый структурный параметр, в частности при хрупком разрушении для сред с правильной кристаллической структурой в качестве $r_{\text{эфф.}}$ можно брать r_0 — величину межатомного расстояния. В этом частном случае для $\omega = 0$ имеем

$$(3.3.9) \quad M(0) = \frac{2\sigma_c}{|C(0)|} \sqrt{r_0} \cdot \int_{\Omega_0} \Psi d\Omega,$$

что можно сравнить с результатами [23]. В силу (3.3.9) и (3.3.8), получаем

$$(3.3.10) \quad M(\omega) = M(0) \cdot A(\omega),$$

где

$$(3.3.11) \quad A(\omega) = \frac{\int_{\Omega_\omega} \Psi d\Omega}{|C(\omega)|} \frac{|C(0)|}{\int_{\Omega_0} \Psi d\Omega} \cdot r_{\text{эфф.}}^{1/2-\pi/2(\pi-\omega)}.$$

IV. ОБСУЖДЕНИЕ ПОДХОДОВ ГРИФФИТСА И СНЕДДОНА ПРИ ИДЕАЛИЗАЦИИ РЕАЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЫ

§ 1. Формулы Снеддона и формулы для напряжений в окрестности тонкого эллиптического выреза

Как известно [17], реальная плоская трещина может математически интерпретироваться как разрез на упругой плоскости, с заданными на берегах граничными условиями (рис. 22)

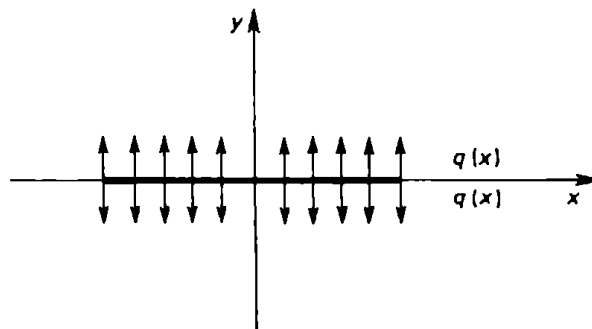


Рис. 22

$$(4.1.1) \quad \sigma_{xy}|_{\substack{|x| < a \\ y=+0}} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{\substack{|x| < a \\ y=+0}} = -q(x),$$

$$(4.1.2) \quad \sigma_{xy}|_{\substack{|x| < a \\ y=-0}} = 0, \quad \sigma_{yy}|_{\substack{|x| < a \\ y=-0}} = -q(x).$$

Тогда получаем задачу об определении на плоскости аналитической, убывающей на бесконечности функции Z_I , удовлетворяющей на отрезке $\{|x| \leq a; y \geq 0\}$ условию

$$(4.1.3) \quad \operatorname{Re} Z_I = -q(x)$$

с последующим применением формулы Вестергарда [17]

$$(4.1.4) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I', \\ \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I', \\ \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_I'. \end{aligned}$$

Эффективное решение задачи (4.1.3) дается формулой Л. И. Седова

$$(4.1.5) \quad Z_I = \frac{1}{\pi \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-a}^{+a} \frac{q(\xi) \sqrt{a^2 - \xi^2}}{z - \xi} d\xi.$$

В силу формул (4.1.4), (4.1.5) получаем в окрестности вершины трещины асимптотические выражения для напряжений, известные как формулы Снеддона [40]; [41].

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= k_1 \frac{\cos \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{2\pi r}} (1 - \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta) + O(r/a), \\ \sigma_{yy} &= k_1 \frac{\cos \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{2\pi r}} (1 + \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta) + O(r/a), \\ \sigma_{xy} &= k_1 \frac{\cos \frac{1}{2} \theta}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta + O(r/a), \end{aligned}$$

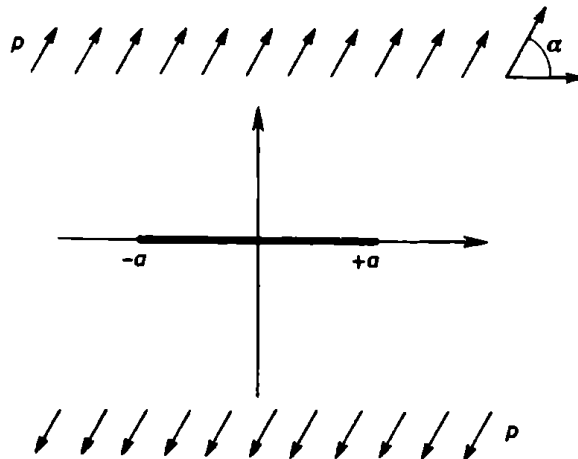


Рис. 23

где

$$(4.1.7) \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} g(\xi) \sqrt{\frac{a+\xi}{a-\xi}} d\xi.$$

Если исходную задачу видоизменить (рис. 23) то формулы Снеддона принимают вид

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{P}{4} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left\{ \sin^2 \alpha [3 \cos \tfrac{1}{2} \theta + \cos \tfrac{3}{2} \theta] - 3 \sin \alpha \cos \alpha [\sin \tfrac{1}{2} \theta + \right. \\ &\quad \left. + \sin \tfrac{3}{2} \theta] + O\left(\frac{r}{a}\right) \right\}, \\ \sigma_{rr} &= \frac{P}{4} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left\{ \sin^2 \alpha [5 \cos \tfrac{1}{2} \theta - \cos \tfrac{3}{2} \theta] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \alpha [-5 \sin \tfrac{1}{2} \theta + \sin \tfrac{3}{2} \theta] + O\left(\frac{r}{a}\right) \right\}, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{P}{4} \sqrt{\frac{a}{2r}} \left\{ \sin^2 \alpha [\sin \tfrac{1}{2} \theta + \sin \tfrac{3}{2} \theta] + \sin \alpha \cos \alpha [\cos \tfrac{1}{2} \theta + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos \tfrac{3}{2} \theta] + O\left(\frac{r}{a}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим другой возможный вариант идеализации плоской трещины в виде эллипса с малым отношением b/a ($b/a \ll 1$) или, что то же самое, с малым радиусом кривизны $r_0 = b^2/a$ в точке $x = a$, $y = 0$. Отметим, что А. Гриффитс [2] предложил именно такую трактовку трещины.

