ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Propriété limite de la matrice du potentiel spécial de simple couche d'un système parabolique d'équations

par H. MILICER-GRUŻEWSKA (Warszawa)

Introduction. On a démotre [1] que la limite de la matrice du potentiel généralisé de simple couche, défini par M. W. Pogorzelski [2] (voir aussi [2′]), est, sous certaines hypothèses, la matrice du potentiel généralisé du système elliptique d'équations le nombre de dimension n de l'espace E_n, dans lequel le système était défini, était plus grand que le rang M de ce système ($n > M$). Dans cet article on examinera le cas où $n \leqslant M$. On sait que dans ce cas il est inutile de chercher la limite du potentiel de M. W. Pogorzelski (voir l'exemple de M. M. Krzyżański [3]). Néanmoins, dans le même travail M. Krzyżański donne une modification du potentiel qui converge avec $t \to \infty$ vers une limite finie. C'est aussi le procédé appliqué par M. S. D. Eidelman dans l'article de 1954 [4]. M. Eidelman construit pour un système spécial d'équations paraboliques une solution fondamentale intégrable sur tout l'axe du temps ($t \geqslant 0$). Cette solution n'est autre que la quasi-solution bien connue dépourvue de ses premiers termes dans son développement en série de Taylor. Selon l'auteur de l'article [4] cette méthode est assez générale pour pouvoir être appliquée aux cas des systèmes paraboliques arbitraires, mais avec des coefficients qui sont différentiables [5].

Dans ce travail on appliquera la méthode d'Eidelman aux systèmes paraboliques d'équations soumis aux conditions de M. W. Pogorzelski [2]; on supposera donc ici que les coefficients sont höldériens. On ne trouvera la limite du nouvau potentiel que dans le cas d'un domaine restreint (voir les hypothèses III et IV), de même que dans l'article [1]. Il serait peut-être possible d'améliorer ce résultat en étudiant directement le système d'équations intégrales définissant la solution cherchée.

La solution fondamentale construite par la méthode de M. W. Pogorzelski au moyen de la quasi-solution, dépourvue de ses premiers termes dans son développement en série de Taylor, sera dite *solution fondamentale spéciale*. Le potentiel construit sur cette solution fondamentale spéciale sera dit *potentiel spécial*.

1. Soit. E l'espace euclidien à n dimensions, ses points: $X = X(x_1, \ldots, x_n)$; $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$; $Z = Z(z_1, \ldots, z_n)$, ..., t étant le temps non négatif. Soient: Ω un domaine de E, $\bar{\Omega}$ la fermeture de Ω, Ω' une région de E contenant $\bar{\Omega}$; $c, C, C_0, C^0, \ldots$ des constantes positives (on les écrira aussi const ou φ^{te}). Soit $M \geqslant n$ l'ordre du système parabolique d'équations linéaires, normales, à coefficients höldériens et aux dérivées partielles; $k_1, \ldots, k_n$ — les composants entiers non négatifs de chaque entier non négatif $k \leqslant M$, c'est-à-dire $0 \leqslant k_i \leqslant k$; $k_1 + \ldots + k_n = k$; $0 \leqslant k \leqslant M$. On posera: $(k_1, \ldots, k_n) = (k)$ et on écrira les coefficients du système et les dérivées de la solution inconnue $(u_1, \ldots, u_N) = (u)$ comme il suit:

$$A_{\alpha\beta}^{(k)}(X, t) = A_{\alpha\beta}^{k_1,\ldots,k_n}(X, t) \qquad \text{et} \qquad D^k(u) = \partial^{k_1+\ldots+k_n} u / \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}\,.$$

Le système d'équations prendra ici, comme dans l'article [1] la forme

$$(1.1) \qquad \hat{\Psi}^{(a)}(u) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{0 \leqslant k \leqslant M} A_{aj}^{(k)}(X, t) D^k(u_j) - \partial u_a / \partial t = 0\,,$$
$$a = 1, \ldots, N\,,\ X \in \Omega\,,\ t > 0\,,$$

la somme (1.1) étant étendue à toutes les suites (k). En désignant par p le nombre des termes de la somme $\sum$ du second membre de la formule (1.1) on écrit cette somme sous la forme suivante:

$$\big(A_a(X, t) \cdot D(u)\big)_1^p\,,$$

ce qui permet de remplacer la formule compliquée (1.1) par la suivante:

$$(1'.1) \qquad \hat{\Psi}^{(a)}(u) = \big(A_a(X, t) \cdot D(u)\big)_1^p - \partial u_a / \partial t = 0\,,$$
$$a = 1, \ldots, N\,,\ X \in \Omega\,,\ t > 0\,.$$

La matrice $[u_{ij}]_{i,j=1,\ldots,N}$ des solutions du système (1.1) sera notée $[u]$.

Les hypothèses sur les coefficients du système (1.1) sont les suivantes:

I. Les coefficients du système (1.1) sont continus et bornés dans la région Ω' et pour $t \geqslant 0$; ils sont soumis aux conditions de Hölder

$$(2.1) \qquad |A_{aj}^{(k)}(X, t) - A_{aj}^{(k)}(Y, \tau)| \leqslant \begin{cases} C_0[|XY|^h + |t - \tau|^{h'}]\,, & k = M\,, \\ C^0 |XY|^h, & k < M\,,\ t = \tau\,. \end{cases}$$

$|XY|$ désigne la distance des points X et Y; h et h' sont des constantes telles que $0 < h \leqslant 1$; $0 < h' \leqslant 1$. Posons $h_1 = \min(h, 2h')$. On suppose aussi que les limites

$$(2'.1) \qquad \lim_{t \to \infty} A_{aj}^{(k)}(X, t) = \hat{A}_{aj}^{(k)}(X)\,, \qquad X \in \Omega'\,,\ a, j = 1, \ldots, N$$

existent et qu'elles sont uniformes dans Ω', pour chaque suite (k), définie plus haut.

II. Le système (1.1) est uniformément parabolique par rapport à la variable t dans la région Ω', selon Petrovsky [6], (voir aussi [2], formules (5) et (7)). Il en résulte que le système d'équations

$$\hat{\Psi}^{(\alpha)}(\hat{u}) = \big(\hat{A}_\alpha(X)D(\hat{u})\big)_1^p - \partial\hat{u}_\alpha/\partial t = 0\,, \quad \alpha = 1, \ldots, N\,, \tag{3.1}$$

sera aussi parabolique selon Petrovsky dans le domaine Ω', pour $t > 0$. On écrira la définition de la matrice des quasi-solutions $[W]$ du système (1.1) de M. W. Pogorzelski au moyen des définitions du début de ce paragraphe, comme il suit:

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta} &= W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t;\, Y, \tau) \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta\big(t, \tau;\, Z, \zeta;\, (s)\big) \exp i\big(s(x-y)\big)\, dS\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $(s) = (s_1, \ldots, s_n)$, $dS = ds_1 \ldots ds_n$, $s^2 = s_1^2 + \ldots + s_n^2$;

$$v_\alpha^\beta = v_\alpha^\beta\big(t, \tau;\, Z, \zeta;\, (s)\big) = \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\mu_\nu} K_{\alpha\nu l}^\beta s^{Ml}(t-\tau)^l \exp \lambda'_\nu s^M(t-\tau)\,, \tag{4'.1}$$

$$X, Y, Z \in \Omega'\,, \quad \zeta \geqslant 0; \quad t \geqslant \tau \geqslant 0; \quad X \neq Y\,, \text{ si } t = \tau; \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N\,.$$

N_1 est le nombre des racines différentes de l'équation de Petrovsky pour $s^2 = 1$, μ_ν — l'ordre de la racine λ'_ν, $\nu = 1, \ldots, N_1$. Les coefficients $K_{\alpha\nu l}^\beta$, $l = 0, 1, \ldots, \mu_\nu$, $\nu = 1, \ldots, N_1$ de la somme (4'.1) et les racines λ'_ν dépendent des coefficients de la matrice des quasi-solutions et des variables $(s_1/s, \ldots, s_n/s)$; ils sont donc des fonctions de (Z, ζ) et de $(s_1/s, \ldots, s_n/s)$. Les fonctions v_α^β forment la matrice-solution $[v]$ du système auxilier bien connu d'équations linéaires aux dérivées ordinaires avec les valeurs initials données par le symbole de Kronecker δ_α^β. Il résulte de l'hypothèse II que

$$\operatorname{Re}\lambda'_\nu < -\delta\,, \ \delta > 0; \quad Z \in \Omega'\,, \quad \zeta \geqslant 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, N_1 \tag{5.1}$$

et de l'hypothèse I que

$$\lim_{\zeta\to\infty} \lambda'_\nu = \hat{\lambda}'_\nu\,, \ s^2 = 1; \qquad \lim_{\zeta\to\infty} K_{\alpha\nu l}^\beta = \hat{K}_{\alpha\nu l}^\beta\,, \ l = 0, \ldots, \mu_\nu, \ \nu = 1, \ldots, N_1 \tag{5'.1}$$

et

$$\operatorname{Re}\hat{\lambda}'_\nu \leqslant -\delta\,, \quad Z \in \Omega'\,, \quad \nu = 1, \ldots, N_1\,. \tag{5''.1}$$

Comme les coefficients du système (3.1) ne dépendent que de la variable spatiale, on peut écrire les quasi-solutions du système (3.1) comme il suit:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{\alpha\beta}^Z &= \hat{W}_{\alpha\beta}^Z(X, Y, \theta) \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_\alpha^\beta\big(\theta, Z;\, (s)\big) \exp i\big(s(x-y)\big)\, dS\,, \quad \theta = t - \tau \end{aligned} \tag{6.1}$$

et

$$(6'.1) \qquad \hat{v}_a^\beta = \hat{v}_a^\beta(\theta, Z; (s)) = \sum_{\nu=1}^{N_1}\sum_{l=0}^{\mu^\nu} \hat{K}_{a\nu l}^\beta s^{Ml}\theta^l \exp(\hat{\lambda}'_\nu s^{\overline{M}}\theta); \qquad a, \beta = 1, \ldots, N.$$

Il résulte des inégalités (5''.1) et (5.1), donc de l'hypothèse II, que les matrices $[\hat{v}]$ et $[\hat{W}\theta^{n/M}]$ aussi bien que les matrices $[v]$ et $[W(t-\tau)^{n/M}]$ sont formées de fonctions entières en $s\theta^{1/M}$ et $(X-Y)/\theta^{1/M}$ respectivement de classe Z_p^p et Z_q^q, avec $p = M$ et $1/p+1/q = 1$ (voir [2] et [6']).

