MATHEMATICAL CONTROL THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 14
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1985

ОБЗОР НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

А. А. АХУНДОВ

Институт кибернетики, Баку, Аэерб. ССР, СССР

1. Введение

Обзор посвящен обсуждению некоторых свойств интегрирования и управляемости линейных вырожденных уравнений и составлен по ряду работ, опубликованных до 1979 г. включительно, впрочем, в порядке исключения указаны и несколько работ 1980 г. Список этих работ далеко не претендует на полноту.

Назвать настоящую статью обзором по линейным вырожденным уравнениям было бы неправильно, так как под последними можно подразумевать очень многое. А отказаться в тексте от термина „вырожденный" — малособлазнительно, ввиду того, что он краток и встречается в литературе часто.

2. Интегрирование линейных вырожденных уравнений

Мы говорим, что метод интегрирования *общий*, если он позволяет решить задачу с интегрированием для любых обыкновенных линейных вырожденных уравнений с конечномерными постоянными матричными коэффициентами из некоторого числового поля. Остальные методы интегрирования называем *частными*.

Ниже речь пойдёт о пяти методах интегрирования линейных вырожденных уравнений.

2.1. Общие методы интегрирования. Во второй половине прошлого века в начатых К. Вейерштрассом и продолженных Л. Кронекером оригинальных изысканиях в области теории пучков матриц были заложены, в частности, основы первого общего метода интегрирования линейных вырожденных уравнений [20].

Стало ясно, что для интегрирования системы, например, вида

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}Mz = Nz+f(t), \qquad t \in T = [t_0, t_1]$$

достаточно сначала определить по Вейерштрассу–Кронекеру каноническую квазидиагональную матрицу $K(p)$ пучка $pM-N$, затем найти невырожденные решения матричного уравнения

$$X(pM-N)Y = K(p)$$

и наконец, проинтегрировать уравнение

$$K(d/dt)Y^{-1}z = Xf.$$

Здесь z, f — соответственно m и n-вектор-функции, компоненты f — суммируемые, а матрицы M, N — $n \times m$-мерные.(1)

Метод Вейерштрасса–Кронекера позволил выяснить всевозможные типы условий интегрируемости (совместимости) линейного вырожденного уравнения (1), оказалось, что они являются определенными линейными и дифференциальными зависимостями компонентов вектор-функции f [20].

Однако, все же метод не давал удовлетворительных формул интегрирования (тестового типа) и, что немаловажно, условия совместности интегрирования могли появляться только к концу обычно трудоемких вычислений.

В [8] был предложен другой общий метод интегрирования линейных вырожденных уравнений.(2) Идея метода проста. Описав в явном виде всевозможные невырожденные решения X и Y матричного уравнения

$$(2)\qquad XMY = H_{vks} = \begin{bmatrix} I_v & 0_{vs} \\ 0_{kv} & 0_{ks} \end{bmatrix},$$

где I_v-единичная $v \times v$-матрица, $v =$ ранг M, 0_{ij}-нулевая $i \times j$-матрица, $k = n-v$, $s = m-v$, нетрудно было заметить, что для произвольной матрицы N, соразмерной с M, матрицы XNY имеют определенные блоки, ранги которых одни и те же при любых отмеченных X, Y. Выяснилось, что последовательные применения декомпозиций типа (2) к подобным блокам и приводят к решению задачи интегрирования.

(1) Принятая здесь форма записи (1) встречается в [9], [40] и др. В [8], [12], [20], [35], [39], [44] и др. левая часть (1) имеет вид $M\dot{z}$. Нередко, это различие — формальность [8], [20], [44], в то же время совершенно очевидно, что область приложений уравнений типа (1) может быть значительно шире.

(2) В улучшенной форме депонирована в ВИНИТИ, СССР, 1980 г. № 3229-80 Деп.

Существенным отличием метода явилось то, что условия совместности здесь становились известными уже по ходу процесса интегрирования, что в ряде случаев позволяло резко сократить объем вычислений.