Будем действовать по плану, предложенному в [42], проводя подробные вычисления.

Пусть ϱ и β — криволинейные координаты, определяемые конформным преобразованием единичного круга на данный эллипс

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} Z &= \kappa(\xi) = A(\xi + m/\xi), \\ A &= \tfrac{1}{2}(a+b), \quad m = (a-b)/(a+b), \quad \xi = \varrho e^{i\beta}. \end{aligned}$$

В силу формул Колосова-Мусхелишвили имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta} &= 4 \operatorname{Re} \Phi(\xi) = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\xi)}{\kappa(\xi)} \right], \\ \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{\theta\beta} &= \frac{2\xi^2}{|\xi|^2 \cdot \bar{\kappa}'(\xi)} [\bar{\kappa}(\xi) \Phi'(\xi) + \Psi'(\xi)], \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \frac{P}{4} \cdot \frac{a+b}{2} \left(\xi + \frac{2e^{2ia} - m}{\xi} \right), \\ \Psi(\xi) &= -\frac{P}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \left[\xi e^{-2ia} + \frac{e^{2ia}}{m\xi} + \frac{\xi(1+m^2)(m-e^{2ia})}{m(\xi^2-m)} \right], \\ \varphi'(\xi) &= \frac{P}{4} \cdot A \left(1 - \frac{2e^{2ia} - m}{\xi^2} \right), \\ \Phi &= \frac{\varphi'}{\kappa'} = \frac{P}{4} \left[1 + \frac{2(m-e^{2ia})}{\xi^2-m} \right], \\ (4.1.10) \quad \Phi'(\xi) &= -P \frac{m-e^{2ia}}{(\xi^2-m)^2} \xi, \\ \Psi' &= -\frac{P}{2} \cdot A \left[e^{-2ia} - \frac{e^{2ia}}{m\xi^2} - \frac{(1+m^2)(m-e^{2ia})}{m} \cdot \frac{\xi^2+m}{(\xi^2-m)^2} \right], \\ \xi &= \frac{Z}{2A} + \frac{\sqrt{Z^2-4A^2m}}{2A}.\end{aligned}$$

Перейдем к полярным координатам, ориентированным на анализ ситуации в окрестности правого конца эллиптического выреза

$$(4.1.11) \quad Z = a - b^2/2a + re^{i\theta}.$$

Используя малость b/a в сравнении с единицей и близость ξ к единице, упростим формулы (4.9)–(4.11):

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{a - b^2/2a + re^{i\theta}}{a+b} + I \approx 1 - \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2}, \\ I &= \frac{1}{2A} \sqrt{Z^2 - 4A^2m} \approx \sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2}, \\ \xi^2 - m &\approx 2I = 2\sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2}, \quad \xi^2 = 1 - 2\frac{b}{a} + 2\sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2}, \\ \kappa' &= A \left(1 - \frac{m}{\xi^2} \right) \approx a \sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2}, \\ \Psi' &= \frac{P}{4} A \left(1 + \frac{-2e^{2ia} + m}{\xi^2} \right) \approx \\ &\approx \frac{aP}{4} \left[1 - e^{2ia} + (1 - 2e^{2ia}) \frac{b}{a} + (1 - e^{2ia}) \frac{b}{a} - (1 - 2e^{2ia}) \sqrt{\frac{2r}{a}} e^{i\theta/2} \right].\end{aligned}$$

Тогда формулы Колосова-Мусхелишвили принимают вид:

$$(4.1.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta} &= 4\operatorname{Re} \frac{(ap/8)(2-2e^{2ia})}{a\sqrt{2r/a}e^{i\theta/2}} = \\ &= P\sqrt{a/2r} \operatorname{Re} \{(1-e^{2ia})e^{-i\theta/2}\}. \\ \Phi'(\xi) &= -P \frac{(m-e^{2ia})\xi}{(\xi^2-m)^2} = -P \frac{\xi(m-e^{2ia})}{4(2r/a)e^{i\theta}}, \\ \Psi'(\xi) &= \frac{P}{2} \cdot A \left[e^{-2ia} - \frac{e^{2ia}}{m\xi^2} - \frac{(1+m^2)(m-e^{2ia})}{m} \frac{\xi^2+m}{(\xi^2-m)^2} \right], \end{aligned}$$

$$(4.1.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{\theta\beta} &\approx \\ &\approx \frac{2\xi^2}{|\xi|^2 \cdot \bar{\kappa}'} \left[-Z \frac{P\xi(m-e^{2ia})}{(2r/a)e^{i\theta}} + \frac{PA}{2} \frac{(1+m^2)}{m} \frac{(m-e^{2ia})(\xi^2+m)}{(2r/a)e^{i\theta}} \right] = \\ &= \frac{2\xi^2 \cdot \xi}{|\xi|^2 \bar{\kappa}'} \frac{P(m-e^{2ia})}{4(2r/a)e^{i\theta}} \left[-\bar{Z} + Z \frac{1+m^2}{2m} \right] = \\ &= \frac{P}{2} (1-e^{2ia}) \left(\sqrt{\frac{a}{2r}} \right)^3 \left\{ \frac{r}{a} e^{i\theta} - \frac{r}{a} e^{-3i\theta/2} + 2 \frac{b^2}{a} e^{-i\theta/2} \right\}. \end{aligned}$$

