POLSKA AKADEMIA NAUK, INSTYTUT MATEMATYCZNY

DISSERTATIONES MATHEMATICAE

(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

CCXXX

PETER WAGNER

Parameterintegration zur Berechnung von Fundamentallösungen

WARSZAWA 1984
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PRINTED IN POLAND

ISBN 83-01-04905-7 ISSN 0012-3862

WROCLAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der Parameterintegration zur Berechnung von Fundamentallösungen linearer partieller Differentialgleichungen, welche D. W. Bresters erstmalig auf Produkte von Klein-Gordon--Operatoren anwandte, systematisch entwickelt.

Kapitel I bringt eine Zusammenstellung von Hilfsmitteln aus der Distributionentheorie. In Kapitel II bzw. III werden hinreichende Voraussetzungen für die Gültigkeit der Methode der Parameterintegration für Produkte hyperbolischer bzw. homogener, elliptischer Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten angegeben. In einigen Beispielen am Ende der Kapitel II bzw. III ermittelte ich mit dieser Methode (zum Teil neue) Fundamentallösungen. Grossen Wert legte ich dabei auf eine möglichst explizite Angabe der Fundamentallösungen.

Das Thema dieser Arbeit stellte mir Norbert Ortner. Ihm verdanke ich auch zahlreiche Anregungen und die meisten Literaturangaben.

Peter Wagner

Innsbruck, April 1981

I. Bemerkungen zur Distributionentheorie

§ 1. Notationen

Ich verwende die Bezeichnungen aus der Distributionentheorie, wie sie in jedem Standardlehrbuch – etwa [D 1], [S 3], [H 3], [H 2] oder [S 2] – eingeführt werden.

Insbesondere werden die Abkürzungen $D = D(R^n)$, $S = S(R^n)$, $D' = D'(R^n)$, $S' = S'(R^n)$ benützt. Für die Anwendung einer Distribution $T \in D'$ bzw. S' auf eine Funktion $\varphi \in D$ bzw. S wird $\langle \varphi, T \rangle$ geschrieben. Der Raum L^1_{loc} der lokalintegrablen Funktionen wird als Teilraum von D' betrachtet.

$Y(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^1)$ bezeichnet die Heaviside-Funktion:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sig}(x) = -1 + 2Y(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R).$$

$r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, $\quad n$ bedeutet immer die Raumdimension.

Wir verwenden – abweichned von [S 2] – die Fouriertransformation in der Form

$$F\colon S \to S\colon \quad \varphi \mapsto (2\pi)^{-n/2} \int e^{-ix\xi} \varphi(x)\, dx,$$

$$F\colon S' \to S'\colon \; T \mapsto (\varphi \mapsto \langle F\varphi, T \rangle).$$

Dann gelten die Formeln von [D 1], S. 144.

$\delta \in D'$ bezeichnet die Distribution $\varphi \mapsto \varphi(0)$. Es ist $F\delta = (2\pi)^{-n/2}$, $F1 = (2\pi)^{n/2}\,\delta$.

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bezeichnet gewöhnlich einen Multiindex und $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots$ $\ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$ den zugehörigen Differentialoperator.

Für ein Polynom P (in mehreren Unbestimmten) bedeutet gr P seinen Grad.

$\delta_{a,b}$ bezeichnet das Kroneckersymbol.

$P(\partial), Q(\partial)$ sind lineare Differentialoperatoren mit *konstanten* Koeffizienten.

$\Delta_n := \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$ wird für den Laplaceoperator geschrieben.

Eine Fundamentallösung eines linearen Differentialoperators $P(\partial)$ ist eine Distribution $E \in D'$, die $P(\partial)\,E = \delta$ erfüllt.

Intervalle in R werden mit eckigen Klammern geschrieben. Für $a \leqslant b$

ist zum Beispiel $]a, b] = \{x\colon a < x \leqslant b\}$, $R^* = R\backslash\{0\}$. Für $z \in C\backslash]-\infty, 0]$ ist mit $\log z$ der in diesem einfach zusammenhängenden Gebiet definierte, durch $\log 1 = 0$ normierte Logarithmus gemeint.

§ 2. Stetigkeit, Differentiation und Integration von distributionenwertigen Funktionen

Wir betrachten eine offene Menge $\Lambda \subset R^m$ bzw. C^m und eine überall definierte „distributionenwertige Funktion" $f\colon \Lambda \to D'(R^n)$. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ seien Koordinaten in Λ.

Die Stetigkeit und (komplexe) Differenzierbarkeit von f nach λ_i wird wie in [S 3], § 2.2.4 definiert (siehe § 5 unten, Bsp. 1, 2). Insbesondere gilt für $\varphi \in D$: $\langle \varphi, \partial_{\lambda_i} f \rangle = \partial_{\lambda_i}[\langle \varphi, f \rangle]$. Γ sei nun ein kompakter, rektifizierbarer Weg in Λ. Auf Γ wird in kanonischer Weise ein Mass induziert. f heisse über Γ (komplex) *integrabel*, wenn $T \in D'$ existiert, sodass für $\varphi \in D$ gilt:

i) $\langle \varphi, f(\lambda) \rangle$ ist über Γ integrabel.

ii) $\int\limits_{\lambda \in \Gamma} \langle \varphi, f(\lambda) \rangle = \langle \varphi, T \rangle$.

T wird dann mit $\int\limits_{\lambda \in \Gamma} f(\lambda)$ bezeichnet.

Wenn f stetig ist, so ist es auch über Γ (sogar Riemann-) integrabel (siehe [S 3], § 2.2.4 oder [B 2], Ch. I, Th. 12). Zur Berechnung der oben definierten Kurvenintegrale (siehe auch Bsp. 3 in § 5) dient der folgende

Satz 1. *Es seien $\Delta \subset R^m$ offen, $\Gamma \subset \Lambda$ ein rektifizierbarer Weg, $g \in L^1_{\text{loc}}(\Gamma \times R^n)$. Dann ist*

i) *die Funktion $f\colon \Gamma \to D'\colon \lambda \mapsto (\varphi \mapsto \int \varphi(x) g(\lambda, x)\,dx)$, Γ – f. ü. wohldefiniert und über Γ integrabel.*

ii) $\int\limits_{\lambda \in \Gamma} f(\lambda) \in L^1_{\text{loc}}(R^n) \subset D'$ *und* $[\int\limits_{\lambda \in \Gamma} f(\lambda)](x) = \int\limits_{\lambda \in \Gamma} g(\lambda, x)$ *f.ü.*

Beweis. a) Nach bekannten Sätzen der Masstheorie ist $g(\lambda, x) \in L^1_{\text{loc}}(R^n) \subset D'$ für alle $\lambda \in \Gamma$.

b) $\int\limits_{\lambda \in \Gamma} \langle \varphi, f(\lambda) \rangle = \int\limits_{\lambda \in \Gamma} \int \varphi(x) g(\lambda, x)\,dx = \int \varphi(x)\,dx \int\limits_{\lambda \in \Gamma} g(\lambda, x)$

nach Fubini, da $\varphi(x) g(\lambda, x) \in L^1(\Gamma \times R^n)$ für $\varphi \in D$.

Später benötigen wir noch

Satz 2. *Es sei $m \geqslant 0$, $f\colon \Lambda \to D'\colon \lambda \mapsto P_\lambda$, P_λ sei ein Polynom vom Grad $\leqslant m$, d. h. $P_\lambda = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha^\lambda x^\alpha$, Γ sei ein rektifizierbarer Weg in Λ. Dann gilt:*

i) *Die Aussagen* (1) *f integrabel über Γ und* (2) $\forall \alpha\colon a_\alpha^\lambda \in L^1(\Gamma)$ *sind äquivalent.*

ii) *Wenn* (1) *und* (2) *erfüllt sind, so ist*

$$\int\limits_{\lambda \in \Gamma} f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} x^\alpha \int\limits_{\lambda \in \Gamma} a_\alpha^\lambda.$$

Beweis. Es sei zunächst f über Γ integrabel; wir wählen $\varphi_\alpha \in D$ mit $\langle \varphi_\alpha, x^\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ für $|\alpha|, |\beta| \leqslant m$. Dann ist $\int\limits_{\lambda\in\Gamma} \langle \varphi_\alpha, f \rangle = \int\limits_{\lambda\in\Gamma} a_\alpha^\lambda$.

Damit ist die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) gezeigt. Wenn nun (2) gilt, so ist für $\varphi \in D$:

$$\langle \varphi, f(\lambda) \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha^\lambda \langle \varphi, x^\alpha \rangle$$

über Γ integrabel und $\int\limits_{\lambda\in\Gamma} \langle \varphi, f \rangle = \langle \varphi, T \rangle$ mit $T := \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} x^\alpha \int\limits_{\lambda\in\Gamma} a_\alpha^\lambda$.

Daher folgt (1) und die Behauptung ii) des Satzes.

§ 3. Lineare Transformationen von Distributionen und Differentialoperatoren

A: $R^n \to R^n$ sei eine nicht ausgeartete lineare Abbildung, $\det A$ ihre Determinante, A^T die transponierte, lineare Abbildung; wir definieren die Zusammensetzung $T \circ A$ von $T \in D'$ mit A durch

$$\langle \varphi, T \circ A \rangle = |\det A|^{-1} \langle \varphi \circ A^{-1}, T \rangle .$$

Für $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}} \subset D'$ ergibt sich damit die übliche Komposition von ψ mit A (siehe [D 1], S. 108). Wenn P ein Polynom in n Unbestimmten und $P(\partial)$ der zugehörige Differentialoperator ist, so setzen wir $P(\partial) \circ A := (P \circ A)(\partial)$.

Satz 3. *Die Diagramme*

$$\begin{tikzcd} D' \arrow[r, "P(\partial)\circ A"] \arrow[d, "A^T"'] & D' \arrow[d, "A^T"] \\ D' \arrow[r, "P(\partial)"'] & D' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D' \arrow[r, "P(\partial)"] \arrow[d, "A^T"'] & D' \arrow[d, "A^T"] \\ D' \arrow[r, "P(\partial)\circ A^{-1}"'] & D' \end{tikzcd}$$

kommutieren.

Beweis. Das rechte Diagramm ergibt sich aus dem linken. Wir betrachten das linke Diagramm mit D an Stelle von D' und folgern dann die Behauptung aus der Dichtheit von D in D'. Es genügt also für $\varphi \in D$ zu zeigen: $P(\partial)[\varphi \circ A^T] = [P(\partial) \circ A](\varphi) \circ A^T$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P ein Monom ist. Wir argumentieren nun durch Induktion über den Grad des Monoms; die Behauptung gelte also für $Q = x^\gamma$ und es sei $P = x_1 \cdot Q$; dann ist

$$P(\partial)[\varphi \circ A^T] = Q(\partial)\partial_{x_1}[\varphi \circ A^T] = Q(\partial) \sum_k (\partial_{x_k}\varphi) \circ A^T \cdot \partial_{x_1}(x_k \circ A^T);$$

e_i, $i = 1, \ldots, n$ sei die Standardbasis in R^n, $Ae_i = \sum\limits_j A_{ij} e_j$. Dann ist

$$(x_k \circ A^T)(e_i) = A_{ki}, \quad \partial_{x_1}(x_k \circ A^T) = A_{k1},$$

$$\begin{aligned} P(\partial)[\varphi \circ A^T] &= Q(\partial) \sum_k A_{k1} \cdot (\partial_{x_k} \varphi) \circ A^T = \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \sum_k A_{k1} \left[[Q(\partial) \circ A] (\partial_{x_k} \varphi) \right] \circ A^T \\ &= \left[(Q(\partial) \circ A) \cdot (\partial_{x_1} \circ A) \right] (\varphi) \circ A^T = [P(\partial) \circ A] (\varphi) \circ A^T \end{aligned}$$

wegen

$$\partial_{x_1} \circ A = (x_1 \circ A)(\partial) = \sum_k A_{k1} \partial_{x_k}.$$

Damit ist alles gezeigt.

Im nächsten Satz bestimmen wir die Fundamentallösung eines linear transformierten Differentialoperators (siehe Bsp. 4 in § 5).

SATZ 4. *$P(\partial)$ sei ein Differentialoperator, E eine Fundamentallösung zu $P(\partial)$, A wie oben. Dann ist $|\det A|^{-1} E \circ (A^T)^{-1}$ eine Fundamentallösung von $P(\partial) \circ A$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \delta &= P(\partial) E = P(\partial)[E \circ A^{T-1} \circ A^T] = \text{(Satz 3)} \\ &= (P(\partial) \circ A)(E \circ A^{T-1}) \circ A^T \Rightarrow (P(\partial) \circ A)(E \circ A^{T-1}) = \delta \circ A^{T-1} = |\det A| \cdot \delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Dasselbe Resultat findet sich (in anderer Notation) in [G 2], p. 284.

§ 4. Einteilung von Differentialoperatoren

Bekanntlich werden Differentialoperatoren in elliptische, hyperbolische, parabolische und nicht klassifizierbare eingeteilt. Ich verwende die Definitionen 3.3.2 für elliptische, 4.1.1 für hypoelliptische, 5.4.1 für hyperbolische und 5.8.1 für parabolische Operatoren in [H 4]. Bei hyperbolischen und parabolischen Operatoren $P(\partial)$ bezeichnen wir die Koordinaten mit $t, x_1, \ldots, x_n$ und nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an (siehe [H 4], S. 130, (5.4.1.)), dass

$$P(it - s, ix_1, \ldots, ix_n) \neq 0 \quad \text{für} \quad s < s_0 \in R, t, x_1, \ldots, x_n$$

beliebig.

Theorem 5.6.1 in [H 4] erhält dann folgende Gestalt:

SATZ 5. *$P(\partial)$ sei ein hyperbolischer Differentialoperator. $H = \{(t, x_1, \ldots, x_n)\colon t \geq 0\}$. Dann existiert genau eine Fundamentallösung E von $P(\partial)$ mit supp $E \subset H$.*

Für Differentialoperatoren, die invariant unter gewissen Matrizengruppen sind, ergeben sich aus Satz 4 einige Folgerungen für ihre Fundamentallösungen. Wir benötigen dazu den Begriff der Homogenität einer Distribution, wie er in [D 1], § 23 definiert wird. Weiters verwende ich die

Definition. P sei ein Polynom in n Variablen.

1) $\mathrm{Gl}_n := \{A: R^n \to R^n$ linear, nicht ausgeartet$\}$,

2) $I(P) := \{A \in \mathrm{Gl}_n: P \circ A = \lambda P, \lambda \in C\}$,

3) $V \leqslant_C D'$ heisst *P-eindeutig*, falls $\# \{T \in V: P(\partial) T = \delta\} \leqslant 1$,

4) $V \leqslant_C D'$, $A \in \mathrm{Gl}_n$; V heisst *A-invariant*, falls gilt: $\forall T \in V$: $T \circ A \in V$.

Bemerkungen. 1) $P = r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \Rightarrow I(P) = R^* \cdot O_n = \{c \cdot A$: $c \in R^*$, A orthogonal$\}$.

2) Wenn P hyperbolisch ist, so ist $V := \{T$: supp $T \subset \{t \geqslant 0\}\}$ nach Satz 5 P-eindeutig.

Satz 6. *P sei ein Polynom, V P-eindeutig, $A \in I(P)$, $P \circ A = \lambda P$, V sei A-invariant, $E \in V$ eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. Dann ist*: $\lambda^{-1} |\det A| \times \times E \circ A^T = E$.

Beweis. Nach Satz 4 ist $|\det A| \cdot E \circ A^T$ Fundamentallösung von $P(\partial) \circ A^{-1} = \lambda^{-1} P(\partial) \Rightarrow \lambda^{-1} |\det A| E \circ A^T$ ist Fundamentallösung von $P(\partial)$ und liegt in V, da $V I(P)$-invariant ist. Aus der P-Eindeutigkeit von V folgt $\lambda^{-1} |\det A| E \circ A^T = E$.

Korollar. *$P = P(t, x_1, \ldots, x_n)$ sei homogen vom Grad m und hyperbolisch, E die Fundamentallösung von $P(\partial)$ mit Träger im Halbraum $t \geqslant 0$. Dann ist E homogen von der Ordnung $m-n-1$ und liegt in S'.*

Beweis. a) Wir verwenden Satz 6 mit $A = cI$, $c > 0$, I Einheitsmatrix, $V = \{T$: supp $T \subset \{t \geqslant 0\}\}$, $\lambda = c^m$, $\det A = c^{n+1}$.

b) Nach [D 1], S. 154 liegt jede homogene Distribution in S'.

Bemerkungen. 1) Tatsächlich hat *jeder* Operator mit konstanten Koeffizienten eine Fundamentallösung in S', jedoch ist der Beweis nicht einfach (siehe [H 6]).

2) Im 5. Beispiel wird Satz 6 auf den Laplaceoperator angewendet.

§ 5. Beispiele

1. Beispiel. $\log(y - \lambda x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^2)$ *ist eine analytische Funktion von* $\lambda \in C \setminus R$.

