ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Une extension de la notion d'ordre linéaire à celle d'ordre de dimension n

par L. Dubikajtis (Toruń)

Les axiomes de la géométrie euclidienne, affine ou projective sont d'habitude partagés en quelques classes. L'appartenance des axiomes aux classes particulières dépend des notions qui y figurent ([3], p. 281, 300).

Dans ce travail nous considérons la classe des axiomes d'ordre. Cette classe est basée en géométrie affine (et euclidienne) sur la notion primitive: „un point est situé entre deux autres points". En géométrie projective la classe des axiomes d'ordre est basée sur une autre notion primitive, la relation à quatre arguments: „deux couples de points se séparent".

Dans nos considérations nous nous bornerons à étudier la géométrie projective, car en y fixant certains éléments „à l'infini" on obtient la géométrie affine et on peut aisément déterminer la relation „être situé entre", à partir de la notion de séparation des couples.

En géométrie projective la notion primitive de séparation détermine directement l'ordre des points situés sur une droite, c'est-à-dire l'ordre linéaire des points. D'une manière indirecte cette notion détermine aussi l'ordre des points dans l'espace projectif de dimension arbitraire ([3], p. 311). On peut se poser la question suivante: Dans le cas de l'espace de dimension supérieure à 1, cette façon de déterminer l'ordre est-elle naturelle?

Dans le travail on va montrer comment il est possible, en géométrie projective de dimension n, de déterminer une nouvelle notion décrivant d'une façon plus convenable „l'ordre" des points dans un plan à k dimensions. On va démontrer que l'ordre des points dans un plan à k dimensions déterminé par cette notion, aura des propriétés analogues à celles de l'ordre linéaire (déterminé par la séparation des couples) (1).

En géométrie projective de dimension n, les principales notions primitives sont celles des variétés linéaires (ou simplement variétés) de différentes dimensions. La dimension d'une variété est un nombre entier k vérifiant l'inégalité: $-1 \leqslant k \leqslant n$. Parmi les variétés on peut distinguer,

(1) Les résultats principaux de ce travail ont été publiés dans [1].

suivant leurs dimensions, certaines classes particulières, à savoir: la variété nulle si $k=-1$, les points si $k=0$, les droites si $k=1$, les plans de dimensions k si $2\leqslant k\leqslant n-1$, les hyperplans si $k=n-1$ et enfin l'espace si $k=n$.

Les variétés de dimension k seront désignées par des minuscules latines avec un indice k suscrit (égal à leur dimension) et différents indices souscrits (pour les variétés distinctes). La dimension d'une variété quelconque x sera désignée par $d(x)$.

Les deux relations primitives de la géométrie projective sont l'incidence et la séparation des couples. La première est notée ici: $a^k\leqslant b^l$ et elle s'énonce: „la variété a^k est contenue dans la variété b^l". La seconde, notée $(a^0, b^0)|(c^0, d^0)$, s'énonce: „les couples (a^0, b^0) et (c^0, d^0) se séparent".

Il est bien connu ([2], p. 249) que l'ensemble des variétés linéaires est ordonné par la relation d'incidence ($\leqslant$) et que, ayant déterminé l'intersection: $a^k\frown b^l$ et l'union $a^k\smile b^l$ des variétés ([2], p. 20-24), on obtient un treillis. Les variétés satisfont donc à tous les théorèmes de la théorie des treillis. Elles satisfont encore à certains théorèmes supplémentaires: les théorèmes caractéristiques pour le treillis géométrique projectif de dimension n ([2], p. 255, 282). Citons les suivants, qui seront utiles dans nos considérations ultérieures:

1. *Si* $a^k\leqslant b^l$, $d(a^k)\leqslant d(b^l)$;
2. *Si* $a^k\leqslant b^l$ *et si* $d(a^k)=d(b^l)$, $a^k=b^l$;
3. $d(a^k\smile b^l)+d(a^k\frown b^l)=d(a^k)+d(b^l)$ ([2], p. 283, théorème 1);
4. *Pour tout* a^k *on a:* $a^{-1}\leqslant a^k\leqslant a^n$.

En vertu de ces théorèmes on peut démontrer (en s'appuyant sur les axiomes de la théorie des treillis) tous les axiomes d'incidence classiques de la géométrie projective de dimension n [2]. Pour déterminer la relation de séparation il faut y ajouter une deuxième classe d'axiomes, celle des axiomes d'ordre. Les principaux théorèmes résultant de ces axiomes sont les suivants:

THÉORÈME 1. *Pour quatre points quelconques:* $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *les* 8 *conditions suivantes sont équivalentes:*

$$(a_1^0, a_2^0)|(a_3^0, a_4^0)\,,\quad (a_1^0, a_2^0)|(a_4^0, a_3^0)\,,\quad (a_2^0, a_1^0)|(a_3^0, a_4^0)\,,\quad (a_2^0, a_1^0)|(a_4^0, a_3^0)\,,$$
$$(a_3^0, a_4^0)|(a_1^0, a_2^0)\,,\quad (a_3^0, a_4^0)|(a_2^0, a_1^0)\,,\quad (a_4^0, a_3^0)|(a_1^0, a_2^0)\,,\quad (a_4^0, a_3^0)|(a_2^0, a_1^0)\,.$$

THÉORÈME 2. $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *étant quatre points quelconques, la condition* $(a_{i_1}^0, a_{i_2}^0)|(a_{i_3}^0, a_{i_4}^0)$ *n'est remplie que pour* 8 *permutations:* i_1, i_2, i_3, i_4 *des nombres* 1, 2, 3, 4 *parmi* 24 *possibles.*

THÉORÈME 3. *Si* $(a_1^0, a_2^0)|(a_3^0, a_4^0)$, *les points:* $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *sont distincts et ils sont situés sur une droite.*

[2] Par exemple les axiomes mentionnés dans [3], p. 408.

THÉORÈME 4. *Parmi quatre points distincts situés sur une droite on peut toujours trouver deux couples qui se séparent.*

La notion de séparation n'étant pas tout à fait commode à généraliser, nous la remplacerons par une notion équivalente:

DÉFINITION 1. Au lieu de dire que les couples (a_1^0, a_2^0) et (a_3^0, a_4^0) se séparent, on dit aussi que *les points* $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *forment le cycle* $a_1^0, a_3^0, a_2^0, a_4^0$, ce qu'on note: $\{a_1^0, a_3^0, a_2^0, a_4^0\}$.

Par exemple les points $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ représentés sur la figure 1 satisfont à la condition: $(a_1^0, a_2^0)|(a_3^0, a_4^0)$, donc on a $\{a_1^0, a_3^0, a_2^0, a_4^0\}$.

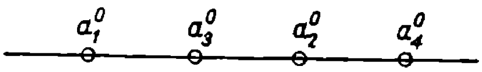

Fig. 1.

En remplaçant dans les théorèmes 1-4 la notion de séparation par celle de cycle on obtiendra les quatre théorèmes suivants:

THÉORÈME 1[1]. *Si* $\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\}$, *on a* $\{a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_1^0\}$ *et* $\{a_4^0, a_3^0, a_2^0, a_1^0\}$.

Les équivalences suivantes résultent immédiatement de ce théorème:

$$\begin{aligned}\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\} &\equiv \{a_2^0, a_3^0, a_4^0, a_1^0\} \equiv \{a_3^0, a_4^0, a_1^0, a_2^0\} \equiv \{a_4^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0\}\\ &\equiv \{a_4^0, a_3^0, a_2^0, a_1^0\} \equiv \{a_3^0, a_2^0, a_1^0, a_4^0\} \equiv \{a_2^0, a_1^0, a_4^0, a_3^0\}\\ &\equiv \{a_1^0, a_4^0, a_3^0, a_2^0\}\,.\end{aligned}$$

(Le symbole $\equiv$ désigne l'équivalence logique.)

THÉORÈME 2[1]. $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *étant quatre points quelconques, la condition* $\{a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, a_{i_3}^0, a_{i_4}^0\}$ *n'est remplie que pour* 8 *permutations*: i_1, i_2, i_3, i_4 *des nombres* 1, 2, 3, 4 *parmi* 24 *possibles.*

THÉORÈME 3[1]. *Si* $\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\}$, *les points*: $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *sont distincts et ils sont situés sur une droite.*

THÉORÈME 4[1]. *Pour quatre points distincts situés sur une droite*: $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ *il existe toujours une permutation* i_1, i_2, i_3, i_4 *des nombres* 1, 2, 3, 4 *telle qu'on ait*: $\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}\}$.

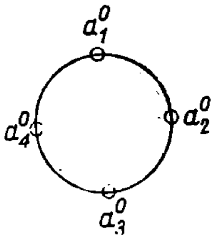

Fig. 2.

En vertu des théorèmes 1[1] et 2[1], il est très commode d'interpréter le cycle $\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\}$ par quatre points rangés successivement sur un cercle de la manière représentée sur la figure 2. Cette interprétation permet de déduire immédiatement quels sont tous les cycles équivalents. Il suffit pour cela de décrire le cercle dans un sens arbitraire en commençant par un point quelconque (fig. 2).

a_1^0, a_2^0, a_3^0 étant trois points distincts situés sur une droite, on peut les transformer par une transformation projective en trois points arbitraires distincts et situés sur une droite. En particulier, le système a_1^0, a_2^0, a_3^0 peut être transformé en un système $a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, a_{i_3}^0$ (où i_1, i_2, i_3 est une permutation arbitraire des nombres 1, 2, 3). C'est pourquoi chaque relation invariante par rapport aux transformations projectives et vérifiée par le système a_1^0, a_2^0, a_3^0 doit être en même temps vérifiée par tous les autres systèmes de la forme $a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, a_{i_3}^0$. On en conclut qu'une telle relation ne peut pas servir à déterminer l'ordre des points sur une droite dans la géométrie projective. Pour cela il faut introduire une relation concernant au moins quatre points, par exemple celle de séparation ou celle de cycle.

Ces considérations peuvent être généralisées au cas des points situés dans une variété de dimension arbitraire. Dans ce but on établira la définition suivante:

DÉFINITION 2. On dit que *les points* $a_1^0, a_2^0, a_3^0, \ldots, a_l^0$ *satisfont à la condition* C^k (et on écrit: $C^k(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_l^0)$), si

1° $l \geqslant k+1$,

2° tous les points a_i^0 sont situés dans une variété à k dimensions,

3° $a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, \ldots, a_{i_{k+1}}^0$ étant $k+1$ points distincts parmi les points $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_l^0$ on a toujours $d(a_{i_1}^0 \cup a_{i_2}^0 \cup \ldots \cup a_{i_{k+1}}^0) = k$ (c'est-à-dire $k+1$ points arbitraires parmi les points a_i^0 ne sont pas situés dans une variété de dimension $k-1$).

Il est bien connu que $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+2}^0$ étant $k+2$ points vérifiant la condition C^k (dans l'espace de dimension $n \geqslant k$), on peut les transformer par une transformation projective en $k+2$ points arbitraires vérifiant la condition C^k (3). Par un raisonnement analogue au précédent on en conclut que pour déterminer „l'ordre" des points vérifiant la condition C^k (donc situés dans une variété de dimension k) il faut établir une relation concernant au moins $k+3$ points.