Перейдем от формул (4.1.12)-(4.1.13) к соответствующим формулам в декартовых координатах

$$(4.1.12_I) \quad \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta},$$

$$(4.1.13_I) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} &= [\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{\theta\beta}] \frac{|\xi|^2 \bar{\kappa}'}{\xi^2 \kappa'} \approx \\ &\approx [\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{\theta\beta}] e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

А затем перепишем (4.1.12_I)-(4.1.13_I) в координатах (r, θ) , тогда имеем

$$(4.1.12_{II}) \quad \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\beta\beta},$$

$$(4.1.13_{II}) \quad \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} = [\sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\theta\theta} + 2i\sigma_{\theta\beta}] e^{-i\theta} \cdot e^{2i\theta}.$$

Окончательно получаем

$$(4.1.12_{III}) \quad \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr} = P \sqrt{\frac{a}{2r}} \left\{ \operatorname{Re} [(1-e^{2ia})e^{-i\theta/2}] + O\left(\frac{r}{a}; \frac{b}{a}\right) \right\},$$

$$(4.1.13_{III}) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\sigma_{r\theta} &= \\ &= \frac{P}{2} (1-e^{2ia}) \left(\sqrt{\frac{a}{2r}} \right)^3 \left\{ \frac{r}{a} e^{i3\theta/2} - \frac{r}{a} e^{-i\theta/2} + 2 \frac{b^2}{a^2} e^{i\theta/2} + O\left(\frac{r}{a}; \frac{b}{a}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Формулы Снеддона (4.1.8) могут быть получены из (4.1.12_{III})–(4.1.13_{III}) формальным переходом к пределу при $b/a \rightarrow 0$.

Сравнительное обсуждение формул (4.1.12)–(4.1.13) и формул (4.1.8) проведем ниже, однако следует сразу отметить, что формальный предельный переход $b/a \rightarrow 0$ в (4.1.12_{III})–(4.1.13_{III}) эквивалентен пренебрежению в этих формулах b^2/a^2 по сравнению с r/a , что оправдано для расстояний r больших радиусов кривизны эллипса $b(-)(a, 0)$, то есть при $r \gg b^2/a$.

§ 2. Обсуждение подходов Снеддона и Гриффитса в задачах теории трещин

Как было указано в § 1, замена реальной плоской трещины разрезом приводит к формулам Снеддона (4.1.8). Подкупающая простота и наглядность указанных формул обеспечили им широкое распространение: формулы Снеддона — неперенный компонент любой монографии или учебника по теории трещин. Кроме того, использование в качестве критерия разрушения величины коэффициента интенсивности напряжений ввело формулы Снеддона в инженерную литературу и методики по расчету конструкций. Как это часто бывает, полученные формулы стали употребляться без анализа их области применения. В то же время при пользовании формулы Снеддона можно заметить определенные несообразности.

И. А. М. Линьковым [42] было указано, что анализ на основе формул (4.8) приводит к представляющемуся заниженным отношению p_2^*/p_1^* :

$$(4.2.1) \quad \frac{p_2^*}{p_1^*} = 2,66 \text{ по Снеддону; } \frac{p_2^*}{p_1^*} = 8 \text{ по Гриффитсу [2].}$$

Здесь p_2^* — минимальная по a разрушающая нагрузка при сжатии p_1^* — минимальная по a разрушающая нагрузка при растяжении.

II. Анализируя формулы (4.1.8) легко усмотреть, что точка $r = 0$ особая: а) напряжения при $r = 0$ обращаются в бесконечность, в) не выполняется условие о существовании двух взаимно перпендикулярных напряжений, с) пределы напряжений на площадки, проходящие через точку $r = 0$, различны в зависимости от пути стремления к ним.

III. В связи с вышесказанным не представляется абсолютно достоверным полученный на основе (4.1.8) вывод о том; что при одноосном перпендикулярном трещине растяжении максимальное нормальное напряжение достигается на площадке, проходящей через точку $r = 0$ под углом 67° и оси абсцисс (см. [17], стр. 533).

Рассматривая формулы (4.1.8) как результат упрощений формул (4.1.12_{III})–(4.1.13_{III}), видим, что такое упрощение оправдано при $r \gg r_0 = b^2/a$, то есть „далеко” от конца трещины. При $r \sim b^2/a$ расчет по формулам (4.1.8) и (4.1.12)–(4.1.13) приводят к различиям количественного и качественного характера. Например, тах $\sigma_{\theta\theta}$ в силу формул (4.1.12)–(4.1.13) достигается при $\theta = 0$ на границе выреза в отличие от результата, следующего из формул (4.1.8) (см. III).