Beweis. Es sei $\varphi \in D$; dann ist

$$\frac{d}{d\lambda} \langle \varphi, \log(y-\lambda x)\rangle = \lim_{\mu\to\lambda} \int\int \varphi(x,y) \frac{\log(y-\mu x) - \log(y-\lambda x)}{\mu - \lambda} \, dx\, dy$$

$$= \lim_{\mu\to\lambda} \frac{1}{\mu-\lambda} \int\int \varphi(x,y) \log\left(1 + \frac{(\lambda-\mu)x}{y-\lambda x}\right) dx\, dy$$

$$= (\text{Satz von der majorisierten Konvergenz})$$

$$= \int\int \varphi(x, y) \lim_{\mu \to \lambda} \frac{1}{\mu - \lambda} \log\left(1 + \frac{(\lambda - \mu)x}{y - \lambda x}\right) dx\, dy$$

$$= \int\int \varphi(x, y) \frac{-x}{y - \lambda x} dx\, dy.$$

Somit: $\log(y - \lambda x)$ ist komplex differenzierbar und

$$\frac{d}{d\lambda} \log(y - \lambda x) = -\frac{x}{y - \lambda x} \in L^1_{\text{loc}}(R^2).$$

Bemerkung. Wie wir später sehen werden (Bsp. 6, Kap. 3), lässt sich $\lambda \mapsto \log(y - \lambda x)$ in kein, die obere oder untere Halbebene umfassendes, Gebiet analytisch fortsetzen.

2. Beispiel. *Die Funktion* $\{\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda > 0\} \to D', \lambda \mapsto \log(y - \lambda x)$ *lässt sich in* $\{\lambda\colon \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0\}$ *stetig fortsetzen. Für* $\lambda \in R$ *ergibt sich als Randwert*:

$$\log|y - \lambda x| - i\pi \operatorname{sig}(x)\, Y(\lambda x - y) =: \log^+(y - \lambda x).$$

Beweis. Es sei $\varphi \in D$, $\lambda_0 \in R$; dann ist

$$\lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \operatorname{Im}\lambda > 0}} \langle \varphi, \log(y - \lambda x)\rangle = \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \operatorname{Im}\lambda > 0}} \int\int \varphi(x, y) \log(y - \lambda x)\, dx\, dy = \text{(Lebesgue)}$$

$$= \langle \varphi, \log^+(y - \lambda x)\rangle.$$

Bemerkungen. 1) Als Fortsetzung von $\log(y - \lambda x)$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ in ein $\lambda \in R$ ergibt sich ebenso: $\log|y - \lambda x| + i\pi \operatorname{sig}(x)\, Y(\lambda x - y) =: \log^-(y - \lambda x)$.

2) Spezialfälle dieser Formeln sind in [B 2], p. 51 angegeben.

3. Beispiel. *Es sei* $a, b \geqslant 0$; $f\colon\,]0, \infty[\, \to D'(R^4)\colon \lambda \mapsto \lambda^{-3/2}\, Y(t - r/\sqrt{\lambda})$, *wobei* t, x *Koordinaten im* R^4 *sind und* $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. *Dann gilt*: $\int_{a^2}^{b^2} f(\lambda)\, d\lambda = E_{(b)} - E_{(a)}$, *wobei* $E_{(a)} = (2/ar)(at - r)\, Y(at - r)$ *und analog* $E_{(b)}$.

Beweis. i) Wir wenden Satz 1 an; $\Lambda := [0, \infty[$, $g(\lambda, t, x) := \lambda^{-3/2} \times Y(t - r/\sqrt{\lambda})$; es sei $K \subset R^4$ kompakt; dann ist

$$\int_K dt\, dx \int_0^\infty |g(\lambda, t, x)|\, d\lambda = \int_K dt\, dx \int_0^\infty \lambda^{-3/2}\, Y(t - r/\sqrt{\lambda})\, d\lambda$$

$$= \int_K dt\, dx \int_{r^2/t^2}^\infty \lambda^{-3/2}\, d\lambda = \int_K \frac{2|t|}{r}\, dt\, dx < \infty$$

$$\Rightarrow g(\lambda, t, x) \in L^1_{\text{loc}}(\Lambda \times R^4).$$

Somit ist f integrabel und $\int_{a^2}^{b^2} f(\lambda)\, d\lambda$ ergibt sich durch punktweise Integration.

ii) $\int\limits_{a^2}^{b^2} f(\lambda)\,d\lambda = E_{(b)} - E_{(a)}$ mit

$$E_{(b)} = \int\limits_0^{b^2} f(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\substack{0 \\ t \geq r/\sqrt{\lambda}}}^{b^2} \lambda^{-3/2}\,d\lambda$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < r/b \\ \dfrac{2}{r}\left(t - \dfrac{r}{b}\right) & \text{für} \quad t > r/b \end{cases} = \frac{2}{br}(br - r)\,Y(bt - r)$$

und analog $E_{(a)}$.

Bemerkung. $f(\lambda)$ ist bis auf eine multiplikative Konstante eine Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^2 := (\partial_t^2 - \lambda\Delta_3)^2$ (siehe Beispiel 4 unten). Das Integral $\int\limits_{a^2}^{b^2} f(\lambda)\,d\lambda$ ist (bis auf eine Konstante) eine Fundamentallösung des Operators $P_{a^2}(\partial)\cdot P_{b^2}(\partial)$, wie in Kapitel II gezeigt wird.

4. Beispiel. *Es sei $\lambda > 0$; dann ist $(1/8\pi)\lambda^{-3/2}\;Y(t - r/\sqrt{\lambda})$ eine Fundamentallösung von $(\partial_t^2 - \lambda\Delta_3)^2$, $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$.*

Beweis. Nach [0 2], Op. 52 ist $(1/8\pi)\,Y(t-r)$ eine Fundamentallösung von $(\partial_t^2 - \Delta_3)^2$; $(\partial_t^2 - \lambda\Delta_3)^2 = (\partial_t^2 - \Delta_3)^2 \circ A$, wobei $A(t, x, y, z) = (t, \sqrt{\lambda}\,x, \sqrt{\lambda}\,y, \sqrt{\lambda}\,z)$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 4.

5. Beispiel. *$\dot{B}'$ sei wie in [S 2], S. 200 definiert. Dann gilt: Es existiert höchstens eine Fundamentallösung E von Δ_n mit $E \in \dot{B}'$ und für diese gilt:* i) *E ist rotationssymmetrisch.* ii) *E ist homogen von der Ordnung $2-n$.*

Beweis. a) $\dot{B}'$ ist Δ_n-eindeutig:

Es seien $E_1, E_2 \in \dot{B}'$ mit $\Delta E_1 = \delta = \Delta E_2$; $\dot{B}' \subset S' \Rightarrow E_1 - E_2 \in S'$, $\Delta(E_1 - E_2) = 0 \Rightarrow r^2 F(E_1 - E_2) = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} F(E_1 - E_2) \subset \{0\} \Rightarrow F(E_1 - E_2) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta$ für ein $m \Rightarrow E_1 - E_2$ ist ein Polynom in $\dot{B}' \Rightarrow E_1 - E_2 = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$. (vgl. [Z 1], ex. 82, p. 147).

b) Wir verwenden nun Satz 6 mit $V = \dot{B}'$ und A orthogonal bzw. $A = c\cdot$Identität, $c > 0$ und erhalten i) und ii).

Bemerkung. Die bekannte Fundamentallösung $\dfrac{\Gamma(n/2)}{(2-n)\cdot 2\pi^{n/2}}\,r^{2-n}$ für $n \geq 3$ (siehe [0 2], Op. 10) erfüllt offenbar i) und ii). Für $n = 1, 2$ kann es keine Fundamentallösung in $\dot{B}'$ geben, da homogene, nicht identisch verschwindende Distributionen von der Ordnung ≥ 0 nicht in $\dot{B}'$ liegen.

II. Parameterintegration bei hyperbolischen Operatoren

§ 1. Motivation

Gegeben sei ein von einem reellen Parameter λ linear abhängender Differentialoperator $P(\partial)+\lambda Q(\partial)$. Eine Fundamentallösung E_λ des iterierten Operators $(P(\partial)+\lambda Q(\partial))^2$ sei bekannt. Wir suchen eine Darstellung einer Fundamentallösung E von $(P(\partial)+aQ(\partial))(P(\partial)+bQ(\partial))$, $a \neq b \in R$ durch E_λ.

Wenn $E \in S'$ ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n/2} = F\delta &= F\{[(P(\partial)+aQ(\partial))(P(\partial)+bQ(\partial))]E\} \\ &= (P(i\xi)+aQ(i\xi))(P(i\xi)+bQ(i\xi))FE.\end{aligned}$$

Falls man dividieren kann (was im allgemeinen nicht möglich ist), folgt:

$$FE = (2\pi)^{-n/2}\cdot[(P(i\xi)+aQ(i\xi))(P(i\xi)+bQ(i\xi))]^{-1}.$$

Wir verwenden nun einen Spezialfall der Feynman-Parameter-Formel (siehe [S 1], S. 72):

$$[(u+av)(u+bv)]^{-1} = (b-a)^{-1}\int_a^b (u+\lambda v)^{-2}\,d\lambda$$

für $a < b \in R$, $u, v \in C$, $u+\lambda v \neq 0$ für $\lambda \in [a, b]$.

Heuristische Anwendung auf obige Situation ergibt:

$$FE = (2\pi)^{-n/2}(b-a)^{-1}\int_a^b (P(i\xi)+\lambda Q(i\xi))^{-2}\,d\lambda = (b-a)^{-1}\int_a^b FE_\lambda\,d\lambda$$

(falls zum Beispiel $P(i\xi)+\lambda Q(i\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in R^n$ und $\lambda \in [a, b]$).

Somit ergibt sich als *heuristisches* Prinzip: $E = (b-a)^{-1}\int_a^b E_\lambda\,d\lambda$.

Bemerkungen. 1) Diese Methode geht auf [B 3] und [B 2] zurück, wo sie auf Produkte von Klein-Gordonoperatoren angewendet wird. Ich gebe im weiteren allgemeinere Bedingungen an, unter welchen sie anwendbar ist. In den Beispielen 1 und 2 wird die obige Formel bereits in einfachen Fällen getestet.

2) Klarerweise ist unser Vorgehen nur sinnvoll, wenn es „leichter" ist, die Fundamentallösung des Operators $(P(\partial)+\lambda Q(\partial))^2$ zu bestimmen als die von $(P(\partial)+aQ(\partial))(P(\partial)+bQ(\partial))$. Dass dies meistens der Fall ist, zeigen die Sätze 3,3' und 4 aus [O 1] und unsere Beispiele.

§ 2. Ein Satz für hyperbolische Operatoren

Im Falle hyperbolischer Operatoren ist es leicht, allgemeine Bedingungen anzugeben, unter denen die Formel $E = (b-a)^{-1} \int_a^b E_\lambda \, d\lambda$ gilt. Für E und E_λ sind dabei die eindeutig bestimmten Fundamentallösungen mit Träger im Halbraum zu nehmen (siehe Kap. I, Satz 5). Ich wiederhole zunächst einiges aus [H 4]. $P(\partial)$ sei ein linearer Differentialoperator (mit konstanten Koeffizienten) von der Ordnung m. $t, x_1, \ldots, x_n$ seien die unabhängigen Variablen, P_{hom} bezeichne den Hauptteil von P, d.h. $\text{gr}\, P = \text{gr}\, P_{\text{hom}} =: m$ und $\text{gr}\,(P - P_{\text{hom}}) < \text{gr}\, P$. $P(\partial)$ heisst hyperbolisch (bezüglich t), wenn

i) $P_{\text{hom}}\ (1, 0) \neq 0$,

ii) $P(it-s, ix) \neq 0$ für $s < s_0 \in R$, $(t, x) \in R^{n+1}$ (siehe [H 4], Def. 5.4.1. Man beachte, dass bei [H 4] $D_j = -i\partial_j$ ist!). Die eindeutig bestimmte Fundamentallösung E von $P(\partial)$ mit Träger im Halbraum $t \geqslant 0$ hat nach [H 4], Th. 5.6.1, Beweis, die folgende Gestalt:

$$\langle \varphi(-x), E \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{F\varphi(t+is, x)}{P(it-s, ix)} \, dt \, dx$$

für $\varphi \in D$ und jedes $s < s_0$.

(Wegen $\varphi \in D$ ist $F\varphi$ holomorph auf C^n fortsetzbar!)

Die Wohldefiniertheit des Integrals folgt aus $F\varphi(t+is, x) \in L^1(R^{n+1}_{t,x})$ und aus der Abschätzung

$$(*) \qquad |P(it-s, ix)| \geqslant P_{\text{hom}}(1, 0)| \cdot |s-s_0|^m, \text{ wobei } m = \text{gr}\, P.$$

Diese ergibt sich aus den Bedingungen i) und ii), wenn man $P(it-s, ix)$ als Polynom is s betrachtet, dessen m Nullstellen $s_1, \ldots, s_m$ jedenfalls $\text{Re}\, s_j \geqslant s_0$ erfüllen.

Satz 1. *$P_\lambda(\partial)$ sei ein linear von $\lambda \in [a, b]$ abhängender hyperbolischer Differentialoperator. $m := \text{gr}\,(P_\lambda)$ hänge nicht von λ ab. $s_0(\lambda)$ sei die Konstante aus Bedingung* ii) *oben und es gelte* $\inf\{s_0(\lambda) : \lambda \in [a, b]\} > -\infty$. *$E_\lambda$ sei die Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^2$ mit Träger im Halbraum. Dann ist:*

i) *$[a, b] \to D' : \lambda \mapsto E_\lambda$ stetig*

ii) *$E := (b-a)^{-1} \int_a^b E_\lambda \, d\lambda$*

die Fundamentallösung von $P_a(\partial)\, P_b(\partial)$ mit Träger im Halbraum.

Beweis. i) Es sei $\varphi \in D$; wir müssen zeigen, dass $\lambda \mapsto \langle \varphi(-x), E_\lambda \rangle$ stetig ist;

$$\langle \varphi(-x), E_\lambda \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{F\varphi(t+is, x)}{P_\lambda(it-s, ix)^2} \, dt \, dx$$

für $s < s := \inf\{s_0(\lambda) : \lambda \in [a, b]\}$; die Stetigkeit ergibt sich aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz; dazu müssen wir nur noch $P_\lambda(it-s, ix)^2$

gleichmässig bezüglich λ, t und x nach unten abschätzen. Wir setzen $\alpha := \inf\{|P_{\lambda\mathrm{hom}}(1,0)|^2 \colon \lambda \in [a,b]\} > 0$ (da $\lambda \mapsto P_{\lambda\mathrm{hom}}(1,0)$ stetig) und erhalten aus $(*)$:

$$|P_\lambda(it-s, ix)^2| \geqslant \alpha\,|s-\bar{s}|^{2m}, \qquad \forall \lambda \in [a,b], \qquad \forall (t,x) \in R^{n+1}.$$

ii) Da die Abbildung $\lambda \mapsto E_\lambda$ stetig ist, ist sie auch integrabel und E ist wohldefiniert. Für $\varphi \in D$ ist

$$\begin{aligned}\langle \varphi(-x), E\rangle &= (b-a)^{-1}\int_a^b \langle \varphi(-x), E_\lambda\rangle\, d\lambda \\ &= (2\pi)^{-(n+1)/2}(b-a)^{-1}\int_a^b\int \frac{F\varphi(t+is,x)}{P_\lambda(it-s,ix)^2}\,dt\,dx\,d\lambda \qquad \text{für} \quad s < \bar{s};\end{aligned}$$

wegen

$$F\varphi(t+is,x) \in L^1(R^{n+1}) \qquad \text{und} \qquad |P_\lambda(it-s,ix)^2| \geqslant \alpha\,|s-\bar{s}|^{2m}$$

ist

$$\frac{F\varphi(t+is,x)}{P_\lambda(it-s,ix)^2} \in L^1([a,b] \times R^{n+1}_{t,x}),$$

wir können daher nach dem Satz von Fubini die Integrale vertauschen:

$$\langle \varphi(-x), E\rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2}\int (b-a)^{-1}\int_a^b \frac{F\varphi(t+is,x)}{P_\lambda(it-s,ix)^2}\,d\lambda\,dt\,dx.$$

Die Anwendung der Feynman-Parameter-Formel wie in § 1 ergibt:

$$\langle \varphi(-x), E\rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2}\int \frac{F\varphi(t+is,x)}{(P_a\cdot P_b)(it-s,ix)}\,dt\,dx.$$

Dies zeigt die Behauptung in ii) des Satzes.

Bemerkungen. 1) Wenn P_λ homogen ist, so kann man $s_0(\lambda) = 0$ wählen. Die Bedingung $\inf\{s_0(\lambda) \colon \lambda \in [a,b]\} > -\infty$ kann hier also entfallen.

2) Trotz seiner Einfachheit und grossen Anwendbarkeit (siehe etwa Bsp. 3 und 4) habe ich Satz 1 in der Literatur nicht gefunden. Im nächsten Paragraph verallgemeinere ich diesen Satz auf Produkte von $l > 2$ Differentialoperatoren und stelle daher die interessanten Beispiele noch zurück.

3) Der obige Satz kann auch auf Produkte zweier, iterierter Differentialoperatoren erweitert werden (vgl. [O 3]).

§ 3. Die Parameterformel für mehrfache Produkte

SATZ 2. *Es seien $l \geqslant 2, u, v, a_0, a_1, \ldots, a_l \in C$; $a_1, \ldots, a_l$ seien paarweise verschieden, $u + a_j v \neq 0$ für $j = 1, \ldots, l$. Dann ist:*

$$\prod_{j=1}^{l}(u+a_j v)^{-1} = (l-1)\sum_{j=1}^{l}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l}(a_j-a_k)^{-1}\int_{a_0}^{a_j}\frac{(a_j-\lambda)^{l-2}}{(u+\lambda v)^l}\,d\lambda.$$

Die Integrationswege von a_0 nach a_j haben dabei den Punkt $-u/v$ zu vermeiden.

Beweis. a) Wegen $l \geq 2$ hat $\frac{(a_j-\lambda)^{l-2}}{(u+\lambda v)^l}$ Residuum 0 im Punkt $\lambda = -u/v$; der rechtsstehende Ausdruck hängt also nicht von der Wahl der Integrationswege ab.