Dans ce travail on définira une telle relation, notée: $\{a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+3}^0\}$ et vérifiant quatre théorèmes: 1^k-4^k analogues aux théorèmes 1^1-4^1, c'est-à-dire les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1^k. *Si* $\{a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+2}^0, a_{k+3}^0\}$, *on a* $\{a_2^0, a_3^0, \ldots, a_{k+2}^0, a_{k+3}^0, a_1^0\}$ *et* $\{a_{k+3}^0, a_{k+2}^0, \ldots, a_3^0, a_2^0, a_1^0\}$.

THÉORÈME 2^k. $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+3}^0$ *étant* $k+3$ *points quelconques, la condition* $\{a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, \ldots, a_{i_{k+2}}^0, a_{i_{k+3}}^0\}$ *n'est remplie que pour* $2(k+3)$ *permutations*: $i_1, i_2, \ldots, i_{k+2}, i_{k+3}$ *des nombres* $1, 2, \ldots, k+2, k+3$ *parmi* $(k+3)!$ *possibles.*

THÉORÈME 3^k. *Si* $\{a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+2}^0, a_{k+3}^0\}$, $C^k(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+2}^0, a_{k+3}^0)$.

THÉORÈME 4^k. *Si* $C^k(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+2}^0, a_{k+3}^0)$, *il existe toujours une permutation* $i_1, i_2, \ldots, i_{k+2}, i_{k+3}$ *des nombres* $1, 2, \ldots, k+2, k+3$, *telle qu'on ait*: $\{a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, \ldots, a_{i_{k+2}}^0, a_{i_{k+3}}^0\}$.

(3) Le nombre k ne peut pas surpasser la dimension de l'espace.

Il est évident que pour la valeur $k=1$ les théorèmes 1^k-4^k sont identiques aux théorèmes 1^1-4^1, car la condition $C^k(a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0)$ peut être exprimée sous la forme suivante: les points $a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0$ sont distincts et ils sont situés sur une droite.

En vertu des théorèmes 1^k et 2^k, la condition $\{a_1^0, \ldots, a_{k+3}^0\}$ est toujours équivalente aux $2(k+3)$ conditions de la forme: $\{a_{i_1}^0, \ldots, a_{i_{k+3}}^0\}$ (résultant du théorème 1^k) et contradictoire à toutes les autres condition de cette forme. Grace à ce fait on peut interpréter le cycle $\{a_1^0, \ldots, a_{k+3}^0\}$ par $k+3$ points situés sur un cercle de la façon représentée sur la figure 3. Cette interprétation (qui est une généralisation de l'interprétation donnée par la figure 2) permet de conclure immédiatement quels sont tous les cycles équivalents à un cycle donné $\{a_1^0, \ldots, a_{k+3}^0\}$. Il suffit pour cela de décrire le cercle dans un sens arbitraire en commençant par un point quelconque.

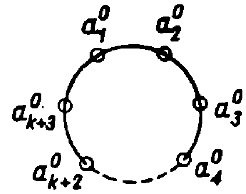

Fig. 3.

Dans l'espace projectif de dimension n on peut déterminer n espèces de cycles: les cycles de 4 points, les cycles de 5 points,..., les cycles de $n+3$ points. Or, pour chaque nombre naturel k vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n$, on peut définir la notion de cycle de $k+3$ points.

Par exemple, dans la géométrie à 3 dimensions on peut définir les cycles suivants:

1° le cycle de 4 points situés sur une droite,

2° le cycle de 5 points situés dans un plan (et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés),

3° le cycle de 6 points, tels qu'il n'existe pas parmi eux 4 points situés dans un plan.

Le principe de dualité, vérifié dans la géométrie projective, permet de définir les notions duales à celles des cycles de points. Dans ce but on précisera ici la notion de k-dualité.

Voici les couples de notions que l'on appellera notions k-duales [4] (k étant un nombre entier vérifiant les inégalités $1 \leqslant k \leqslant n$):

(1) variété de dimension $s-1$ et $(\bar{1})$ variété de dimension $k-s$ (pour chaque s vérifiant la condition $0 \leqslant s \leqslant k$),

(2) relation d'incidence: $\leqslant$ et $(\bar{2})$ relation réciproque: $\geqslant$,

(3) intersection des variétés: $\frown$ et $(\bar{3})$ union des variétés: $\smile$,

(4) séparation de deux couples de points (situés sur une méme droite) et $(\bar{4})$ séparation de deux couples de variétés à $k-1$ dimensions formant un faisceau (c'est-à-dire contenant une variété de dimension $k-2$).

---

[4] La dualité classique définie dans [2], p. 282 et dans [3], p. 411-412 n'est qu'un cas particulier de la k-dualité; c'est une n-dualité (où n désigne la dimension de tout l'espace).

Une proposition $\overline{\mathrm{P}}$ est dite k-duale de la proposition P (concernant les notions de la géométrie projective) si elles remplissent les deux conditions suivantes:

1° toutes les variétés considérées dans la proposition P sont contenues dans une variété de dimension k (c'est-à-dire il existe une variété a^k telle que toutes les variétés considérées a^s satisfont à la condition $a^{-1} \leqslant a^s \leqslant a^k$),

2° on obtient la proposition $\overline{\mathrm{P}}$ en remplaçant dans la proposition P toutes les notions géométriques par les notions k-duales.

Ayant défini une nouvelle notion a de la géométrie projective par la définition D, vérifiant la condition 1°, on peut aussi définir une notion $\bar{a}$ dite k-duale de a. Dans ce but il faut remplacer dans la définition D la notion a par $\bar{a}$ et toutes les autres notions géométriques par les notions k-duales. La définition de $\bar{a}$ obtenue par ce procédé est k-duale de la proposition D.

On désignera ici les théorèmes et les définitions k-duaux par les mêmes numéros, en distinguant l'un d'eux par une barre (par exemple théorèmes 3 et $\overline{3}$).

A cause de nos habitudes de raisonnement, la notion de cycle de $k+3$ points (pour $k \geqslant 2$) est plus difficile à imaginer que la notion k-duale. C'est la raison principale pour laquelle, au lieu de définir directement la notion de cycle de $k+3$ points et de démontrer les théorèmes 1^k-4^k, on définira dans ce travail la notion k-duale et on démontrera les théorèmes k-duaux des théorèmes 1^k-4^k. Les propositions k-duales des théorèmes étant, en vertu du principe de dualité, aussi des théorèmes de la géométrie projective, nous prouverons en même temps les théorèmes 1^k-4^k.

La notion de cycle de $k+3$ variétés de dimension $k-1$, k-duale de celle de cycle de $k+3$ points, sera définie par induction.

DÉFINITION $\overline{3}$. 1° $k=1$. Le cycle $\{a_1^0, a_2^0, a_3^0, a_4^0\}$ a déjà été défini dans la définition 2.

2° Le cycle de $k+3$ variétés de dimension $k-1$ étant défini, on dit que $\{a_1^k, \dots, a_{k+4}^k\}$ si l'on a:

(1) pour tout $i \neq j : d(a_i^k \cap a_j^k) = k-1$,

(2) pour chaque $i = 1, 2, \dots, k+4$:

$$\{(a_i^k \cap a_1^k), (a_i^k \cap a_2^k), \dots, (a_i^k \cap a_{i-1}^k), (a_i^k \cap a_{i+1}^k), \dots, (a_i^k \cap a_{k+4}^k)\}.$$

En énonçant cette définition on a profité d'une certaine propriété des cycles. Cette propriété est une sorte d'hérédité consistant en ce que si les variétés de dimension k forment un cycle, alors dans chacune d'elles toutes les autres forment (en la coupant) le cycle correspondant des variétés de dimension $k-1$. Cette propriété est représentée sur la figure 4 au moyen de la même interprétation graphique que sur les figures 2 et 3.

La figure 5a représente 5 droites: a^1, b^1, c^1, d^1, e^1 qui forment le cycle $\{a^1, b^1, c^1, d^1, e^1\}$ (cela résulte de la définition $\overline{3}$). Les droites représentées sur la figure 5b et 5c forment aussi le même cycle.

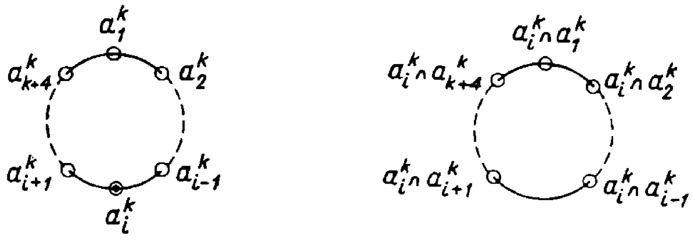

Fig. 4

Il existe une méthode directe permettant de conclure, en connaissant des positions réciproques des droites, quel est cycle qu'elles forment. On démontrera plus tard que les droites formant un cycle doivent remplir la condition 2-duale de la condition C^2, d'où résulte que ces droites partagent le plan projectif (de la manière représentée sur la figure 5) en 11 domaines, dont 5 sont bornés par trois droites, 5 — par quatre droites

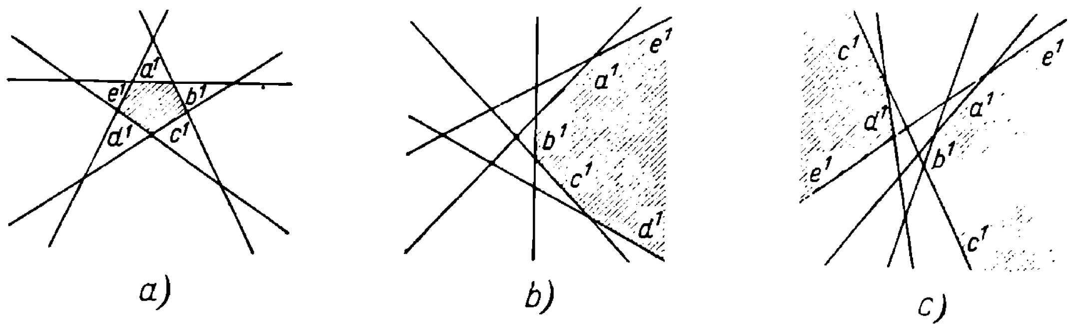

Fig. 5

et un seul — par cinq droites. Sur la figure 5 ce dernier domaine est hachuré. La méthode directe pour déterminer le cycle que forment les droites consiste en ce que la succession des droites dans le cycle est la même que celle des droites formant les côtés adjacents du domaine hachuré.

On peut maintenant poser le problème suivant:

Problème 1. *Trouver une méthode géométrique permettant de déduire directement de leurs positions réciproques (c'est-à-dire des formes des domaines délimités par ces variétés dans la variété de dimension k, dans laquelle elles sont contenues) les cycles que forment $k+3$ variétés à $k-1$ dimensions.*

Il serait intéressant de trouver une même méthode pour tous les nombres k vérifiant la condition $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

On démontrera maintenant un certain nombre de lemmes qui permettront de prouver les théorèmes $\overline{1}^k$-$\overline{4}^k$ duaux des théorèmes 1^k-4^k.