Ce fait permet d'écrire les inégalités

$$(7.1) \qquad \left|v_a^\beta(t, \tau; Z, \zeta; (s))\right| \leqslant C\exp[-\tfrac{1}{2}\delta s^M(t-\tau)], \qquad t > \tau$$

$$(7'.1) \qquad (t-\tau)^{n/M}|W_{a\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau)| \leqslant C\exp\{-c[|XY|/(t-\tau)^{1/M}]^q\}, \qquad t > \tau,$$

(voir [2]) et de même

$$(7''.1) \qquad \left|\hat{v}_a^\beta(\theta, Z; (s))\right| \leqslant C\exp(-\tfrac{1}{2}\delta s^M\theta),$$

$$(7'''.1) \qquad \theta^{n/M}|\hat{W}_{a\beta}^Z(X, Y, \theta)| \leqslant C\exp[-c(|XY|/\theta^{1/M})^q], \qquad q = M/(M-1),$$
$$\theta > 0,\ X, Y, Z \in \Omega'.$$

2. Appliquons maintenant la méthode d'Eidelman de l'article [4]. Développons les quasi-solutions des systèmes (1.1) et (3.1) (qui sont des fonctions de $(x-y)$) en séries de Taylor au point $A = A(a_1, \ldots, a_n)$, où $a_1^2+\ldots+a_n^2 > 0$, $|A| > 0$, à savoir

$$(1.2) \qquad W_{a\beta}^{Z,\zeta} = W_{a\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau) = \sum_{p=0}^{\infty} {}_AQ_p^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau);$$

$$(1'.2) \qquad \hat{W}_{a\beta}^Z = \hat{W}_{a\beta}^Z(X, Y, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} {}^AQ_p^Z(X, Y, \theta), \qquad \theta = t-\tau,$$

où

$$(2.2) \qquad {}_AQ_p^{Z,\zeta} = {}_AQ_p^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau)$$
$$= \frac{1}{p!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)} W_{a\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau)|_{X-Y=A};$$
$$\xi_i = x_i-y_i, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(2'.2) \qquad {}^AQ_p^Z = {}^AQ_p^Z(X, Y, \theta)$$
$$= \frac{1}{p!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\zeta_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)} \hat{W}_{a\beta}^Z(X, Y, \theta)|_{X-Y=A}.$$

Posons

$$(3.2)\qquad {}_A P^{Z,\zeta}_{\alpha\beta} = {}_A P^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = \sum_{p=0}^{M-n} {}_A Q^{Z,\zeta}_p(X, t; Y, \tau),$$

$$(3'.2)\qquad {}^A P^{Z}_{\alpha\beta} = {}^A P^{Z}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \sum_{p=0}^{M-n} {}^A Q^{Z}_p(X, Y, \theta),$$

et écrivons, par définition, pour les quasi-solutions spéciales les formules

$$(4.2)\qquad {}_A W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta} = {}_A W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) - {}_A P^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau),$$

$$(4'.2)\qquad {}^A W^{Z}_{\alpha\beta} = {}^A W^{Z}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \hat{W}^{Z}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) - {}^A P^{Z}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta).$$

Il résulte de là

$$(5.2)\qquad {}_A W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{(M-n+1)!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(M-n+1)} W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}|_{X-Y=A'},$$

et

$A' = A+\eta(X-Y-A)$, $A' = A'[a_1+\eta_1(\xi_1-a_1), \ldots, a_n+\eta_n(\xi_n-a_n)]$, $|\eta|<1$,

$$(5'.2)\qquad {}^A W^{Z}_{\alpha\beta} = \frac{1}{(M-n+1)!}\left[(\xi_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(\xi_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(M-n+1)} \hat{W}^{Z}_{\alpha\beta}|_{X-Y=A'}.$$

Mais l'inégalité (33) (article [2]) entraîne

$$(6.2)\qquad |D^m_X[W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-(n+m)/M}, \qquad \theta = t-\tau,$$

$$(6'.2)\qquad |D^m_X[\hat{W}^{Z}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-(n+m)/M}.$$

Ces inégalités appliquées au cas où $m = M-n+1+p$ donnent les limitations suivantes des fonctions (5.2) et (5'.2):

$$(7.2)\qquad |D^p[{}_A W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-[1+(p+1)/M]}, \qquad \theta = t-\tau > \text{const} > 0,$$

$$(7'.2)\qquad |D^p[{}^A W^{Z}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-[1+(p+1)/M]}, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Ces derivées sont donc absolument intégrables sur le demi-axe $\theta \geqslant 1$. Quant à l'entourage du point $\theta = 0$ les limitations de l'article [2] donnent

$$(8.2)\qquad |D^m_X[W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-(n+m-M\mu)}, \qquad \theta = t-\tau > 0,$$

$$(8'.2)\qquad |D^m_X[\hat{W}^{Z}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-(n+m-M\mu)}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

On conclut de là, à cause des définitions (1.2)-(4'.2), que

$$|D^m_X[{}^A W^{Z}_{\alpha\beta}]| \leqslant \text{const}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-(n+m-M\mu)} + \sum_{p=0}^{M-n} |X-Y-A|^p |A|^{-(n+m+p-M\mu)}.$$

Mais on a supposé $|A| \neq 0$ et le domaine Ω' est borné. C'est pourquoi le second terme de la somme ci-dessus est borné. Les limitations des quasi-solutions dans l'entourage du point $\theta = 0$ subsistent donc pour les quasi-solutions spéciales, par conséquent

$$(9.2) \qquad |D_X^m[{}_A W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}]| \leqslant \operatorname{const} \theta^{-\mu} |XY|^{-(n+m-M\mu)}, \qquad \theta = t-\tau > 0,$$

$$(9'.2) \qquad |D_X^m[{}^A W_{\alpha\beta}^{Z}]| \leqslant \operatorname{const} \theta^{-\mu} |XY|^{-(n+m-M\mu)}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

On voit donc que les singularités de ces dérivées sont faibles jusqu'à l'ordre $m = M-1$ pour

$$(9''.2) \qquad 1-1/M < \mu < 1.$$

Aussi on peut démontrer une inégalité analogue à l'inégalité (59), [2], à savoir:

$$(9'''.2) \qquad |D_X^m[{}_A W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}] - D_X^m[{}_A W_{\alpha\beta}^{Z_1,\zeta_1}]|$$
$$\leqslant C'_m(t-\tau)^{-(n+m)/M} \exp\{-c'_m[|XY|/(t-\tau)^{1/M}]^q\} \sup |A_{\alpha j}^{(k)}(Z,\zeta) - A_{\alpha j}^{(k)}(Z_1,\zeta_1)|$$

C'_m, c'_m étant positives, et $0 \leqslant \tau < t$.

LEMME 1.2. *Il résulte des hypothèses I et II que les quasi-solutions spéciales avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m \leqslant M-1$ sont absolument intégrables sur tout l'axe positif du temps, à savoir les intégrales*

$$(10.2) \qquad \int_0^\infty |D^m[{}_A W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, \tau+\theta; Y, \tau)]| d\theta,$$

$$(10'.2) \qquad \int_0^\infty |D^m[{}^A W_{\alpha\beta}^{Z}(X, Y, \theta)]| d\theta, \qquad X \neq Y$$

existent pour $m = 0, 1, \ldots, M-1$. Leurs singularités par rapport à $|XY|$ sont

$$(10''.2) \qquad \operatorname{const} |XY|^{-(n+m-M\mu)}$$

elles sont faibles pour $m = 0, 1, \ldots, M-1$.

On introduit les systèmes elliptiques liés aux systèmes paraboliques (1.1) et (3.1), à savoir

$$(11.2) \qquad \Psi^{(a)}(u) = \hat{\Psi}^{(a)}(u) + \frac{\partial u_a}{\partial t} = 0, \qquad a = 1, \ldots, N$$

et

$$(11'.2) \qquad \psi^{(a)}(u) = \hat{\hat{\Psi}}^{(a)}(u) + \frac{\partial u_a}{\partial \theta} = 0, \qquad a = 1, \ldots, N.$$

Le dernier *système $\psi^{(a)}(u)$ est le système elliptique limite dont il était question dans l'introduction.* En effet ses coefficients sont les limites des coefficients du système (11.2) ou (1.1) pour $t \to \infty$.

On introduit les fonctions

$$(12.2)\qquad {}_A w^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X,\ Y) = \int\limits_0^\infty {}_A W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, \tau+\theta,\ Y, \tau)d\theta = {}_A w^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}$$

et

$$(12'.2)\qquad {}^A w^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y) = \int\limits_0^\infty {}^A W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)d\theta = {}^A w^{Z}_{\alpha\beta}\,.$$

On aura le

Lemme 2.2. *Il résulte des hypothèses I et II que les intégrales* (12.2) *et* (12'.2) *sont les quasi-solutions des systèmes* (11.2) *et* (11'.2) *respectivement.*

On démontrera donc les égalités suivantes:

$$(13.2)\qquad \Pi^{(\alpha)}[{}_A w^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X,\ Y)] = \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{(M)} A^{(M)}_{\alpha j}(Z,\zeta)D^M[{}_A w^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X,\ Y)] = 0\,,$$

$$a = 1, \ldots, N;\ X \epsilon \Omega;\ Y, Z \epsilon \Omega',\ \zeta > 0$$

et

$$(13'.2)\qquad \pi^{(\alpha)}[{}^A w^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y)] = \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{(M)} A^{(M)}_{\alpha j}(Z)D^M[{}^A w^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y)] = 0\,,$$

$$X \neq Y\,,\ (M) = (k_1, \ldots, k_n)\,,\ k_1+\ldots+k_n = M;\ \beta = \text{const},\ 1 \leqslant \beta \leqslant N\,.$$

On démontrera seulement l'égalité (13'.2). Pour $X \neq Y$ on peut faire rentrer l'opération $\pi^{(\alpha)}$ sous l'intégrale (12'.2), car dans ce cas le point $\theta = 0$ n'a pas de singularité, et la différentiation n'augmente pas la singularité de l'intégrale à l'infini. On a donc, d'accord avec les définitions (13'.2), (1'.2) à (4'.2) et le fait que $0 \leqslant M-n < M$

$$(14.2)\qquad \pi^{(\alpha)}({}^A w^{Z}_{\alpha\beta}) = \int\limits_0^\infty \pi^{(\alpha)}[{}^A W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta]d\theta = \int\limits_0^\infty \pi^{(\alpha)}[\hat W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta]d\theta$$

$$= \int\limits_0^\infty \left\{\pi^{(\alpha)}[\hat W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)] - \frac{\partial \hat W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)}{\partial\theta}\right\}d\theta + \int\limits_0^\infty \frac{\partial \hat W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)}{\partial\theta}\,d\theta$$

$$= \hat W^{Z}_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)\Big|_{\theta\to 0}^{\theta=\infty} = 0\,,\qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, N\,,\ X \neq Y\,,$$

à cause de la définition de la quasi-solution $\hat W^{Z}_{\alpha\beta}$ et de l'inégalité (6'.2) pour $m = M$, c.q.f.d.