Es sei zunächst $v \neq 0$ fest und $a_0 \neq a_j$ für $j = 1, \ldots, l$.

b) $\prod_{j=1}^{l} (u+a_j v)^{-1}$ ist eine meromorphe Funktion in u, die in ∞ verschwindet und einfache Pole bei $-a_j v$, $j = 1, \ldots, l$, mit Residuen $\prod_{k \neq j} \frac{1}{v(a_k-a_j)}$ besitzt. Wenn dasselbe von der rechtsstehenden Funktion, nennen wir sie $f(u)$, nachgeweisen wird, so gilt die Gleichheit. $f(u)$ ist offenbar überall ausser in $u = -a_0 v$ und $u = -a_j v$, $j = 1, \ldots, l$ holomorph und verschwindet in ∞.

c) $f(u)$ hat keinen Pol in $u = -a_0 v$.

Dazu zeigen wir, dass $f(u)$ nicht von a_0 abhängt, d.h. $\partial f/\partial a_0 = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = -(l-1) \sum_{j=1}^{l} (a_j-a_0)^{l-2} (u+a_0 v)^{-l} \prod_{k \neq j} (a_j-a_k)^{-1}.$$

Es genügt daher,

$$s := \sum_{j=1}^{l} a_j^m \prod_{k \neq j} (a_j-a_k)^{-1} = 0 \qquad \text{für} \qquad m = 0, 1, \ldots, l-2$$

zu zeigen.

$$s = \sum \operatorname{Res} g(z),$$

wobei

$$g(z) = z^m \prod_{k=1}^{l} (z-a_k)^{-1}$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_0} g(z)\,dz \qquad \text{für} \qquad R_0 > \max\{|a_k|:\ k = 1, \ldots, l\};$$

$$\int_{|z|=R_0} g(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} g(z)\,dz = 0,$$

da sich $g(z)$ wie z^{-2} in ∞ verhält. Damit ist $\partial f/\partial a_0 = 0$ und die Holomorphie von f in $-a_0 v$ gezeigt.

d) f hat bei $-a_j v$, $j = 1, \ldots, l$ einfache Pole mit den Residuen $\prod_{k \neq j} \frac{1}{v(a_k-a_j)}$.

Offenbar genügt es dafür zu zeigen:

$\int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j-\lambda)^{l-2}}{(u+\lambda v)^l}\,d\lambda$ hat einen einfachen Pol in $u = -a_j v$ mit Residuum $\frac{(-v)^{1-l}}{l-1}$;

nach [G 3], 421. 4b) ist

$$\int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j-\lambda)^{l-2}}{(u+\lambda v)^l}\, d\lambda = \frac{(a_j-a_0)^{l-1}}{(l-1)(a_j v+u)(a_0 v+u)^{l-1}},$$

woraus die obige Behauptung folgt.

e) Die Fälle $v=0$ oder $a_0 = a_j$ ergeben sich aus dem obigen durch Grenzübergänge.

Damit ist alles bewiesen.

SATZ 3. *$P_\lambda(\partial)$ sei ein linear von $\lambda \in [a, b]$ abhängender hyperbolischer Differentialoperator. $\operatorname{gr} P_\lambda$ sei von λ unabhängig. $s_0(\lambda)$ sei wie in § 2 und es gelte wieder $\inf\{s_0(\lambda)\colon \lambda \in [a, b]\} > -\infty$. Es seien $l \geqslant 2$, $a_0, a_1, \ldots, a_l \in [a, b]$, $a_1, \ldots, a_l$ paarweise verschieden. E_λ sei die Fundamentalösung von $P_\lambda(\partial)^l$ mit Träger im Halbraum. Dann ist:*

i) *$[a, b] \to D'\colon \lambda \mapsto E_\lambda$ stetig*

ii) *$E := (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j-a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} E_\lambda (a_j-\lambda)^{l-2}\, d\lambda$ die Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$ mit Träger im Halbraum.*

Der Beweis verläuft wie für Satz 1.

Bemerkung. In [B 2] wird ebenfalls eine Parameterintegrationsmethode bei mehrfachen Produkten (von Klein-Gordon-Operatoren) verwendet. Allerdings arbeitet Bresters mit der allgemeinen Feynman-Parameterformel (siehe [S 1], S. 72) und stellt E als $(l-1)$-faches Parameterintegral dar. Dieses ist für konkrete Berechnungen (welche sich dort auch nicht finden) nicht geeignet.

§ 4. Fundamentallösungen von Produkten von Wellenoperatoren

Im folgenden seien $l, n \in N$, $l \geqslant n/2$, $l \geqslant 2$; $a_1, \ldots, a_l \geqslant 0$ und paarweise voneinander verschieden. Wir betrachten den Differentialoperator

$$P(\partial) = \prod_{j=1}^{l} (\partial_t^2 - a_j^2 \Delta_n).$$

Nach [S 2], p. 50 ist $c(t^2-r^2)^{l-(n+1)/2}\, Y(t-r)$ mit $c = \pi^{(1-n)/2}\, 2^{1-2l} \times (l-1)!^{-1}\, \Gamma(l-(n-1)/2)^{-1}$ die Fundamentallösung von $(\partial_t^2-\Delta_n)^l$ mit Träger im Halbraum ist daher nach Satz 4, Kap. I: $E_\lambda = c\lambda^{-n/2}(t^2-r^2/\lambda)^{l-(n+1)/2} \times Y(t-r/\sqrt{\lambda})$. Satz 3 ergibt als Fundamentallösung von $P(\partial)$:

$$E = \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j^2-a_k^2)^{-1} \cdot E_{(j)},$$

wobei

$$E_{(j)} = (l-1) \int_0^{a_j^2} E_\lambda (a_j^2 - \lambda)^{l-2} \, d\lambda.$$

Als nächstes zeigen wir, dass Satz 1 aus Kap. I verwendet und punktweise integriert werden kann (vgl. Beispiel 3 aus Kap. I).

LEMMA. $g(\lambda, t, x) := \lambda^{-n/2} (t^2 - r^2/\lambda)^{l-(n+1)/2} \, Y(t - r/\sqrt{\lambda}) \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty[\times \times R^{n+1})$ *für* $l \geqslant n/2$.

Beweis. w_n bezeichne die Oberfläche von $\{x \in R^n \colon |x| = 1\}$, $w_1 = 2$, $0 < a, N$. Dann ist:

$$\int_0^a dt \int dx \int_0^N 1 \, |g(\lambda, t, x)| \, d\lambda = (\text{Polarkoordinaten})$$

$$= w_n \int_0^a dt \int_0^N \lambda^{-n/2} \, d\lambda \int_0^\infty r^{n-1} (t^2 - r^2/\lambda)^{l-(n+1)/2} \, Y(t - r/\sqrt{\lambda}) \, dr$$

$$= w_n \int_0^a dt \int_0^N \lambda^{-n/2} \, d\lambda \int_0^{t\sqrt{\lambda}} r^{n-1} (t^2 - r^2/\lambda)^{l-(n+1)/2} \, dr$$

$$= (\text{Substitution: } s = r^2/\lambda t^2)$$

$$= \frac{w_n}{2} \int_0^a dt \int_0^N \lambda^{-n/2} \, d\lambda \int_0^1 s^{n/2-1} \lambda^{n/2} t^{2l-1} (1-s)^{l-(n+1)/2} \, ds$$

$$= \frac{w_n}{2} \cdot \frac{a^{2l}}{2l} \cdot N \cdot B\big(n/2, l-(n-1)/2\big) < \infty. \; \blacksquare$$

Für $E_{(j)}$ erhalten wir nun:

$$E_{(j)} = (l-1) c \int_0^{a_j^2} \lambda^{-n/2} (t^2 - r^2/\lambda)^{l-(n+1)/2} \, Y(t - r/\sqrt{\lambda}) \, (a_j^2 - \lambda)^{l-2} \, d\lambda$$

$$= (l-1) c \, Y(t - r/a_j) \int_{r^2/t^2}^{a_j^2} \lambda^{-l+1/2} (\lambda t^2 - r^2)^{l-(n+1)/2} (a_j^2 - \lambda)^{l-2} \, d\lambda$$

$$= (\text{Substitution } \mu = \lambda t^2)$$

$$= (l-1) c Y(t - r/a_j) \, t \int_{r^2}^{a_j^2 t^2} \mu^{-l+1/2} (\mu - r^2)^{l-(n+1)/2} (a_j^2 t^2 - \mu)^{l-2} \, d\mu.$$

Nach [G 4], 3.197.8 folgt

$$E_{(j)} = (l-1) c Y(t - r/a_j) \, t r^{1-2l} (a_j^2 t^2 - r^2)^{2l-(n+3)/2} \times$$
$$\times B\big(l-1, l-(n-1)/2\big) {}_2F_1\big(l-1/2, l-(n-1)/2;\; 2l-(n+1)/2;\; 1 - a_j^2 t^2/r^2\big).$$

Bemerkung. Die angegebene Darstellung der Fundamentallösung eines l-fachen Produktes von Wellenoperatoren ist neu. In [H 1], S. 308 ff. wird mit der in [S 3] als Herglotz-Petrowskyformel bezeichneten Formel für $n \geqslant 2$ eine andere Darstellung von $E_{(j)}$ hergeleitet. Die Äquivalenz der beiden Darstellungen ergibt sich durch Verwendung einer der Kummerschen Relationen für die Hypergeometrische Funktion (siehe [0 3]). Unser Ziel ist es, für spezielle n explizite Formeln für $E_{(j)}$ anzugeben.

SATZ 4. *Für ungerades $n = 2k-1$, $k \in N$ gilt:*

$$E_{(j)} = \frac{1}{2^k \pi^{k-1}(2l-2)!\,a_j} Y(t-r/a_j)\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}[(a_j t - r)^{2l-2}].$$

(Für $a_j = 0$ ist $E_{(j)} = 0$ zu setzen; die Differentiation ist im Sinne der klassischen Analysis zu verstehen.) Insbesondere ist für $n = 1$:

$$E_{(j)} = \frac{1}{2(2l-2)!\,a_j} Y(t-|x|/a_j)\,(a_j t-|x|)^{2l-2}$$

und für $n = 3$:

$$E_{(j)} = \frac{1}{4(2l-3)!\,\pi a_j r} Y(t-r/a_j)\,(a_j t-r)^{2l-3}$$

Beweis. a) Nach der Substitution $\mu = \alpha^2$ in der Darstellung

$$E_{(j)} = (l-1)\,c\,Y(t-r/a_j)\,t\int_{r^2}^{a_j^2 t^2} \mu^{1/2-l}(\mu-r^2)^{l-(n+1)/2}(a_j^2 t^2-\mu)^{l-2}\,d\mu$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{(j)} &= 2(l-1)\,c\,Y(t-r/a_j)\,t\int_r^{a_j t} \alpha^{2-2l}(\alpha^2-r^2)^{l-k}(a_j^2 t^2-\alpha^2)^{l-2}\,d\alpha \\ &= 2(l-1)\,ct\,Y(t-r/a_j)\,2^{1-k}\frac{(l-k)!}{(l-1)!}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\times \\ &\quad\times\Big[\int_r^{a_j t} \alpha^{2-2l}(\alpha^2-r^2)^{l-1}(a_j^2 t^2-\alpha^2)^{l-2}\,d\alpha\Big]. \end{aligned}$$

b) Bestimmung von $\int_r^{a_j t} \alpha^{2-2l}(\alpha^2-r^2)^{l-1}(a_j^2 t^2-\alpha^2)^{l-2}\,d\alpha$. Wir betrachten für festes $a \in C\backslash\{0\}$ die Funktion

$$f(u) = \int_a^u \alpha^{2-2l}(\alpha^2-a^2)^{l-1}(u^2-\alpha^2)^{l-2}\,d\alpha;$$

$$\alpha^{2-2l}(\alpha^2-a^2)^{l-1}(u^2-\alpha^2)^{l-2} = \frac{u^{2l-4}}{\alpha^{2l-2}}\times \text{Polynom in } \alpha^2, a^2 \text{ und } u^2 +$$

$$+u^{2l-6}/\alpha^{2l-4}\times \text{Polynom in } \alpha^2, a^2 \text{ und } u^2 + \ldots$$

Der Integrand besitzt daher Residuum 0 in $\alpha = 0$, $f(u)$ hängt also nicht vom speziellen Integrationsweg ab. Weiters hat $f(u)$ höchstens einen einfachen Pol in $u = 0$. $g(u) := u\, f(u)$ ist somit ein Polynom in u. $f(u)$ wächst höchstens wie $|u|^{2l-3} \Rightarrow \operatorname{gr}(g) \leqslant 2l-2$.

Weiters hat f in $u = a$ eine $(2l-2)$-fache Nullstelle, denn:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2-2l} \int_a^{a+\varepsilon} \alpha^{2-2l}(\alpha^2-a^2)^{l-1}\left((a+\varepsilon)^2-\alpha^2\right)^{l-2} d\alpha$$

$$= (\text{Substitution } \alpha = \varepsilon\gamma + a)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2-2l} \int_0^1 (\varepsilon\gamma + a)^{2-2l}\left(\varepsilon\gamma(2a+\varepsilon\gamma)\right)^{l-1}\left(\varepsilon(1-\gamma)(2a+\varepsilon\gamma+\varepsilon)\right)^{l-2} \varepsilon\, d\gamma$$

$$= \int_0^1 a^{2-2l}\gamma^{l-1}(2a)^{l-1}(1-\gamma)^{l-2}(2a)^{l-2}\, d\gamma = 2^{2l-3}a^{-1}B(l, l-1)$$

$$= 2^{2l-3}a^{-1}\frac{(l-1)!\,(l-2)!}{(2l-2)!}.$$

Wegen $\operatorname{gr}(g) \leqslant 2l-2$ folgt

$$f(u) = u^{-1}g(u) = u^{-1}(u-a)^{2l-2}\,2^{2l-3}\frac{(l-1)!\,(l-2)!}{(2l-2)!}.$$

Wenn man hier $a = r$ und $u = a_j t$ einsetzt, erhält man aus a) die Formeln im Satz.

Bemerkungen. 1) In [0 2], Op. 64 werden die Spezialfälle $n = 1$, $l = 2$ und $n = 3$, $l = 2$ angegeben.

2) Mit der gleichen Methode wird in Beispiel 5 unten die Fundamentallösung für Produkte von Operatoren $P_\lambda(\partial) = \partial_t^2 - \Delta_2 - \lambda\partial_z^2$, $\lambda \geqslant 0$, berechnet. Die sich ergebenden Formeln scheinen in der Literatur nicht auf. Im Beispiel 6 betrachten wir am Operator $P(\partial) = (\partial_t^2 - a_1^2\Delta_3)(\partial_t^2 - a_2^2\Delta_3)^2$ den Fall gleicher a_j.

SATZ 5. *Für $n = 2$ gilt:*

1) $$E_{(j)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{3l-4}(l-2)!^2\,\Gamma(l-1/2)}\, Y(t-r/a_j) \operatorname{arch}\left(\frac{ta_j}{r}\right) \times \left(-\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l-2}$$

$\times \left[t^{2l-3}(u^2-a_j^2t^2)^{l-2}\right]\Big|_{u^2=a_j^2t^2-r^2} + F_{(j)}$, *wobei* $F_{(j)} = Y(t-r/a_j)\sqrt{a_j^2t^2-r^2}$*-mal ein homogenes Polynom in* t^2 *und* r^2 *vom Grad* $2l-4$ *in* t *und* r *ist.*

2) *Ausserhalb von* 0 *ist* $E_{(j)}$ $(2l-3)$*-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. a) Nach der Substitution $\alpha^2 = t^2 - t^2r^2/\mu$ in der Darstellung

$$E_{(j)} = (l-1)c\, Y(t-r/a_j)\, t \int_{r^2}^{a_j^2t^2} \mu^{1/2-l}(\mu-r^2)^{l-(n+1)/2}(a_j^2t^2-\mu)^{l-2}\, d\mu$$

erhält man

$$E_{(j)} = 2(l-1)c\,Y(t-r/a_j)\,a_j^{2l-4} \int_0^{\sqrt{t^2-r^2/a_j^2}} \alpha^{2l-2}(t^2-r^2/a_j^2-\alpha^2)^{l-2}(t^2-\alpha^2)^{1-l}\,d\alpha.$$

b) Wir betrachten für festes $a>0$ die Funktion

$$f(u) = \int_0^u \alpha^{2l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2}(a^2-\alpha^2)^{1-l}\,d\alpha.$$

f ist eindeutig und holomorph in $(C\backslash R)\cup\,]-a,a[$.

$$f(u) = \frac{2^{2-l}}{(l-2)!}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)^{l-2}\int_0^u \alpha^{2l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2}(a^2-\alpha^2)^{-1}\,d\alpha.$$

Sei $g(u) := \int_0^u \alpha^{2l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2}\dfrac{d\alpha}{a^2-\alpha^2}$. Dann ist $g(u) = a^{2l-2}\times$ $\times(u^2-a^2)^{l-2}\int_0^u (a^2-\alpha^2)^{-1}\,d\alpha +$ Polynom in a und u, da $\alpha^{2l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2} -$ $- a^{2l-2}(u^2-a^2)^{l-2}$ durch $a^2-\alpha^2$ teilbar ist.

$$\int_0^u (a^2-\alpha^2)^{-1}\,d\alpha = \frac{1}{2a}\log\frac{a+u}{a-u}.$$

Somit ist

$$f(u) = \frac{2^{2-l}}{(l-2)!}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)^{l-2}\left[\frac{a^{2l-3}}{2}(u^2-a^2)^{l-2}\log\frac{a+u}{a-u} + \text{Polynom in } a \text{ und } u\right].$$