LEMME 1. *Si* $(a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1} \cup \ldots \cup a_s^{k-1}) \leqslant a^k$, *on a* $d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \ldots \cap a_s^{k-1}) \geqslant k-s$.

Démonstration par induction. 1° Pour $s = 1$: $d(a_1^{k-1}) = k-1 = k-s$.

2° Supposons que le lemme soit vrai pour $s-1$, c'est-à-dire qu'on ait:

$$(1) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \geqslant k-(s-1).$$

Les variétés a_i^{k-1} étant contenues dans a^k, on a $[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \cup \cup a_s^{k-1}] \leqslant a^k$, d'où résulte

$$(2) \qquad d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \cup a_s^{k-1}] \leqslant k.$$

L'égalité

$$d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \cap a_s^{k-1}] + d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \cup a_s^{k-1}] = d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) + d(a_s^{k-1})$$

entraîne, en vertu des inégalités (1) et (2), l'inégalité suivante:

$$d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1}) \cap a_s^{k-1}] + k \geqslant k-(s-1) + d(a_s^{k-1}) = k-(s-1)+(k-1) = 2k-s\,,$$

d'où résulte immédiatement que notre lemme est vérifié aussi pour le nombre s.

LEMME 2. *Si*

$$(1) \qquad d(a_1^{k-1} \cup \ldots \cup a_{k+1}^{k-1}) \leqslant k$$

et

$$(2) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1}^{k-1}) = -1,$$

alors pour chaque $s = 1, 2, \ldots, k+1$ *on a*

$$(3) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_s^{k-1}) = k-s.$$

Démonstration. De l'hypothèse (1) résulte l'existence d'une variété a^k contenant toutes les variétés a_i^{k-1} (pour $i = 1, 2, \ldots, k+1$). Les hypothèses du lemme 1 étant vérifiées, nous en concluons que

$$(4) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_s^{k-1}) \geqslant k-s.$$

Il nous reste maintenant à établir l'inégalité contraire: $d(a_1^{k-1} \cap \ldots \ldots \cap a_s^{k-1}) \leqslant k-s$, ou (en remplaçant s par $k+1-p$) l'inégalité

$$(5) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-p}^{k-1}) \leqslant p-1.$$

Nous allons démontrer par induction que cette inégalité est vraie pour les valeurs $p = 0, 1, \ldots, k$ (c'est-à-dire pour $s = 1, 2, \ldots, k+1$):

1° Pour $p = 0$ on a, en vertu de (2): $d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-0}^{k-1}) = -1$.

2° Supposons que l'inégalité (5) soit vraie pour la valeur $p = q-1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(6) \qquad d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1} \cap a_{k+1-(q-1)}^{k-1}) \leqslant (q-1)-1 = q-2.$$

Toutes les variétés a_i^{k-1} étant contenues dans la variété a^k, on a $[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) \cup a_{k+1-(q-1)}^{k-1}] \leqslant a^k$, d'où résulte

(7) $\quad d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) \cup a_{k+1-(q-1)}^{k-1}] \leqslant k.$

L'égalité

$$d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) \cup a_{k+1-(q-1)}^{k-1}] + d[(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) \cap a_{k+1-(q-1)}^{k-1}] \\ = d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) + d(a_{k+1-(q-1)}^{k-1})$$

entraîne, en vertu des inégalités (6) et (7), l'inégalité suivante: $k+(q-2) \geqslant d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+1-q}^{k-1}) + (k-1)$, d'où résulte immédiatement l'inégalité (5) (pour la valeur $p = q$).

Ainsi nous avons démontré l'inégalité (5) qui, avec l'inégalité (4), implique l'égalité (3).

Lemme 3. *Étant données $p+1$ variétés: $a_1^{k-1}, \ldots, a_{p+1}^{k-1}$ (où $1 \leqslant p \leqslant k$) vérifiant la condition*

(1) $\quad d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_p^{k-1} \cap a_{p+1}^{k-1}) = k-p-1,$

si pour chaque permutation: $i_1, i_2, \ldots, i_p, i_{p+1}$ des nombres $1, 2, \ldots, p, p+1$ elles satisfont à la condition

(2) $\quad d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) = k-p,$

elles satisfont aussi (pour j_1 et j_2 quelconques distincts) à la condition

(3) $\quad d(a_{j_1}^{k-1} \cap a_{j_2}^{k-1}) = k-2.$

Démonstration. Supposons qu'il existe deux variétés, par exemple a_1^{k-1} et a_2^{k-1}, ne satisfaisant pas à la condition (3). Formons maintenant la suite de variétés suivante:

$$\begin{aligned} b_1^{s_1} &\overset{\mathrm{df}}{=} a_1^{k-1}, \\ b_2^{s_2} &\overset{\mathrm{df}}{=} a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1}, \\ b_3^{s_3} &\overset{\mathrm{df}}{=} a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_p^{s_p} &\overset{\mathrm{df}}{=} a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_p^{k-1}. \end{aligned}$$

Il est évident que

(4) $\quad b_1^{s_1} \geqslant b_2^{s_2} \geqslant \ldots \geqslant b_p^{s_p},$

d'où résultent les inégalités suivantes:

(5) $\quad s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_p.$

Le nombre s_1 est égal à $k-1$ et s_p est égal (d'après (2)) à $k-p$. Si tous les nombres $s_1, \ldots, s_p$ étaient différents, on aurait, d'après (5): $s_1 = k-1, s_2 = k-2, s_3 = k-3, \ldots, s_p = k-p$. Mais nous avons supposé au début de la démonstration que $s_2 \neq k-2$, donc parmi les nombres s_i il y a au moins deux nombres égaux. Soient $s_j = s_{j+l}$. On en conclut en vertu de (4) que $b_j^{s_j} = b_{j+l}^{s_{j+l}}$, c'est-à-dire que

$$a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_j^{k-1} = a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_j^{k-1} \cap a_{j+1}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{j+l}^{k-1} .$$

Cette égalité entraîne l'égalité des variétés:

$$(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_j^{k-1}) \cap (a_{j+2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{p+1}^{k-1}) = (a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{j+l}^{k-1}) \cap (a_{j+2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{p+1}^{k-1}) ,$$

d'où résulte l'égalité des leurs dimensions:

$$d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_j^{k-1} \cap a_{j+2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{p+1}^{k-1}) = d(a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{p+1}^{k-1}) ,$$

incompatible avec les hypothèses (1) et (2). Notre lemme est ainsi démontré.

Lemme 4. *Si*

(1) $\quad d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) = 0$

et

(2) $\quad d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}) = -1$

et si pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$ *on a*

(3) $\quad d(a_{k+1}^{k-1} \cap a_i^{k-1}) = k-2,$

alors

$$d(a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1} \cup \ldots \cup a_k^{k-1} \cup a_{k+1}^{k-1}) = k .$$

Démonstration. Les conditions (1) et (2) entraînent que

$$d[(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cup a_{k+1}^{k-1}] = d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) + d(a_{k+1}^{k-1}) - d[(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cap a_{k+1}^{k-1}] = 0 + (k-1) - (-1) = k .$$

La condition (3) implique pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k$ l'égalité

$$d(a_{k+1}^{k-1} \cup a_i^{k-1}) = d(a_{k+1}^{k-1}) + d(a_i^{k-1}) - d(a_{k+1}^{k-1} \cap a_i^{k-1}) = (k-1) + (k-1) - (k-2) = k .$$

Nous avons donc démontré que pour $i = 1, 2, \ldots, k$ on a

(4) $\quad d(a_{k+1}^{k-1} \cup a_i^{k-1}) = d[(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cup a_{k+1}^{k-1}] = k .$

La condition $(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \leqslant a_i^{k-1}$ entraîne $[(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cup a_{k+1}^{k-1}] \leqslant (a_i^{k-1} \cup a_{k+1}^{k-1})$, d'où résulte, en vertu de (4), l'égalité des variétés: $(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cup a_{k+1}^{k-1}$ et $a_i^{k-1} \cup a_{k+1}^{k-1}$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, k$. Donc toutes les variétés a_i^{k-1} (pour $i = 1, 2, \ldots, k, k+1$) sont contenues dans une variété de dimension k, la variété $(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap \ldots \cap a_k^{k-1}) \cup a_{k+1}^{k-1}$, et notre lemme est démontré.

Avant d'énoncer les théorèmes qui suivent, il convient de définir la condition k-duale de la condition C^k. Dans ce but nous énoncerons la condition C^k sous la forme suivante:

$l \geqslant k+1$ et il existe des variétés a^{-1} et a^k telles que pour tous les points a_i^0 on a $a^{-1} \leqslant a_i^0 \leqslant a^k$ et, $a_{i_1}^0, a_{i_2}^0, \ldots, a_{i_{k+1}}^0$ étant $k+1$ points distincts parmi les points $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_l^0$, on a toujours $a_{i_1}^0 \cup a_{i_2}^0 \cup \ldots \cup a_{i_{k+1}}^0 = a^k$.

En remplaçant dans cette proposition les notions géométriques par les notions k-duales nous obtenons la proposition suivante:

$l \geqslant k+1$ et il existe des variétés a^k et a^{-1} telles que pour toutes les variétés a_i^{k-1} on a $a^k \geqslant a_i^{k-1} \geqslant a^{-1}$ et, $a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}, \ldots, a_{i_{k+1}}^{k-1}$ étant $k+1$ variétés distinctes parmi les variétés $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_l^{k-1}$, on a toujours $a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_{k+1}}^{k-1} = a^{-1}$.

Donc la condition k-duale de C^k est

DÉFINITION 2. On dit que *les variétés $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_l^{k-1}$ satisfont à la condition $\overline{C}^k$* (et on écrit: $\overline{C}^k(a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_l^{k-1})$), si

1° $l \geqslant k+1$,

2° toutes les variétés a_i^{k-1} sont contenues dans une variété de dimension k,

3° $a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}, \ldots, a_{i_{k+1}}^{k-1}$ étant $k+1$ variétés arbitraires distinctes parmi les variétés $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_l^{k-1}$, on a toujours $d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_{k+1}}^{k-1}) = -1$ (c'est-à-dire $k+1$ variétés distinctes arbitraires parmi les variétés a_i^{k-1} ne contiennent aucun point commun).

LEMME 5. *Le nombre entier p vérifiant les inégalités $0 \leqslant p < k$, pour que les variétés*

(1) $\quad a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_l^{k-1}$

satisfassent à la condition $\overline{C}^k$ il faut et il suffit que pour chaque permutation

(2) $\quad i_1, i_2, \ldots, i_l$

des nombres $1, 2, \ldots, l$, les variétés

$$\begin{aligned} b_1^{s_1} &= (a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+1}}^{k-1}, \\ b_2^{s_2} &= (a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+2}}^{k-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{l-p}^{s_{l-p}} &= (a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_l}^{k-1} \end{aligned} \tag{3}$$

aient la dimension $k-p-1$ et qu'elles satisfassent à la condition $\overline{C}^{k-p}$.