Quant à la quasi-solution spéciale $[{}^A W^{Z}_{\alpha\beta}]$ elle n'est pas la quasi-solution du même système d'équations que l'est la quasi-solution $[\hat W^{Z}_{\alpha\beta}]$ (voir [2], (20)): elle sera la solution de la même équation, mais avec le second membre. On aura en effet, comme conséquence immédiate du lemme 2.2 le

COROLLAIRE 1.2. *Les quasi-solutions spéciales* $[{}_AW^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)]$ *et* $[{}^AW^Z_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)]$ *sont respectivement les solutions des systèmes*

$$\Pi^{(a)}[{}_AW^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}] - \frac{\partial\, {}_AW^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial\, {}_AP^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}}{\partial t}, \quad a = 1, \dots, N, \tag{15.2}$$

$$\pi^{(a)}[{}^AW^Z_{\alpha\beta}] - \frac{\partial\, {}^AW^Z_{\alpha\beta}}{\partial\theta} = \frac{\partial\, {}^AP^Z_{\alpha\beta}}{\partial\theta}, \quad a = 1, \dots, N. \tag{15'.2}$$

Il peut être intéressant de savoir (voir (3'.2) et (2'.2)) que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\, {}^AP^Z_{\alpha\beta}}{\partial\theta} &= \sum_{p=0}^{M-n} \frac{1}{p!}\left[(\xi_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (\xi_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)} \pi^{(a)}[\hat W^Z_{\alpha\beta}]|_{X-Y=A} \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{(M)} A^{(M)}_{\alpha j}(Z) \sum_{p=0}^{M-n} \frac{1}{p!}\left[(\xi_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (\xi_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(p)} \times \\ &\qquad\qquad \times D^M[\hat W^Z_{j\beta}(X, Y, \theta)]|_{X-Y=A}\end{aligned} \tag{16.2}$$

et que

$${}_AW^{Z,\zeta}_{\alpha\beta} = W^{Z,\zeta}_{\alpha\beta} - \int_\tau^t \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} W^{Z,\zeta}_{\alpha\gamma}(X, t; \Pi, \theta) \frac{\partial\, {}_AP^{Z,\zeta}_{\gamma\beta}(\Pi, \theta; Y, \tau)}{\partial\theta}\, d\Pi\, d\theta, \tag{16'.2}$$

$${}^AW^Z_{\alpha\beta} = \hat W^Z_{\alpha\beta} - \int_0^\theta \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} \hat W^Z_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \zeta) \frac{\partial\, {}^AP^Z_{\gamma\beta}(\Pi, Y, \zeta)}{\partial\zeta}\, d\Pi\, d\zeta. \tag{16''.2}$$

Les dérivées de la quasi-solution $\hat W^Z_{\alpha\beta}$ dans la formule (16.2) seront d'un ordre assez élévé ($\leqslant 2M - n$) mais calculées pour $X - Y = A \neq 0$. Elles seront donc, comme fonctions de θ, régulières sur tout l'axe positif de l'accroissement $0 \leqslant \theta < \infty$ et des polynôme d'ordre $(M - n)$ comme fonctions de $(X - Y = A)$ $(a_i = x_i - y_i,\ i = 1, \dots, n)$.

Il est aussi intéressant que les limitations (10'''.2) peuvent être facilement améliorées (voir [4]). Nous savons en effet (voir [2], (33)) que

$$|D^{M-n}[{}^AW^Z_{\alpha\beta}(X, Y)]| \leqslant \varphi^{te}\Big\{1 + \int_0^1 \theta^{-1} \exp[-c_{M-n}(|XY|/\theta^{1/M})^q]\, d\theta, \qquad q = M/(M-1).$$

En faisant intervenir le changement de variables bien connu

$$|XY|/\theta^{1/M} = u; \quad \theta = [|XY|/u]^M; \quad d\theta = -M|XY|^M du/u^{M+1}$$

on trouve l'inégalité

$$|D^{M-n}[{}^Aw^Z_{\alpha\beta}(X, Y)]| \leqslant \text{const} \ln|XY|. \tag{17.2}$$

Pareillement on obtient pour $m > M-n$ l'inégalité

$$(17'.2) \qquad |D^m[{}^A w^Z_{\alpha\beta}(X,\ Y)]| \leqslant \text{const}\,|XY|^{M-(n+m)}\,.$$

Ces deux limitations sont plus avantageuses que (10‴.2). Les mêmes limitations subsistent pour la quasi-solution: ${}_A w^{Z,\zeta}_{\alpha\beta}(X,\ Y)$. On a donc la

Remarque 1.2. On peut remplacer dans la limitation (10‴.2) $|XY|^{-(n+m-M\mu)}$ par $|XY|^{M-(n+m)}$ ou par $\ln|XY|$, dans le cas aù $m = M-n$.

3. Construction de la matrice des solutions spéciales des systèmes (1.1) **et** (3.1) **dans le cas:** $n \leqslant M$. On trouvera dans ce paragraphe une énumération des propriétés de la solution spéciale dans le cas du temps $0 < t < T = \text{const}$. Les démonstrations de ces propriétés sont à trouver dans l'article [10].

Écrivons par analogie avec l'article [2]:

$$(1.3) \qquad {}_A N_{\alpha\beta}(X,t;\ Y,\tau) = \hat{\Psi}^{(\alpha)}[{}_A W^{Y,\tau}_{\alpha\beta}(X,t;\ Y,\tau)]\,,$$
$$\alpha = 1,\ldots,N\,,\ \beta = \text{const}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant N;$$

$$(1'.3) \qquad {}^A N_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta) = \hat{\hat{\Psi}}^{(\alpha)}[{}^A W^Y_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta)]\,,$$
$$\alpha = 1,\ldots,N\,,\ \beta = \text{const}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant N\,.$$

Ces définitions prennent, à cause du corollaire 1.2, les formes

$$(2.3) \qquad {}_A N_{\alpha\beta} = {}_A N_{\alpha\beta}(X,t;\ Y,\tau) = N_{\alpha\beta} - \hat{\Psi}^{(\alpha)}({}_A P^{Y,\tau}_{\alpha\beta})$$
$$= \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{(M)} [A^{(M)}_{\alpha j}(X,t) - A^{(M)}_{\alpha j}(Y,\tau)] D^M[W^{Y,\tau}_{j\beta}(X,t;\ Y,\tau)] +$$
$$+ \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{0\leqslant k<M} A^{(k)}_{\alpha j}(X,t) D^k[{}_A W^{Y,\tau}_{j\beta}(X,t;\ Y,\tau)] + \frac{\partial {}_A P^{Y,\tau}_{\alpha\beta}}{\partial t}\,,$$

$$(2'.3) \qquad {}^A N_{\alpha\beta} = {}^A N_{\alpha\beta}(X,\ Y,\ \theta) = \hat{N}_{\alpha\beta} - \hat{\hat{\Psi}}^{(\alpha)}[{}^A P^Y_{\alpha\beta}]$$
$$= \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{(M)} [A^{(M)}_{\alpha j}(X) - A^{(M)}_{\alpha j}(Y)] D^M[\hat{W}^Y_{j\beta}(X,\ Y,\ \theta)] +$$
$$+ \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{0\leqslant k<M} A^{(k)}_{\alpha j}(X) D^k[{}^A W^Y_{j\beta}(X,\ Y,\ \theta)] + \frac{\partial {}^A P^Y_{\alpha\beta}}{\partial \theta}\,,$$

les sommes des formules (2.3) et (2'.3) étant étendues à toutes les suites $k = (k_1,\ldots,k_n)$, $k_1+\ldots+k_n = k$, $0 \leqslant k_i \leqslant k$. Ces formules remplacent la formule (89) du [2] — la définition du noyau: $N_{\alpha\beta}(X,t;\ Y,\tau)$.

Les matrices des solutions des systèmes (1.1) et (3.1) sont définies comme il suit. Pour le système (1.1) ce sont

$$(3.3)\quad {}_A\Gamma_{\alpha\beta} = {}_A\Gamma_{\alpha\beta}(X, t;\ Y, \tau) = {}_AW_{\alpha\beta}^{Y,\tau}(X, t;\ Y, \tau) + \int_\tau^t\int_{\Omega'} S({}_AW^{\Pi,\zeta}, {}_A\Phi)\,d\Pi\,d\zeta$$

où

$$(4.3)\quad S(f, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{N} f_{\alpha\nu}(X, t;\ \Pi, \zeta)\varphi_{\nu\beta}(\Pi, \zeta;\ Y, \tau)$$

et

$${}_A\Phi_{\alpha\beta} = {}_A\Phi_{\alpha\beta}(X, t;\ Y, \tau)$$

doit être la solution (voir (13.3)) du système d'équations intégrales

$$(5.3)\quad {}_A\Phi_{\alpha\beta} = {}_AN_{\alpha\beta}(X, t;\ Y, \tau) + \int_\tau^t\int_{\Omega'} S({}_AN, {}_A\Phi)\,d\Pi\,d\zeta\,,$$

$$\alpha = 1, \dots, N\,,\ \beta = \mathrm{const}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant N\,,$$

pour qu'on ait:

$$(5'.3)\quad \hat{\Psi}^{(\alpha)}[{}_A\Gamma_{\alpha\beta}(X, t;\ Y, \tau)] \equiv 0\,, \qquad \alpha = 1, \dots, N;\ \tau < t \leqslant T = \mathrm{const}.$$

Pour le système (3.1) on a

$$(3'.3)\quad {}^A\Gamma_{\alpha\beta} = {}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$$

$$= {}^AW_{\alpha\beta}^{Y}(X, Y, \theta) + \int_0^\theta\int_{\Omega'} s({}^AW^{\Pi}, {}^A\Phi)\,d\Pi\,d\zeta\,,\ \alpha, \beta = 1, \dots, N\,,$$

où

$$(4'.3)\quad s(f, \varphi) = \sum_{\nu=1}^{N} f_{\alpha\nu}(X, \Pi, \theta-\zeta)\varphi_{\nu\beta}(\Pi, Y, \zeta)$$

et

$$(4''.3)\quad {}^A\Phi_{\alpha\beta} = {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$$

est la solution (voir (13'.3)) du système d'équations intégrales

$$(5''.3)\quad {}^A\Phi_{\alpha\beta} = {}^AN_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) + \int_0^\theta\int_{\Omega'} s({}^AN, {}^A\Phi)\,d\Pi\,d\zeta$$

pour qu'on ait:

$$(5'''.3)\quad \hat{\hat{\Psi}}^{(\alpha)}[{}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)] \equiv 0\,,$$

$\alpha = 1, \dots, N$, $\beta = \mathrm{const}$, $1 \leqslant \beta \leqslant N$, $0 < \theta \leqslant \mathrm{const}$, $X \neq Y$, $X \in \Omega$, $Y \in \Omega'$.