Проанализируем, имющую для нас наибольший интерес, величину разрушающей нагрузки на основе формул (4.1.8) и (4.1.12)–(4.1.13). Применим критерий В. В. Новожилова. Пусть δ — межзатомное расстояние или иной структурный параметр. В силу формул (4.1.12)–(4.1.13) имеем

$$(4.2.2) \quad \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0} = p \left\{ \sqrt{\frac{a}{2r}} + \left(\sqrt{\frac{a}{2r}} \right)^3 \frac{b^2}{a^2} \right\}$$

и далее

$$(4.2.3) \quad \frac{1}{\delta} \int_{b^2/2a}^{b^2/2a + \delta} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=0} dr = \frac{2p}{\sqrt{b^2/a^2 + 2\delta/a}} = \sigma^*.$$

Отсюда

$$(4.2.4) \quad p^* = p_{\text{разр.}} = \frac{\sigma^*}{2} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2\delta}{a}}.$$

Проанализируем формулу (4.2.4); при $b^2/a \ll \delta$ мы получаем

$$(4.2.5) \quad p^* = \frac{\sigma^* \sqrt{\delta}}{\sqrt{2a}},$$

что соответствует формулам Снеддона, однако при $b^2/a \sim \delta$ величина критической нагрузки увеличится на 40 %, а при $b^2/a \sim 10\delta$ — втрое. Как следует из вышеизложенного, формулой (4.2.5) можно пользоваться при любом подходе и Гриффитса, и Снеддона для определения нижнего значения разрушающей нагрузки.

Общий вывод. Проведенное обсуждение показывает, что возможны две математические идеализации реальных трещин Гриффитса и Снеддона. Существенно, что определение минимальной разрушающей нагрузки приводит к близким результатам. В то же время картина напряженного деформированного состояния в окрестности вершины трещин, определенная в силу формул (4.1.8) и (4.1.12)–(4.1.13), существенно различна. И этот факт должен приниматься во внимание при анализе задач разрушения. Более последовательным представляется подход Гриффитса с выбором в качестве $r_0 = b^2/a$ структурного параметра, например межзатомного расстояния δ .

Замечание. Проведенное обсуждение касается и применимости формул типа Снеддона для областей с угловыми вырезами.

§ 3. О напряженно деформированном состоянии упругой плоскости, ослабленной тонким вырезом

Результаты § 1 здесь будут обобщены: (*) вместо эллиптического выреза будем рассматривать произвольный тонкий вырез с гладким контуром

$$(4.3.1) \quad \{ \Gamma_\epsilon^+: |x| \leq a; y = \epsilon f_+(x); \Gamma_\epsilon^-: |x| \leq a, y = \epsilon f_-(x); f_+(x) > f_-(x) \}.$$

Радиус кривизны в $(a, 0)$ равен r_0^* .

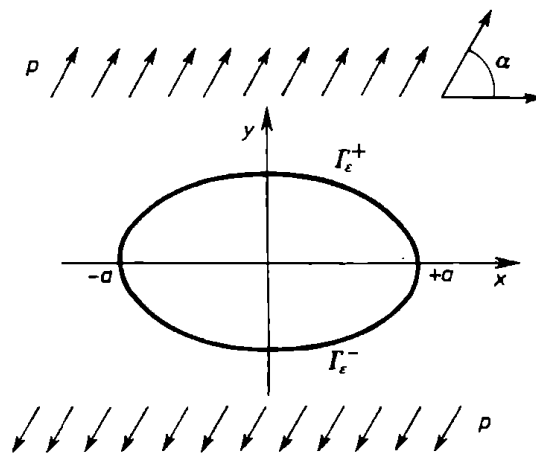


Рис. 24

Математически задача формулируется следующим образом:

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad \Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0;$$

$$(4.3.3) \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma_\epsilon} = \sigma_{ns}|_{\Gamma_\epsilon} = 0;$$

$$(4.3.4) \quad \sigma_{yy}^\infty = p \sin^2 \alpha, \quad \sigma_{xy}^\infty = p \sin \alpha \cos \alpha.$$

(*) Этот § содержит результаты дипломной работы И. Зорина.

Следуя методу [42], [16], компонента напряжений имеем в виде рядов

$$(4.3.5) \quad \sigma(x; y; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_k(x, y).$$

Тогда приходим к следующей рекуррентной системе краевых задач:

$$(4.3.6) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}\sigma_k(x, y) &= 0, \\ \sigma_{kyy}^{\infty} &= \delta_{0,k} p \sin^2 \alpha, \\ \sigma_{kxy}^{\infty} &= \delta_{0,k} p \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_{0nn}(x, \pm 0)|_{|x|<a} &= \sigma_{0ns}(x, \pm 0)|_{|x|<a} = 0, \\ \sigma_{knn}(x, \pm 0) + \sum_{j=1}^k \frac{[f_{\pm}(x)]^j}{j!} \frac{\partial^j \sigma_{k-jnn}(x, \pm 0)}{\partial y^j} &= 0, \\ \sigma_{kns}(x, \pm 0) + \sum_{j=1}^k \frac{[f_{\pm}(x)]^j}{j!} \frac{\partial^j \sigma_{k-jns}(x, \pm 0)}{\partial y^j} &= 0 \\ |x| &< a \end{aligned}$$

Здесь \mathcal{L} оператор системы (4.3.4), $\delta_{i,k}$ — символ Кронекера. Заметим, что полученное разложение решения задачи (4.3.2) вносит невязку в граничные условия (4.3.3) и сингулярно в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, причем с ростом „ k ” степени сингулярности возрастают.

Строим компенсирующее разложение для определенности в окрестности $(\cdot, 0)$, $(a, 0)$.