Démonstration. La condition est nécessaire. Supposons que les variétés (1) satisfassent à la condition $\overline{C}^k$, c'est-à-dire que

(4) $\quad l \geqslant k+1$,

(5) $\quad d(a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1} \cup \ldots \cup a_l^{k-1}) = k$,

(6) $\quad$ pour chaque permutation (2) on ait $d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_{k+1}}^{k-1}) = -1$.

Ayant fixé une permutation (2), nous allons considérer les propriétés des variétés (3). Quelles que soient $k+1$ variétés parmi les variétés (1), elles satisfont toujours (d'après (5) et (6)) aux hypothèses du lemme 2. Donc les variétés $b_j^{s_j}$ ont toutes la dimension $k-(p+1)$ et sont contenues dans la variété $a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}$ de dimension $k-p$. Leur nombre $l-p$ vérifie en vertu de (4) l'inégalité $l-p \geqslant k-p+1$. L'intersection $b_{j_1}^{k-p-1} \cap b_{j_2}^{k-p-1} \cap \ldots \cap b_{j_{k-p+1}}^{k-p-1}$ pour chaque permutation $j_1, j_2, \ldots, j_{l-p}$ des nombres $1, 2, \ldots, l-p$ est égale à

$$\begin{aligned}
&[(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+j_1}}^{k-1}] \cap \\
&\qquad \cap [(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+j_2}}^{k-1}] \cap \ldots \\
&\qquad \ldots \cap [(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+j_{k-p+1}}}^{k-1}] \\
&\qquad = (a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap (a_{i_{p+j_1}}^{k-1} \cap a_{i_{p+j_2}}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_{p+j_{k-p+1}}}^{k-1}) .
\end{aligned}$$

On en conclut d'après la condition (6) que $d(b_{j_1}^{k-p-1} \cap b_{j_2}^{k-p-1} \cap \ldots \cap b_{j_{k-p+1}}^{k-p-1}) = -1$, et alors les variétés (3) pour chaque permutation (2) ont la dimension $k-p-1$ et satisfont à la condition $\overline{\mathrm{C}}^{k-p}$.

La condition est suffisante. Supposons que pour chaque permutation (2) les variétés (3) aient toutes la dimension $k-p-1$ et qu'elles satisfassent à la condition $\overline{\mathrm{C}}^{k-p}$, c'est-à-dire que

(7) $\quad s_1 = s_2 = \ldots = s_{l-p} = k-p-1,$

(8) $\quad l-p \geqslant k-p+1,$

(9) $\quad d(b_1^{s_1} \cup b_2^{s_2} \cup \ldots \cup b_{l-p}^{s_{l-p}}) = k-p,$

(10) pour chaque permutation $j_1, j_2, \ldots, j_{l-p}$ des nombres $1, 2, \ldots, l-p$ on a $d(b_{j_1}^{s_{j_1}} \cap b_{j_2}^{s_{j_2}} \cap \ldots \cap b_{j_{k-p+1}}^{s_{j_{k-p+1}}}) = -1.$

Il s'agit maintenant de démontrer que les variétés (1) satisfont aux conditions (4), (5) et (6).

La condition (4) résulte immédiatement de la condition (8).

Pour prouver la condition (6) il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
&a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_{k+1}}^{k-1} \\
&= [(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+1}}^{k-1}] \cap [(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{p+2}}^{k-1}] \cap \ldots \\
&\qquad \ldots \cap [(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1}) \cap a_{i_{k+1}}^{k-1}] = b_1^{s_1} \cap b_2^{s_2} \cap \ldots \cap b_{k-p+1}^{s_{k-p+1}}
\end{aligned}$$

d'où résulte d'après (10) que la dimension de cette intersection est égale à -1.

Démontrons maintenant la condition (5). Dans ce but il faut remarquer qu'en vertu du lemme 2 les conditions (9), (10) et (7) entraînent les égalités $d(b_1^{s_1} \cap b_2^{s_2}) = k-p-2$ et $d(b_1^{s_1} \cap b_2^{s_2} \cap \ldots \cap b_{k-p}^{s_{k-p}}) = 0$. Ces deux égalités impliquent d'après les définitions (3) les égalités suivantes:

(11) $\quad d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1} \cap a_{i_{p+1}}^{k-1} \cap a_{i_{p+2}}^{k-1}) = k-p-2$

et

$$(12) \qquad d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1} \cap a_{i_{p+1}}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_k}^{k-1}) = 0$$

vérifiées pour chaque permutation (2). De la condition (7) résulte que pour chaque permutation (2) on a

$$d(a_{i_1}^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{i_p}^{k-1} \cap a_{i_{p+1}}^{k-1}) = k-p-1 .$$

On en conclut en vertu de (11) que, d'après le lemme 3, quels que soient j_1 et j_2 distincts, on a

$$(13) \qquad d(a_{j_1}^{k-1} \cap a_{j_2}^{k-1}) = k-2,$$

d'où résulte immédiatement:

$$(14) \qquad d(a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1}) = k.$$

La condition (6) — déjà démontré — et les conditions (12) et (13) entraînent d'après le lemme 4 l'égalité $d(a_{i_1}^{k-1} \cup a_{i_2}^{k-1} \cup \ldots \cup a_{i_{k+1}}^{k-1}) = k$. On en conclut en vertu de (14) que chaque a_i^{k-1} remplit la condition $a_i^{k-1} \leqslant a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1}$, d'où résulte la condition (5).

THÉORÈME $\overline{1}^k$. *Si*

$$(1) \qquad \{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}\} ,$$

alors

$$(2) \qquad \{a_2^{k-1}, a_3^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}, a_1^{k-1}\}$$

et

$$(3) \qquad \{a_{k+3}^{k-1}, a_{k+2}^{k-1}, \ldots, a_3^{k-1}, a_2^{k-1}, a_1^{k-1}\} .$$

D é m o n s t r a t i o n par induction. 1° Pour $k=1$ le théorème résulte directement du théorème 1^1.

2° Supposons que le théorème soit vérifié pour la valeur $k-1$. Dans ce cas, la condition (1) impliquant d'après la définition $\overline{3}$ les conditions

$$\begin{gathered}
\{(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} , \\
\{(a_2^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\{(a_{k+2}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} , \\
\{(a_{k+3}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1})\} ,
\end{gathered}$$

implique aussi en vertu des hypothèses d'induction, les conditions:

$$(4) \qquad \begin{gathered}
\{(a_1^{k-1} \cap a_3^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_4^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1})\} , \\
\{(a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_4^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_1^{k-1})\} , \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\{(a_{k+2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_1^{k-1})\} , \\
\{(a_{k+3}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_1^{k-1})\}
\end{gathered}$$

et les conditions:

$$(5)\quad \begin{array}{l} \{(a_1^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1}), (a_1^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \frown a_3^{k-1}), (a_1^{k-1} \frown a_2^{k-1})\}, \\ \{(a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1})\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \{(a_{k+2}^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \frown a_{k+1}^{k-1}), \ldots, (a_{k+2}^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \frown a_1^{k-1})\}, \\ \{(a_{k+3}^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \frown a_{k+1}^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \frown a_1^{k-1})\}. \end{array}$$

D'après la définition $\overline{3}$ les conditions (4) entraînent (2) et les conditions (5) impliquent (3), et notre théorème est ainsi démontré.

THÉORÈME $\overline{2}^k$. *$a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+3}^{k-1}$ étant $k+3$ variétés de dimension $k-1$, la condition*

$$(1)\quad \{a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}, \ldots, a_{i_{k+2}}^{k-1}, a_{i_{k+3}}^{k-1}\}$$

n'est remplie que pour $2(k+3)$ permutations: $i_1, i_2, \ldots, i_{k+2}, i_{k+3}$ des nombres $1, 2, \ldots, k+2, k+3$ parmi $(k+3)!$ possibles.

Démonstration par induction. 1° Pour $k=1$ le théorème résulte directement du théorème 2^1.

2° Supposons que le théorème soit vérifié pour la valeur $k-1$. Etant données $k+3$ variétés vérifiant la condition (1) on peut en extraire les couples suivants de variétés: $(a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}), (a_{i_2}^{k-1}, a_{i_3}^{k-1}), \ldots, (a_{i_{k+2}}^{k-1}, a_{i_{k+3}}^{k-1}), (a_{i_{k+3}}^{k-1}, a_{i_1}^{k-1})$. Les variétés appartenant à un même couple seront appelées variétés voisines dans le cycle (1). Il est facile de voir que les variétés voisines dans un cycle sont aussi voisines dans chaque cycle résultant de celui-ci en vertu du théorème $\overline{1}^k$. En outre, les $2(k+3)$ cycles résultant d'après le théorème $\overline{1}^k$ du cycle (1) sont les seuls qui conservent tous les couples de variétés voisines. Supposons maintenant que l'on ait

$$(2)\quad \{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}\}$$

et que les variétés $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}$ ne vérifient pas le théorème $\overline{2}^k$. Donc, ces variétés forment (outre les cycles résultant de (2)) au moins un cycle

$$(3)\quad \{a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}, \ldots, a_{i_{k+2}}^{k-1}, a_{i_{k+3}}^{k-1}\}$$

tel que parmi les couples: $(a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}), (a_{i_2}^{k-1}, a_{i_3}^{k-1}), \ldots, (a_{i_{k+2}}^{k-1}, a_{i_{k+3}}^{k-1}), (a_{i_{k+3}}^{k-1}, a_{i_1}^{k-1})$ il y en a un, par exemple: $(a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1})$, tel que les variétés qui lui appartiennent ne sont pas voisines dans le cycle (2). On a donc $i_2 \not\equiv i_1+1 \pmod{k+3}$ et $i_2 \not\equiv i_1-1 \pmod{k+3}$. Le nombre k étant plus grand que 1, il existe parmi les nombres $1, 2, \ldots, k+2, k+3$ un nombre j distinct des nombres: i_1, i_1+1, i_1-1, i_2. Les conditions (2) et (3) impliquent en vertu de la définition $\overline{3}$ les conditions:

$$(4)\quad \{(a_j^{k-1} \frown a_1^{k-1}), \ldots$$
$$\ldots (a_j^{k-1} \frown a_{i_1-1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_{i_1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_{i_1+1}^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\},$$

$$(5)\quad \{(a_j^{k-1} \frown a_{i_1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_{i_2}^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_{i_{k+3}}^{k-1})\}.$$

Chacun des cycles (4) et (5) concerne les mêmes $k+2$ variétés distinctes de dimension $k-2$:

(6) $(a_j^{k-1} \cap a_1^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \cap a_{j-1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \cap a_{j+1}^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})$.

Les variétés: $(a_j^{k-1} \cap a_{i_1}^{k-1})$ et $(a_j^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1})$ sont voisines dans le cycle (5), mais elles ne le sont pas dans le cycle (4), car la variété $(a_j^{k-1} \cap a_{i_2}^{k-1})$ différe des variétés $(a_j^{k-1} \cap a_{i_1-1}^{k-1})$ et $(a_j^{k-1} \cap a_{i_1+1}^{k-1})$. Donc les variétés (6) ne vérifient pas le théorème $\overline{2}^{k-1}$, contrairement à l'hypothèse d'induction. En supposant notre théorème faux nous avons obtenu une contradiction.

THÉORÈME $\overline{3}^k$. *Si*

(1) $\{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}\}$,

(2) $\overline{C}^k(a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1})$.