Il résulte de l'hypothèse I, des limitations (8.2), (8'.2) pour $m = M$ et $1 - h_1/M < \mu < 1$, ainsi que des formules (9.2) et (9'.2) pour $0 \leqslant m < M$

et $1-h/M<\mu<1$ et des définitions (2.2) à (3'.2) que les singularités des noyaux (2.3) et (2'.3) sont faibles. Notamment on a

$$(6.3)\qquad |{}_{A}N_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau)|\leqslant \mathrm{const}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-[n-M(1-\mu)-h_1]}\,,$$
$$1-h_1/M<\mu<1\,,\quad t-\tau=\theta$$

et

$$(6'.3)\qquad |{}^{A}N_{\alpha\beta}(X,\,Y,\,\theta)|\leqslant \mathrm{const}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-[n-M(1-\mu)-h]}\,,\quad 1-h/M<\mu<1\,.$$

Il résulte aussi facilement de l'hypothèse I, des définitions (2.3), (2'.3) et (2.2) à (5'.2), et des inégalités (6.2) à (7'.2) que

$$(7.3)\qquad |{}_{A}N_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau)|\leqslant \mathrm{const}(t-\tau)^{-(1+1/M)}\,,\quad t-\tau>1$$

et

$$(7'.3)\qquad |{}^{A}N_{\alpha\beta}(X,\,Y,\,\theta)|\leqslant \mathrm{const}\,\theta^{-(1+1/M)}\,,\quad \theta>1\,.$$

En tenant compte des abréviations (4.3) et (4'.3), on trouve les noyaux itérés comme dans l'article [2] en écrivant

$$(8.3)\qquad {}_{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu+1)}={}_{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu+1)}(X,t;\,Y,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega'}S({}_{A}N,{}_{A}N^{(\nu)})\,d\Pi\,d\zeta\,,$$
$${}_{A}N_{\alpha\beta}^{(0)}={}_{A}N_{\alpha\beta}$$

et

$$(8'.3)\qquad {}^{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu+1)}={}^{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu+1)}(X,\,Y,\,\theta)=\int_{0}^{\theta}\int_{\Omega'}s({}^{A}N,{}^{A}N^{(\nu)})\,d\Pi\,d\zeta\,,$$
$${}^{A}N_{\alpha\beta}^{(0)}={}^{A}N_{\alpha\beta}\,.$$

On écrit pour les noyaux résolvants des systèmes (5.3) et (5'.3)

$$(9.3)\qquad {}_{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}={}_{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}_{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}\,,\quad \alpha,\beta=1,\dots,N$$

et

$$(9'.3)\qquad {}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}={}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,\,Y,\,\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}{}^{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}\,,\quad \alpha,\beta=1,\dots,N\,.$$

Alors on a

$$(9''.3)\qquad {}_{A}\Phi_{\alpha\beta}={}_{A}N_{\alpha\beta}+\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega'}S({}_{A}\mathfrak{N},{}_{A}N)\,d\Pi\,d\zeta={}_{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}$$

et

$$(9'''.3)\qquad {}^{A}\Phi_{\alpha\beta}={}^{A}N_{\alpha\beta}+\int_{0}^{\theta}\int_{\Omega'}s({}^{A}\mathfrak{N},{}^{A}N)\,d\Pi\,d\zeta={}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}\,.$$

En tenant compte des limitations (6.3) et (6'.3), on démontre qu'il existe un indice ν_0, à partir duquel tous les noyaux itérés (8.3) et (8'.3) sont bornés, à savoir

$$\sum_{\beta=1}^{N} |{}_A N_{\alpha\beta}^{(\nu)}| \leqslant A_0 = \mathrm{const}\,, \qquad \nu \geqslant \nu_0 \tag{10.3}$$

et

$$\sum_{\beta=1}^{N} |{}^A N_{\alpha\beta}^{(\nu)}| \leqslant A_0 = \mathrm{const}\,, \qquad \nu \geqslant \nu_0\,. \tag{10'.3}$$

De là et des limitations mentionnées il résulte (de même que dans l'article [2]) la convergence des séries (9.3) et (9'.3) dans le domaine Ω', $0 \leqslant t \leqslant T = \mathrm{const}$.

De même que dans l'article [2] on a les limitations

$$|{}_A\mathfrak{N}_{\alpha\beta}| = |{}_A\Phi_{\alpha\beta}| \leqslant \varphi^{te}(t-\tau)^{-\mu}|XY|^{-[n+M(1-\mu)-h_1]} \tag{11.3}$$

et

$$|{}^A\mathfrak{N}_{\alpha\beta}| = |{}^A\Phi_{\alpha\beta}| \leqslant \varphi^{te}\,\theta^{-\mu}|XY|^{-[n+M(1-\mu)-h]}\,. \tag{11'.3}$$

De là et des inégalités (9.2) et (9'.2) il résulte que les intégrales (3.3) et (3'.3) existent.

On démontre aussi que les noyaux et les solutions sont höldériens par rapport à la variable spatiale X. À savoir, on a pour chaque ensemble fermé $\Omega^* \in \Omega'$ les inégalités suivantes:

$$|{}_A N_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau) - {}_A N_{\alpha\beta}(X',t;\,Y,\tau)| \leqslant \begin{cases} \varphi^{te}|XX'|^{\eta h_1}/\inf|XY|^{n+M+1}, \\ \varphi^{te}|XX'|^{h_1}(t-\tau)^{-(1+1/M)}, \end{cases} \tag{12.3}$$

$$0<\eta<1\,,\quad 0<t-\tau\leqslant 1\,,\quad X,X'\in\Omega^*\,,\quad Y\in\Omega'-\Omega^*\,,\quad t-\tau\geqslant 1\,.$$

ainsi que

$$|{}^A N_{\alpha\beta}(X,Y,\theta) - {}^A N_{\alpha\beta}(X',Y,\theta)| \leqslant \begin{cases} \varphi^{te}|XX'|^{\eta h}/\inf|XY|^{n+M+1}, \\ \varphi^{te}|XX'|^{h}\,\theta^{-(1+1/M)}, \end{cases} \tag{12'.3}$$

$$0<\eta<1\,,\quad 0<\theta\leqslant 1\,,\quad X,X'\in\Omega^*,\quad Y\in\Omega'-\Omega^*\,,\quad \theta\geqslant 1\,.$$

et

$$|{}_A\Phi_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau) - {}_A\Phi_{\alpha\beta}(X',t;\,Y,\tau)| \leqslant \varphi^{te}|XX'|^{\eta h_1}/\inf|XY|^{n+M+1}\,, \tag{13.3}$$
$$0<\eta<1\,,\quad 0<t-\tau\leqslant 1,\quad X,X'\in\Omega^*,\quad Y\in\Omega'-\Omega^*\,,$$

ainsi que

$$|{}^A\Phi_{\alpha\beta}(X,Y,\theta) - {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X',Y,\theta)| \leqslant \varphi^{te}|XX'|^{\eta h}/\inf|XY|^{n+M+1}\,, \tag{13'.3}$$
$$0<\eta<1\,,\quad 0<\theta\leqslant 1\,,\quad X,X'\in\Omega^*\,,\quad Y\in\Omega'-\Omega^*\,.$$

On démontre facilement, comme dans l'article [1] ou [8], les inégalités suivantes:

(14.3) $$|_A N^{(\nu)}_{\alpha\beta}| \leqslant \mathrm{const}\,\theta^{-1-1/M}\,, \qquad t-\tau = \theta > 1\,,\ \nu = 0, 1, \ldots$$

(14′.3) $$|{}^A N^{(\nu)}_{\alpha\beta}| \leqslant \mathrm{const}\,\theta^{-1-1/M}\,, \qquad \theta > 1\,,\ \nu = 0, 1, \ldots$$

les constantes des seconds membres de ces inégalités n'étant pas indépendantes de l'indice ν.

4. Les intégrales des expressions du paragraphe 3. Les expressions (7′.3), (10′.3) et (14′.3) permettent d'affimer que les intégrales:

(1.4) $$\int\limits_0^\infty {}^A N^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)d\theta = {}^A n^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y) = {}^A n^{(\nu)}_{\alpha\beta}\,, \qquad {}^A n^{(0)}_{\alpha\beta} = {}^A n_{\alpha\beta}\,,$$
$$\alpha, \beta = 1, \ldots, N\,,$$

existent dès que $X \neq Y$ pour $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0 - 1$ et pour $\nu = \nu_0, \nu_0+1, \ldots$ elles sont bornées même si $X = Y$.