Стоит также отметить, что метод не использует каких-либо понятий из специальных разделов математики, действия единообразны и ограничиваются исключительно операциями сложения, умножения и обращения матриц. Последние обстоятельства особенно ценны для разрабатывания процедур интегрирования на ЭЦВМ.

Тем не менее, и этот метод не дал пожалуй самого главного — формул интегрирования и условий совместности тестового типа, т.е. немедленно составляемым по данным линейных вырожденных уравнений. Справедливости ради добавим, что сказанное — не абсолютно, а именно известны не менее пяти исключений (и вполне общих). Общие методы, упомянутые выше, пригодны для интегрирования более сложных линейных вырожденных уравнений, например, систем типа

$$\frac{d}{dt} Mz(t) = Nz(t) + N_0(t)z\big(t-h(t)\big) + f(t), \qquad t \in T, \tag{3}$$

где N_0 — $n \times m$-матрица, h — функция запаздывания.

Для дальнейшего изложения, нам удобно привести одну из частных формул интегрирования (кстати, легко ее получать и непосредственным путём). С этой целью, представим (1) в следующем развернутом виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} E & G \\ F & V \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in T, \tag{4}$$

где A, E — $v \times v$-матрицы, ранг A = ранг $M = v$, остальные матрицы имеют соответствующие размеры, $f = \operatorname{colon}[\varphi, \psi]$ и φ — v-мерна.

Тогда, предположение об обратимости матрицы

$$V - FA^{-1}B - CA^{-1}(G - EA^{-1}B) \stackrel{\text{def}}{=} W$$

достаточно для следующей формулы интегрирования:

(5)

$$z(t) = \begin{bmatrix} A^{-1}B \\ -I_k \end{bmatrix} W^{-1}\big(\psi(t) - CA^{-1}\varphi(t)\big) + \begin{bmatrix} I_v + A^{-1}BW^{-1}(F - CA^{-1}E) \\ W^{-1}(CA^{-1}E - F) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \Big\{\exp\big(\Delta(t-t_0)\big)w + \int_{t_0}^{t} \exp\big(\Delta(t-s)\big)A^{-1}\big(\varphi(s) - (G - EA^{-1}B)W^{-1} \times$$

$$\times \big(\psi(s) - CA^{-1}\varphi(s)\big)\big)ds\Big\},$$

справедливой при любом v-векторе w, где

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}\big(E-(G-EA^{-1}B)W^{-1}(F-CA^{-1}E)\big).$$

2.2. Критерии интегрируемости. Задача разрабатывания критериев интегрируемости по своей сути предшествует задаче интегрирования. Особый смысл она приобретает при наличии возмущающих факторов на параметры вырожденных уравнений, ибо, в конечном итоге, позволяет определить допустимые границы возмущений, что очень важно для целей моделирования, изучения свойств управляемости, колебательных процессов и.т.п.

В настоящее время известны несколько критериев интегрируемости линейных вырожденных уравнений, охватывающие в основном случай, когда возмущениям подвержена вектор-функция f.

Еще процесс канонизации регулярных пучков матриц Вейерштрасса позволил заключить, что линейное вырожденное уравнение (1) разрешимо при любых достаточно гладких f, если только соответствующий (1) пучок регулярен [20].([3]) Выражение „достаточно гладкий", в критерии, получило удовлетворительную расшифровку впоследствии, так благодаря [48], [49] (см. п. 3) выяснилось, что минимальный допустимый порядок гладкости f на единицу меньше числа $\operatorname{Ind}\big((pM-N)^{-1}M\big)$. Заметим, что критерий интегрируемости сохраняет силу и для (3), конечно, при известной гладкости здесь члена, добавочного по отношению к (1).

На основе анализа обоих общих методов интегрирования в [8] был установлен еще один критерий интегрируемости.