Démonstration par induction. **1° Pour $k=1$ le théorème résulte directement du théorème 3^1.**

2° Supposons que le théorème soit vérifié pour la valeur $k-1$ (où $k \geqslant 2$). La conditon (1) implique d'après la définition $\overline{3}$ les conditions suivantes:

$$\{(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} ,$$
$$\{(a_2^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\{(a_{k+2}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\} ,$$
$$\{(a_{k+3}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1})\} .$$

On en conclut d'après l'hypothèse d'induction que

$$\overline{C}^{k-1}\big((a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_1^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\big) ,$$
$$\overline{C}^{k-1}\big((a_2^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1}), (a_2^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\big) ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{C}^{k-1}\big((a_{k+2}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+2}^{k-1} \cap a_{k+3}^{k-1})\big) ,$$
$$\overline{C}^{k-1}\big((a_{k+3}^{k-1} \cap a_1^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+1}^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \cap a_{k+2}^{k-1})\big) .$$

Il suffit maintenant de s'appuyer sur le lemme 5 (où $p=1$) pour en conclure qu'on a (2).

LEMME 6. *Si les droites $a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1$ satisfont aux trois conditions suivantes*:

(1) $\overline{C}^2(a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1)$,

(2) $\{(a_2^1 \cap a_1^1), (a_2^1 \cap a_3^1), (a_2^1 \cap a_4^1), (a_2^1 \cap a_5^1)\}$,

(3) $\{(a_4^1 \cap a_1^1), (a_4^1 \cap a_2^1), (a_4^1 \cap a_3^1), (a_4^1 \cap a_5^1)\}$,

alors on a

(4) $\{a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1\}$ (cf. la figure 6).

Démonstration. Il est bien connu qu'étant données quatre droites vérifiant la condition $\overline{C}^2$, on peut les transformer par une transformation projective en quatre droites arbitraires vérifiant la condition $\overline{C}^2$. L'hypo-

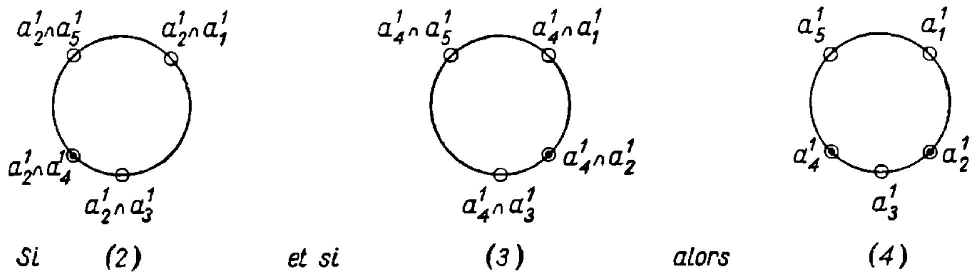

Fig. 6

thèse entraîne que les droites a_1^1, a_2^1, a_4^1, a_5^1 satisfont aussi à la condition $\overline{C}^2$ donc elles peuvent être transformées respectivement en droites a_1^1, a_2^1, a_4^1, a_5^{12} représentées sur la figure 7a. Les cycles (2) et (3) se composent chacun de quatre points. Ces points sont marqués par de petits cercles sur la figure 7b.

La condition (2) entraîne que le point $a_2^1 \cap a_3^1$ est situé sur la figure 7 à l'intérieur du segment déterminé par les points $a_2^1 \cap a_1^1$ et $a_2^1 \cap a_4^1$. D'une façon analogue, la condition (3) implique que le point $a_4^1 \cap a_3^1$ est situé à l'intérieur du segment limité par les points $a_4^1 \cap a_5^1$ et $a_4^1 \cap a_2^1$. (Nous

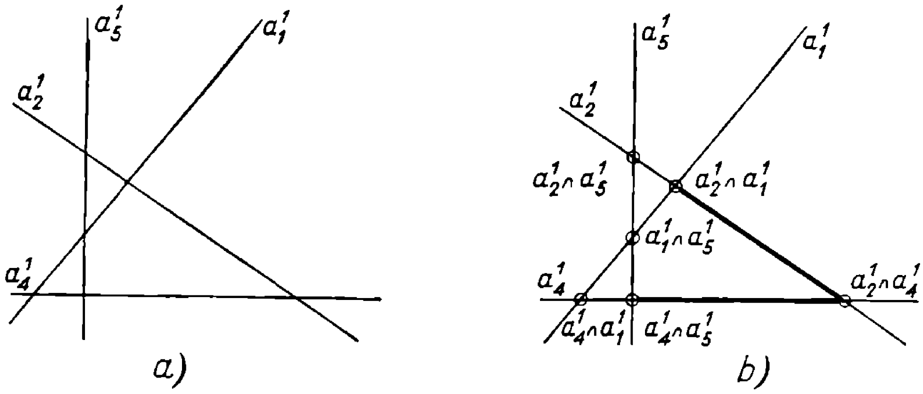

Fig. 7

avons représenté ces deux segments par de gros traits sur la figure 7b.) Considérons maintenant le triangle de côtés a_1^1, a_2^1, a_4^1. La droite a_3^1, passant par les points $a_2^1 \cap a_3^1$ et $a_4^1 \cap a_3^1$, coupe deux côtés de ce triangle, donc elle ne peut pas couper le troisième, d'où résulte que le point $a_1^1 \cap a_3^1$ est extérieur au segment $a_2^1 \cap a_1^1$, $a_4^1 \cap a_1^1$. On en conclut d'après la figure 7 que

(5) $\{(a_1^1 \cap a_2^1), (a_1^1 \cap a_3^1), (a_1^1 \cap a_4^1), (a_1^1 \cap a_5^1)\}$.

Posons maintenant: $b_1^1 = a_3^1$, $b_2^1 = a_4^1$, $b_3^1 = a_5^1$, $b_4^1 = a_1^1$, $b_5^1 = a_2^1$. Les conditions (3) et (5) prendront la forme

$$\{(b_2^1 \frown b_1^1), (b_2^1 \frown b_3^1), (b_2^1 \frown b_4^1), (b_2^1 \frown b_5^1)\}$$

et

$$\{(b_4^1 \frown b_1^1), (b_4^1 \frown b_2^1), (b_4^1 \frown b_3^1), (b_4^1 \frown b_5^1)\} .$$

D'après nos résultats précédents ces deux conditions impliquent

$$\{(b_1^1 \frown b_2^1), (b_1^1 \frown b_3^1), (b_1^1 \frown b_4^1), (b_1^1 \frown b_5^1)\} ,$$

c'est-à-dire:

(6) $\{(a_3^1 \frown a_1^1), (a_3^1 \frown a_2^1), (a_3^1 \frown a_4^1), (a_3^1 \frown a_5^1)\}$.

D'une façon analogue, on peut aussi démontrer

(7) $\{(a_5^1 \frown a_1^1), (a_5^1 \frown a_2^1), (a_5^1 \frown a_3^1), (a_5^1 \frown a_4^1)\}$.

D'après la définition $\overline{3}$ les conditions (2), (3), (5), (6), (7) impliquent la condition (4).

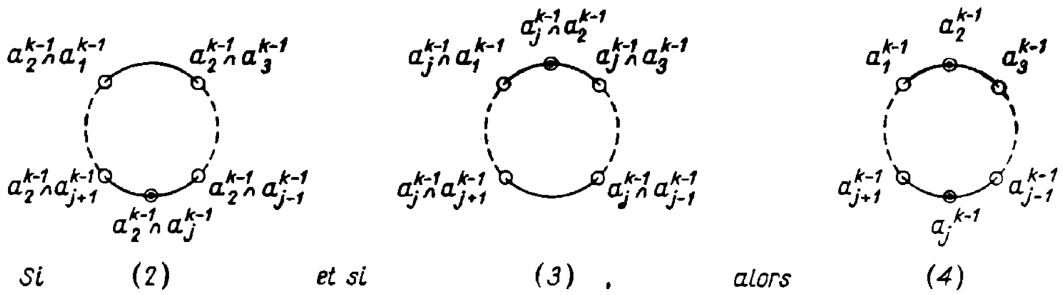

Fig. 8

LEMME 7. *Si les variétés* $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}$ (*où* $k \geqslant 2$) *satisfont aux trois conditions suivantes*:

(1) $\overline{\mathrm{C}}^k(a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1})$,

(2) $\{(a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$,

(3) $\{(a_j^{k-1} \frown a_1^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_{j-1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_{j+1}^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$
(*où* $j \neq 1, 2, 3$) ,

alors on a

(4) $\{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+2}^{k-1}, a_{k+3}^{k-1})\}$ (cf. la figure 8).

Démonstration par induction. 1° Pour $k = 2$ le lemme résulte du lemme 6: directement dans le cas où $j = 4$, ou après un changement d'indices, dans le cas $j = 5$.

2° Supposons que le lemme soit vérifié pour la valeur $k-1 \geqslant 2$. Afin de démontrer qu'il l'est aussi pour la valeur k, il suffit (d'après la définition $\overline{3}$) de démontrer que les conditions (1), (2), (3) entraînent pour chaque valeur $i = 1, 2, 3, \ldots, j, \ldots, k+3$ la condition:

(5) $$\{(a_i^{k-1} \frown a_1^{k-1}), \ldots, (a_i^{k-1} \frown a_{i-1}^{k-1}), (a_i^{k-1} \frown a_{i+1}^{k-1}), \ldots, (a_i^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}.$$

Nous partagerons la démonstration en six parties suivant la valeur du nombre i. Voici les différents cas:

valeur de i:	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$3<i<j$	$i=j$	$j<i\leqslant k+3$
cas numéro:	6	1	4	5	2	3

1. $i = 2$. La condition (5) est identique à (2).

2. $i = j$. La condition (5) est identique à (3).

3. $j < i \leqslant k+3$. Dans ce cas la condition (2) entraîne en vertu de la définition $\overline{3}$ qu'on a:

$$\{[(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1})], [(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, [(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_{i-1}^{k-1})], [(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_{i+1}^{k-1})], \ldots$$
$$\ldots, [(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1})], [(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})]\},$$

d'où résulte

(6) $$\{(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{i-1}^{k-1}),$$
$$(a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{i+1}^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}.$$

D'une façon analogue la condition (3) entraîne:

(7) $$\{(a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_1^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{j-1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{j+1}^{k-1}), \ldots$$
$$\ldots, (a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{i-1}^{k-1}), (a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{i+1}^{k-1}), \ldots, (a_j^{k-1} \frown a_i^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}.$$

Posons maintenant:

$b_l^{k-2} = a_i^{k-1} \frown a_l^{k-1}$ pour l vérifiant les inégalités $1 \leqslant l \leqslant i-1$,

$b_l^{k-2} = a_i^{k-1} \frown a_{l+1}^{k-1}$ pour l vérifiant les inégalités $i \leqslant l \leqslant k+2$.