On démontrera que pour $X = Y$, $\nu = 0, \ldots, \nu_0 - 1$ leurs singularités sont faibles. En effet, on trouve en partant de $\nu = 0$ et des expressions (2′.3) et (17′.2) que

(2.4) $$|{}^A n_{\alpha\beta}(X, Y)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^{-n+h}$$

et

(2′.4) $$|{}^A n^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^{-n+a_\nu}\,, \qquad a_0 = h\,,\ a_{\nu+1} = a_\nu + h,$$

mais pour $\nu \geqslant \nu_0 > [n/h]$

(2″.4) $$|{}^A n^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y)| \leqslant \mathrm{const}\,, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, N\,.$$

On démontrera sans peine, comme dans l'article [1], la formule

(2‴.4) $${}^A n^{(\nu+1)}_{\alpha\beta} = \int\limits_{\Omega'} s({}^A n, {}^A n^{(\nu)})d\Pi\,, \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

où

(2^{IV}.4) $$s(f, \varphi) = \sum_{\gamma=1}^N f_{\alpha\gamma}(X, \Pi)\varphi_{\gamma\beta}(\Pi, Y)\,.$$

En effet

$$\begin{aligned}
{}^A n^{(\nu+1)}_{\alpha\beta} &= \int\limits_0^\infty {}^A N^{(\nu+1)}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)d\theta = \int\limits_0^\infty d\theta \int\limits_0^\theta\int\limits_{\Omega'} s({}^A N, {}^A N^{(\nu)})d\Pi d\zeta \\
&= \int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_\zeta^\infty d\theta \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^N {}^A N_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \theta-\zeta){}^A N^{(\nu)}_{\gamma\beta}(\Pi, Y, \zeta)d\Pi \\
&= \int\limits_0^\infty d\zeta \int\limits_0^\infty d\theta_1 \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^N {}^A N_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \theta_1){}^A N^{(\nu)}_{\gamma\beta}(\Pi, Y, \zeta)d\Pi \\
&= \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^N {}^A n_{\alpha\gamma}(X, \Pi){}^A n^{(\nu)}_{\gamma\beta}(\Pi, Y)d\Pi = {}^A n^{(\nu+1)}_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

La sommation formelle des noyaux itérés (2‴.4) permet d'ecrire

$$ {}^{A}m_{\alpha\beta} = {}^{A}m_{\alpha\beta}(X, Y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{A}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y) . \tag{3.4} $$

De même on introduit la fonction

$$ {}^{A}\varphi_{\alpha\beta}(X, Y) = {}^{A}n_{\alpha\beta}(X, Y) + \int_{\Omega'} s({}^{A}m, {}^{A}n)\, d\Pi . \tag{4.4} $$

Pour avoir la série (3.4) convergente on admettra les hypothèses complémentaires III et IV (au par. 7) et on introduira les fonctions dominantes (au par. 5 et 6).

5. Les fonctions dominantes. Observons que les polynômes (3.2) et (3′.2) sont, par rapport à la variable $|X-Y-A|$, d'ordre $M-n$. C'est pourquoi nous avons les formules

$$ D^{k\,A}W_{\alpha\beta}^{Z} = D^{k}\hat{W}_{\alpha\beta}^{Z} \qquad \text{et} \qquad D^{k}{}_{A}W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta} = D^{k}W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta} $$

dès que $k > M-n$.

Les dominantes des dérivées d'ordre $k > M-n$ des quasi-solutions (4.2) et (4′.2) sont les mêmes que dans l'article [1] ou [8]. A savoir on pose sur tout l'axe positif

$$ ({}^{1}W_{\alpha\beta}^{Z})_{k} = C_{k}\theta^{-(n+k)/M}\exp[-c_{k}(|XY|/\theta^{1/M})^{q}] , \qquad q = M/(M-1) , \tag{1.5} $$

où les constantes positives C_k et c_k sont convenablement choisies (on les trouve par exemple dans les formules (33), [2]).

Si $k \leqslant M-n$ on peut écrire (voir [4])

$$ \begin{aligned} D^{k\,A}W_{\alpha\beta}^{Z} & \\ = D^{k}\hat{W}_{\alpha\beta}^{Z} - \sum_{p=0}^{M-n-k} \frac{1}{p!}\Big[(x_1-y_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n-y_n-a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\Big]^{(p)} & \times \\ \times D^{k}\hat{W}_{\alpha\beta}^{Z}(X, Y, \theta)|_{X-Y=A} . & \end{aligned} \tag{2.5} $$

Il est donc naturel de définir, comme dominante de cette fonction pour $0 < \theta \leqslant 1$, la fonction

$$ \begin{aligned} ({}^{1}W_{\alpha\beta})_{k} = {} & C_{k}\theta^{-(n+k)/M}\exp[-c_{k}(|XY|/\theta^{1/M})^{q}] + \\ & + \sum_{p=0}^{M-n-k} n^{p}C_{k+p}/p!\,|X-Y-A|^{p}\,\theta^{-(n+k+p)/M}\exp[-c_{k+p}(|A|/\theta^{1/M})^{q}] , \\ & q = M/(M-1) . \end{aligned} \tag{3.5} $$

Mais comme le dernier terme reste borné pour chaque valeur de θ, on peut écrire pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$(3'.5)\qquad ({}^{|}W_{\alpha\beta})_k = C_k\theta^{-(n+k)/M}\exp[-c_k(|XY|/\theta^{1/M})^q] + \sum_{p=0}^{M-n-k} c^*_{k+p}|X-Y-A|^p\,,$$

où $c^*_{k+p} > 0$, est constant.

Pour $\theta > 1$ et $k \leqslant M-n$ on trouvera, à cause de (2.5)

$$(4.5)\qquad ({}^{|}W_{\alpha\beta})_k = C^{**}_k|X-Y-A|^{M-n-k+1}\,\theta^{-(1+1/M)}\,,\qquad \theta > 1;\ k \leqslant M-n\,,\ C^{**}_k > 0\,.$$

Remarque 1.5. Les dominantes (1.5), (3'.5) et (4.5) sont les mêmes pour les dérivées $D^k({}^AW^Z_{\alpha\beta})$ et $D^k({}_AW^{Z,\zeta}_{\alpha\beta})$.

On a supposé les coefficients du système (1.1), ainsi que le domaine Ω' bornés, on peut donc écrire comme dominantes pour les noyaux ${}_AN_{\alpha\beta}$ et ${}^AN_{\alpha\beta}$ les fonctions qui suivent:

1) $\theta \geqslant 1$:

$$(5.5)\qquad {}^{|}N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = C\theta^{-(1+1/M)}\,,\qquad \theta \geqslant 1;\ X\in\Omega\,,\ Y\in\Omega'$$

$C > 0$ est une constante convenablement choisie;

2) $0 < \theta < 1$:

$$(6.5)\qquad {}^{|}N_{\alpha\beta} = {}^{|}N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = C\theta^{-[1+(n-k)/M]}\exp[-c(|XY|/\theta^{1/M})^q]\,,\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1\,,\ c > 0\,,\ C > 0\,.$$

Il résulte des formules (6.5) et (5.5) que les noyaux $N^{(\nu)}_{\alpha\beta}$ sont définis aussi bien que dans l'article [1] ou [8] et on peut écrire, pour θ borné, comme dominantes des noyaux résolvants (9.3) et (9'.3) les fonctions

$$(7.5)\qquad {}^{|}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{|}N^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta);\qquad {}^{|}N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = {}^{|}N^{(0)}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)\,,\qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, N\,.$$

On a aussi comme dans (10'.3)

$$(8.5)\qquad {}^{|}N^{(\nu)}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \text{const}\,,\qquad \nu > \nu_0\,.$$

La dominante pour ${}_A\Phi_{\alpha\beta}$ et ${}^A\Phi_{\alpha\beta}$ (voir (5.3) et (5''.3)) est la fonction:

$$(9.5)\qquad {}^{|}\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = {}^{|}N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) + \int_0^\theta\int_{\Omega'} s({}^{|}\mathfrak{N}, {}^{|}N)\,d\Pi\, d\zeta = {}^{|}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}\,,\qquad X \neq Y$$

avec les mêmes singularités que a la fonction ${}^{|}N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$.

6. Les intégrales de la dominante $|N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$ sur l'axe positif du temps. Il résulte des définitions (6.5) et (5.5) de la dominante $|N_{\alpha\beta}$ qu'elle est intégrable sur l'axe positif du temps

$$(1.6)\qquad |n_{\alpha\beta} = |n_{\alpha\beta}(X, Y) = \int_0^\infty |N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)d\theta$$
$$= \int_0^1 |N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)d\theta + \int_1^\infty |N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)d\theta, \qquad X \neq Y .$$

Sa limitation est la suivante:

$$(2.6)\qquad ||n_{\alpha\beta}(X, Y)| \leqslant \mathrm{const}\,|XY|^{-n+h}$$

comme dans l'inégalité (2.4). Par suite en formant les noyaux itérés $|n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y)$ on retrouve les mêmes limitations qu'au par. 4. Ainsi on arrivera à un indice ν_0 tel que

$$(3.6)\qquad 0 < |n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y) \leqslant \mathrm{const}\,, \qquad \nu \geqslant \nu_0 .$$

On peut écrire comme au par. 4

$$(4.6)\qquad n_{\alpha\beta}^{(\nu_0+k+1)}(X, Y) = \int_{\Omega'} s(|n^{(k)}, |n^{(\nu_0)})d\Pi\,, \qquad k = 0, 1, \ldots;\ |n^{(0)} = |n .$$

En sommant formellement les noyaux itérés on obtient le noyau

$$(5.6)\qquad |m_{\alpha\beta}(X, Y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y)\,, \qquad X \neq Y\,,\ X \in \Omega\,,\ Y \in \Omega'$$

qui est la fonction dominante des deux intégrales des noyaux résolvants (11.3) et (11'.3). Pour obtenir la série (5.6) convergente on fera intervenir des hypothèses supplémentaires.

7. Hypothèses supplémentaires. La discontinuité de la fonction $|n_{\alpha\beta}(X, Y)$ est faible par rapport à la variable spatiale, c'est pourquoi l'intégrale

$$\int_{\Omega'} |n_{\alpha\beta}(X, Y)dY$$

est arbitrairement petite avec la mesure du domaine Ω'.