Говорим, что (3) удовлетворяет *условию гибридности*, если в разложении

$$XNY = \left[\begin{array}{c:c} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \hdashline \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}\right]$$

блок заполняющий $k\times k$-мерную IV клетку обратим для какой-либо пары невырожденных решений уравнения $XMY = H_{vkk}$, где k — дефект матрицы M. Например, для (4) условие гибридности равносильно обратимости матрицы W.

Комментарии. Корректности определения обеспечивает постоянство ранга блока IV при всех отмеченных X, Y [8]. Линейные вырожденные уравнения, удовлетворяющие условию гибридности, являются гибридными системами [3]–[10], [29], [38], последние всегда совместны (в обычном смысле), даже тогда, когда нелинейны [29], [30],

([3]) Регулярность пучка матриц, по определению, означает обратимость пучка при некотором значении его числового параметра. В противном случае пучок называют сингулярным.

[41]–[43]. Условие гибридности заведомо предполагает регулярность пучка матриц уравнения (3). В [39] (см. п. 3) есть бесконечномерный эквивалент этого условия.

Сформулируем, наконец, критерий: Для разрешимости линейного вырожденного уравнения (3) при любых кусочно-непрерывных f необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию гибридности. Заметим, что критерий допускает усиления, так, достаточная часть остается в силе для любых суммируемых f; не вдаваясь в подробности, отметим также наличия возможностей сужения класса кусочно-непрерывных функций в необходимой части утверждения.

Линейная гибридная система при каждом фиксированном суммируемом входе (f — в наших обозначениях) определяет единственное решение, соответствующее ее начальному состоянию [8], [10]. Поэтому разрешимость, например, уравнения (3) для всех таких входов гарантирует единственность решений. В [37] этот факт обобщен для специального вида линейных вырожденных уравнений в частных производных. Естественно напрашивается предположение о сохранении указанной связи для широкого класса линейных дифференциальных уравнений, у которых перед старшей производной стоит постоянная вырожденная матрица.

3. Частные методы (формулы) интегрирования

Они разработаны в основном для линейных вырожденных уравнений с регулярными пучками матриц. Исключение составляет приближенный метод, который может быть применен еще и тогда, когда интегрируемой системе соответствует сингулярный пучок с квадратными матрицами (см. п. 4).

3.1. Формула интегрирования из [48]. Эта формула установлена для (1) с регулярным пучком и использует следующие определения [42], [52], [61] и др.

Определение. Если A — $n\times n$-матрица с элементами из поля комплексных чисел, то *индексом* A, обозначаемым символом $\mathrm{Ind}(A)$, называют наименьшее неотрицательное целое число s, при котором ранг(A^s) = ранг(A^{s+1}).

Определение. Если A — $n\times n$-матрица с элементами из поля комплексных чисел, то *обратной в смысле Дразина для* A называется решение следующих уравнений:

$$AX = XA, \qquad XAX = X, \qquad XA^{s+1} = A^s,$$

где $s = \mathrm{Ind}(A)$.

Обратная в смысле Дразина для A обозначается как A^D (иногда $\tilde{A}$). Для квадратных матриц она всегда существует и единственна. Если A — вырожденная, то

$$A^D = P\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},$$

где обратимые матрицы P, L определяются из разложения

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

Q — нильпотентная матрица.

Пусть $F = F(p) \stackrel{\text{def}}{=} (pM-N)^{-1}$. Тогда в силу [48], справедлива следующая формула интегрирования для (1):

$$z = \exp\big((FM)^D FN(t-t_0)\big)FM(FM)^D q + \tag{6}$$
$$+ (FM)^D\int_{t_0}^{t}\exp\big((FM)^D FN(t-x)\big)Ff(x)\,dx +$$
$$+ \big(I_n - FM(FM)^D\big)\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i[FM(FN)^D]^i(FN)^D Ff^{(i)},$$

где q — произвольный n-вектор, $s = \operatorname{Ind} FM$.(4)

Следует отметить, что правая часть (6) от p не зависит. Из (6) видна структура множества начальных состояний (1).