Wegen $\dfrac{\partial}{\partial a}\log\dfrac{a+u}{a-u} = -\dfrac{2u}{a^2-u^2}$ sieht man durch Induktion, dass

$$f(u) = \frac{2^{1-l}}{(l-2)!}\log\frac{a+u}{a-u}\left(-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)^{l-2}[a^{2l-3}(u^2-a^2)^{l-2}] + P(a,u),$$

wobei $P(a,u)$ ein Polynom in a und u ist. Offenbar ist f ungerade in u und gerade in $a \Rightarrow P(a,u) = uQ(a^2,u^2)$, Q Polynom.

c) Für e) beweisen wir noch: f hat eine $(4l-5)$-fache Nullstelle in $u=0$;

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{5-4l}f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{5-4l}\int_0^\varepsilon \alpha^{2l-2}(\varepsilon^2-\alpha^2)^{l-2}(a^2-\alpha^2)^{1-l}\,d\alpha$$

$$= (\text{Substitution } \alpha = \varepsilon\sqrt{\gamma})$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{5-4l} \int_0^1 \varepsilon^{2l-2} \gamma^{l-1/2} \varepsilon^{2l-4} (1-\gamma)^{l-2} (a^2 - \varepsilon^2 \gamma)^{1-l} \varepsilon d\gamma$$

$$= \frac{a^{2-2l}}{2} B(l+1/2, l-1).$$

d) Wir beweisen nun die Aussage 1) des Satzes: Wenn man in b) $a = t$ und $u = \sqrt{t^2 - r^2/a_j^2}$ einsetzt, ergibt sich aus a):

$$E_{(j)} = 2(l-1)c\, Y(t-r/a_j) a_j^{2l-4} \frac{2^{1-l}}{(l-2)!} \log \frac{t+\sqrt{t^2-r^2/a_j^2}}{t-\sqrt{t^2-r^2/a_j^2}},$$

$$\left(-\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l-2} [t^{2l-3}(u^2-t^2)^{l-2}]\Big|_{u^2 = t^2 - r^2/a_j^2} + F_{(j)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}\, 2^{3l-4} (l-2)!^2\, \Gamma(l-1/2)}\, Y(t-r/a_j) \operatorname{arch}\left(\frac{ta_j}{r}\right) \times$$

$$\times \left(-\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l-2} [t^{2l-3}(u^2 - a_j^2 t^2)^{l-2}]\Big|_{u^2 = a_j^2 t^2 - r^2} + F_{(j)}.$$

Dabei ist $F_{(j)} = Y(t-r/a_j)\sqrt{a_j^2 t^2 - r^2} \times$ Polynom in t^2 und r^2. Nach Kap. I, Korollar zu Satz 6 ist $E_{(j)}$ homogen vom Grad $2l-3 \Rightarrow F_{(j)}$ homogen vom Grad $2l-3 \Rightarrow$ das Polynom in t^2 und r^2 ist homogen vom Grad $2l-4$ in t und r.

e) Beweis der Aussage 2) des Satzes: $f(u)$ aus b) hat eine $(4l-5)$-fache Nullstelle in $u = 0$, d.h. wenn wir $a = t \neq 0$ in $E_{(j)}$ festhalten und uns $u = 0 \Leftrightarrow r = a_j t$ nähern, so verschwindet $E_{(j)}$ so wie $u^{4l-5} = (t^2 - r^2/a_j^2)^{2l-5/2} \approx |r - a_j t|^{2l-5/2}$, gleichmässig für r und t in kompakten Mengen (ausserhalb von 0). Folglich ist $E_{(j)}$ an der Fläche $r = a_j t$, $t \neq 0$ $(2l-3)$-mal stetig differenzierbar.

Bemerkungen. 1) Durch die Aussage 2) des Satzes ist $F_{(j)}$ festgelegt. In Beispiel 7 berechnen wir damit $E_{(j)}$ für $l = 2$.

2) Da $E_{(j)}$ homogen von der Ordnung $2l-3$ ist, kann es in 0 nur $(2l-4)$-mal stetig differenzierbar sein.

3) In Beispiel 8 wird in ähnlicher Weise wie in Satz 5 die Fundamentallösung eines Produktes von Operatoren des Typs $\partial_t^2 - \lambda \Delta_2 - \partial_z^2$ bestimmt.

§ 5. Beispiele

1. Beispiel. (Hier soll die Motivation aus § 1 erläutert werden).

$E = \frac{1}{2\pi(b-a)}(K_0(\sqrt{a}\, r) - K_0(\sqrt{b}\, r))$ *ist eine Fundamentallösung von* $(\Delta_2 - a)(\Delta_2 - b)$ *für* $a \neq b > 0$.

Beweis. a) Wir vollziehen die formalen Überlegungen in § 1 mit $P = r^2$, $Q = -1$ nach. Wegen $(P+\lambda Q)(i\xi) = -|\xi|^2-\lambda \neq 0$ für $\lambda > 0$ treten bei der Division keine Probleme auf. Wir erhalten also:

$$E = (2\pi)^{-1}(b-a)^{-1} F^{-1}\int_a^b (-|\xi|^2-\lambda)^{-2}\, d\lambda$$

$$= (2\pi)^{-2}(b-a)^{-1}\int\int d\xi\, e^{ix\xi}\int_a^b (-|\xi|^2-\lambda)^{-2}\, d\lambda$$

$$= (\text{Fubini})\,(2\pi)^{-1}(b-a)^{-1}\int_a^b F^{-1}(-|\xi|^2-\lambda)^{-2}\, d\lambda = (b-a)^{-1}\int_a^b E_\lambda\, d\lambda,$$

wobei $E_\lambda := (2\pi)^{-1}F^{-1}(-|\xi|^2-\lambda)^{-2}$ eine Fundamentallösung von $(\Delta_2-\lambda)^2$ ist. Offenbar ist E_λ die enzige Fundamentallösung von $(\Delta_2-\lambda)^2$ in S'.

b) Nach [0 2], Op. 12 ist für $\lambda > 0$: $\dfrac{r}{4\pi\sqrt{\lambda}} K_1(\sqrt{\lambda}\, r) \in S'$ eine Fundamentallösung von $(\Delta_2-\lambda)^2 \Rightarrow E_\lambda = \dfrac{r}{4\pi\sqrt{\lambda}} K_1(\sqrt{\lambda}\, r)$. Somit ergibt sich:

$$E = (b-a)^{-1}\int_a^b \frac{r}{4\pi\sqrt{\lambda}} K_1(\sqrt{\lambda}\, r)\, d\lambda \qquad (\text{Integration in } D'!).$$

Wegen $\dfrac{r}{\sqrt{\lambda}} K_1(\sqrt{\lambda}\, r) \in L^1_{\mathrm{loc}}([a, b]\times R^2)$ ist nach Kap. I, Satz 1 „punktweise" Integration erlaubt $\Rightarrow$

$$E = (b-a)^{-1}\int_a^b \frac{r}{4\pi\sqrt{\lambda}} K_1(\sqrt{\lambda}\, r)\, d\lambda = (\text{Substitution } \mu = r\sqrt{\lambda})$$

$$= \frac{1}{2\pi(b-a)}\int_{\sqrt{a}r}^{\sqrt{b}r} K_1(u)\, du = \frac{1}{2\pi(b-a)}\big(K_0(\sqrt{a}\, r) - K_0(\sqrt{b}\, r)\big).$$

Bemerkung. Dieses Beispiel dient nur zur Illustration der Methode (in einem der wenigen Fälle, wo nach Fouriertransformation Division möglich ist). Für einen beliebigen Differentialoperator (mit konstanten Koeffizienten) gilt nämlich:

Wenn E_λ eine Fundamentallösung von $P(\partial)-\lambda$ ist, so ist $\dfrac{1}{b-a}(E_b - E_a)$ eine Fundamentallösung von $(P(\partial)-a)(P(\partial)-b)$ für $a \neq b$. (Das sieht man durch direkte Differentiation.) Mit Hilfe von [0 2], Op. 7 kann man somit das obige Ergebnis kontrollieren und auf $a \neq b \in C\backslash\{0\}$ verallgemeinern.

2. Beispiel. *Eine Fundamentallösung des elliptischen Operators* $(\partial_x + \lambda i\partial_y)^2$, $\lambda \in R\backslash\{0\}$, *ist nach* [0 2], *Op.* 3:

$$E_\lambda = \frac{\operatorname{sig}(\lambda)}{2\pi i(1+\lambda^2)}\cdot\frac{x-\lambda iy}{y-\lambda ix} = -\frac{\lambda\operatorname{sig}(\lambda)}{2\pi(1+\lambda^2)} + \frac{\operatorname{sig}(\lambda)\, x}{2\pi i(y-\lambda ix)}.$$

Jedoch: $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda$ *ist keine Fundamentallösung von* $(\partial_x+i\partial_y)(\partial_x-i\partial_y) = \Delta_2$.

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, dass

$$\frac{\operatorname{sig}(\lambda)x}{2\pi i(y-\lambda ix)} \in L^1_{\mathrm{loc}}([-1,1]\times R^2)$$

ist und verwenden dann Satz 1, Kap. I zur Berechnung von $\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda$.

K sei ein kompakter Teil von R^2. Dann ist:

$$\int_K \int_{-1}^{1} \left|\frac{1}{y-\lambda ix}\right| d\lambda\, dx\, dy = \int_K \int_{-1}^{1} \frac{d\lambda}{\sqrt{y^2+\lambda^2 x^2}}\, dx\, dy$$

$$= (\text{nach [G 4], 2.271.4}) = \int_K \frac{1}{|x|} \log\left(\frac{|x|+\sqrt{x^2+y^2}}{-|x|+\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx\, dy$$

$$= (\text{Polarkoordinaten}) = \int_K \frac{1}{|\cos\varphi|} \log\left(\frac{1+|\cos\varphi|}{1-|\cos\varphi|}\right) d\varphi\, dr$$

$$\leqslant \text{Konstante}\cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\varphi} \log\left(\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}\right) d\varphi = (\text{Substitution } t = \cos\varphi)$$

$$= \text{Konstante}\cdot \int_0^1 \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} < \infty, \quad \text{da } \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \approx 2t \text{ bei } t = 0,$$

b) Nach a) können wir punktweise integrieren:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda = \text{Konstante} + \frac{x}{4\pi i}\left(\int_0^1 \frac{d\lambda}{y-i\lambda x} - \int_{-1}^{0} \frac{d\lambda}{y-i\lambda x}\right)$$

$$= \text{Konstante} + \frac{x}{4\pi i}\left(-\frac{1}{ix}\log\frac{y-ix}{y} + \frac{1}{ix}\log\frac{y}{y+ix}\right)$$

$$= \text{Konstante} + \frac{1}{2\pi}\log r - \frac{1}{2\pi}\log|y|.$$

Das ist keine Fundamentallösung von Δ_2.

Bemerkungen. 1) In Kapitel III wird die Parameterformel für elliptische Operatoren untersucht. Dort werden wir sehen, warum die Parameterintegration im obigen Fall nicht zum Ziel führt.

2) Man beachte, dass $[-1,1] \to D'$: $\lambda \mapsto E_\lambda$ zwar nicht stetig in 0 ist, dort aber links- und rechtsseitig stetig (mit $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \pm\lambda>0}} E_\lambda = \pm\frac{1}{2\pi i}\, x \otimes vp\,\frac{1}{y} + \frac{x}{2}\operatorname{sig} x \otimes \delta_y$) und daher integrierbar ist (was wir oben auch schon beweisen haben).

3) Natürlich ist E_λ nicht eindeutig als Fundamentallösung von $(\partial_x + i\lambda\partial_y)^2$. Zwei Fundamentallösungen in S' unterscheiden sich aber für $\lambda \neq 0$ nur um ein Polynom (vgl. Bsp. 5 in Kap. I). Nach Satz 2 ergibt sich bei Verwendung anderer Fundamentallösungen $\tilde{E}_\lambda$ (solange $\lambda \mapsto \tilde{E}_\lambda$ zumindest integrierbar und gr $(E_\lambda - \tilde{E}_\lambda)$ beschränkt ist): $\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\log r - \frac{1}{2\pi}\log |y| +$ $+$ Polynom. Dies ist ebenfalls keine Fundamentallösung von Δ_2. Unsere Rechnung lässt sich also für $E_\lambda \in S'$ nicht korrigieren.

3. Beispiel (Zur Illustration von Satz 1). *Es sei* $a \neq b \geqslant 0$. *Die Fundamentallösung* E *von* $(\partial_t^2 - a^2\Delta_3)(\partial_t^2 - b^2\Delta_3)$ *mit Träger im Halbraum ist*

$$E = (b^2 - a^2)^{-1}(E_{(b)} - E_{(a)}) \quad \textit{mit} \quad E_{(a)} = \frac{1}{4\pi a r}(at - r)\, Y(at - r).$$

(Dabei ist $E_{(0)} = 0$ *zu setzen.)*

Beweis. a) Nach Bemerkung 1 zu Satz 1 müssen wir nur die Hyperbolizität von $\partial_t^2 - \lambda\Delta_3$ für $\lambda \geqslant 0$ nachprüfen, um Satz 1 verwenden zu können. $P(t, x) = t^2 - \lambda r^2$.

i) $P_{\text{hom}}(1, 0) = 1 \neq 0$,

ii) $P(it - s, ix) = -t^2 - 2its + s^2 + \lambda r^2 = 0 \Leftrightarrow ts = 0$ und $t^2 = s^2 + \lambda r^2$. Das ist für $s < s_0 = 0$ nicht erfüllt.

b) Die Fundamentallösung zu $(\partial_t^2 - \lambda\Delta_3)^2$ ist nach Kap. I, Bsp. 4: $E_\lambda = (1/8\pi)\lambda^{-3/2}\, Y(t - r/\sqrt{\lambda})$.

$E = (b^2 - a^2)^{-1}\int_{a^2}^{b^2} E_\lambda\, d\lambda$ wird dann nach Bsp. 3 in Kap. I bestimmt.

Bemerkung. Dieses Beispiel ist sozusagen eine Vorübung für den weit allgemeineren Satz 4.

4. Beispiel. $E = \frac{1}{2}\, Y(t - |x|) \in D'(R^2)$ *ist die Fundamentallösung von* $\partial_t^2 - \partial_x^2$ *mit Träger im Halbraum.*

Beweis. a) $\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$; $\partial_t + \lambda\partial_x$ ist hyperbolisch für $\lambda \in R$. Wenn also E_λ die Fundamentallösung von $(\partial_t + \lambda\partial_x)^2$ mit Träger im Halbraum ist, so gilt $E = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda$.

b) Eine Fundamentallösung von ∂_t^2 ist $tY(t) \otimes \delta_x$; $(\partial_t + \lambda\partial_x)^2 = \partial_t^2 \circ A$ mit $A(t, x) = (t + \lambda x, x)$. Nach Kap. I, Satz 4 ist die Fundamentallösung E_λ von $(\partial_t + \lambda\partial_x)^2$: $E_\lambda = tY(t) \otimes \partial_x \circ A^{T-1}$; es sei $\varphi \in D$; $\langle \varphi, E_\lambda \rangle = \langle \varphi \circ A^T, tY(t) \otimes \delta_x \rangle = \langle \varphi(t, \lambda t + x), tY(t) \otimes \delta_x \rangle = \int_0^\infty t\varphi(t, \lambda t)\, dt$.

E_λ ist also ein Mass mit Träger auf der Geraden $x = \lambda t$, $E = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} E_\lambda\, d\lambda$ kann *nicht* punktweise integriert werden.

c) Es sei $\varphi \in D$;

$$\langle \varphi, E \rangle = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} \langle \varphi, E_\lambda \rangle \, d\lambda$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\lambda \int_{0}^{\infty} t\varphi(t, \lambda t)\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{0}^{\infty} dt \int_{-t}^{t} \varphi(t, x)\, dx = \langle \varphi, \tfrac{1}{2} Y(t - |x|) \rangle .$$

Wir erhalten: $E = \frac{1}{2} Y(t - |x|)$.

Bemerkung. Die Fundamentallösung der Wellengleichung ist natürlich schon seit langem bekannt. Dieses Beispiel diente der Demonstration einer Situation, in der $\int E_\lambda \, d\lambda$ nicht punktweise berechnet werden kann.

5. Beispiel. *Es seien* $l \geqslant 2, a_1, \ldots, a_l \geqslant 0$ *paarweise verschieden. Die Fundamentallösung von* $\prod_{j=1}^{l} (\partial_t^2 - \Delta_2 - a_j^2 \partial_z^2)$ *mit Träger im Halbraum ist* $E = \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j^2 - a_k^2)^{-1} E_{(j)}$, *wobei*

$$E_{(j)} = \frac{1}{4(2l-3)!\pi \sqrt{t^2 - \varrho^2}} Y(t - \sqrt{\varrho^2 + z^2/a_j^2})\,(a_j \sqrt{t^2 - \varrho^2} - |z|)^{2l-3}$$

mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Beweis. Wir gehen wie im Beweis von Satz 4 vor.

a) $(\partial_t^2 - \Delta_3)^l$ hat die Fundamentallösung $c(t^2 - r^2)^{l-2} Y(t - r)$ mit $c = \pi^{-1} 2^{1-2l} (l-1)!^{-1} (l-2)!^{-1}$.

b) $(\partial_t^2 - \Delta_2 - \lambda \partial_z^2)^l$ hat die Fundamentallösung

$$E_\lambda = c\lambda^{-1/2} (t^2 - \varrho^2 - z^2/\lambda)^{l-2}\, Y(t - \sqrt{\varrho^2 + z^2/\lambda})$$

nach Satz 4, Kap. I.

c) $|g(\lambda, t, x)| := |E_\lambda(t, x)| \leqslant c\lambda^{-1/2} |t^2 - \varrho^2|^{l-2} \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty[\times R^4)$.