Hypothèse III. On suppose le domaine Ω' assujetti à l'inégalité suivante:

$$(1.7)\qquad \sum_{\beta=1}^{N} |J_{\alpha\beta}(X, \theta) = \int_0^\theta \int_{\Omega'} \sum_{\beta=1}^{N} |N_{\alpha\beta}(X, Y, \zeta)dY d\zeta \leqslant b < 1\,,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \infty\,,\ X \in \Omega\,,\ a = 1, \ldots, N .$$

Le lemme 1.4 et la formula (10.4) de l'article [1] restent valables, à cause des limitations du par. 5 et de l'hypothèse III. Ainsi on a

LEMME 1.7. *Il résulte des hypothèses de* I-III *que séries* (6.3) *et* (7.5) *sont uniformément convergentes par rapport à θ pour $X \neq Y$, et que les intégrales*

$$(2.7) \qquad {}^{A}J_{\alpha\beta}(X,\theta) = \int_0^\theta \int_{\Omega'} |{}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta')|\,dY\,d\theta', \qquad \alpha,\beta = 1,\dots,N\,,$$

et

$$(3.7) \qquad {}^{I}J_{\alpha\beta}(X,\theta) = \int_0^\theta \int_{\Omega'} {}^{I}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta')\,dY\,d\theta', \qquad \alpha,\beta = 1,\dots,N$$

existent uniformément pour chaque $\theta > 0$.

De même le corollaire 1.4, [1], subsistera sous la forme du

COROLLAIRE 1.7. *Il résulte des hypothèses* I-III *qu'on a pour chaque $\theta > T$*

$${}^{A}J_{\alpha\beta}(X,\theta,T) = \int_T^\theta \int_{\Omega'} |{}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta')|\,dY\,d\theta' \to 0\,, \qquad T \to \infty$$

et

$${}^{I}J_{\alpha\beta}(X,\theta,T) = \int_T^\theta \int_{\Omega'} {}^{I}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta')\,dY\,d\theta' \to 0\,, \qquad T \to \infty\,.$$

8. La convergence des séries (3.4) et (5.6).

THÉORÈME 1.8. *Des hypothèses il* I-III *résulte la convergence de la série*

$$(1.8) \qquad {}^{A}m_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{A}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X,Y)\,, \qquad X \neq Y;$$

la fonction est à singularités faibles et elle est intégrable dans Ω'.

Démonstration. On introduit les dominantes du par. 6

$$(2.8) \qquad {}^{I}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X,Y) = \int_0^\infty {}^{I}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X,Y,\theta)\,d\theta\,.$$

Nous savons que

$$(3.8) \qquad {}^{I}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta) = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^{I}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X,Y,\theta) + \int_0^\theta d\zeta \int_{\Omega'} s({}^{I}\mathfrak{N}, {}^{I}N^{(\nu_0)})\,d\Pi$$

d'où

$$(4.8) \quad \int_0^\infty {}^{I}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,Y,\theta)\,d\theta = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^{I}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X,Y) + \lim_{K\to\infty} \int_0^K d\theta \int_0^\theta d\zeta \int_{\Omega'} s({}^{I}\mathfrak{N}, {}^{I}N^{(\nu_0)})\,d\Pi\,.$$

L'intégrale sous le signe de la limite, désignée par j_K, sera bornée.

Ecrivons en effet cette intégrale comme il suit

$$(5.8)\qquad 0 \leqslant j_K = \int\limits_0^K d\zeta \int\limits_\zeta^K d\theta \int\limits_{\Omega'} s({}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}, {}^{\mathrm{I}}N^{(\nu_0)}) d\Pi$$

$$= \int\limits_0^K d\zeta \int\limits_0^{K-\zeta} d\theta_1 \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}(X, \Pi, \theta_1) {}^{\mathrm{I}}N^{(\nu_0)}(\Pi, Y, \zeta) d\Pi\,.$$

Alors

$$0 \leqslant j_K \leqslant \sum_{\gamma=1}^{N} \int\limits_0^K \max_{\Pi, Y\in\Omega'} {}^{\mathrm{I}}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi, Y, \zeta) d\zeta \int\limits_0^\infty d\theta_1 \int\limits_{\Omega'} {}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \theta_1) d\Pi\,.$$

Le lemme 1.7 et les inégalités (5.5) et (8.5) donnent

$$(6.8)\qquad 0 \leqslant j_K \leqslant \text{const}\,.$$

On a donc démontré que l'intégrale (4.8) existe.

On démontrera ensuite qu'on a, à cause de la définition (5.6), la formule

$$(7.8)\qquad \int\limits_0^\infty {}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{\mathrm{I}}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y) = {}^{\mathrm{I}}m_{\alpha\beta}(X, Y)\,.$$

En effet, on a pour K et K_0 positifs quelconques et pour $X \neq Y$

$$(8.8)\qquad \sum_{\nu=0}^{K_0} \int\limits_0^K {}^{\mathrm{I}}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y, \theta) d\theta \leqslant \int\limits_0^K {}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta \leqslant \text{const}\,, \qquad X \neq Y\,.$$

Mais les fonctions intégrées sont non négatives; on a donc pour chaque K_0 positif

$$\sum_{\nu=0}^{K_0} \int\limits_0^\infty {}^{\mathrm{I}}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y, \theta) d\theta = \sum_{\nu=0}^{K_0} {}^{\mathrm{I}}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y) \leqslant \text{const}$$

d'où il résulte la convergence de la série

$$(9.8)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} {}^{\mathrm{I}}n_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y) = {}^{\mathrm{I}}m_{\alpha\beta}(X, Y)\,, \qquad X \neq Y$$

ce qui démontre l'égalité (7.8).

On a comme conséquence des inégalités (8.8) et (4.5) l'égalité

$$(10.8)\qquad \int\limits_0^\infty \int\limits_{\Omega'} {}^{\mathrm{I}}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) dY d\theta = \sum_{K=0}^{\infty} \int\limits_{\Omega'} {}^{\mathrm{I}}n_{\alpha\beta}^{(K)}(X, Y) dY = \int\limits_{\Omega'} {}^{\mathrm{I}}m_{\alpha\beta}(X, Y) dY\,,$$

car les termes de la première somme de (10.8) (voir (2.6) et (3.6)) ainsi que la fonction ${}^{\mathrm{I}}m_{\alpha\beta}(X, Y)$ (voir (9.8), (4.8) et (6.8)) n'ont que des singularités faibles. Le théorème 1.8 est démontré.

En outre on a l'égalité:

$$\int_0^\infty d\theta \int_{\Omega'} {}^A\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) dY = \int_{\Omega'} {}^A m_{\alpha\beta}(X, Y) dY . \tag{11.8}$$

9. Propriétés des fonctions

$$ {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) \quad \text{et} \quad \varphi_b = \int_b^\infty {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta \tag{1.9}$$

THÉORÈME 1.9. *Des hypothèses* I-III *il résulte la formule*

$$\int_0^\infty {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta = {}^A n_{\alpha\beta}(X, Y) + \int_0^\infty d\theta \int_0^\theta d\zeta \int_{\Omega'} s({}^A N, {}^A\Phi) d\Pi . \tag{2.9}$$

Démonstration. On a d'une part la formule (9''.3), donc

$$\int_0^\infty {}^A\Phi(X, Y, \theta) d\theta = \int_0^\infty {}^A\mathfrak{N}(X, Y, \theta) d\theta , \quad s({}^A N, {}^A\Phi) = s({}^A N, {}^A\mathfrak{N}) , \tag{3.9}$$

et

$$\int_0^\infty d\theta \int_0^\theta d\zeta \int_{\Omega'} s({}^A N, {}^A\mathfrak{N}) d\Pi = \int_0^\infty [{}^A\mathfrak{N}(X, Y, \theta) - {}^A N(X, Y, \theta)] d\theta . \tag{3'.9}$$

En outre on a le théorème 1.8, ce qui permet de démontrer l'identité (2.9). On a en même temps démontré que

$$ {}^A\varphi_{\alpha\beta}(X, Y) = \int_0^\infty {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta = {}^A m_{\alpha\beta}(X, Y) \tag{4.9}$$

(voir les théorèmes 1.8 et 2.9).

Comme conséquence des formules (4.9), (3.9) et du théorème 1.8 on a le

THÉORÈME 2.9. *Les hypothèses* I-III *donnent les formules*

$$ {}^A\varphi_{\alpha\beta}(X, Y) = {}^A n_{\alpha\beta}(X, Y) + \int_{\Omega'} s({}^A n, {}^A m) d\Pi \tag{4'.9}$$

ou

$$ {}^A\varphi_{\alpha\beta}(X, Y) = {}^A n_{\alpha\beta}(X, Y) + \int_{\Omega'} s({}^A n, {}^A \varphi) d\Pi , \tag{4''.9}$$

ce qui démontre que la fonction ${}^A\varphi_{\alpha\beta}(X, Y)$ *est solution du système d'équations intégrales* (4''.9).

La démonstration de la formule (4'.9) est immédiate.

Admettons maintenant

Hypothèse IV. Les coefficients du système (1.1) et le domaine d'intégration Ω' sont assujettis aux inégalités suivantes:

$$(5.9)\quad \int_0^\theta \int_{\Omega'} \sum_{\beta=1}^{N} |N_{\beta\alpha}(X, Y, \zeta) dX d\zeta \leqslant b < 1, \quad \alpha = 1, \dots, N; \ \theta \geqslant 0, \ Y \in \Omega'.$$

Le lemme 1.7 prendra la forme

Lemme 1.9. *Il résulte des hypothèses* I, II *et* IV *que les intégrales*

$$(6.9)\quad {}_A i_{\alpha\beta}(Y, t, \tau) = \int_\tau^t \int_{\Omega'} |{}_A\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, \zeta; Y, \tau)| dX d\zeta, \qquad t-\tau = \theta, \ Y \in \Omega'$$

et

$$(6'.9)\quad i_{\alpha\beta}(Y, \theta) = \int_0^\theta \int_{\Omega'} \mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \zeta) dX d\zeta$$

existent uniformément pour chaque $\theta > 0$, $\alpha, \beta = 1, \dots, N$.

Lemme 2.9. *Il résulte des hypothèses* I-IV *que l'intégrale* φ_1 *est höldérienne par rapport à la variable spatiale* X.