3.2. Формула интегрирования из [39]. Пусть X, Y — банаховы пространства, $[X, Y]$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y, $M, N \in [X, Y]$, f: $(0, t_1) \to Y$.

Решением бесконечномерного линейного вырожденного уравнения (1) (формально, сохраним ту же запись) названа функция z со значениями в X, непрерывная в нуле, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению на $(0, t_1)$.

Предположим, что выполнены следующие требования:

(1) f — непрерывна на $(0, t_1)$ и интегрируема в нуле;

(2) $L_p = (pM-N)^{-1}$ — существует при некотором значении p;

(3) $\forall p \in \{p\colon L_pM \in [X, X]\} \stackrel{\text{def}}{=} V$, $\forall t \in (0, t_1)$,

$$\int_0^t f(s)\exp(-ps)\,ds \in D(L_p);$$

(4) $\exists a < \infty, \{p\colon \operatorname{Re} p \geqslant a\} \subset V$, $\forall v \in X$, $\lim\limits_{\substack{|p|\to\infty \\ \operatorname{Re} p > a}} L_pMv = 0$.

(4) В [50] используется обобщение (6) на случай, когда M, N — линейные замкнутые операторы, отображающие комплексные банаховы пространства в себя.

Тогда любое решение (1) представляется формулой

$$(7) \quad z(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{s \uparrow t} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} L_p\left\{Mz_0 + \int\limits_0^t f(x)\exp(-px)\,dx\right\} \exp(ps)\,ds,$$

где вектор z_0 определяется при некоторых дополнительных условиях.

Заметим, что в конечномерном случае условие 4 есть не что иное, как условие гибридности. Это можно установить с помощью формулы Фробениуса о нахождении обратной блочной матрицы [20]. А формула (5) является конечномерным аналогом формулы интегрирования (7).

3.3. К интегрированию на ЭЦВМ. Отметим работы [14], [36], [46], [51], [56], [60], в которых развита процедура нахождения решения системы (1) в виде разложения по собственным векторам при условии, что матрица M — невырожденна, причем она рассчитана на использование подпрограммы вычисления собственных значений и собственных векторов. Опыт этих работ может быть полезным и в рассматриваемом случае, ибо после несложной декомпозиции системы получаем, в частности, нормально разрешенные подсистемы.

4. К исследованию задач управления линейными вырожденными системами

Существующая техника теории управления нормально разрешенными системами нередко оказывается применимой и к линейным вырожденным уравнениям. Обычно, для этой цели вырожденную матрицу, стоящую рядом с производной, возмущают до невырожденной путем введения малого параметра, затем решают соответствующую задачу управления и наконец, пытаются получить окончательные результаты устремляя малый параметр к нулю [2], [11], [17], [21]–[27], [55]–[59] и многие др. Так, например в (1), матрица M возмущается до пучка $M+\varepsilon M_0$, который благодаря специальному выбору M_0 является обратимым при всех малых, ненулевых значениях параметра ε. Иногда, в эту схему вписываются линейные вырожденные уравнения с квадратными матрицами образующими сингулярный пучок.

Автор [44] используя процесс канонизации (регулярных пучков) Вейерштрасса, получила для (1) с регулярным пучком условия стабилизируемости и управляемости типа Хаутуса [54] (см. также [19], [45]). В [62] введены и изучены на основе формулы интегрирования (6) несколько определений достижимости и управляемости систем типа (1). Здесь, наряду с другими полезными результатами, особый интерес представляет установленный факт о взаимосвязи между свойствами стабилизируемости системы (1) и существованием определенного частного решения для соответствующей версии уравнения Риккати. В [50] (см. сноску ([4])) при некоторых ограничениях получен явный критерий аппроксимативной управляемости для абстрактных систем вида (1), определенных в банаховых пространствах. Даны также некоторые приложения для уравнений в частных производных.