Satz 3 ergibt somit E wie oben mit

$$E_{(j)} = (l-1)c \int_{0}^{a_j^2} \lambda^{-1/2} (t^2 - \varrho^2 - z^2/\lambda)^{l-2}\, Y(t - \sqrt{\varrho^2 + z^2/\lambda})\,(a_j^2 - \lambda)^{l-2}\, d\lambda$$

$$= (l-1)c\, Y(t - \sqrt{\varrho^2 + z^2/a_j^2}) \int_{z^2/(t^2 - \varrho^2)}^{a_j^2} \lambda^{-l+3/2} ((t^2 - \varrho^2)\lambda - z^2)^{l-2} (a_j^2 - \lambda)^{l-2}\, d\lambda$$

$$= (\text{Substitution} \quad \alpha^2 = \lambda(t^2 - \varrho^2)) = 2(l-1)c\, Y(t - \sqrt{\varrho^2 + z^2/a_j^2})\,(t^2 - \varrho^2)^{-1/2} \times$$

$$\times \int_{|z|}^{a_j \sqrt{t^2 - \varrho^2}} \alpha^{4-2l} (\alpha^2 - z^2)^{l-2} (a_j^2 (t^2 - \varrho^2) - \alpha^2)^{l-2}\, d\alpha .$$

d) Wir betrachten für $a \neq 0$:

$$f(u) = \int_a^u \alpha^{4-2l}(\alpha^2-a^2)^{l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2}\,d\alpha.$$

Wie beim Beweis von Satz 4 sieht man, dass

i) f ein Polynom vom Grad $2l-3$ ist,

ii) f bei $u = a$ eine $(2l-3)$-fache Nullstelle hat mit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{3-2l} f(a+\varepsilon) = 2^{2l-4}\frac{(l-2)!^2}{(2l-3)!}.$$

Somit ist $f(u) = (u-a)^{2l-3}2^{2l-4}(l-2)!^2/(2l-3)!$. Wenn man hier $a = |z|$ und $u = a_j\sqrt{t^2-\varrho^2}$ einsetzt, erhält man aus c) die Behauptung.

6. Beispiel. *Die Fundamentallösung von* $(\partial_t^2 - a_1^2\Delta_3)(\partial_t^2 - a_2^2\Delta_3)^2$ *mit Träger im Halbraum ist* $E = F+G$ *mit*

$$F = (a_1^2-a_2^2)^{-2}\frac{Y(t-r/a_1)}{24\pi a_1 r}(a_1 t - r)^3$$

und

$$G = (a_2^2-a_1^2)^{-1}\frac{Y(t-r/a_2)}{48\pi a_2^2 r}\left(3t(a_2t-r)^2-(a_2^2-a_1^2)^{-1}a_2^{-1}(3a_2^2-a_1^2)(a_2t-r)^3\right).$$

Beweis. a) Wir setzen $E = \lim_{a_3\to a_2} E(a_1,a_2,a_3)$, wobei $E(a_1,a_2,a_3)$ die Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{3}(\partial_t^2-a_j^2\Delta_3)$ ist. Klarerweise ist E, falls der Limes in D' existiert, die Fundamentallösung von $(\partial_t^2-a_1^2\Delta_3)(\partial_t^2-a_2^2\Delta_3)^2$.

$$E(a_1,a_2,a_3) = \sum_{j=1}^{3}\prod_{k\neq j}(a_j^2-a_k^2)^{-1}E_{(j)} =: \sum_{j=1}^{3}\tilde{E}_{(j)}.$$

Nach Satz 4 ist dabei $E_{(j)} = \dfrac{1}{24\pi a_j r}Y(t-r/a_j)(a_jt-r)^3$.

b) Offenbar ist $F = \lim_{a_3\to a_2}\tilde{E}_{(1)}$. Wir zeigen noch:

$$G = \lim_{a_3\to a_2}(\tilde{E}_{(2)}+\tilde{E}_{(3)}),$$

$$\lim_{a_3\to a_2}(\tilde{E}_{(2)}+\tilde{E}_{(3)}) = \lim_{a_3\to a_2}(a_3^2-a_2^2)^{-1}\left(\frac{(a_3^2-a_1^2)^{-1}Y(t-r/a_3)}{24\pi a_3 r}(a_3t-r)^3 - \frac{(a_2^2-a_1^2)^{-1}Y(t-r/a_2)}{24\pi a_2 r}(a_2t-r)^3\right)$$

$$= \frac{1}{48\pi a_2 r} \frac{d}{da_2} \left((a_2^2 - a_1^2)^{-1} a_2^{-1} Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^3\right).$$

Die Ableitung ist dabei im Sinn distributionswertiger Funktionen (vgl. § 2, Kap. I) vorzunehmen. Eine einfache Produktregel ergibt:

$$\lim_{a_3 \to a_2} (\tilde{E}_{(2)} + \tilde{E}_{(3)})$$

$$= \frac{1}{48\pi a_2 r} \left(Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^3 \frac{d}{da_2} \left((a_2^2 - a_1^2)^{-1} a_2^{-1}\right) + \right.$$

$$\left. + (a_2^2 - a_1^2)^{-1} a_2^{-1} \frac{d}{da_2} \left(Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^3\right) \right).$$

c) Es sei $\varphi \in D$.

$$\left\langle \varphi, \frac{d}{da_2} \left(Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^3\right) \right\rangle$$

$$= \frac{d}{da_2} \int dx \int_{r/a_2}^{\infty} \varphi(t, x)(a_2 t - r)^3 \, dt = \int dx \int_{r/a_2}^{\infty} \varphi(t, x) \cdot 3t (a_2 t - r)^2 \, dt$$

$$\Rightarrow \frac{d}{da_2} \left(Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^3\right) = 3t Y(t - r/a_2)(a_2 t - r)^2.$$

Daher ist

$$\lim_{a_3 \to a_2} (\tilde{E}_{(2)} + \tilde{E}_{(3)}) = \frac{1}{48\pi a_2 r} Y(t - r/a_2) \left((a_2^2 - a_1^2)^{-1} a_2^{-1} 3t (a_2 t - r)^2 + \right.$$

$$\left. + (a_2^2 - a_1^2)^{-2} \left(-2 - a_2^{-2} (a_2^2 - a_1^2)\right)(a_2 t - r)^3 \right) = G.$$

Bemerkung. Dieses Resultat wird (bis auf eine, offenbar falsche, Konstante) auch in [P 1] angegeben. Die Berechnung erfolgt dort allerdings mit weit komplizierteren Mitteln (Radontransformation).

7. Beispiel. *Mit den Bezeichnungen aus Paragraph 4 gilt für $n = l = 2$:*

$$E_{(j)} = \frac{1}{2\pi} Y(t - r/a_j) \left(t \operatorname{arch} \frac{t a_j}{r} - \sqrt{t^2 - r^2/a_j^2} \right).$$

Beweis. Nach Satz 5 ist

$$E_{(j)} = \frac{t}{2\pi} Y(t - r/a_j) \operatorname{arch} \frac{t a_j}{r} + F_{(j)}, \qquad F_{(j)} = c \sqrt{a_j^2 t^2 - r^2}\, Y(t - r/a_j),$$

$c \in R$ und $E_{(j)}$ ist einmal stetig differenzierbar entlang von $t = r/a_j$, $t \neq 0$.

$$\partial E_{(j)}/\partial t = \frac{1}{2\pi}\, Y(t-r/a_j)\left(\operatorname{arch}\frac{ta_j}{r}+\frac{ta_j}{\sqrt{a_j^2 t^2-r^2}}+c\,\frac{ta_j^2}{\sqrt{a_j^2 t^2-r^2}}\right).$$

Damit $\partial E_{(j)}/\partial t$ stetig ist, müssen wir $c = -a_j^{-1}$ wählen. Damit erhält man das obige Ergebnis.

Bemerkung. Die gefundene Fundamentallösung stimmt mit [0 2], Op. 64 überein.

8. Beispiel. *Es seien* $l \geqslant 2$, $a_1, \dots, a_l$ *paarweise verschieden*, $\varrho^2 = x^2+y^2$. *Die Fundamentallösung von* $\prod_{j=1}^{l} (\partial_t^2 - a_j^2 \Delta_2 - \partial_z^2)$ *mit Träger im Halbraum ist* $E = \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j^2 - a_k^2)^{-1} E_{(j)}$, *wobei gilt:*

$$1)\ E_{(j)} = \pi^{-1} 2^{2-2l}\, Y(t-\sqrt{\varrho^2/a_j^2+z^2}) \sum_{m=0}^{l-2} m!^{-2}(l-2-m)!^{-2} \times$$

$\times\, \varrho^{2m}\big(a_j^2(t^2-z^2)\big)^{l-2-m} \log(a_j\sqrt{t^2-z^2}/\varrho) + F_{(j)}$, $F_{(j)} = Y(t-\sqrt{\varrho^2/a_j^2+z^2})$ *mal ein homogenes, schiefsymmetrisches Polynom in* ϱ^2 *und* t^2-z^2 *vom* Grad $2l-4$ *in* x *und* t.

2) *Ausserhalb von* 0 *ist* $E_{(j)}$ $(2l-4)$*-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Wir gehen wie beim Beweis von Satz 5 vor.

a) Wie im 5. Beispiel ergibt sich

$$E_{(j)} = 2(l-1)\,c\, Y(t-\sqrt{\varrho^2/a_j^2+z^2}) \int_{\varrho}^{a_j\sqrt{t^2-z^2}} \alpha^{3-2l}(\alpha^2-\varrho^2)^{l-2} \times$$
$$\times \big(a_j^2(t^2-z^2)-\alpha^2\big)^{l-2}\, d\alpha$$

mit $c = \pi^{-1} 2^{1-2l} (l-1)!^{-1} (l-2)!^{-1}$.

b) Wir betrachten die Funktion

$$f(a,u) = \int_a^u \alpha^{3-2l}(\alpha^2-a^2)^{l-2}(u^2-\alpha^2)^{l-2}\, d\alpha.$$

f ist eindeutig und holomorph für $a, u \in C \setminus]-\infty, 0]$. Der Integrand von f ist

$$\frac{(au)^{2l-4}}{\alpha^{2l-3}} + \dots + \frac{P}{\alpha} + \dots \text{ mit } P = \sum_{m=0}^{l-2} \binom{l-2}{m}^2 a^{2m} u^{2l-4-2m}.$$

Somit ist $f = P \log(u/a) +$ Polynom Q in a^2 und u^2. Wegen $f(a,u) = -f(u,a)$ ist Q schiefsymmetrisch. Wie im Beweis von Satz 4 zeigt man, dass f in $u = a$ eine $(2l-3)$-fache Nullstelle hat.

c) Die Aussage des Beispiels ergibt sich durch Einsetzen von $u = a_j\sqrt{t^2-z^2}$, $a = \varrho$.

Bemerkung. Für $l = 2$ ist $Q = 0$ (Schiefsymmetrie!) und daher

$$E_{(J)} = \frac{1}{4\pi} Y(t - \sqrt{\varrho^2/a_J^2 + z^2}) \log(a_J \sqrt{t^2 - z^2}/\varrho).$$

Dieses Ergebnis wurde in anderer Form auch in [B 4] angegeben.

III. Elliptische Operatoren

§ 1. Die Hörmandersche Treppe

In Kap. II, § 2 wurde eine explizite Formel für eine Fundamentallösung E eines hyperbolischen Differentialoperators $P(\partial)$ angegeben, nämlich:

$$\langle \varphi(-t, -x), E \rangle = (2\pi)^{-(n+1)/2} \int \frac{F\varphi(t+is, x)}{P(it-s, ix)} dt\, dx \quad \text{für} \quad \varphi \in D.$$

Das Verfahren zur Ermittlung einer Lösung von $P(\partial)E = \delta$ bestand dort also in der Lösung des nach Fouriertransformation auftretenden Divisionsproblems $P(it, ix)FE = (2\pi)^{-(n+1)/2}$ durch „Ausweichen ins Komplexe". Dies ist notwendig, da $P(it, ix)^{-1}$ im allgemeinen nicht in L^1_{loc} liegt. Ein ähnlicher Prozess funktioniert bei jeder partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir benötigen dazu folgende

Definition. 1) $P(x)$ sei ein nichtkonstantes Polynom in n Unbestimmten. Eine messbare Abbildung $s(x_2, \ldots, x_n)$: $R^{n-1} \to R$ heisst *Hörmandersche Treppe* von P, wenn

i) s beschränkt ist und

ii) $|P(ix_1 - s(x_2, \ldots, x_n), ix_2, \ldots, ix_n)| \geqslant C > 0$ für alle $x \in R^n$ und eine von x unabhängige Konstante $C > 0$.

2) Wenn P_λ eine von $\lambda \in \Lambda$ abhängende Familie nichtkonstanter Polynome ist, so heisse s eine *gemeinsame Hörmandersche Treppe* für P_λ, $\lambda \in \Lambda$, wenn

i) s für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Hörmandersche Treppe von P_λ ist und

ii) die Konstante C in 1) von λ unabhängig gewählt werden kann.

Bemerkungen. 1) In [S 3], Abschnitt 3.2.4, wird gezeigt, dass für jedes Polynom P in Normalform (d.h. $P = ax_1^m + Q_1(x_2, \ldots, x_n)x_1^{m-1} + \ldots \ldots + Q_m(x_2, \ldots, x_n)$, wobei $m \geqslant 1$, $0 \neq a \in C$, $\operatorname{gr} P = m$) eine Hörmandersche Treppe existiert.

2) Wenn $P(\partial)$ hyperbolisch ist, so kann man eine konstante Hörmandersche Treppe $s < s_0$ wählen.

3) Wenn s eine Hörmandersche Treppe von P und Q ist, so ist es auch die Hörmandersche Treppe von $P \cdot Q$.

s sei nun eine Hörmandersche Treppe von $P(x)$. Wir definieren eine Distribution E durch

$$\langle \varphi(-x), E \rangle = (2\pi)^{-n/2} \int \frac{F\varphi(x_1 + is(x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)}{P(ix_1 - s(x_2, \ldots, x_n), ix_2, \ldots, ix_n)} dx.$$

Wie in [S 3], 3.2.3. gezeigt wird, ist E eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. E wird die zu s gehörige Fundamentallösung genannt.

Bemerkungen. 1) Für hyperbolische Differentialoperatoren (bezüglich $t = x_1$) erhalten wir mit einer konstanten Treppe die eindeutige Fundamentallösung mit Träger im Halbraum (vgl. Kap. II, § 2).

2) Für elliptische Differentialoperatoren hängt die so konstruierte Fundamentallösung i.a. von der Wahl von s ab und liegt schon in einfachsten Fällen nicht mehr in S' (siehe Beispiel 1 unten: $P(\partial) = \Delta_3$).

3) Das Problem der Existenz von Fundamentallösungen in D' (nicht jedoch in S'!) ist damit gelöst. (Jedes Polynom lässt sich durch eine Rotation auf Normalform bringen.) Dieser Existenzbeweis stammt aus [H 5]. Eine Lösung des Existenzproblems mit Kurvenintegralen wird in [H 4], Th. 3.1.2., gegeben.

Satz 1. *Γ sei ein kompakter, rektifizierbarer Weg in C, $P_\lambda(\partial)$ sei ein linear von $\lambda \in \Gamma$ abhängender Differentialoperator. Es existiere eine gemeinsame Hörmandersche Treppe s von P_λ, $\lambda \in \Gamma$. Es seien $l \geqslant 2$, $a_0, \ldots, a_l \in \Gamma$, $a_1, \ldots, a_l$ paarweise verschieden. E_λ sei die zu s gehörige Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^l$. Dann ist*

i) *$\Gamma \to D'$: $\lambda \mapsto E_\lambda$ stetig*

ii) *$E := (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} E_\lambda (a_j - \lambda)^{l-2}\, d\lambda$ die zu s gehörige Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$.*

Der Beweis ist analog jenem von Satz 1 in Kapitel II.

Bemerkungen. 1) Satz 3 in Kap. II erhalten wir nun als Spezialfall dieses Satzes. Die Bedingung $\inf\{s_0(\lambda): \lambda \in [a, b]\} > -\infty$ garantiert gerade die Existenz einer gemeinsamen (konstanten) Hörmanderschen Treppe für P_λ.

2) Satz 1 ist im wesentlichen nur im hyperbolischen Fall für konkrete Rechnungen geeignet, da ansonsten die Fundamentallösungen E_λ i.a. nicht bekannt sind (siehe 1. Beispiel). In § 2 wird der wichtige Fall homogener, elliptischer Operatoren eingehender untersucht.

3) Im 2. Beispiel wird gezeigt, dass für $P_\lambda(\partial) = \partial_x + i\lambda\partial_y$, $\lambda \in [-1, 1]$, keine gemeinsame Hörmandersche Treppe existiert. Dies erklärt (heuristisch), warum die Parameterintegration zur Gewinnung von Fundamentallösungen bei diesen Operatoren versagt (siehe Kap. II, 2. Bsp.).

§ 2. Homogene elliptische Operatoren

Ein homogener Operator $P(\partial)$ heisst *elliptisch*, wenn $P(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ (siehe [H 4], Def. 3.3.2.). $Pf \dfrac{1}{P(ix)} \in S'$ wird dann wie in [B 1], (1.2), (1.3) (zu korrigieren), (1.4), (1.5) definiert.