En effet, on a, en partant de la définition (1.9)

$$(7.9)\quad \varphi_1 = \int_1^\infty {}^A\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta$$

et des définitions (5''.3) et (4'.3)

$$(7'.9)\quad \varphi_1 = \int_1^\infty {}^A N_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) d\theta + \int_1^\infty d\theta \int_0^\theta s({}^A N, {}^A\mathfrak{N}) d\Pi d\zeta = i_1 + i_2.$$

Il résulte de la formule (12'.3) que

$$(8.9)\quad |i_1(X, Y) - i_1(X', Y)| \leqslant \text{const}\,|XX'|^h.$$

Le terme i_2 sera aussi höldérien. En effet, on peut poser

$$(9.9)\quad i_2 = \int_1^\infty d\theta \int_0^\theta \int_{\Omega'} s\Big({}^A N, \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^A N^{(\nu)}\Big) d\Pi d\zeta + \\ + \int_1^\infty d\theta \int_0^\theta \int_{\Omega'} s\Big({}^A N, \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} {}^A N^{(\nu)}\Big) d\Pi d\zeta = i_3 + i_4.$$

En transformant i_4 on obtient

$$(9'.9)\quad i_4 = \int_1^\infty d\theta \int_0^\theta \int_{\Omega'} s({}^A N^{(\nu_0+1)}, {}^A\mathfrak{N}) d\Pi d\zeta$$

et en changeant l'ordre d'intégration dans (9'.9) on a

$$(9''.9)\qquad |i_4(X, Y)-i_4(X', Y)|$$
$$\leqslant \int\limits_0^\infty du \int\limits_0^\infty d\theta \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} |{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}^{(\nu_0+1)}(X, \Pi, u)-{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}^{(\nu_0+1)}(X', \Pi, u)|{}^{\mathcal{A}}\mathfrak{N}_{\gamma\beta}(\Pi, Y, \theta)d\Pi .$$

Posons

$$(10.9)\qquad \varrho = {}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}^{(\nu_0+1)}(X, \Pi, u)-{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}^{(\nu_0+1)}(X', \Pi, u)$$
$$= \int\limits_0^u \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} [{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta')-{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')]{}^{\mathcal{A}}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, \theta')d\Pi_1 d\theta' .$$

La fonction ${}^{\mathcal{A}}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, \theta')$ est bornée (voir (10'.3)); elle est soumise à l'inégalité (14.3), pour $\theta' > 1$. En outre on peut écrire en tenant compte des formules (2'.3), (16.2)

$$(10'.9)\qquad {}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta')-{}^{\mathcal{A}}N_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')$$
$$= \hat{N}_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta')-\hat{N}_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')-$$
$$-[\hat{\hat{\psi}}{}_X^{(\alpha)}\,{}^{\mathcal{A}}P_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta')-\hat{\hat{\psi}}{}_{X'}^{(\alpha)}\,{}^{\mathcal{A}}P_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')] .$$

On peut donc représenter la fonction ϱ, pour $u < 1$, comme somme des intégrales suivantes:

$$(10''.9)\qquad \varrho_1 = \int\limits_0^u \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} [\hat{N}_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta')-$$
$$-\hat{N}_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')]{}^{\mathcal{A}}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, \theta')d\Pi_1 d\theta'$$

et

$$(10'''.9)\qquad \varrho_2 = \int\limits_0^u \int\limits_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} [\hat{\hat{\Psi}}{}_X^{(\alpha)} P_{\alpha\gamma}^{\mathcal{A}}(X, \Pi_1, u-\theta')-$$
$$-\hat{\hat{\Psi}}{}_{X'}^{(\alpha)}\,{}^{\mathcal{A}}P_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')]{}^{\mathcal{A}}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, \theta')d\Pi_1 d\theta'$$

de sorte que

$$(10^{\mathrm{IV}}.9)\qquad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

Dans le cas où $u \leqslant 1$ l'évaluation de l'intégrale (10''.9) se fait comme dans l'article de M. W. Pogorzelski [7], formule (115). La fonction à intégrer dans (10'''.9) est à trouver dans les formules (3.1), (1'.2)-(3'.2). On a donc

$$(11.9)\qquad |\varrho| \leqslant \mathrm{const}\,|XX'|^{h^*} , \quad 0 \leqslant h^* < h , \ u \leqslant 1 .$$

Pour $u \geqslant 1$ on transforme l'accroissement ϱ en somme de deux intégrales:

$$\varrho = \int_0^{u/2} \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} [{}^{A}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, u-\theta') -$$
$$- {}^{A}N_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, u-\theta')] {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, \theta') d\Pi_1 d\theta' +$$
$$+ \int_0^{u/2} \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} [{}^{A}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi_1, \theta') -$$
$$- {}^{A}N_{\alpha\gamma}(X', \Pi_1, \theta')] {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi_1, \Pi, u-\theta') d\Pi_1 d\theta' .$$

Quant à la première intégrale on lui applique les limitations (12'.3). Elle ne surpasse donc pas:

$$\varphi^{te} \, |XX'|^{h} u^{-(1+1/M)} .$$

Pour évaluer la seconde intégrale on traite séparément le cas où $0 < \frac{1}{2}\theta' < \frac{1}{2}$, et le cas où $\theta' > \frac{1}{2}$. Le premier cas mène à la même limitation que plus haut (formules (10'.9) à (11.9)). Le second cas se traite en appliquant deux fois la seconde des inégalités (12'.3). On trouve ainsi la limitation suivante de l'accroissement ϱ, pour $u \geqslant 1$

$$(11'.9) \qquad |\varrho| \leqslant \varphi^{te}[|XX'|^{h} u^{-(1+1/M)} + |XX'|^{h^*} u^{-(1+1/M)}] , \qquad u \geqslant 1 .$$

L'inégalité (9''.9) peut être transformée grâce aux inégalités (11'.9) et (11.9) comme il suit:

$$(12.9) \qquad |i_4(X, Y) - i_4(X', Y)|$$
$$\leqslant \varphi^{te} \sum_{\gamma=1}^{N} \int_0^{\infty} d\theta \int_{\Omega'} {}'\mathfrak{N}(\Pi, Y, \theta) d\Pi |XX'|^{h^*} \Big(\int_0^1 du + \int_1^{\infty} du/u^{1+1/M}\Big)$$
$$\leqslant \text{const} \, |XX'|^{h^*}$$

car on a le lemme (1.9) et on a admis l'hypothèse IV.

Evaluons maintenant l'intégrale intérieure du terme i_3, en l'écrivant

$$i_3 = \int_0^{\theta/2} \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \theta-\zeta) \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu)}(\Pi, Y, \zeta) d\Pi d\zeta +$$
$$+ \int_0^{\theta/2} \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}N_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \zeta) \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu)}(\Pi, Y, \theta-\zeta) d\Pi d\zeta , \qquad \theta \geqslant 1 .$$

La première de ces intégrales est höldérienne, à cause de la formule (12'.3). L'accroissement est multiplié par $\theta^{-(1+1/M)}$ et par un facteur majorisé par:

$$\varphi^{te} \sum_{\gamma=1}^{N} \sum_{\nu=0}^{\nu_0} \int_0^{\infty} \int_{\Omega'} |{}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu)}(\Pi, Y, \zeta)| d\Pi d\zeta \leqslant \text{const} .$$

La seconde intégrale est traitée comme la somme de deux intégrales pour $0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{1}{2}$ et pour $\frac{1}{2} \leqslant \zeta \leqslant \frac{1}{2}\theta$, $\theta > 1$. La première est höldérienne comme les intégrales évaluées par les formules (10″.9) à (11.9), multipliées par le facteur $\theta^{-(1+1/M)}$. La seconde est höldérienne en vertu de (12′.3), avec les facteurs

$$\text{const}\, \theta^{-(1+1/M)} \int_{1/2}^{\theta/2} d\zeta/\zeta^{1+1/M} \leqslant \text{const}\, \theta^{-(1+1/M)} .$$

Finalement on a, pour i_3 l'inégalité suivante:

$$|i_3(X, Y) - i_3(X', Y)| \leqslant \varphi^{te} |XX'|^{h^*} \int_1^{\infty} d\theta/\theta^{1+1/M} = \text{const}\, |XX'|^{h^*} . \tag{12′.9}$$

On a donc démontré pour l'intégrale $\varphi_1(X, Y)$ l'inégalité

$$|\varphi_1(X, Y) - \varphi_1(X', Y)| \leqslant \text{const}\, |XX'|^{h^*} \tag{13.9}$$

(voir (12′.9), (12.9), (8.9) et (9.9)), c.q.f.d.

LEMME 3.9. *Il résulte des hypothèses* I-III *que l'intégrale*

$$\Psi_{\alpha\beta}(X, Y) = \int_0^1 {}^{A}\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)\, d\theta , \qquad X \in \Omega_1 = \bar{\Omega}_1 \subset \Omega; \;\; Y \in \Omega' - \Omega_1 \tag{14.9}$$

est höldérienne par rapport à la variable spatiale $X \in \Omega_1$ et admet des discontinuités faibles par rapport à $(X, Y) \in \Omega'$.

La dernière proposition résulte des formules (9‴.3) et (11′.3), la première découle de la formule (13′.3).

LEMME 4.9. *Il résulte des hypothèses* I-III *que*

$${}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = {}^{A}\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) \to 0 , \quad {}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) \to 0 , \quad \theta \to \infty .$$

On a en effet

$${}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} {}^{A}N_{\alpha\beta}^{(\nu)}(X, Y, \theta) + \int_0^{\theta} d\zeta \int_{\Omega'} s({}^{A}\mathfrak{N}, {}^{A}N^{(\nu_0)})\, d\Pi . \tag{14.9}$$

En désignant le second terme par j on trouve

$$\begin{aligned} j = & \int_0^{\theta/2} d\zeta \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \zeta)\, {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi, Y, \theta-\zeta)\, d\Pi + \\ & + \int_{\theta/2}^{\theta} d\zeta \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}\mathfrak{N}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, \zeta)\, {}^{A}N_{\gamma\beta}^{(\nu_0)}(\Pi, Y, \theta-\zeta)\, d\Pi . \end{aligned} \tag{14′.9}$$

Les premiers termes des sommes (14.9) et (14'.9) convergent vers zéro, avec $\theta\to\infty$, a cause de l'inégalité (14'.3) et du lemme 1.7. Le second terme de la somme (14'.9) converge vers zéro, avec $\theta\to\infty$, à cause de la définition de l'indice ν_0 et du corollaire 1.7.