Асимптотика функции $f_{\pm}(x)$ в окрестности точки $(a, 0)$ имеет вид

$$(4.3.7) \quad f_{\pm}(x) \sim \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k \right)_{z=\pm\sqrt{a-x}}.$$

Введем новые переменные

$$(4.3.8) \quad \xi = \frac{x-a}{\varepsilon^2}, \quad \eta = \frac{y}{\varepsilon^2}.$$

Заметим, что f_1 связано с r_0^* соотношением $r_0^* = \varepsilon^2 f_1/2$. Вид оператора \mathcal{L} не изменится. Перепишем уравнение контура выреза $y = \varepsilon f(x)$ в переменных (ξ, η) с учетом (4.3.7); тогда имеем

$$(4.3.9) \quad \eta = \pm f_1 \sqrt{-\xi} + \varepsilon \psi_{\pm}(\xi, \varepsilon),$$

где

$$(4.3.10) \quad \psi_{\pm}(\xi, \varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_{k+2} z^{k+2} \right)_{z=\pm\sqrt{-\xi}}.$$

В новых переменных получаем рекуррентную систему

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\sigma_k(\xi, \eta) &= 0, \\
 \sigma_{0nn}(\xi; \pm f, \sqrt{-\xi}) &= \sigma_{0ns}(\xi; \pm f_1\sqrt{-\xi}) = 0, \\
 (4.3.11) \quad \sigma_{knn} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial^j \sigma_{inn}}{\partial \eta^j} c_{kij} (\pm f_1\sqrt{-\xi})^{k+j-i} &= 0, \\
 \sigma_{kns} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial^j \sigma_{ins}}{\partial \eta^j} c_{kij} (\pm f_1\sqrt{-\xi})^{k+j-i} &= 0.
 \end{aligned}$$

Особо остановимся на определении имеющего первостепенное значение главного члена асимптотики, а именно возьмем первый член основного разложения σ_0 и первый член компенсационного разложения; тогда имеем

$$\begin{aligned}
 (4.3.12) \quad \sigma_{np}(x, y, \varepsilon) &= \lambda\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \lambda\left(\frac{r'}{\varepsilon}\right) \sigma_0(x, y) + \\
 &+ \left[1 - \lambda\left(\frac{r}{s}\right)\right] \sigma^I(\xi, \eta, \varepsilon) + \left[1 - \lambda\left(\frac{r'}{s}\right)\right] \sigma^{II}(\xi', \eta', \varepsilon).
 \end{aligned}$$

Здесь (r, θ) и (r', θ') — полярные координаты с центрами в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, ξ и η — вспомогательные координаты, определенные ниже, а σ^I и σ^{II} — главные члены компенсационных разложений в окрестности точек $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ соответственно, $\lambda(\xi)$ — срезающая функция, определенная по правилу

$$(4.3.13) \quad \lambda(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\xi| < 1, \\ 1 & \text{при } |\xi| > 2. \end{cases}$$

Из (4.3.6) следует, что $\sigma_0(x, y)$ есть решение задачи о напряженном состоянии плоскости с прямолинейным разрезом $\{|x| \leq a, y = 0\}$ растягиваемой заданными на бесконечности нагрузками. Решение такой задачи в нашем случае определяется по формулам Вестенгарде:

$$\begin{aligned}
 (4.3.14) \quad \sigma_{0xx} &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I + 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} + P \cos^2 \alpha, \\
 \sigma_{0yy} &= \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z'_I - y \operatorname{Re} Z'_{II}, \\
 \sigma_{0xy} &= \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_{II}, \\
 Z_I &= z \frac{P \sin^2 \alpha}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad Z_{II} = z \frac{P \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{z^2 - a^2}}.
 \end{aligned}$$

Причем комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили здесь таковы:

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = \Phi(z) &= \frac{1}{2}(Z_I - iZ_{II}) = \frac{Pz}{4\sqrt{z^2 - a^2}} (1 - e^{2ia}). \\ (4.3.15) \quad \Psi'(z) = \Psi(z) &= \frac{1}{2}[2iZ_{II} - z(Z'_I - iZ'_{II})] = \\ &= iP \sin \alpha \cos \alpha \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{Pa^2}{4(z^2 - a^2)^{3/2}} (1 - e^{2ia}). \end{aligned}$$

В силу (4.3.11) видим, что главный член компенсационного разложения есть однородное решение задачи о напряженном состоянии во внешности параболы $\eta^2 = -f_1^2 \xi$. Тогда (см. [19], [36]), зная отображение на полуплоскость

$$(4.3.16) \quad \zeta = \xi + i\eta = \omega(\tilde{\zeta}) = -(\tilde{\zeta} - if_1/2)^2 - f_1^2/4$$

получаем комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} \varphi' = \Phi(\tilde{\zeta}) &= \frac{c}{\tilde{\zeta} - if_1/2}, \\ (4.3.16) \quad \psi' = \Psi(\tilde{\zeta}) &= \frac{1}{\tilde{\zeta} - if_1/2} \left[C + \frac{\bar{c}(\tilde{\zeta} + if_1/2)(\tilde{\zeta} - 3if_1/2) - f^2/4}{2(\tilde{\zeta} - if_1/2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной ζ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \frac{iC}{\sqrt{\zeta + f_1^2/4}}, \\ (4.3.17) \quad \Psi(\zeta) &= -\frac{i}{\sqrt{\zeta + f_1^2/4}} \left[\bar{c} + \frac{c}{2} - \frac{3f_1^2 c}{8(\zeta + f_1^2/4)} \right]. \end{aligned}$$