Satz 2. *$P(\partial)$ sei homogen, vom Grad m und elliptisch.*

$$E := (2\pi)^{-n/2} F^{-1}\left(Pf\frac{1}{P(ix)}\right).$$

Dann gilt:

i) *E ist eine Fundamentallösung von $P(\partial)$,*

ii) $(1+r^2)^{-(m-n+1)/2} E \in \dot{B}'$,

iii) *$E \in D'$ ist durch* i) *und* ii) *bis auf ein Polynom vom Grad $m-n$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. i)

$$P(\partial)E = (2\pi)^{-n/2} P(\partial) F^{-1}\left(Pf\frac{1}{P(ix)}\right)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} F^{-1}\left(P(ix)Pf\left(\frac{1}{P(ix)}\right)\right) = (2\pi)^{-n/2} F^{-1} 1 = \delta.$$

ii) In [B 1], Th. 2 und Th. 3 wird gezeigt, dass E entweder homogen von der Ordnung $m-n$ ist und C^∞ in $R^n \setminus \{0\}$ oder aber $E = Q_1(x) + Q_2(x)\log r$, wobei Q_i C^∞ in $R^n \setminus \{0\}$ homogen von der Ordnung $m-n$ sind. Daraus folgt die Behauptung in ii).

iii) Siehe Beweis von Beispiel 5 in Kap. I.

Satz 3. 1) *Γ sei ein kompakter, rektifizierbarer Weg in C; $P_\lambda, \lambda \in \Gamma$, seien homogen, vom Grad m, elliptisch und linear von λ abhängig; $a_0, a_1, \ldots, a_l \in \Gamma$, $l \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_l$ paarweise verschieden.*

2) *E_λ sei eine Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^l$ mit $(1+r^2)^{-(lm-n+1)/2} E_\lambda \in \dot{B}'$ und $\Gamma \to D'$: $\lambda \mapsto E_\lambda$ sei stetig.*

Behauptung. *$E := (l-1)\sum_{j=1}^{l}\prod_{k \neq j}(a_j - a_k)^{-1}\int_{a_0}^{a_j} E_\lambda (a_j-\lambda)^{l-2}\,d\lambda$ ist eine Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$.*

1. Beweis. a) Wir zeigen zunächst:

$$\exists \delta > 0 : \forall \varepsilon \in]0, \delta] : s^\varepsilon := Y(\varepsilon^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)$$

ist eine gemeinsame Hörmandersche Treppe von $P_\lambda, \lambda \in \Gamma$ (vgl. [H 5]).

α) P_λ ist elliptisch, hängt stetig von $\lambda \in \Gamma$ ab Γ ist kompakt $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$: $\exists C_1(\varepsilon)$: $\forall x \in R^n$ mit $r \geqslant \varepsilon$: $\forall \lambda \in \Gamma$: $|P_\lambda(x)| \geqslant C_1(\varepsilon)$.

β) $P_\lambda(x_1, 0, \ldots, 0) = \alpha_\lambda \cdot x_1^m, \alpha_\lambda \neq 0$, da P_λ elliptisch $\Rightarrow \min\{|\alpha_\lambda| : \lambda \in \Gamma\} > 0 \Rightarrow \exists R$: $\forall x$ mit $|x_1| \geqslant R$, $x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$: $\forall \lambda \in \Gamma$: $|P_\lambda(x_1 + i, x_2, \ldots, x_n)| \geqslant 1$.

γ) $\exists \delta > 0$: $\exists C_2 > 0$: $\forall x$ mit $x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \delta$: $\forall \lambda \in \Gamma$: $|P_\lambda(x_1 + i, x_2, \ldots, x_n)| \geqslant C_2$.

Denn: Wenn es so ein δ nicht gäbe, so könnten wir für $0<\delta<1$ ein $x(\delta)$ mit $x_2(\delta)^2+\ldots+x_n(\delta)^2\leqslant\delta$ und ein $\lambda(\delta)\in\Gamma$ wählen, sodass $|P_{\lambda(\delta)}(x_1(\delta)+i, x_2(\delta),\ldots,x_n(\delta))|\leqslant\delta$.

Nach β) ist $|x_1(\delta)|<R$. $\delta_k, k=1,2,\ldots$, sei eine Nullfolge, (λ, x) ein Häufungspunkt der Folge $(\lambda(\delta_k), x(\delta_k))$. Dann ist $x_2=\ldots=x_n=0$ und $P_\lambda(x_1+i, x_2,\ldots,x_n)=0\Rightarrow\alpha_\lambda\cdot(x_1+i)^m=0$. Das ist ein Widerspruch.

δ) Wir wählen δ und $C_2(\delta)$ wie in γ) und für $\varepsilon\in]0,\delta]$ sei $C_\varepsilon:=\min\{C_1(\varepsilon), C_2(\delta)\}$. Damit gilt:

$$\forall\varepsilon\in]0,\delta]:\ \forall\lambda\in\Gamma:\ \forall x\in R^n:\ |P_\lambda(x_1+iY(\varepsilon^2-x_2^2-\ldots-x_n^2), x_2,\ldots,x_n)|\geqslant C_\varepsilon.$$

$s^\varepsilon:=Y(\varepsilon^2-x_2^2-\ldots-x_n^2)$ ist somit eine gemeinsame Hörmandersche Treppe von P_λ.

b) Für $\varepsilon\in]0,\delta]$ sei E_λ^ε die zu s^ε gehörige Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^l$. $E_\lambda^0:=E_\lambda$. Für $\varphi\in D$ und $\varepsilon>0$ ist dann

$$\begin{aligned}&\langle\varphi(-x), E_\lambda^\varepsilon\rangle\\ &=(2\pi)^{-n/2}\left(\int\limits_{x_2^2+\ldots+x_n^2>\varepsilon^2}\frac{F\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l}dx+\int\limits_{x_2^2+\ldots+x_n^2<\varepsilon^2}\frac{F\varphi(x_1+i, x_2,\ldots,x_n)}{P_\lambda(ix_1-1, ix_2,\ldots,ix_n)^l}dx\right).\end{aligned}$$

Für gewisse φ, die im folgenden näher betrachtet werden, kann der Grenzübergang $\varepsilon\to0$ durchgeführt werden. Sei nämlich $\varphi\in D$ mit $\int x^\alpha\varphi\,dx=0$ für $|\alpha|\leqslant lm-n$. Dann ist $F\varphi(ix)=O(r^{lm-n+1})$ bei $x=0$ und daher

$$\lim_{\varepsilon\to0}\langle\varphi(-x), E_\lambda^\varepsilon\rangle=(2\pi)^{-n/2}\int\frac{F\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l}dx=\langle\varphi(-x), E_\lambda\rangle.$$

Die letzte Gleichung gilt dabei nach Satz 2.

Man beachte, dass $\lim\limits_{\varepsilon\to0}E_\lambda^\varepsilon$ im allgemeinen in D' nicht existiert.

c) Wir wählen für jeden Multiindex α mit $|\alpha|\leqslant lm-n$ ein $\varphi_\alpha\in D$ so, dass $\int x^\beta\varphi_\alpha\,dx=\delta_{\alpha,\beta}$ für $|\alpha|, |\beta|\leqslant lm-n$. Für $\varepsilon\in[0,\delta]$ sei

$$G_\lambda^\varepsilon:=E_\lambda^\varepsilon+\sum_{|\alpha|\leqslant lm-n}x^\alpha(\langle\varphi_\alpha, E_\lambda\rangle-\langle\varphi_\alpha, E_\lambda^\varepsilon\rangle).$$

Dann gilt wegen a) $\lim\limits_{\varepsilon\to0}G_\lambda^\varepsilon=E_\lambda=G_\lambda^0$. Die Abbildung $\varrho\colon\Gamma\times[0,\delta]\to D'$: $(\lambda,\varepsilon)\mapsto G_\lambda^\varepsilon$ ist ausserdem nach Bedingung 2) und Satz 1 partiell stetig für festgehaltenes ε.

d) Wir nehmen vorerst als bewiesen an, dass ϱ (in beiden Variablen) stetig ist und zeigen damit die Behauptung des Satzes.

$$E^\varepsilon:=(l-1)\sum_{j=1}^{l}\prod_{k\neq j}(a_j-a_k)^{-1}\int\limits_{a_0}^{a_j}E_\lambda^\varepsilon(a_j-\lambda)^{l-2}\,d\lambda$$

ist nach Satz 1 eine Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$. Nach Kap. I, Satz 2, ist

$$G^\varepsilon := (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j-a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} G_\lambda^\varepsilon (a_j-\lambda)^{l-2}\, d\lambda = E^\varepsilon + P^\varepsilon,$$

wobei P^ε ein Polynom vom Grad $\leqslant lm-n$ ist. Daher ist G^ε ebenfalls eine Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$.

Aufgrund der Stetigkeit von ϱ ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G^\varepsilon = (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j-a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} \lim_{\varepsilon\to 0} G_\lambda^\varepsilon (a_j-\lambda)^{l-2}\, d\lambda = E.$$

Damit ist auch E eine Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$.

e) Wir müssen nun noch die Stetigkeit von ϱ zeigen.

$$\varrho \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \varphi \in D\colon \varrho_\varphi\colon \Gamma \times [0, \delta] \to C\colon (\lambda, \varepsilon) \mapsto \langle \varphi, G_\lambda^\varepsilon \rangle \text{ stetig.}$$

Dafür sind ausreichend:

i) $\forall\, |\alpha| \leqslant lm-n$: ϱ_{φ_α} ist stetig

ii) $\forall\, \varphi \in D$ mit $\int x^\alpha \varphi\, dx = 0$ für $|\alpha| \leqslant lm-n$: ϱ_φ ist stetig.

Wegen $\varrho_{\varphi_\alpha}(\lambda, \varepsilon) = \langle \varphi_\alpha, G_\lambda^\varepsilon \rangle = \langle \varphi_\alpha, E_\lambda \rangle$ und der Stetigkeit von E_λ ist nur mehr ii) zu zeigen.

f) Beweis von ii):

Es sei $\varphi \in D$ mit $\int x^\alpha \varphi\, dx = 0$ für $|\alpha| \leqslant lm-n \Rightarrow \langle \varphi, G_\lambda^\varepsilon \rangle = \langle \varphi, E_\lambda^\varepsilon \rangle$

$$= (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{x_2^2+\ldots+x_n^2>\varepsilon^2} \frac{F\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l}\, dx + \int_{x_2^2+\ldots+x_n^2<\varepsilon^2} \frac{F\varphi(x_1+i, x_2, \ldots, x_n)}{P_\lambda(ix_1-1, ix_2, \ldots, ix_n)^l}\, dx \right).$$

Da $|P_\lambda(ix_1-1, ix_2, \ldots, ix_n)^l| \geqslant C_\delta^l$ für $x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \varepsilon^2 \leqslant \delta^2$, ist das zweite Integral nach dem Satz von Lebesgue in (λ, ε) stetig. Wir haben noch die Stetigkeit des Integrals

$$\int_{x_2^2+\ldots+x_n^2>\varepsilon^2} \frac{F\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l}\, dx$$

in ε und λ zu zeigen. Dazu müssen wir eine von ε und λ unabhängige L^1-Majorante des Integranden angeben.

Die Abbildung $\sigma\colon \Gamma \times \{x \in R^n\colon |x| = 1\} \to]0, \infty[\colon (\lambda, x) \mapsto |P_\lambda(ix)^l|$ ist stetig und hat daher ein Minimum $c > 0$.

Aus der Homogenität von P_λ folgt $|P_\lambda(ix)^l| \geqslant cr^{lm}$ für $\lambda \in \Gamma, x \in R^n$. Es genügt daher, die Integrierbarkeit von $\frac{|F\varphi(x)|}{cr^{lm}}$ nachzuweisen. Diese folgt aus $F\varphi \in S$ und $F\varphi(x) = O(r^{lm-n+1})$ bei $x = 0$.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

2. Beweis. a) Nach Satz 2 ist $FE_\lambda = (2\pi)^{-n/2} Pf \frac{1}{P_\lambda(ix)^l}$ in $x \neq 0$;

es sei $\varphi \in D$ mit

$$\operatorname{supp} \varphi \subset R^n \setminus \{0\} \Rightarrow \langle \varphi, FE \rangle$$

$$= (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} \langle \varphi, FE_\lambda \rangle (a_j - \lambda)^{l-2} d\lambda$$

$$= (2\pi)^{-n/2} (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} \int \frac{\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l} dx (a_j - \lambda)^{l-2} d\lambda$$

$$= (\text{Fubini}) = (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(x) dx (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-2}}{P_\lambda(ix)^l} d\lambda$$

$$= (\text{Satz 2, Kap. II}) = (2\pi)^{-n/2} \int \varphi(x) \prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(ix)^{-1} dx.$$

Daher ist

$$FE = (2\pi)^{-n/2} Pf \prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(ix)^{-1} \quad \text{in} \quad R^n \setminus \{0\}.$$

b) $T := (2\pi)^{-n/2} F^{-1} \left(Pf \prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(ix)^{-1} \right)$ ist nach Satz 2 Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} P_{a_j}(\partial)$. $\operatorname{supp}(F(E-T)) \subset \{0\} \Rightarrow E = T + Q$, wobei Q ein Polynim ist. Wenn wir noch zeigen, dass $\operatorname{gr} Q \leqslant lm - n$, so folgt die Aussage des Satzes.

$\operatorname{gr} Q \leqslant lm - n \Leftrightarrow \forall \varphi$ mit $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$ für $|\alpha| \leqslant lm - n$: $\langle \varphi, F(E-T) \rangle = 0$. Es sei also $\varphi \in D$ mit $\partial^\alpha \varphi(0) = 0$ für $|\alpha| \leqslant lm - n$. Dann ist

$$\langle \varphi, FE \rangle = (2\pi)^{-n/2} (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} \int_{a_0}^{a_j} \int \frac{\varphi(x)}{P_\lambda(ix)^l} dx (a_j - \lambda)^{l-2} d\lambda.$$

Mit den Abschätzungen des 1. Beweises sieht man, dass der Satz von Fubini wieder anwendbar ist. Wie oben ergibt sich damit $\langle \varphi, FE \rangle = \langle \varphi, FT \rangle$, womit alles gezeigt ist.

Bemerkungen. 1) Den ersten, längeren Beweis von Satz 3 habe ich aufgenommen, da er mir eher verallgemeinerungsfähig erscheint als der zweite Beweis, welcher wohl nur im elliptischen Fall anwendbar sein dürfte.

2) Im 3. Beispiel wird mit Satz 3. eine Fundamentallösung des Operators der orthotropen Platte berechnet.

§ 3. Uneigentliche Parameterintegrale

$(P+\lambda Q)(\partial)$, $\lambda \in R$, sei ein Differentialoperator. Wir wollen eine Fundamentallösung von $P(\partial)Q(\partial)$ durch ein uneigentliches Parameterintegral darstellen. Dazu sei auf jedes Intervall $[0, b]$, $b > 0$, Satz 1 in Kap. II, Satz 1 oder Satz 3 aus diesem Kapitel anwendbar, E_λ sei die entsprechende Fundamentallösung von $(P+\lambda Q)^2(\partial)$ für $\lambda \in [0, b]$.

Dann ist $\int_0^b E_\lambda \, d\lambda$ eine Fundamentallösung von $b^{-1} P(P+bQ)(\partial) = P(Q+P/b)(\partial)$. Wenn wir weiters voraussetzen, dass $\int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda := \lim_{b\to\infty} \int_0^b E_\lambda \, d\lambda$ in D' existiert, so ist offenbar $\int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda$ eine Fundamentallösung von $P(\partial)\cdot Q(\partial)$.

Diese Darstellung einer Fundamentallösung von $PQ(\partial)$ wird in [G 1] für die Operatoren $P = \Delta_n - k^2$, $Q = \sum_{j=1}^n a_j^2 \partial_{x_j}^2 - l^2$, $a_j, k, l \in R$, mit einer nur in diesem Spezialfall verwendbaren Methode hergeleitet. (In diesem Fall ist bei unserer Ableitung für $k^2+l^2 \neq 0$ Satz 1 (mit $s = 0$) und für $k = l = 0$ Satz 3 zu verwenden.) In [T 1] werden die Operatoren $P = -\Delta_n + \partial_t^2 + \alpha_1 \partial_t + \alpha_2$ und $Q = -\sum_{j=1}^n a_j^2 \partial_{x_j}^2 + \partial_t^2 + \beta_1 \partial_t + \beta_2$ betrachtet. Die Darstellung einer Fundamentallösung von PQ durch ein uneigentliches Parameterintegral wird dabei mit Laplacetransformation aus der entsprechenden Darstellung in [G 1] abgeleitet. (Wir erhalten diese Integraldarstellung direkt durch Anwendung von Satz 1 aus Kap. II.)

Bemerkungen. 1) In allen mir bekannten Fällen ist die Berechnung einer Fundamentallösung einfacher mit endlichen (als mit uneigentlichen) Parameterintegralen durchzuführen. (Ich verfolge daher die obige Methode nicht weiter.) Um dies zu demonstrieren, wird im 4. Beispiel $\Delta_3 \times \times (a^2 \partial_x^2 + a^2 \partial_y^2 + \partial_z^2)$ untersucht. Siehe dazu auch [G 1], p. 1140.