Les conditions (6) et (7) prendront les formes suivantes:

$$\{(b_2^{k-2} \frown b_1^{k-2}), (b_2^{k-2} \frown b_3^{k-2}), \ldots$$
$$\ldots, (b_2^{k-2} \frown b_{i-1}^{k-2}), (b_2^{k-2} \frown b_i^{k-2}), \ldots, (b_2^{k-2} \frown b_{k+1}^{k-2}), (b_2^{k-2} \frown b_{k+2}^{k-2})\}$$

et

$$\{(b_j^{k-2} \frown b_1^{k-2}), \ldots, (b_j^{k-2} \frown b_{j-1}^{k-2}), (b_j^{k-2} \frown b_{j+1}^{k-2}), \ldots$$
$$\ldots, (b_j^{k-2} \frown b_{i-1}^{k-2}), (b_j^{k-2} \frown b_i^{k-2}), \ldots, (b_j^{k-2} \frown b_{k+2}^{k-2})\}.$$

Les variétés $b_1^{k-2}, b_2^{k-2}, \ldots, b_{k+2}^{k-2}$ satisfaisant (d'après le lemme 5) à la condition $\overline{\mathrm{C}}^{k-1}$, et les nombres k et j vérifiant les inégalités: $k-1 \geqslant 2$, $j \neq 1, 2, 3$, nous en concluons en vertu de l'hypothèse d'induction que ces variétés forment le cycle $\{b_1^{k-2}, b_2^{k-2}, \ldots, b_{k+2}^{k-2}\}$, c'est-à-dire la condition (5) est vérifiée.

4. $i = 3$. Dans ce cas il faut démontrer que les conditions (1), (2), (3) impliquent

(8) $\{(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$.

Remarquons d'abord qu'on a déjà démontré (cas no 3) que les conditions (1), (2) et (3) entraînent toujours

(9) $\{(a_{k+3}^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_{k+3}^{k-1} \frown a_2^{k-1}), \ldots, (a_{k+3}^{k-1} \frown a_{k+2}^{k-1})\}$.

Posons maintenant: $b_l^{k-1} = a_{(l-2)+(k+3)}^{k-1}$ (si $1 \leqslant l \leqslant 2$) et $b_l^{k-1} = a_{l-2}^{k-1}$ (si $3 \leqslant l \leqslant k+3$) (⁵). Les conditions (9) et (2) prendront les formes suivantes:

$$\{(b_2^{k-1} \frown b_3^{k-1}), \ldots, (b_2^{k-1} \frown b_{k+3}^{k-1}), (b_2^{k-1} \frown b_1^{k-1})\}$$

et

$$\{(b_4^{k-1} \frown b_3^{k-1}), (b_4^{k-1} \frown b_5^{k-1}), \ldots, (b_4^{k-1} \frown b_{k+3}^{k-1}), (b_4^{k-1} \frown b_1^{k-1}), (b_4^{k-1} \frown b_2^{k-1})\} .$$

Le cas no 3 étant déjà démontré, nous en concluons que

$$\{(b_5^{k-1} \frown b_1^{k-1}), (b_5^{k-1} \frown b_2^{k-1}), (b_5^{k-1} \frown b_3^{k-1}), (b_5^{k-1} \frown b_4^{k-1}), (b_5^{k-1} \frown b_6^{k-1}), \ldots$$
$$\ldots, (b_5^{k-1} \frown b_{k+3}^{k-1})\} ,$$

c'est-à-dire les variétés a_l^{k-1} forment le cycle (8).

5. $3 < i < j$. Pour ramener ce cas à celui du no 3 il suffit de remplacer es symboles: $a_3^{k-1}, a_2^{k-1}, a_1^{k-1}, a_{k+3}^{k-1}, a_{k+2}^{k-1}, \ldots, a_5^{k-1}, a_4^{k-1}$ respectivement par

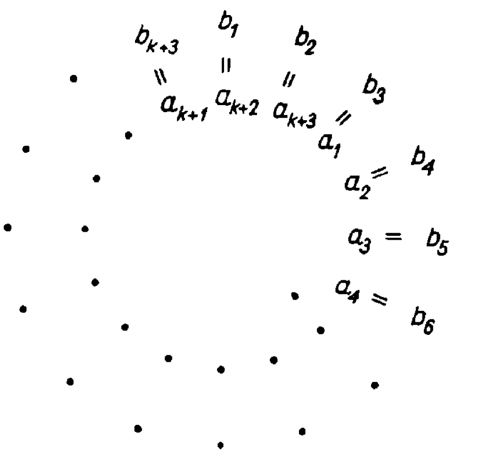

Fig. 9

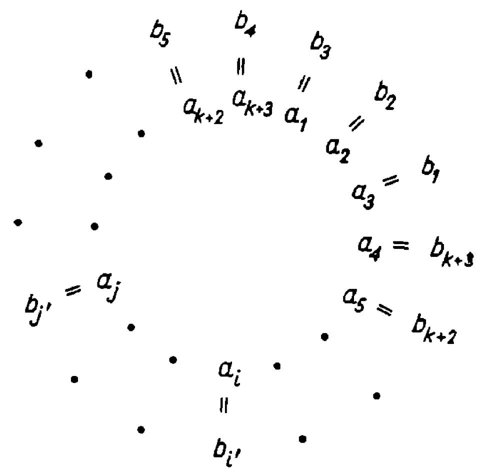

Fig. 10

les symboles: $b_1^{k-1}, b_2^{k-1}, b_3^{k-1}, b_4^{k-1}, b_5^{k-1}, \ldots, b_{k+1}^{k-1}, b_{k+3}^{k-1}$ (cf. la figure 10, dont le sens est le même que celui de la figure 9). Après ce changement la variété a_j^{k-1} sera remplacée par $b_{j'}^{k-1}$ (où j' est un nombre naturel distinct

(⁵) Ces identités sont représentées sur la figure 9. Les variétés sont ordonnées dans cette figure suivant leurs indices, et non pas suivant leur succession dans le cycle qu'elles forment. La même remarque concerne les figures: 10, 14, 15, 16, 17 et 18.

des nombres 1, 2, 3), a_2^{k-1} par b_2^{k-1} et a_i^{k-1} par $b_{i'}^{k-1}$ (où i' vérifie les inégalités $j' < i' \leqslant k+3$). On en conclut, en s'appuyant sur les résultats obtenus dans le cas no 3, que

$$\{(b_{i'}^{k-1} \frown b_1^{k-1}), \ldots, (b_{i'}^{k-1} \frown b_{i'-1}^{k-1}), (b_{i'}^{k-1} \frown b_{i'+1}^{k-1}), \ldots, (b_{i'}^{k-1} \frown b_{k+3}^{k-1})\},$$

d'où résulte que dans notre cas les variétés: $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_k^{k-1}$ satisfont aussi à la condition (5).

6. $i = 1$. Pour démontrer la condition (5) dans ce cas il suffit d'effectuer le même changement de notation que dans le cas précédent et de s'appuyer ensuite sur les résultats obtenus dans le cas du no 4, déjà démontré.

Lemme 8. *Si*

(1) $\{(a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$ (*où* $k \geqslant 2$)

et si les variétés

(2) $(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})$

forment un cycle, alors elles forment l'un des cycles suivants:

(3) $\{(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$,

(4) $\{(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_j^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}),$ $(a_3^{k-1} \frown a_{j+1}^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$ (*où j est un nombre entier vérifiant les inégalités* $4 \leqslant j \leqslant k+2$),

(5) $\{(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1})\}$.

(Cf. la figure 11).

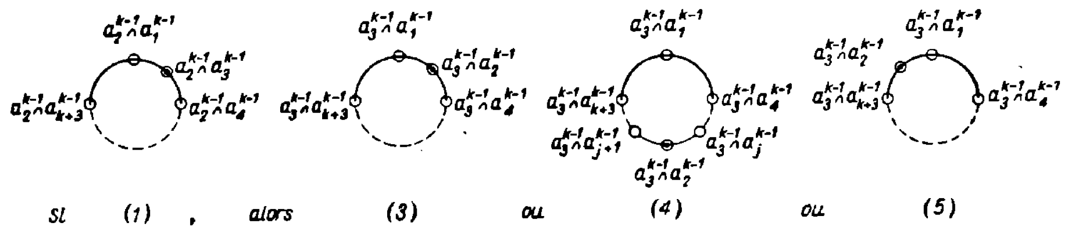

Fig. 11

Démonstration. Pour $k = 2$ le lemme est évident, car en vertu des théorèmes 1^1 et 2^1, les conditions (3), (4) et (5) épuisent tous les cas possibles de cycles formés par les variétés (2).

Pour $k > 2$ la condition (1) entraîne, selon la définition $\overline{3}$:

$$\{[(a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1})], \quad [(a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_4^{k-1})], \ldots, [(a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}) \frown (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})]\}$$

d'où résulte

$$\{[(a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}) \frown (a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1})], \quad [(a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}) \frown (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1})], \ldots, [(a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}) \frown (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})]\}.$$

Cette dernière condition implique en vertu de la définition $\bar{3}$ et des théorèmes $\bar{1}^{k-2}$ et $\bar{2}^{k-2}$, que le cycle formé par les variétés (2) doit avoir l'une des formes (3), (4) ou (5).

LEMME 9. *Si pour* $k \geqslant 2$ *on a*

(1) $\{(a_1^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_1^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_1^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$,

(2) $\{(a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$,

et si $\bar{C}^k(a_1^{k-1}, \ldots, a_{k+3}^{k-1})$ *et les variétés*

(3) $(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})$

forment un cycle, alors ce cycle doit avoir l'une des deux formes suivantes:

(4) $\{(a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$

ou

(5) $\{(a_3^{k-1} \frown a_2^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_3^{k-1} \frown a_4^{k-1}), \ldots, (a_3^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})\}$.

(Cf. la figure 12).

Démonstration. La condition (1) entraîne en vertu du lemme 8 que les variétés (3) forment l'un des cycles représentés sur la figure 13a. D'une façon analogue la condition (2) implique que ces variétés forment

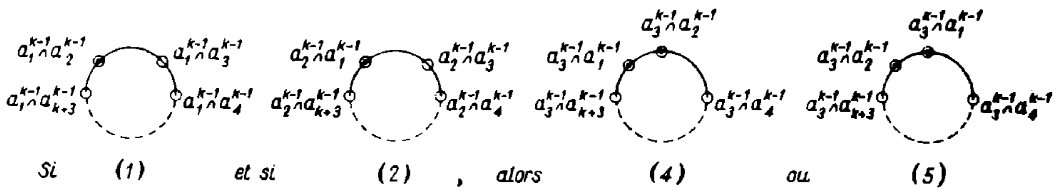

Fig. 12

l'un des cycles représentés sur la figure 13b. En comparant ces deux figures on conclut que d'après les théorèmes $\bar{1}^{k-1}$ et $\bar{2}^{k-1}$: si $k > 2$, les cycles (3) remplissent l'une des conditions (4) ou (5).

Dans le cas $k = 2$, en plus des cycles (4) et (5) il y a encore un cycle représenté en même temps sur les figures 13a et 13b; c'est le cycle

(6) $\{(a_3^1 \frown a_1^1), (a_3^1 \frown a_4^1), (a_3^1 \frown a_2^1), (a_3^1 \frown a_5^1)\}$.