В [3]–[10], [29] изучаются различные задачи управляемости и наблюдаемости для линейных гибридных систем с запаздыванием. Нелинейному случаю посвящены работы [29], [30], [41]–[43] и др.

5. Примеры линейных вырожденных систем

В качестве примеров укажем на задачи, связанные с уравнением межотраслевого баланса [12], электрическими цепями с сосредоточенными параметрами [39], сингулярно возмущенными дифференциальными системами [15]–[17], [26], [31]–[35], гибридными системами [1], [3]–[10], [29], [30], [41]–[43] и др.

Приведем, для наглядности, описание одной из перечисленных выше систем, например, уравнения межотраслевого баланса [12], [34]:

$$M\dot{z} = I - Az - y,$$

здесь z — вектор производства продукции, y — вектор конечного продукта, M — матрица коэффициентов приростной фондоемкости, A — матрица технологических коэффициентов, I — единичная матрица. Матрицы M, A определяются структурой экономики и условным разбиением народного хозяйства на отрасли.

Литература

[1] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний*, Гос. изд-во физ.-мат. литературы, Москва 1959.

[2] В. А. Аникеева (Есипова), *Условно устойчивые сингулярно возмущенные системы и некоторые задачи оптимального управления*, Канд. дисс., Москва 1974.

[3] А. А. Ахундов, III Всесоюзн. конф. по качественной теории дифференц. уравнений и её применениям, Тезисы докладов, Самарканд 1973.

[4] —, Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 5 (1975).

[5] —, в кн.: Управляемые системы, Вып. 14, Наука, Новосибирск 1975.

[6] —, в кн.: Управляемые системы, Вып. 17, Наука, Новосибирск 1977.

[7] —, IV Всесоюзн. конф. по теории и приложениям дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом, Тезисы докладов, Киев 1975.

[8] —, *Некоторые задачи теории управления линейными гибридными системами*, Канд. дисс., Баку 1977.

[9] —, в отчете лаборатории *Математические вопросы кибернетики*, ИК АН Азерб. ССР, 1978.

[10] А. А. Ахундов, в кн.: *Динамика управляемых систем*, Наука, Новосибирск 1979.
[11] Н. Х. Багирова, А. Б. Васильева, М. И. Иманалиев, Дифференц. уравнения 3 (11) (1967).
[12] К. А. Багриновский, в кн.: *Проблемы народнохозяйственного оптимума*, Москва 1969.
[13] Е. Е. Барбашина, II Всесоюзн. конф. по оптимальному управлению в механических системах, Тезисы докладов, Казань 1977.
[14] Дж. Г. Беливо, Ракетная техника и космонавтика 15 (7) (1977).
[15] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, Москва 1973.
[16] А. Б. Васильева, В. А. Аникеева, Дифференц. уравнения 12 (10) (1976).
[17] А. Б. Васильева, в кн.: *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Тр. Всесоюзн. конф., Кацивели 1977, Киев 1979.
[18] Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, *Качественная теория оптимальных процессов*, Наука, Москва 1971.
[19] А. Г. Габелая, В. И. Иваненко, О. Н. Одарич, Кибернетика 3 (1975).
[20] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва 1976.
[21] В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев, Дифференц. уравнения 11 (11) (1975).
[22] М. Г. Дмитриев, *Исследование сингулярных возмущений задач оптимального управления*, Канд. дисс., Днепропетровск 1972.
[23] —, Журнал вычислительной математики 12 (3) (1972).
[24] —, в кн.: *Математика и механика*, Днепропетровск 1972.
[25] М. Г. Дмитриев, В. А. Есипова, В. И. Чуев, в кн.: *Дифференциальные уравнения и их приложения*, Днепропетровск 1973, вып. 2.
[26] К. В. Задирака, в кн.: *Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений*, Наукова думка, Киев 1968.
[27] С. П. Зубова, *Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной*, Канд. дисс., Воронеж 1973.
[28] —, Всесоюзн. конф. по асимптотическим методам в теории сингулярно возмущенных дифференц. и интегриро-дифференц. уравнений и их приложениям, Тезисы докладов, Фрунзе 1975.
[29] Ф. М. Кириллова, А. А. Ахундов, С. В. Стрельцов, III Всесоюзн. конф. по проблемам теоретической кибернетики, Тезисы докладов, Новосибирск 1974.
[30] Ф. М. Кириллова, С. В. Стрельцов, в кн.: Управляемые системы, Вып. 14, Наука, Новосибирск 1975.
[31] С. Г. Крейн, Г. А. Курина, III Всесоюзн. Четаевская конф. по устойчивости движения, аналитической механике и управлению движением, Аннотации докладов, Иркутск 1977.
[32] Г. А. Курина, ДАН СССР 234 (3) (1977).
[33] —, ДАН СССР 237 (3) (1977).
[34] —, в кн.: Тезисы областной научно-практической конф., Воронеж 1977.
[35] —, в кн.: *Теория операторных уравнений*, Воронеж 1979.
[36] Х. Д. Нельсон, Д. А. Главгоу, Ракетная техника и космонавтика 17 (7) (1979).
[37] А. Л. Павлов, в кн.: *Краевые задачи для уравнений в частных производных*, 1978.
[38] Ч. Портер, *Современные основания общей теории систем*, Наука, Москва 1971.
[39] А. Г. Руткас, Дифференц. уравнения 11 (11) (1975).