2) Eine explizite Darstellung einer Fundamentallösung von $\Delta_n (\sum_{i=1}^n a_i^2 \partial_{x_i}^2)$ ist nur für $n \leqslant 3$ bekannt. Für $n = 3$ siehe [G 1], p. 1139, $n = 2$ ergibt sich nach linearen Transformationen wie im 3. Beispiel (vgl. [0 2], Op. 27, 28). Aus Satz 3 erhält man die folgende Integraldarstellung einer Fundamentallösung E von $\Delta_n (\sum_{i=1}^n a_i^2 \partial_{x_i}^2)$:

$$E = \int_0^1 E_\lambda \, d\lambda, \quad \text{wobei } E_\lambda = \prod_{i=1}^n (\lambda a_i^2 + 1 - \lambda)^{-1/2} H\left(x_j (\lambda a_j^2 + 1 - \lambda)^{-1/2}\right)$$

und $H(x_1, \ldots, x_n) =: H(x_j)$ die in [0 2], Op. 11 angegebene Fundamentallösung von Δ_n^2 ist.

§ 4. Homogene Differentialoperatoren in der Ebene

Ein homogener, linearer Differentialoperator in zwei Unbestimmten lässt sich immer in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen. Im folgenden sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $P(\partial) = \prod_{j=1}^{l} (\partial_x + a_j \partial_y)$, $a_j \in C$. Wir setzen ausserdem voraus, dass $a_1, \ldots, a_l$ paarweise verschieden sind.

Bereits im Jahre 1894 zeigte C. Somigliana, dass es eine Fundamentallösung der Form $E = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j (y - a_j x)^{l-2} \log (y - a_j x)$ geben müsse (siehe [S 4]). Somigliana betrachtete allerdings nur reelle elliptische Differentialoperatoren (d.h. $a_j \in C \setminus R$, wobei die a_j paarweise konjugiert sind) und bestimmte die Koeffizienten α_j *nicht* explizit.

Wir werden nun die Koeffizienten $\alpha_j, j = 1, \ldots, l$ mit Satz 3 bestimmen. Dafür setzen wir zunächst voraus, dass $a_1, \ldots, a_l$ alle entweder in der oberen oder der unteren Halbebene liegen. Dann ist Satz 3 anwendbar. (Was passieren kann, wenn die a_j in verschieden Halbebenen liegen, zeigt Bsp. 2 in Kap. II.) Eine Fundamentallösung von $(\partial_x + \lambda \partial_y)^l$ ist für $\lambda \in C \setminus R$:

$$E_\lambda = \frac{\operatorname{sig}(\operatorname{Im} \lambda)}{2\pi i (l-1)!} \frac{x^{l-1}}{y - \lambda x}$$

(Man verwende Satz 3′ in [0 1] und Op. 2 in [0 2] und nicht Op. 3 in [0 2].) Wir erhalten damit als Fundamentallösung $\tilde{E}$ von $\prod_{j=1}^{l} (\partial_x + a_j \partial_y)$:

$$\tilde{E} = (l-1) \sum_{j=1}^{l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{l} (a_j - a_k)^{-1} \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j) \frac{x^{l-1}}{2\pi i (l-1)!} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-2}}{y - \lambda x} \, d\lambda,$$

wobei $a_0 \in C$, $\operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_0) = \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_1)$.

(Dass wir punktweise integrieren können, wurde in Bsp. 2, Kap. II gezeigt.)

$$\begin{aligned} x^{l-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-2}}{y - \lambda x} \, d\lambda &= x^{l-2} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-3} (y - \lambda x + a_j x - y)}{y - \lambda x} \, d\lambda \\ &= x^{l-2} \int_{a_0}^{a_j} (a_j - \lambda)^{l-3} \, d\lambda + (a_j x - y) x^{l-2} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-3}}{y - \lambda x} \, d\lambda. \end{aligned}$$

Wenn wir so fortfahren, ergibt sich

$$\begin{aligned} x^{l-1} \int_{a_0}^{a_j} \frac{(a_j - \lambda)^{l-2}}{y - \lambda x} \, d\lambda &= P_j + (a_j x - y)^{l-2} x \int_{a_0}^{a_j} \frac{d\lambda}{y - \lambda x} \\ &= P_j - (a_j x - y)^{l-2} \log \frac{y - a_j x}{y - a_0 x}, \end{aligned}$$

wobei P_j ein Polynom in x, y vom Grad $l-2$ ist. Nach Abzug dieser Polynome von $\tilde{E}$ erhalten wir die Fundamentallösung

$$\bar{E} = \frac{-1}{2\pi i(l-2)!} \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1} \bar{E}_{(j)},$$

wobei

$$\bar{E}_{(j)} = \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j)\,(a_j x - y)^{l-2} \log \frac{y - a_j x}{y - a_0 x}.$$

Da $\sum_{j=1}^{l} a_j^m \prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1} = 0$ für $m = 0, 1, 2, \ldots, l-2$ (siehe Kap. II, Satz 2, Beweis c)), ist

$$\sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1} (a_j x - y)^{l-2} \log(y - a_0 x) = 0,$$

womit für einen Spezialfall Satz 4 abgeleitet ist:

Satz 4. *$a_1, \ldots, a_l \in C\setminus R$ seien paarweise verschieden. Eine Fundamentallösung von $\prod_{j=1}^{l} (\partial_x + a_j \partial_y)$ ist dann*

$$E = \frac{-1}{2\pi i(l-2)!} \sum_{j=1}^{l} \prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1} E_{(j)},$$

wobei $E_{(j)} = \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j)\,(a_j x - y)^{l-2} \log(y - a_j x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^2)$. (Der Logarithmus ist wie immer in $C\setminus]-\infty, 0]$ definiert!)

Beweis. Wir berechnen $F := \prod_{j=1}^{l} (\partial_x + a_j \partial_y) E$.

a) $(\partial_x + a_j \partial_y) \log(y - a_j x) = -2\pi i \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j)\, \delta_x \otimes Y(-y)$, da nach unserer Definition des Logarithmus $\log(y - a_j x)$ bei $x = 0$, $y \leqslant 0$ unstetig ist und dort gilt:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \pm\varepsilon>0}} \log(y - a_j \varepsilon) = \log|y| \mp i\pi \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j). \qquad \text{(Vgl. Kap. I, § 5, Bsp. 2.)}$$

(Es könnte noch ein Term $T \in D'$ mit $\operatorname{supp} T \subset \{0\}$ auftreten. Aus Homogenitätsgründen ist aber $T = 0$.)

b) $$\begin{aligned}(\partial_x + a_j \partial_y) E_{(j)} &= \operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j)\,(a_j x - y)^{l-2} (\partial_x + a_j \partial_y) \log(y - a_j x)\\ &= (-1)^{l-1} 2\pi i \delta_x \otimes y^{l-2}\, Y(-y).\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} F &= \frac{-1}{2\pi i(l-2)!} \sum_{j=1}^{l} \Big(\prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1} (\partial_x + a_k \partial_y)\Big) \times\\ &\qquad\qquad \times (-1)^{l-1}\, 2\pi i \delta_x \otimes y^{l-2}\, Y(-y)\\ &= \frac{(-1)^{l-2}}{(l-2)!} \sum_{m=0}^{l-1} \partial_x^{l-m-1} \partial_y^m \times\\ &\qquad \times (\delta_x \otimes y^{l-2}\, Y(-y)) \sum_{j=1}^{l} \sum_{j\notin\{k_1,\ldots,k_m\}} a_{k_1} \ldots a_{k_m} \prod_{k\neq j} (a_j - a_k)^{-1}.\end{aligned}$$

d) Es sei $b_{jm} := \sum_{j \notin \{k_1, \dots, k_m\}} a_{k_1} \dots a_{k_m}$; wir müssen $\sum_{j=1}^{l} b_{jm} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1}$ für $m = 0, \dots, l-1$ berechnen.

Wenn $a^{(1)} := \sum_{j=1}^{l} a_j$, $a^{(2)} := \sum_{j \neq k} a_j a_k$ etc. definiert wird, so ist $b_{jm} = a^{(m)} - a_j a^{(m-1)} + a_j^2 a^{(m-2)} - \dots + (-1)^m a_j^m$. Nach Kap. II, Satz 2, Beweis c), ist

$$\sum_{j=1}^{l} a_j^s \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = 0 \quad \text{für} \quad s \leqslant l-2.$$

Das ergibt

$$\sum_{j=1}^{l} b_{jm} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = 0 \quad \text{für} \quad m \leqslant l-2.$$

Weiters ist

$$\sum_{j=1}^{l} a_j^{l-1} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = \sum_{j=1}^{l} (a_j - a_1) a_j^{l-2} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = \dots$$
$$\dots = \prod_{k \neq l} (a_l - a_k) \prod_{k \neq l} (a_l - a_k)^{-1} = 1.$$

Daher ist

$$\sum_{j=1}^{l} b_{j,l-1} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l-1} a_j^{l-1} \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)^{-1} = (-1)^{l-1}.$$

e) In der letzten Summe in c) bleibt also nur der Term mit $m = l-1$ übrig:

$$F = \frac{(-1)^{l-2}}{(l-2)!} \partial_y^{l-1} (\delta_x \otimes y^{l-2} Y(-y)) (-1)^{l-1};$$

$$\partial_y^{l-1} (y^{l-2} Y(-y)) = -(l-2)! \delta_y \Rightarrow F = \delta.$$

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkungen. 1) Zum Beweis von Satz 4 wurde die Ableitung zu Beginn des Paragraphen (mittels Satz 3) offenbar nicht benötigt. Ohne diese Ableitung käme mir die Aussage des Satzes jedoch unmotiviert vor.

2) C. Somigliana verwendete eine andere Methode. Er zeigte, dass man im Ansatz

$$E = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j (y - a_j x)^{l-2} \log (y - a_j x)$$

die α_j so bestimmen kann, dass E in $R^2 \setminus \{0\}$ beliebig oft differenzierbar ist. Da $P(\partial) E$ homogen von der Ordnung -2 ist, muss dann $P(\partial) E = c\delta$ gelten, $c \in C$. Dass $c \neq 0$, folgt aus der Elliptizität von $P(\partial)$.

3) Für $l = 2$ ergibt sich

$$E = \frac{1}{2\pi i(a_2-a_1)}\bigl(\operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_1)\log(y-a_1 x)-\operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_2)\log(y-a_2 x)\bigr).$$

Die in [0 2], Op. 15, angegebene Fundamentallösung folgt nach Trennung in Real- und Imaginärteil.

4) Für reelle a_j zeigt man durch Grenzübergang in D', dass statt $\operatorname{sig}(\operatorname{Im} a_j)\log(y-a_j x)$ entweder $\log^+(y-a_j x)$ oder $-\log^-(y-a_j x)$ verwendet werden kann (siehe Kap. I, § 5, Bsp. 2). Es ist natürlich auch eine beliebige konvexe Kombination der beiden Terme zulässig. Am günstigsten ist meistens $\frac{1}{2}(\log^+-\log^-)$. Das führt auf $E_{(j)} = -i\pi(a_j x-y)^{l-2}\, Y(a_j x-y)\operatorname{sig} x$.

Im 5. Beispiel wird damit eine Fundamentallösung von $\partial_x^3+\partial_y^3$ berechnet.

5) Im 6. Beispiel wird mit Satz 4 gezeigt, dass sich $f(\lambda) = \log(y-\lambda x)$ in kein die obere Halbebene umfassendes Gebiet analytisch fortsetzen lässt (siehe Bsp. 1 im Kap. I).

§ 5. Beispiele

1. Beispiel. 1) *$s^\varepsilon := Y(\varepsilon^2-y^2-z^2)$ ist für $0 < \varepsilon < 1$ eine Hörmandersche Treppe von $\Delta_3 = \partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$.*

2) *Die zugehörige Fundamentallösung ist*

$$E = -\frac{1}{4\pi r}+\frac{1}{4\pi}\int_0^\varepsilon e^{-tx} J_0\bigl(t\sqrt{y^2+z^2}\bigr)\,dt.$$

Beweis. a) $P = r^2$; für $y^2+z^2 \geqslant \varepsilon^2$ ist

$$|P(ix-s^\varepsilon, iy, iz)| = r^2 \geqslant \varepsilon^2 > 0$$

und für $y^2+z^2 < \varepsilon^2$ ist

$$\begin{aligned}|P(ix-s^\varepsilon, iy, iz)| &= |(ix-1)^2+(iy)^2+(iz)^2| = \sqrt{(r^2-1)^2+4x^2}\\ &= \sqrt{(1+r^2)^2-4(y^2+z^2)} \geqslant \sqrt{(1+y^2+z^2)^2-4(y^2+z^2)}\\ &= 1-y^2-z^2 > 1-\varepsilon^2 > 0.\end{aligned}$$

Somit ist s^ε eine Hörmandersche Treppe von Δ_3.

b) Es sei $\varphi \in D$; $\varrho^2 := y^2+z^2$;

$$\begin{aligned}(2\pi)^{3/2}\langle\varphi(-x,-y,-z), E\rangle &= \int\int\int \frac{F\varphi(x+is^\varepsilon, y, z)}{P(ix-s^\varepsilon, iy, iz)}\,dx\,dy\,dz\\ &= -\int\int_{\varrho>\varepsilon}\int \frac{F\varphi}{r^2}\,dx\,dy\,dz+\int\int_{\varrho<\varepsilon} dy\,dz \int \frac{F\varphi(x+i, y, z)}{(ix-1)^2-\varrho^2}\,dx.\end{aligned}$$

Es sei y, z mit $\varrho^2 < \varepsilon^2$ fest, $f(u) := \dfrac{F\varphi(u, y, z)}{-u^2-\varrho^2}$. f hat einen einfachen Pol in $u = i\varrho$ mit Residuum $\dfrac{iF\varphi(i\varrho, y, z)}{2\varrho}$. Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F\varphi(x+i, y, z)}{(ix-1)^2-\varrho^2}\,dx = \int_{i-\infty}^{i+\infty} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du - 2\pi i \operatorname*{Res}_{u=i\varrho} f(u)$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} (F\varphi/r^2)\,dx + (\pi/\varrho)\,F\varphi(i\varrho, y, z)$$

nach dem Residuensatz. Somit ist

$$(*) \qquad (2\pi)^{3/2}\langle \varphi(-x, -y, -z), E\rangle = -\int\!\!\int\!\!\int \frac{F\varphi}{r^2}\,dx\,dy\,dz + \\ +\pi \int\!\!\int_{\varrho<\varepsilon} \frac{F\varphi(i\varrho, y, z)}{\varrho}\,dy\,dz.$$

c) $-\int\!\int\!\int (F\varphi/r^2)\,dx\,dy\,dz = \langle F\varphi, -1/r^2\rangle = \langle \varphi, F(-1/r^2)\rangle$. $T := F(-1/r^2)$ erfüllt $-r^2 F^{-1} T = 1$, $\Delta T = (2\pi)^{3/2}\delta$; $(2\pi)^{-3/2} T$ ist also eine Fundamentallösung von Δ_3. Ausserdem ist $T \in F(L^1 + L^2) \subset C_0 + L^2 \subset \dot{B}'$. Nach Beispiel 5 aus Kapitel I folgt $(2\pi)^{-3/2} T = -1/4\pi r$. Das erste Integral in $(*)$ ist also $(2\pi)^{3/2}\langle \varphi, -1/4\pi r\rangle = (2\pi)^{3/2}\langle \varphi(-x, -y, -z), -1/4\pi r\rangle$.

d) Wir berechnen nun

$$I := \pi \int\!\!\int_{\varrho<\varepsilon} \frac{F\varphi(i\varrho, y, z)}{\varrho}\,dy\,dz.$$

F_{yz} bezeichne die Fouriertransformation einer Distribution $T(y, z) \in S'(R^2)$. $\chi_\varepsilon \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^2)$ sei durch

$$\chi_\varepsilon(y, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } \varrho < \varepsilon, \\ 0 & \text{für } \varrho > \varepsilon \end{cases}$$

definiert.

$$I = (8\pi)^{-1/2} \int\!\!\int \frac{\chi_\varepsilon(y, z)}{\varrho}\,dy\,dz \int\!\!\int\!\!\int \varphi(x, v, w)\, e^{x\varrho - ivy - iwz}\,dx\,dv\,dw$$

$$= (\text{Fubini}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi} \int dx \int\!\!\int \chi_\varepsilon(y, z)\,\varrho^{-1} e^{x\varrho} F_{yz}\varphi(x, y, z)\,dy\,dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi} \int \langle \varphi(x, y, z), F_{yz}(\chi_\varepsilon \varrho^{-1} e^{x\varrho})\rangle\,dx.$$

Nach [D 1], S. 203, ist

$$F_{yz}(\chi_\varepsilon \varrho^{-1} e^{x\varrho}) = \int_0^\varepsilon J_0(\varrho t)\,e^{tx}\,dt.$$

Somit:

$$I = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,\langle \varphi(x, y, z), \int_0^{\varepsilon} e^{itx} J_0(\varrho t)\,dt\rangle$$

$$= (2\pi)^{3/2}\langle \varphi(-x, -y-z), \frac{1}{4\pi}\int_0^{\varepsilon} e^{-itx} J_0(\varrho t)\,dt\rangle.$$

e) Aus c) und d) folgt

$$(2\pi)^{3/2}\langle \varphi(-x, -y, -z), E\rangle = (2\pi)^{3/2}\langle \varphi(-x, -y-z), -1/4\pi r+ \\ +(1/4\pi)\int_0^{\varepsilon} e^{-itx} J_0(\varrho t)\,dt\rangle$$

und damit die Behauptung in 2).

Bemerkung. Offenbar ist $E \notin S'$. Dass E eine Fundamentallösung von Δ_3 ist, folgt auch aus $\Delta_3(e^{-itx} J_0(t\sqrt{y^2+z^2})) = 0$ für alle t in R, was man leicht nachrechnet.

2. Beispiel. *Es existiert keine gemeinsame Hörmandersche Treppe zu* $P_\lambda(\partial) = \partial_x + i\lambda\partial_y, \lambda \in [-1, 1]$.