Сравняв разложения (4.3.17) и (4.3.15), определяем

$$(4.3.18) \quad c = -\frac{i}{\varepsilon} \frac{P}{4} \sqrt{\frac{a}{2}} (1 - e^{2ia}).$$

В силу формул Колосова-Мусхелишвили запишем компоненты тензора напряжений внутреннего разложения

$$\begin{aligned} \sigma_{x\theta}^I(\varrho, \varphi) &= \frac{P}{8} \sqrt{\frac{a}{r_0^2 \varrho}} \left[\sin^2 \alpha \left(3 \cos \frac{1}{2} \varphi + \cos \frac{5}{2} \varphi - \frac{1}{\varrho} \cos \frac{3}{2} \varphi \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha \cos \alpha \left(7 \sin \frac{1}{2} \varphi + \sin \frac{5}{2} \varphi - \frac{1}{\varrho} \sin \frac{3}{2} \varphi \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.3.19) \quad \sigma_{\nu\nu 0}^I(\varrho, \varphi) &= \frac{P}{8} \sqrt{\frac{a}{r_0^* \varrho}} \left[\sin^2 \alpha \left(5 \cos \frac{1}{2} \varphi - \cos \frac{5}{2} \varphi + \frac{1}{\varrho} \cos \frac{3}{2} \varphi \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \alpha \cos \alpha \left(\sin \frac{5}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{\varrho} \sin \frac{3}{2} \varphi \right) \right], \\
 \sigma_{x\nu 0}^I(\varrho, \varphi) &= \frac{P}{8} \sqrt{\frac{a}{r_0^* \varrho}} \left[\sin^2 \alpha \left(\sin \frac{5}{2} \varphi - \sin \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{\varrho} \sin \frac{3}{2} \varphi \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sin \alpha \cos \alpha \left(3 \cos \frac{1}{2} \varphi + \cos \frac{5}{2} \varphi + \frac{1}{\varrho} \cos \frac{3}{2} \varphi \right) \right].
 \end{aligned}$$

Здесь $r_0^* = \frac{1}{2} \varepsilon^2 f_1^2$ — радиус кривизны контура в точке $(a, 0)$,

$$\varrho = \sqrt{\left(\xi + \frac{1}{4}\right)^2 + \eta^2} = \sqrt{\left((x-a)/2r_0^* + \frac{1}{4}\right)^2 + (y/2r_0^*)^2},$$

а φ — угол наклона радиуса вектора, исходящего из точки $(a - r_0^*/2, 0)$ с осью абсцисс.

Из представления (4.3.12) следует оценка

$$(4.3.20) \quad \mathcal{L}(\sigma_{np}) = o(\varepsilon) \text{ в } G_s, \quad \sigma_{np}|_{\partial G_s} = o(\varepsilon),$$

и в силу общих теорем линейной теории упругости получаем

$$(4.3.21) \quad |\sigma_{\text{ост}} - \sigma_{np}| = o(\varepsilon).$$

Применяя критерий В. В. Новожилова

$$\frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} \max \sigma_{\varphi\varphi} dr = \frac{1}{\delta} \int_a^{a+\delta} \sigma_{\nu\nu}|_{x=0} dr \leq \sigma_c,$$

приближение (4.3.12) и оценки (4.3.21) получаем

$$(4.3.22) \quad \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \sigma_{\varphi\varphi}|_{y=0} dx = \frac{P}{8} \sqrt{\frac{a}{r_0^*}} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left(\frac{4}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{\sqrt{\varrho^3}} \right) dx = P \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\delta \sqrt{1 + r_0^*/2\delta}}}.$$

и отсюда получаем первое приближение критической нагрузки.

$$(4.3.23) \quad p^* = \frac{\sigma_c \sqrt{\delta}}{\sqrt{2a}} \cdot \sqrt{1 + \frac{r_0^*}{2\delta}}.$$

В частности, для эллиптического выреза $r_0^* = b^2/a$ и формула (4.3.21) совпадает с (4.1.16).

§ 4. О неустойчивости плоского решения задачи о растяжении пластины с внутренним разрезом⁽⁵⁾

В настоящем параграфе обсуждается некоторый эффект, вызванный наличием разреза и учетом нелинейности.

Рассматривается пластина, ослабленная конечным разрезом; растягиваемая усилиями, действующими в плоскости пластины перпендикулярно разрезу.

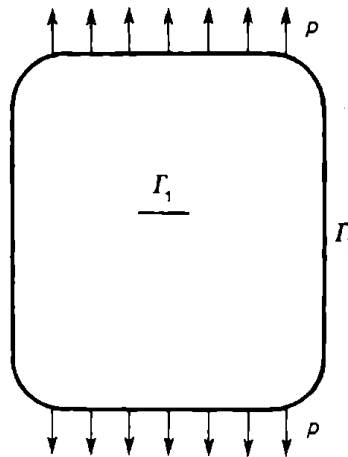


Рис. 25

Поведение пластины с учетом геометрической нелинейности описывается системой уравнений.

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} D\Delta^2 w &= h[w_{xx}\mathcal{F}_{yy} + w_{yy}\mathcal{F}_{xx} - 2w_{xy}\mathcal{F}_{xy}], \\ \Delta^2 \mathcal{F} &= E[w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}], \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(4.3.2) \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma} = \varphi_1(P_1 A); \quad \sigma_{ns}|_{\Gamma} = \varphi_2(P_1 A),$$

$$(4.3.3) \quad w|_{\Gamma_2} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(4.3.4) \quad w_{yy} + \nu w_{xx}|_{\Gamma_1} = w_{yyy} - (2 - \nu)w_{xxy}|_{\Gamma_1} = 0.$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и A — точка контура Γ .