Nous démontrerons que cette condition mène à une contradiction. Pour le prouver changeons la notation en remplaçant $a_1^1, a_2^1, a_3^1, a_4^1, a_5^1$ respectivement par $b_2^1, b_5^1, b_4^1, b_3^1, b_1^1$.

Après ce changement, les conditions (1) et (6) prendront les formes

$$\{(b_2^1 \frown b_5^1), (b_2^1 \frown b_4^1), (b_2^1 \frown b_3^1), (b_2^1 \frown b_1^1)\}$$

et

$$\{(b_4^1 \frown b_2^1), (b_4^1 \frown b_3^1), (b_4^1 \frown b_5^1), (b_4^1 \frown b_1^1)\} ,$$

d'où résulte en vertu du lemme 6: $\{b_1^1, b_2^1, b_3^1, b_4^1, b_5^1\}$, c'est-à-dire $\{a_5^1, a_1^1, a_4^1, a_3^1, a_2^1\}$. Mais cette dernière condition implique selon la définition $\overline{3}$, la condition

$$\{(a_2^1 \frown a_5^1), (a_2^1 \frown a_1^1), (a_2^1 \frown a_4^1), (a_2^1 \frown a_3^1)\}$$

qui d'après les théorèmes 1^1 et 2^1 est en contradiction avec l'hypothèse (2).

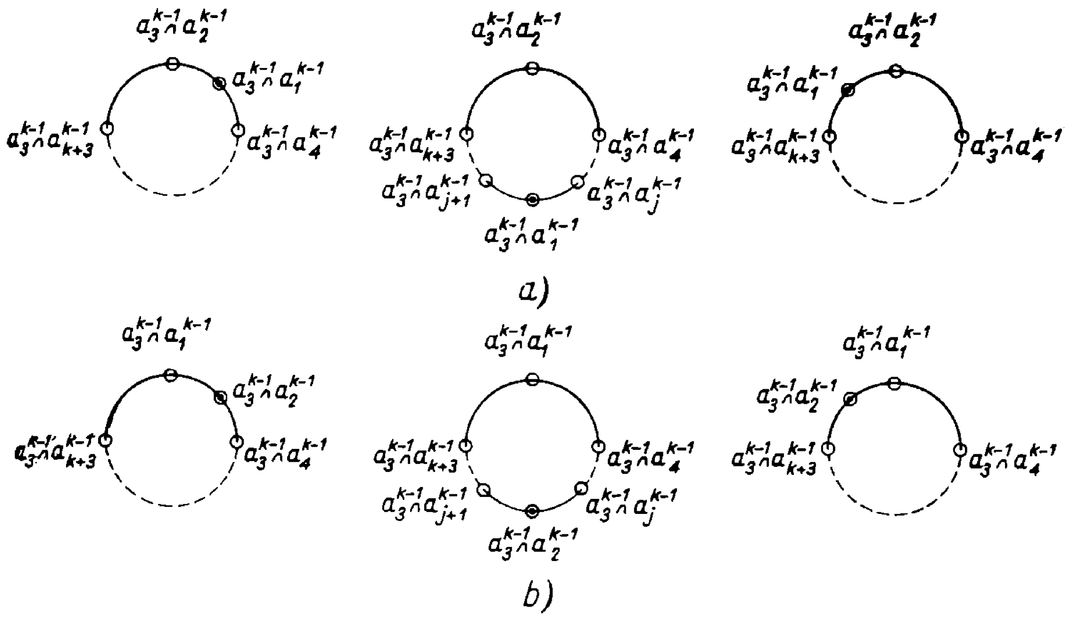

Fig. 13

Théorème $\overline{4}^k$. *Si*

(1) $\overline{C}^k(a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+3}^{k-1})$,

il existe toujours une permutation $i_1, i_2, \ldots, i_{k+3}$ *des nombres* $1, 2, \ldots, k+3$, *telle qu'on ait*

(2) $\{a_{i_1}^{k-1}, a_{i_2}^{k-1}, \ldots, a_{i_{k+3}}^{k-1}\}$.

Démonstration par induction. 1° Pour $k = 1$ le théorème résulte directement du théorème 4^1.

2° Supposons que le théorème soit vérifié pour la valeur $k-1$ (où $k \geqslant 2$). La condition (1) entraîne en vertu du lemme 5, que pour chaque $i = 1, 2, \ldots, k+3$ on a

(3) $\overline{C}^{k-1}[(a_i^{k-1} \frown a_1^{k-1}), \ldots, (a_i^{k-1} \frown a_{i-1}^{k-1}), (a_i^{k-1} \frown a_{i+1}^{k-1}), \ldots, (a_i^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})]$

et que chaque variété $a_i^{k-1} \frown a_j^{k-1}$ (où $i \neq j$) a la dimension $k-2$. Si dans (3) on met $i = 2$, on obtiendra $\overline{C}^{k-1}[(a_2^{k-1} \frown a_1^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_3^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_{k+3}^{k-1})]$, d'où en vertu de l'hypothèse d'induction résulte qu'il existe une permutation $j_1, j_2, \ldots, j_{k+2}$ des nombres: $1, 3, 4, \ldots, k+3$, telle que

(4) $\{(a_2^{k-1} \frown a_{j_1}^{k-1}), (a_2^{k-1} \frown a_{j_2}^{k-1}), \ldots, (a_2^{k-1} \frown a_{j_{k+2}}^{k-1})\}$.

D'une façon analogue, en mettant dans (3): $i = j_2$, on conclura que les variétés

(5) $\quad (a_{j_2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_1}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_3}^{k-1}),\ \ldots,\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_{k+2}}^{k-1})$

forment un cycle. D'après le lemme 8 ce cycle doit être l'un des cycles suivants:

(6) $\quad \{(a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_1}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_3}^{k-1}),\ \ldots,\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_{k+2}}^{k-1})\ ,$

(7) $\quad \{(a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_1}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_3}^{k-1}),\ \ldots$

$\quad\quad \ldots,\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_{s-1}}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_2^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_s}^{k-1}),\ \ldots,\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_{k+2}}^{k-1})\}$

(où s vérifie les inégalités: $4 \leqslant s \leqslant k+2$),

(8) $\quad \{(a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_1}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_3}^{k-1}),\ \ldots,\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_{j_{k+2}}^{k-1}),\ (a_{j_2}^{k-1} \cap a_2^{k-1})\}\ .$

Considérons séparément ces trois possibilités:

1. Si les variétés (5) forment le cycle (7), nous remplacerons les symboles a_i^{k-1} par les symboles b_j^{k-1} de la manière représentée sur la figure 14. Dans ce cas les conditions (4) et (7) prendront les formes

(9) $\quad \{(b_s^{k-1} \cap b_1^{k-1}),\ (b_s^{k-1} \cap b_2^{k-1}),\ \ldots$

$\quad\quad \ldots,\ (b_s^{k-1} \cap b_{s-1}^{k-1}),\ (b_s^{k-1} \cap b_{s+1}^{k-1}),\ \ldots,\ (b_s^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})\}$

et

(10) $\quad \{(b_2^{k-1} \cap b_1^{k-1}),\ (b_2^{k-1} \cap b_3^{k-1}),\ \ldots,\ (b_2^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})\}\ ,$

où s est un nombre entier vérifiant les inégalisés $4 \leqslant s \leqslant k+2$. Les conditions (1), (9) et (10) impliquent en vertu du lemme 7 que les variétés b_i^{k-1} forment un cycle, d'où résulte la conclusion de notre théorème.

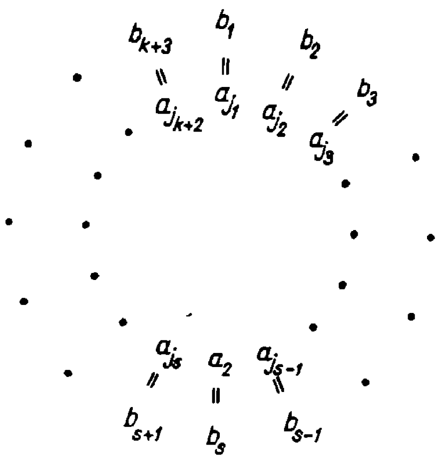

Fig. 14

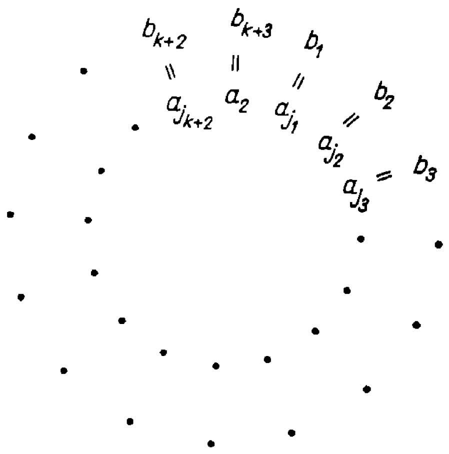

Fig. 15

2. Si les variétés (5) forment le cycle (8), il suffit de remplacer les symboles a_i^{k-1} par les symboles b_j^{k-1} de la manière représentée sur la figure 15. Dans ce cas le cycle (8) prend la forme (10), et le cycle (4) la forme suivante:

$$\{(b_{k+3}^{k-1} \cap b_1^{k-1}),\ (b_{k+3}^{k-1} \cap b_2^{k-1}),\ \ldots,\ (b_{k+3}^{k-1} \cap b_{k+2}^{k-1})\}\ .$$

Donc, d'après le lemme 7, les variétés b_i^{k-1} forment un cycle et la conclusion de notre théorème est vérifiée.

3. Si les variétés (5) forment le cycle (6), nous remplaçons les symboles a_i^{k-1} par les symboles b_j^{k-1} comme le montre la figure 16 et les conditions (6) et (4) prennent respectivement les formes (10) et

$$\{(b_1^{k-1} \cap b_2^{k-1}), (b_1^{k-1} \cap b_3^{k-1}), \ldots, (b_1^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})\}\,. \tag{11}$$

La condition (3) pour la valeur $i = j_3$ prend la forme

$$\overline{\mathrm{C}}^{k-1}[(b_3^{k-1} \cap b_1^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_2^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_4^{k-1}), \ldots, (b_3^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})]\,.$$

On en conclut, selon l'hypothèse d'induction, que les variétés

$$(b_3^{k-1} \cap b_1^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_2^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_4^{k-1}), \ldots, (b_3^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1}) \tag{12}$$

forment un cycle. Les hypothèses du lemme 9 étant vérifiées, le cycle formé par les variétés (12) doit être l'un des deux cycles suivants:

$$\{(b_3^{k-1} \cap b_1^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_2^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_4^{k-1}), \ldots, (b_3^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})\} \tag{13}$$

ou

$$\{(b_3^{k-1} \cap b_2^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_1^{k-1}), (b_3^{k-1} \cap b_4^{k-1}), \ldots, (b_3^{k-1} \cap b_{k+3}^{k-1})\}\,. \tag{14}$$

3.1. Si les variétés (12) forment le cycle (13), nous remplaçons les symboles b_i^{k-1} par les symboles c_j^{k-1} de la manière représentée sur la figure 17. Dans ce cas on voit bien que les conditions (11) et (13) ne sont

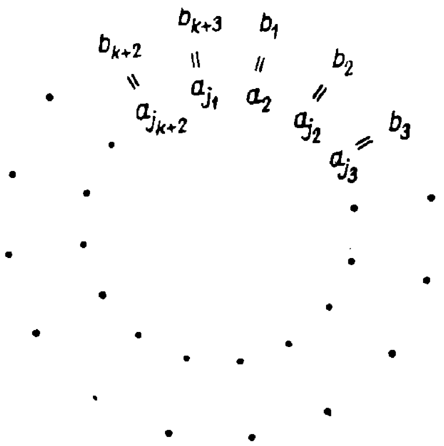

Fig. 16

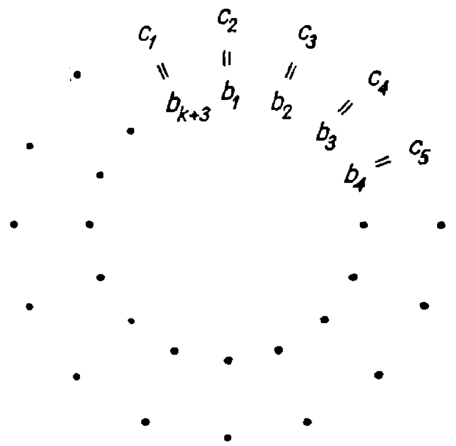

Fig. 17

autres que les hypothèses du lemme 7, d'où résulte la conclusion de notre théorème.