Beweis. $P_\lambda = x + i\lambda y$. Annahme: $s(y)$ ist eine gemeinsame Hörmandersche Treppe zu P_λ. Dann ist $|ix - s(y) - \lambda y| \geqslant C > 0$ für $\lambda \in [-1, 1]$, $(x, y) \in R^2 \Rightarrow x^2 + (s(y) + \lambda y)^2 \geqslant C^2 \Rightarrow |s(y) + \lambda y| \geqslant C$ für $\lambda \in [-1, 1]$, $y \in R \Rightarrow$ $\Rightarrow |s(y)| \geqslant C + |y| \Rightarrow s$ ist nicht beschränkt.

Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

3. Beispiel. *Eine Fundamentallösung von* $P(\partial) = \partial_x^4 + 2(1-2\varepsilon^2)\partial_x^2\partial_y^2 + \partial_y^4$, $0 < \varepsilon < 1$, *ist*

$$E = \frac{1}{32\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\left(x^2 + \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2\right)\log(x^2 + 2\varepsilon xy + y^2) + \right.$$
$$\left. + \left(x^2 - \frac{2}{\varepsilon}xy + y^2\right)\log(x^2 - 2\varepsilon xy + y^2)\right) + \frac{x^2 - y^2}{16\pi\varepsilon}\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

Beweis. Wir werden Satz 3 auf $P(\partial) = (\partial_x^2 + 2\varepsilon\partial_{xy} + \partial_y^2)(\partial_x^2 - 2\varepsilon\partial_{xy} + \partial_y^2)$ anwenden und betrachten daher $P_\lambda(\partial) = \partial_x^2 + 2\lambda\partial_{xy} + \partial_y^2$, $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] =: \Gamma$; als Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^2$ verwenden wir

$$E_\lambda = \frac{1}{16\pi(1-\lambda^2)^{3/2}}(x^2 - 2\lambda xy + y^2)\log(x^2 - 2\lambda xy + y^2)$$

nach [0 2], Op. 18. Die Bedingungen von Satz 3 sind damit erfüllt, wir erhalten als Fundamentallösung von $P(\partial)$:

$$\frac{1}{32\pi\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-\lambda^2)^{-3/2}(x^2 - 2\lambda xy + y^2)\log(x^2 - 2\lambda xy + y^2)\,d\lambda$$

$$= \text{(nach partieller Integration)}$$

$$= \frac{1}{32\pi\varepsilon}\left(\left.(1-\lambda^2)^{-1/2}(\lambda x^2-2xy+\lambda y^2)\log(x^2-2\lambda xy+y^2)\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\right.$$

$$\left. + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-\lambda^2)^{-1/2}\frac{\lambda x^2-2xy+\lambda y^2}{x^2-2\lambda xy+y^2}\cdot 2xy\,d\lambda\right).$$

Der erste Summand ergibt nach Einsetzen von $\pm\varepsilon$ die beiden oben angegebenen Logarithmen.

Der zweite Summand ergibt 0 für $xy = 0$ und ansonsten

$$B := \frac{xy}{16\pi\varepsilon}\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(1-\lambda^2)^{-1/2}\lambda\,d\lambda - 2xy\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{d\lambda}{x^2-2\lambda xy+y^2}\right)$$

$$= \frac{xy}{16\pi\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{d\lambda}{\lambda-p}, \quad \text{wobei } p = \frac{x^2+y^2}{2xy};$$

$$\frac{16\pi\varepsilon B}{xy} = 2p\int_0^{\varepsilon}\sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{d\lambda}{\lambda^2-p^2} = 2p(1-p^2)\int_0^{\varepsilon}\frac{d\lambda}{(\lambda^2-p^2)\sqrt{1-\lambda^2}} - 2p\int_0^{\varepsilon}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Mit [G 4], 2.284 erhalten wir daraus

$$\frac{16\pi\varepsilon B}{xy} = 2p(1-p^2)\frac{-1}{p\sqrt{p^2-1}}\left.\operatorname{arctg}\frac{\lambda\sqrt{p^2-1}}{p\sqrt{1-\lambda^2}}\right|_0^{\varepsilon} - 2p\arcsin\varepsilon$$

$$= 2\sqrt{p^2-1}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sqrt{p^2-1}}{p\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 2p\arcsin\varepsilon;$$

$2pxy = x^2+y^2$ ist Lösung der homogenen Gleichung und kann weggelassen werden,

$$\sqrt{p^2-1} = \frac{x^2-y^2}{2xy} \Rightarrow \tilde{B} := B + \frac{pxy}{8\pi\varepsilon}\arcsin\varepsilon = \frac{x^2-y^2}{16\pi\varepsilon}\operatorname{arctg}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Das liefert die im Beispiel angegebene Formel.

B e m e r k u n g. Die in [O 2], Op. 28 und [S 5], p. 11 für $0 < \varepsilon \leqslant 2^{-1/2}$ angegebene (und nur für diese ε gültige) Fundamentallösung unterscheidet sich von der oben angegebenen lediglich um ein Polynom 2. Grades. Weiters führt die Methode der Parameterintegration zur Gewinnung obiger Fundamentallösung schneller als die Methode der regularisierten Faltung zum Ziel.

4. Beispiel. *Eine Fundamentallösung von* $\Delta_3(a^2\Delta_2+\partial_z^2)$, $a > 0$, *ist*

$$E = \frac{1}{4\pi(a^2-1)}\left(\sqrt{\varrho^2/a^2+z^2} - r - |z|\left(\operatorname{arsinh}\frac{a|z|}{\varrho} - \operatorname{arsinh}\frac{|z|}{\varrho}\right)\right),$$

wobei $\varrho^2 = x^2+y^2$.

Beweis. Wir verwenden Satz 3; $\dot{P}(\partial) = \lambda\Delta_2+\partial_z^2$; $E_\lambda = -(1/8\pi\lambda)\times \times\sqrt{\varrho^2/\lambda+z^2}$ ist Fundamentallösung von $P_\lambda(\partial)^2$ nach [0 2], Op. 11 und Satz 4 in Kap. I.

$$E = \frac{-1}{8\pi(a^2-1)}\int_1^{a^2}\sqrt{\varrho^2/\lambda+z^2}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = (\text{Substitution } \mu$$

$$= |z|\sqrt{\lambda}/\varrho) = \frac{-|z|}{4\pi(a^2-1)}\int_{|z|/\varrho}^{a|z|/\varrho}\sqrt{1+\mu^2}\,\frac{d\mu}{\mu^2}$$

$$= -\frac{|z|}{4\pi(a^2-1)}\left(-\sqrt{1+\mu^2}/\mu+\operatorname{arsinh}\mu\right)\Big|_{|z|/\varrho}^{a|z|/\varrho}$$

$$= \frac{1}{4\pi(a^2-1)}\left(\sqrt{\varrho^2/a^2+z^2}-r-|z|\left(\operatorname{arsinh}\frac{a|z|}{\varrho}-\operatorname{arsinh}\frac{|z|}{\varrho}\right)\right).$$

5. Beispiel. *Eine Fundamentallösung von* $\partial_x^3+\partial_y^3$ *ist*

$$\frac{x+y}{4\pi\sqrt{3}}\log(x^2+xy+y^2)+\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,\frac{x+y}{x-y}.$$

Beweis. a) $\partial_x^3+\partial_y^3 = \prod_{j=1}^{3}(\partial_x+a_j\partial_y)$ mit $a_1 = 1$, $a_2 = (-1+i\sqrt{3})/2$, $a_3 = \bar{a}_2$.

b) Mit den Bezeichnungen von Satz 4 ist

$$E_{(2)} = (a_2x-y)\log(y-a_2x), \qquad E_{(3)} = -(a_3x-y)\log(y-a_3x).$$

Nach Bem. 4 zu Satz 4 können wir $E_{(1)} = i\pi(y-x)\,Y(x-y)\operatorname{sig}x$ setzen.

c) $\prod_{k\neq 1}(a_1-a_k)^{-1} = \frac{1}{3}$, $\prod_{k\neq 2}(a_2-a_k)^{-1} = \frac{1}{3}a_2$, $\prod_{k\neq 3}(a_3-a_k)^{-1} = \frac{1}{3}a_3$. Damit ist

$$E = \frac{-1}{6\pi i}\left(a_2(a_2x-y)\log(y-a_2x)-a_3(a_3x-y)\log(y-a_3x)+i\pi(y-x)\operatorname{sig}x\right).$$

d) $a_2(a_2x-y) = \frac{1}{2}\left(y-x-i\sqrt{3}(x+y)\right)$,

$-a_3(a_3x-y) = \frac{1}{2}\left(x-y-i\sqrt{3}(x+y)\right)$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{3}}{12\pi}(x+y)\left(\log(y-a_2x)+\log(y-a_3x)\right)+$$

$$+\frac{1}{12\pi i}(x-y)\left(\log(y-a_2x)-\log(y-a_3x)\right)+\frac{x-y}{6}\,Y(x-y)\operatorname{sig}x.$$

e) $\log(y-a_2x)+\log(y-a_3x) = \log(x^2+xy+y^2)$,

$$\begin{aligned}
&\log(y-a_2x)-\log(y-a_3x)\\
&\quad = 2i\,\mathrm{Im}\log(y-a_2x)\\
&\quad = 2i\left(\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{Im}(y-a_2x)}{\mathrm{Re}(y-a_2x)}+\pi Y(-\mathrm{Re}(y-a_2x))\operatorname{sig}(\mathrm{Im}(y-a_2x))\right)\\
&\quad = -2i\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{2y+x}-2\pi i Y(-x-2y)\operatorname{sig}(x).
\end{aligned}$$

Somit:

$$E = \frac{x+y}{4\pi\sqrt{3}}\log(x^2+xy+y^2)-\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{2y+x}+ \\ +\frac{x-y}{6}\operatorname{sig}x\,(Y(x-y)-Y(-x-2y)).$$

f) Wenn wir von E den Term $\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ subtrahieren, erhalten wir statt

$$-\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{2y+x}$$

mit [G 4], 1.625.8:

$$\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{6}\,Y\left(\frac{x+2y}{x-y}\right).$$

Es ergibt sich als neue Fundamentallösung

$$\tilde{E} = \frac{x+y}{4\pi\sqrt{3}}\log(x^2+xy+y^2)+\frac{x-y}{6\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,\frac{x+y}{x-y}+ \\ +\frac{x-y}{6}\left(\operatorname{sig}x\,Y(x-y)-\operatorname{sig}x\,Y(-x-2y)-Y\left(\frac{x+2y}{x-y}\right)\right).$$

Eine elementare Untersuchung zeigt, dass der letzte Klammerausdruck identisch verschwindet, womit alles gezeigt ist.

Bemerkung. Unser Ergebnis stimmt mit [0 2], Op. 69 bis auf $\frac{1}{12}|x-y|$ (das ist eine Lösung der homogenen Gleichung) überein.

6. Beispiel. $f\colon \{\lambda\in C\colon \mathrm{Im}\,\lambda>0\}\to D'\colon \lambda\mapsto\log(y-\lambda x)$ *lässt sich in kein grösseres Gebiet analytisch fortsetzen.*

Beweis. Eine Fundamentallösung von $\partial_x(\partial_x+\lambda\partial_y)$ ist für $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ nach Satz 4

$$g(\lambda) := -\frac{1}{2\pi i\lambda}(\log(y-\lambda x)-\log^+ y).$$

Annahme: $f(\lambda)$ lässt sich in ein Gebiet G, das $\{\lambda \in C: \operatorname{Im} \lambda > 0\}$ echt umfasst, analytisch fortsetzen. Dann gilt dasselbe für $g(\lambda)$. Für $\operatorname{Im} \lambda > 0$ ist $g(\lambda)$ homogen (von der Ordnung 0). Homogenität bleibt bei analytischer Fortsetzung erhalten, also ist $g(\lambda)$ für $\lambda \in G$ homogen. Weiters ist $g(\lambda)$ auch eine Fundamentallösung von $\partial_x(\partial_x + \lambda\partial_y)$ für $\lambda \in G$.

Es sei nun $\lambda \in G$ mit $\operatorname{Im} \lambda < 0$. Eine Fundamentallösung von $\partial_x(\partial_x + \lambda\partial_y)$ ist nach Satz 4

$$-\frac{1}{2\pi i\lambda}(-\log(y-\lambda x) - \log^+ y) =: h(\lambda).$$

$T := h(\lambda) - g(\lambda) \in S'$ ist also eine Lösung von $\partial_x(\partial_x + \lambda\partial_y)T = 0$. $\partial_x T$ ist somit ein Polynom (siehe Kap. I, Bsp. 5, Beweis) und homogen von der Ordnung -1 (da $g(\lambda)$ und $h(\lambda)$ homogen sind) $\Rightarrow \partial_x T = 0 \Rightarrow T$ hängt nur von y ab. Da T homogen ist, ist es eine Konstante. In $G \cap \{\lambda: \operatorname{Im} \lambda < 0\}$ gilt also: $g(\lambda) = h(\lambda) + T(\lambda)$, wobei T bezüglich x, y konstant, bezüglich λ analytisch ist. Es sei nun

$$0 \neq \lambda \in G \cap R \Rightarrow g(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i\lambda} \cdot (\log^+(y-\lambda x) - \log^+ y).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} g(\lambda - i\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} (h(\lambda - i\varepsilon) + T(\lambda - i\varepsilon)) \\ &= -\frac{1}{2\pi i\lambda}(-\log^-(y-\lambda x) - \log^+ y) + T(\lambda), \end{aligned}$$

wobei

$$T(\lambda) := \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} T(\lambda - i\varepsilon) \in C$$

$$\Rightarrow T(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i\lambda}(\log^+(y-\lambda x) + \log^-(y-\lambda x)) = -\frac{1}{\pi i\lambda}\log|y-\lambda x| \notin C.$$

Das liefert einen Widerspruch zur Annahme.

Literatur

[B 1] J. Barros-Neto, *Kernels Associated to General Elliptic Problems*, J. Funct. An. 3 (1969), pp. 173–192.

[B 2] D. W. Bresters, *Initial Value Problems for Iterated Wave Operators*, Dissertation, Twente Technological University, Amsterdam (1969).

[B 3] — *The Initial Value Problem for Operators which Can Be Factorized Into a Product of Klein-Gordon Operators*, in Springer Lect. Notes, No. 280, Berlin (1972), pp. 227–231.

[B 4] F. J. Bureau, *Le problème de Cauchy pour une équation linéaire aux dérivées partielles totalement hyperbolique d'ordre 4 et à 4 variables indépendantes*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 33 (5) (1947), pp. 379–402.

[D 1] W. F. Donoghue, Jr., *Distributions and Fourier Transforms*, Academic Press, New York 1969.

[G 1] H. G. Garnir, *Sur la solution élémentaire pour l'espace indéfini d'un opérateur elliptique décomposable du 4ème ordre*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. 38 (5) (1952), pp. 1129–1141.

[G 2] — *Sur les distributions résolvantes des opérateurs de la physique mathématique*, 3ème partie, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 20 (1951), pp. 271–287.

[G 3] W. Gröbner, N. Hofreiter, *Integraltafel*, II Teil, Bestimmte Integrale, 5. Auflage, Springer, Wien 1973.

[G 4] I. S. Gradshteyn, I. W. Ryzhik, *Table of Integrals*, Series and Products, 4th ed., Academic Press, New York 1965.

[H 1] G. Herglotz, *Über die Integration linearer, partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* II, Berichte u. Verh. d. sächs. Ak. Wissensch. Math. Phys. Kl. 78 (1926), pp. 287–318.

[H 2] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions*, Vol. I, Addison–Wesley, Reading 1966.

[H 3] — *Distributionen und Pseudodifferentialoperatoren*, Vorlesung, Innsbruck 1977.

[H 4] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, 3rd revised printing, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1969.

[H 5] — *On the Theory of General Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, Acta Math. 94 (1955), pp. 161–248.

[H 6] — *On the Division of Distributions by Polynomials*, Ark. Mat. 3 (1958), pp. 555–568.

[O 1] N. Ortner, *Regularisierte Faltung von Distributionen*, Teil 1: *Zur Berechnung von Fundamentallösungen*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 31 (1980), pp. 133–154.

[O 2] — *Regularisierte Faltung von Distributionen*, Teil 2: *Eine Tabelle von Fundamentallösungen*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 31 (1980), pp. 155–173.

[O 3] — *Die Fundamentallösung von Produkten hyperbolischer Operatoren*. I, to appear in Math. Meth. Appl. Sc.

[P 1] A. Piskorek, '*Radon-Transformation und hyperbolische Differentialgleichungen der mathematischen Physik*.' Methoden und Verfahren der math. Physik, Ed. B. Brosowski und E. Martensen, Bd. 10, Bibliograph. Inst., Mannheim (1973), pp. 85–97.

[S 1] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, 2nde éd., Hermann, Paris 1965.

[S 2] — *Théorie des distributions*, Nouvelle éd., Hermann, Paris 1966.

[S 3] G. E. Shilov, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Gordon & Breach, New York 1968.

[S 4] C. Somigliana, *Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivate parziali*, Ann. Mat. Pura Appl. 22 (2) (1894), pp. 143–156.

[S 5] P. Stein, *Die Anwendung der Singularitätenmethode zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten, einschliesslich Trägerrosten*, Stahlbau-Verlag, Köln 1959.

[T 1] M. Thyssen, *Solution élémentaire d'un opérateur hyperbolique décomposable du quatrième ordre*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 25 (1956), pp. 371–382.

[Z 1] C. Zuily, *Problèmes de distributions*, Hermann, Paris 1978.