⁽⁵⁾ Этот § с точностью до обозначений содержит результаты статьи Н. А. Никольской [43].

„Плоское” решение задачи при $w \equiv 0$ определяется из уравнения

$$(4.3.5) \quad \Delta^2 \mathcal{F}_0 = 0$$

и граничных условий (4.3.2).

Известно ([44], [45]), что у „плоского” решения существует область $\{\Omega_1\}$, примыкающая к трещине,

$$(4.3.6) \quad \sigma_{xx} = \mathcal{F}_{0yy} < 0.$$

Составим функционал потенциальной энергии пластины

$$(4.3.7) \quad I(w) = \frac{1}{2} h \int_{\Omega} (w_x^2 \mathcal{F}_{yy} + w_y^2 \mathcal{F}_{xx} - 2w_x \mathcal{F}_{xy}) d\Omega - \\ - \frac{h}{2E} \int_{\Omega} [(\Delta \mathcal{F})^2 - 2(1+\nu)(\mathcal{F}_{xx} \mathcal{F}_{yy} - \mathcal{F}_{xy}^2)] d\Omega + \\ + \frac{D}{2} \int_{\Omega} [(\Delta w)^2 - 2(1-\nu)(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2)] d\Omega.$$

Здесь \mathcal{F} определяется из второго уравнения (4.3.1) при граничных условиях (4.3.2).

Покажем, что существует $p = p^*$, для которого $\delta^2 I$ вторая вариация энергии в окрестности „плоского” решения отрицательна при $p > p^*$ и положительна при $p < p^*$.

Рассмотрим функционал $I(w)$ на множестве функций

$$(4.3.8) \quad w = w_0 + \delta w = \alpha \eta(x, y),$$

где α — малый параметр, а $\eta \equiv 0$ в $\Omega \setminus \Omega_1$, $\eta \in C'(\bar{\Omega})$ и удовлетворяет условию

$$(4.3.9) \quad \eta|_{\partial\Omega_1} = \frac{\partial \eta}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

Следуя [46], представим \mathcal{F} в виде

$$(4.3.10) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \alpha \varphi + \alpha^2 \psi,$$

где φ и ψ определяются из уравнений

$$(4.3.11) \quad \Delta^2 \varphi = 0, \quad \varphi|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

(т.е., $\varphi \equiv 0$).

$$(4.3.12) \quad \Delta^2 \psi = \eta_{xy}^2 - \eta_{xx} \eta_{yy}, \quad \psi|_{\Gamma} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Запишем $\delta^2 I$ в окрестности плоского решения

$$(4.3.13) \quad \delta^2 I = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I(w_0 + a\eta)}{\partial a^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \int_{\Omega} (\Delta \eta)^2 d\Omega + \\ + h \int_{\Omega} [\mathcal{F}_{0xx} \eta_y^2 + \mathcal{F}_{0yy} \eta_x^2 - 2\mathcal{F}_{0xy} \eta_x \eta_y] d\Omega.$$

В частности рассмотрим в Ω квадрат $\Pi\{x \in [x_1; x_1 + a], y \in [y_1; y_1 + a]\}$ и выберем η следующим образом

$$(4.3.14) \quad \eta(x, y) = \begin{cases} \sin^2(\pi(x-x_1)n/a) \sin^2(\pi(y-y_1)/a) & \text{при } x, y \in \Pi, \\ 0 & \text{при } x, y \notin \Pi. \end{cases}$$

Тогда выражение для $\delta^2 I$ приводится к виду

$$(4.3.15) \quad \delta^2 I = l^2 n^4 - p(b^2 n^2 - c^2 n + d),$$

где l, b, c, d — постоянные, вычислительные для данной задачи.

Выбираем и фиксируем n так, чтобы $b^2 n^2 - c^2 n + d$ было больше нуля; тогда существует p , при котором выполняется первенство $\delta^2 I < 0$. А так как [47] функционал I полуограничен снизу, то установленное выше означает, что, начиная с некоторого p^* , помимо плоского существует еще по крайней мере одно изгибное решение, т. е. „выпучивание” имеет место.

Литература

- [1] A. A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, 221 (1921), 163–198.
- [2] —, *The theory of rupture*, In: *Proceedings of the 1st International Congress for Applied Mechanics Delft 1924*, pp. 55–63.
- [3] В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в конических областях*, ДАН СССР 153 (1963), 27–29.
- [4] Я. С. Уфлянд, *Интегральные преобразования в задачах теории упругости*, „Наука”, Ленинград 1967, 402 стр.
- [5] В. Г. Мазья, В. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений*, ДАН СССР 219 (1974), 286–291.
- [6] —, —, *Оценки в \mathcal{L}_p и в классах Гельдера*, Math. Nachr. 81 (1978), 25–82.
- [7] С. А. Назаров, *Асимптотика по малому параметру эллиптической краевой задачи в области с конической точкой*, ДАН СССР 238.4 (1978), 827–830.
- [8] —, *Метод Вишина-Люстерника в области с коническими точками*, ДАН СССР 245.6 (1979), 1307–1311.
- [9] Г. И. Баренблатт, *О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении*, ПММ 23, № 3, 4, 5 (1969).
- [10] В. В. Новожилов, *О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности*, ПММ, в. 2 (1969), 212–222.
—, *К основам теории равновесных трещин в упругих телах*, ПММ в. 5 (1969), 797–812.