[40] В. П. Скрипник, *О вырожденных дифференциальных уравнениях и вырождающем параметре,* Рукопись деп. в ВИНИТИ 23 июля 1979 г., № 2770–79 ДЕП.
[41] С. В. Стрельцов, Дифференц. уравнения 12 (5) (1976).
[42] —, *Об оптимальных процессах в гибридных системах,* Минск 1978, Препринт № 10 (42).
[43] —, Автореферат канд. дисс., Минск 1979.
[44] Е. Н. Хасина, в кн.: *Моделирование в экономических исследованиях,* Наука, Новосибирск 1978.
[45] Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, *Финитные функции в физике и технике,* Наука, Москва 1971.
[46] И. Фавзи, Ракетная техника и космонавтика 15 (2) (1977).
[47] S. L. Campbell, C. D. Meyer, Linear Algebra Appl. 10 (1975).
[48] S. L. Campbell, C. D. Meyer, N. T. Rose, SIAM J. Appl. Math. 31 (1976).
[49] M. P. Drazin, Amer. Math. Monthly 65 (1958).
[50] A. Favini, Appl. Math. Optim. 6 (1980).
[51] I. Fawzy, R. E. D. Bishop, Proc. Roy. Soc. London A 352 (1976).
[52] T. N. E. Greville, M. R. C. Tech. Sum. Rep. 823, Math. Research Center Univ. of Wisconsin, Madison, Wis. 1967.
[53] T. R. Grossley, W. A. Porter, Electronics Letters 9 (3) (1973).
[54] M. L. T. Hautus, Indagat. Math. 32 (1970).
[55] P. V. Kokotovis, R. E. O'Malley, Jr., P. Sannuti, Automatica 12 (1976).
[56] T. Lund, ASME Paper 75-Lub.-40.
[57] R. E. O'Malley, Jr., Lecture Notes Econom. Math. Syst. 106 (1974).
[58] R. E. O'Malley, Jr., A. Jameson, IEEE Trans. Automatic Control 20 (2) (1975).
[59] R. E. O'Malley, Jr., SIAM J. Math. Anal. 10 (4) (1979).
[60] L. Meirovich, *Analytical Methods in Vibrations,* Macmillan, Co., New York 1967.
[61] C. D. Meyer, Jr., SIAM J. Appl. Math. 26 (1974).
[62] L. Pandolfi, J. Optimization Theory Appl. 30 (4) (1980).