3.2. Si les variétés (12) forment le cycle (14), il suffit de remplacer les symboles b_i^{k-1} par les symboles c_j^{k-1} (la figure 18) pour vérifier que les conditions (14) et (10) se ramènent aussi aux hypothèses du lemme 7, d'où résulte la conclusion du théorème.

Notre démonstration est ainsi terminée.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Soient*

(1) $a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+3}^{k-1}$

les variétés vérifiant la condition $\overline{\mathrm{C}}^k$.

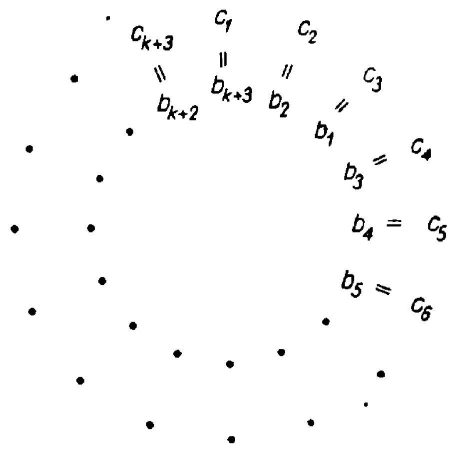

Fig. 18

Pour quatre nombres entiers arbitraires: p, q, r, s, *vérifiant les inégalités*

(2) $1 \leqslant p < q < r < s \leqslant k+3$

et pour $j = p, q, r, s$, *nous mettons*

(3) $$b_j^0 = a_1^{k-1} \cap \ldots \cap a_{p-1}^{k-1} \cap a_{p+1}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{q-1}^{k-1} \cap a_{q+1}^{k-1} \cap \ldots$$
$$\ldots \cap a_{r-1}^{k-1} \cap a_{r+1}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{s-1}^{k-1} \cap a_{s+1}^{k-1} \cap \ldots \cap a_{k+3}^{k-1} \cap a_j^{k-1}\ (^6)\,.$$

Pour que les variétés (1) *forment le cycle*

(4) $\{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, \ldots, a_{k+3}^{k-1}\}$,

il faut et il suffit que, quels que soient les nombres entiers p, q, r, s *vérifiant la condition* (2), *on ait*

(5) $\{b_p^0, b_q^0, b_r^0, b_s^0\}$ (cf. la figure 19).

Démonstration par induction. 1° Il est évident que pour $k = 1$ les conditions (4) et (5) sont identiques.

2° Supposons que le théorème soit vérifié pour la valeur $k-1 \geqslant 1$. Mettons pour $i \neq j$

(6) $c_{ij}^{k-2} = a_i^{k-1} \cap a_j^{k-1}$.

---

(6) La dimension 0 de la variété b_j résulte du lemme 5.

Il est facile de vérifier que si $p, q, r, s \neq i$ (et si (2)), les conditions (3) et (6) entraînent l'égalité

$$(7)\quad b_j^0 = c_{i,1}^{k-2} \cap \ldots \cap c_{i,p-1}^{k-2} \cap c_{i,p+1}^{k-2} \cap \ldots \cap c_{i,q-1}^{k-2} \cap c_{i,q+1}^{k-2} \cap \ldots \\ \ldots \cap c_{i,r-1}^{k-2} \cap c_{i,r+1}^{k-2} \cap \ldots \cap c_{i,s-1}^{k-2} \cap c_{i,s+1}^{k-2} \cap \ldots \cap c_{i,k+3}^{k-2} \cap c_{i,j}^{k-2},$$

où le second indice est toujours distinct de i.

Cette dernière égalité implique d'après l'hypothèse d'induction que la condition

$$(8)\quad \{c_{i,1}^{k-2}, \ldots, c_{i,i-1}^{k-2}, c_{i,i+1}^{k-2}, \ldots, c_{i,k+3}^{k-2}\}$$

est équivalente à la conjonction de toutes les conditions de la forme (5), où p, q, r, s sont distincts de i et vérifient les inégalités (2).

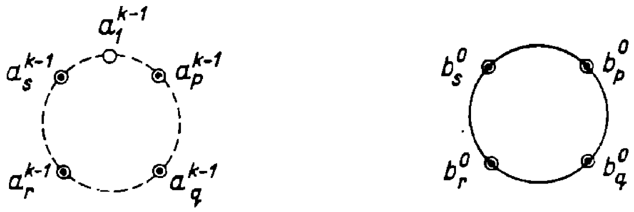

Fig. 19

D'autre part, la condition (4) est, en vertu de la définition $\overline{3}$, équivalente à la conjonction de toutes les conditions de la forme (8) où $i = 1, 2, \ldots, k+3$.

Ces deux équivalences entraînent immédiatement la conclusion de notre théorème.

Le théorème 5 établit une condition nécessaire et suffisante pour que les variétés (1) forment le cycle (4). Ce théorème peut donc servir de nouvelle définition de la notion de cycle (de $k+3$ variétés de dimension $k-1$). Cette définition n'est pas commode, car les démonstrations des théorèmes $\overline{1}^k$-$\overline{4}^k$ faites au moyen d'elle sont plus compliquées que les démonstrations données dans notre travail. Cependant, pour définir la notion k-duale: celle de cycle de $k+3$ points (situés dans une variété de dimension k), il est plus commode de s'appuyer sur le théorème 5 que sur la définition $\overline{3}$.

Avant de formuler cette définition, il faudra d'abord préciser la notion de séparation de deux couples de variétés à $k-1$ dimensions formant un faisceau. Cette notion a déjà été mentionnée (notion $(\overline{4})$, p. 215) comme la notion k-duale de celle de séparation de deux couples de points. Voici sa définition précise:

Définition 4. On dit que *les couples de variétés* (a_1^{k-1}, a_3^{k-1}) *et* (a_2^{k-1}, a_4^{k-1}) *se séparent*, ou que ces *variétés forment le cycle* $\{a_1^{k-1}, a_2^{k-1}, a_3^{k-1}, a_4^{k-1}\}$, si elles satisfont aux conditions suivantes:

1° $d(a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1} \cup a_3^{k-1} \cup a_4^{k-1}) = k$, 2° $d(a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1} \cap a_4^{k-1}) = k-2$,

3° si $b^1 \leqslant a_1^{k-1} \cup a_2^{k-1} \cup a_3^{k-1} \cup a_4^{k-1}$ et si $d(b^1 \cap a_1^{k-1} \cap a_2^{k-1} \cap a_3^{k-1} \cap \cap a_4^{k-1}) = -1$, alors les points $a_i^{k-1} \cap b^1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ forment le cycle $\{(a_1^{k-1} \cap b^1), (a_2^{k-1} \cap b^1), (a_3^{k-1} \cap b^1), (a_4^{k-1} \cap b^1)\}$.

Nous pouvons maintenant formuler la condition k-duale de la condition établie dans le théorème 5, c'est-à-dire, définir le cycle de $k+3$ points.

DÉFINITION 5. Soient

(1) $\quad a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+3}^0$

des points vérifiant la condition C^k.

Pour quatre nombres entiers arbitraires: p, q, r, s, vérifiant les inégalités

(2) $\quad 1 \leqslant p < q < r < s \leqslant k+3$

et pour $j = p, q, r, s$, nous mettons

$$b_j^{k-1} = a_1^0 \cup \ldots \cup a_{p-1}^0 \cup a_{p+1}^0 \cup \ldots \cup a_{q-1}^0 \cup a_{q+1}^0 \cup \ldots$$
$$\ldots \cup a_{r-1}^0 \cup a_{r+1}^0 \cup \ldots \cup a_{s-1}^0 \cup a_{s+1}^0 \cup \ldots \cup a_{k+3}^0 \cup a_j^0 .$$

On dit que *les points* (1) *forment le cycle* $\{a_1^0, a_2^0, \ldots, a_{k+3}^0\}$ si, quels que soient les nombres entiers p, q, r, s vérifiant la condition (2), on a $\{b_p^{k-1}, b_q^{k-1}, b_r^{k-1}, b_s^{k-1}\}$ (au sens de la définition 4).

En comparant la définition 5 et le théorème 5 on voit que la notion définie à l'aide de cette définition est duale de la notion de cycle de $k+3$ variétés de dimension $k-1$. On en conclut immédiatement que le cycle de $k+3$ points déterminé par cette définition vérifie les théorèmes 1^k-4^k duaux des théorèmes $\overline{1}^k$-$\overline{4}^k$.

Dans ce travail on a défini certaines notions servant à déterminer l'ordre dans l'espace. On y a démontré que ces notions vérifient des théorèmes analogues aux théorèmes concernant les notions classiques. On peut se demander quelles sont les propriétés de ces nouvelles notions qu'il faut prendre pour axiomes pour pouvoir en déduire toutes les propriétés des notions classiques. Plus précisément, il s'agit du problème suivant:

PROBLÈME 2. *Ayant fixé le nombre k (par ex. $k = n =$ dimension de l'espace) construire un système d'axiomes concernant la notion de cycle de $k+3$ points, tel qu'on puisse en déduire (en se basant sur les axiomes d'incidence) tous les axiomes classiques d'ordre.*

La résolution de ce problème permettrait de remplacer dans la géométrie projective la classe des axiomes d'ordre par des axiomes concernant la notion de cycle de $k+3$ points (ou par celle de cycle de $k+3$ variétés de dimension $k-1$).

Travaux cités

[1] L. Dubikajtis, *On the order of points and hyperplanes in n-dimensional projective geometry*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. math., astr. et phys. 6 (1958), pp. 607-610.

[2] M. Dubreil Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques et des treillis géométriques*, Paris 1953.

[3] N. W. Efimov, *Géométrie Supérieure* (en russe), Moscou 1945.

Reçu par la Rédaction le 20. 5. 1958