- [11] В. В. Панасюк, *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*, Наукова Думка, Киев 1968, стр. 1-245.
- [12] D. S. Dugdale, *Yielding of steel sheets containing slits*, Journ. Mech. Phys. Solids 8 (1960), 100-107.
- [13] Н. Ф. Морозов, *К вопросу о деформационных критериях разрушения*, Вестник ЛГУ 13 (1980), 82-84.
- [14] Г. Си, Г. Либовиц, *Математическая теория хрупкого разрушения*, В сб. *Разрушение*, т. 2, М. Мир 1975, стр. 83-203.
- [15] G. C. Sih, H. Liebowitz, *On the Griffith energy criterion for brittle fracture*, Intern. J. Solids and Structure 3 (1967), 1-22.
- [16] В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Об асимптотике решений эллиптических краевых задач...*, ДАН СССР 249. I 1979, 94-96.
- [17] Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, т. 2, Наука, 1976 стр. 568.
- [18] C. E. Inglis, *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*, Trans. Inst. of Naval Architects, VLV London 1913, pp. 219-230.
- [19] И. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, АН СССР, Москва 1954, 647 стр.
- [20] А. М. Линьков, *Замечание к вычислению предела прочности на сжатие*, МТТ 4 (1972), 168-170.
- [21] В. В. Панасюк, *О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии*, ПММ 1.9 (1961).
- [22] I. Rice, D. Drucker, *Energy changes in stressed bodies due to void crack growth*, I IFM 3.1 (1967), 19-28.
- [23] В. Новичкий, *Теория упругости*, Мир, Москва 1975.
- [24] E. Sternberg, R. Muke, *The effect of couple stresses on the stress-concentration around a crack*, Intern. J. Solids and Structure 3.1 (1967), 69-95.
- [25] В. А. Дудников, Н. Ф. Морозов, *Определение напряженно деформированного состояния плоских, ослабленных вырезами областей*, МТТ 1 (1975), 95-100.
- [26] C. Atkinson, F. G. Leppington, *The effect of couple stresses on the tip of a crack*, Intern. J. Solids and Structure 13.11 (1977), 1103-1122.
- [27] В. А. Ляхачев, А. Н. Вергазов, В. В. Рыбин, Ю. В. Соломко, *Особенности фрагментарных структур в сплавах молибдена...*, Физика металлов и металловедение 43.1 (1977), 70-75.
- [28] E. Weinel, *Die Spannungserhöhung durch Kreis bogenkerben*, Zeitschrift für Angew. Math. und Mech. 21.4 (1941), 228-241.
- [29] Chin-Bing-Ling, *On the stresses in a notched plate under tension*, Journ. Math. and Phys. 26.4 (1947), 284-295.
- [30] Л. С. Уфлянд, *Биполярные координаты в теории упругости*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград 1950, 230 стр.
- [31] В. Н. Семенов, *Асимптотика напряженно деформированного состояния в окрестности луночного выреза*, МТТ 3 (1980).
- [32] M. L. Williams, *Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners*, J. Appl. Mech. 19.4 (1952), 526-528.
- [33] И. И. Бугаков, И. И. Демидова, *Квазихрупкое разрушение образцов с вырезом, имеющим угловые точки*, МТТ 3 (1980).
- [34] О. Г. Рыбакина, *Определение коэффициента интенсивности напряжений в конце трещины на краю кругового отверстия при сжатии. Сборник посвященный 100-летию И. Г. Бубнова, Проблемы строительной механики корабля*. Судпромгиз, Ленинград 1973, стр. 196-208.
- [35] *Summary of SIF design graphs for cracks emanating from circular holes*, Intern. J. Structure 14.6 (1978), 585-596.

- [36] Г. П. Черепанов, *Механика хрупкого разрушения*, Наука, 1974, 640 стр.
- [37] Н. Ф. Морозов, *Исследование разрушающей нагрузки для области, ослабленной вырезом в виде лунки*, ДАН СССР 253.6 (1980), 1336–1338.
- [38] А. А. Храпков, *Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным разрезом в вершине*, ПММ 35.4 (1971), 677–683.
- [39] А. А. Храпков, *Задачи об упругом равновесии бесконечного клина с несимметричным разрезом в вершине, разрешаемые в замкнутом виде*, ПММ 35.9 (1971), 1062–1079.
- [40] I. Sneddon, *Crack problems in the theory of elasticity*. Developments in theoretical and appl. mechanics, Vol. 3, Pergamon Press, New York–London 1967.
- [41] I. Sneddon and M. Lowengrub, *Crack problems in the classical theory of elasticity*, Wiley and Sons, 1972.
- [42] А. М. Ильин, Матем. сборник 102.2 (1977), 266.
- [43] Н. А. Никольская, *О неустойчивости плоского решения задачи о растяжении пластины...*, Вестник ЛГУ, 1976.
- [44] —, *Об устойчивости растянутой пластины с внутренней трещиной*. МТТ 5 (1973).
- [45] Ю. М. Даль, З. Н. Литвиненкова, *О закритической деформации пластин с разрезом*, Прикладная математика II (1975).
- [46] Н. Ф. Морозов, *К вопросу о существовании несимметричного решения...*, Изв. ВУЗов, Математика 2 (1961).
- [47] Л. С. Срубщик, В. И. Юдович, *Замечания об устойчивости мембранного решения*, ПММ 30.1 (1966).

*Presented to the semester
Mathematical Models and Methods
in Mechanics*