En ce qui concerne la limite de la fonction ${}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$, il suffit de calculer

$$\int_0^\theta\int_{\Omega'}|s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)|\,d\Pi\,d\zeta=\int_0^{\theta/2}\int_{\Omega'}|s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)|\,d\Pi\,d\zeta+\int_{\theta/2}^{\theta}\int_{\Omega'}|s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)|\,d\Pi\,d\zeta$$

$$\leqslant\varphi^{te}\int_0^\infty\int_{\Omega'}|{}^{A}\Phi|\,d\Pi\,d\zeta\,\theta^{-(1+1/M)}+\max_{|\zeta|>\theta/2}|{}^{A}\Phi(\Pi, Y,\zeta)|\int_0^\infty\int_{\Omega'}|{}^{A}W^{\Pi}|\,d\Pi\,d\zeta\to 0\,,$$
$$\theta\to\infty\,.$$

10. Propriétés de l'intégrale

$$\text{(1.10)}\qquad \int_0^\infty {}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)\,d\theta={}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y);\qquad X\neq Y$$

THÉORÈME 1.10. *Il résulte des hypothèses* I-III *que l'intégrale* (1.10) *existe.*

Démonstration. On a d'après les définitions (3'.3) et (4'.3)

$$\text{(2.10)}\qquad {}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y)=\int_0^\infty {}^{A}W^{Y}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)\,d\theta+\int_0^\infty d\theta\int_0^\theta\int_{\Omega'} s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)\,d\Pi\,d\zeta\,,$$
$$\alpha,\beta=1,\dots,N\,.$$

Mais la première intégrale (2.10) existe (lemme 1.2). Il suffit de démontrer l'existence de l'intégrale

$$i=\int_0^\infty d\theta\int_0^\theta d\zeta\int_{\Omega'} s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)\,d\Pi\,d\zeta$$
$$=\int_0^\infty d\zeta\int_\zeta^\infty d\theta\int_{\Omega'} s({}^{A}W^{\Pi},{}^{A}\Phi)\,d\Pi\,d\zeta$$
$$=\int_0^\infty d\zeta\int_0^\infty d\theta_1\int_{\Omega'}\sum_{\gamma=1}^{N}{}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\gamma}(X,\Pi,\theta_1){}^{A}\Phi(\Pi, Y,\zeta)\,d\Pi\,.$$

Nous avons, à cause des formules (12'.2) et (4.9), l'égalité suivante

$$i=\int_{\Omega'}\sum_{\gamma=1}^{N}{}^{A}w^{\Pi}_{\alpha\gamma}(X,\Pi){}^{A}\varphi_{\gamma\beta}(\Pi, Y)\,d\Pi=\int_{\Omega'} s({}^{A}w^{\Pi},{}^{A}\varphi)\,d\Pi$$

car les fonctions intégrées n'admettent que des discontinuités faibles, (17'.2), (4.9), (1.8) et (2.4). Comme conséquence nous pouvons écrire

$$(3.10) \qquad {}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y) = {}^{A}w^{Y}_{\alpha\beta}(X, Y) + \int_{\Omega'} s({}^{A}w^{\Pi}, {}^{A}\varphi)\, d\Pi ,$$

c.q.f.d.

Posons maintenant

$$(4.10) \qquad \psi^{(a)}_{X}(u) = \psi^{(a)}(u) = \sum_{1\leqslant j\leqslant N}^{0\leqslant k\leqslant M} A^{(k)}_{aj}(X) D^{(k)} u_j = 0 , \qquad a = 1, \ldots, N ,$$

$\psi^{(a)}(u)$ sera dit opération elliptique selon (11'.2) et on peut écrire

$$(5.10) \qquad \psi^{(a)}_{X}(u) = \hat{\Psi}^{(a)}_{X,\theta}(u) + \frac{\partial u_a}{\partial \theta} , \qquad a = 1, \ldots, N .$$

Appliquons l'opération (4.10) à la fonction (3.10) pour $X \neq Y$. Cette opération peut être introduite sous le signe de l'intégrale du premier terme de la fonction (4.10), car cette opération n'augmente pas la singularité à l'infini ($\theta \to \infty$); le point $\theta = 0$ n'est pas singulier pour $X \neq Y$. Désignons le second terme de la somme (3.10) par $\overline{w}_{\alpha\beta}$ et considérons l'opération $\psi^{(a)}_{X}(\overline{w}_{\alpha\beta})$; on a

$$\psi^{(a)}_{X}(\overline{w}_{\alpha\beta}) = \psi^{(a)}_{X}\Big[\int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_{\Omega} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, v)\, {}^{A}\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, Y, u)\, d\Pi\Big] .$$

On peut faire entrer l'opération $\psi^{(a)}$ sous le signe de l'intégrale dans le cas où $v > 1$, car alors les dérivées de la quasi-solution ${}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\gamma}$ restent bornées et intégrables, et nous avons le lemme 1.9 et l'égalité (9'''.3).

Si $v < 1$ et $u < 1$, on peut introduire l'opération $\psi^{(a)}$ sous le signe de l'intégrale à cause du lemme 3.9, de la définition (4'.2) et des résultats de l'article [2], théorème 3.

Il reste à examiner l'intégrale

$$\begin{aligned} J &= \int_1^\infty du \int_0^1 dv \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, v)\, {}^{A}\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, Y, u)\, d\Pi \\ &= \int_0^1 dv \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\gamma}(X, \Pi, v) \int_1^\infty {}^{A}\Phi_{\gamma\beta}(\Pi, Y, u)\, du\, d\Pi \\ &= \int_0^1 dv \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}W^{\Pi}_{\alpha\beta}(X, \Pi, v)\, \varphi_1(\Pi, Y)\, d\Pi . \end{aligned}$$

Mais, grâce au lemme 2.9, nous savons que la fonction $\varphi_1(\Pi, Y)$ est höldérienne par rapport à Π. L'opération $\psi^{(a)}$ peut être introduite sous le signe de l'intégrale J (voir l'article [2], théorème 3). Nous avons donc

$$\psi_X^{(a)}(\overline{w}_{a\gamma}) = \int_0^\infty dv \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^N \psi_X^{(a)}[{}^A W_{a\gamma}^\Pi(X, \Pi, v)]^A\varphi(\Pi, Y)d\Pi$$

et

$$\psi_X^a({}^A\Gamma_{a\beta})$$
$$= \int_0^\infty \psi_X^{(a)}[{}^A W_{a\beta}^Y(X, Y, \theta)]d\theta + \int_0^\infty dv \int_{\Omega'} \sum_{\gamma=1}^N \psi_X^{(a)}[{}^A W_{a\gamma}^\Pi(X, \Pi, v)]^A\varphi(\Pi, Y)d\Pi .$$

En revenant à (2.10), nous trouvons, toujours pour $X \neq Y$,

$$\psi_X^{(a)}({}^A\Gamma_{a\beta}) = \int_0^\infty \psi_X^{(a)}[{}^A\Gamma_{a\beta}^Y(X, Y, \theta)]d\theta$$

or si l'on applique l'égalité formelle (5.10) et la formule (5‴.3) on peut écrire

$$\psi_X^{(a)}({}^A\Gamma_{a\beta}) = \int_0^\infty \hat{\hat{\Psi}}_{X,\theta}[{}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y, \theta)]d\theta + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\theta}[{}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y, \theta)]d\theta$$
$$= {}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y, \theta)\Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} .$$

Mais nous savons d'après le lemme 4.9 que

$$(5'.10) \qquad {}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y, \theta) \to 0 , \quad \theta \to \infty$$

et d'après (3′.3) et (4′.2)

$$(5''.10) \qquad {}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y, \theta) \to 0 , \quad \theta \to 0 , \ X \neq Y$$

c.q.f.d.

On a donc démontré le

THÉORÈME 2.10. *Il résulte des hypothèses* I-IV *que les intégrales* (1.10) *forment la matrice des solutions du système elliptique d'équations* (4.10), *à savoir que*

$$(6.10) \quad \psi_X^{(a)}\big({}^A\Gamma_{a\beta}(X, Y)\big) = 0 , \quad a = 1, \ldots, N , \ \beta = \text{const} , \ 1 \leqslant \beta \leqslant N .$$

On peut l'écrire en utilisant la définition (1′.1) comme il suit

$$(6'.10) \qquad \psi_X^{(a)}(u) = \big(A_a(X)D(u)\big)_1^p = 0 , \quad a = 1, \ldots, N .$$

Le système (6.10) est elliptique, c'est-à-dire le déterminant de Petrovsky qui correspond aux systèmes (6.10) (ou (6′.10)) ne possède que des racines à partie réelle négative.

Comme dans l'article [1] on introduit les fonctions dominantes auxiliaires

$$|\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = |W^{Y}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) + |\overline{W}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)\,, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, N\,,$$

où

$$|\overline{W}_{\alpha\beta}(X, Y, \theta) = \int_0^{\theta}\int_{\Omega'} s(|W, |\Phi)\,d\Pi\,du$$

et

$$|\Phi_{\alpha\beta}(X, Y, u) = |N_{\alpha\beta}(X, Y, u) + \int_0^{u}\int_{\Omega'} s(|\mathfrak{N}, |N)\,d\Pi\,dv\,.$$

Remarque 1.10. La fonction $|\Phi_{\alpha\beta}$ est la dominante des fonctions ${}^{A}\Phi_{\alpha\beta}$ et ${}_{A}\Phi_{\alpha\beta}$, donc la fonction $|\Gamma_{\alpha\beta}(X, Y, \theta)$ est la dominante des fonctions ${}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}$ et ${}_{A}\Gamma_{\alpha\beta}$. Toutes les limitations des fonctions ${}^{A}\Phi_{\alpha\beta}$ et ${}^{A}\Gamma_{\alpha\beta}$ étaient basées sur celles des fonctions $|W_{\alpha\beta}$ et $|N_{\alpha\beta}$. Ces limitations subsistent donc pour les fonctions $|\Phi_{\alpha\beta}$ et $|\Gamma_{\alpha\beta}$. C'est pourquoi tous les résultats des par. 9 et 10 subsistent aussi pour les fonctions ${}_{A}\Phi_{\alpha\beta}$ et ${}_{A}\Gamma_{\alpha\beta}$.

11. Le potentiel de simple couche du système elliptique d'équations limites dans le cas où $n \leqslant M$**.** On conserve ici les hypothèses I-IV. Soit S la frontière du domaine Ω.

Hypothèse V. La fonction $\{\varrho_\alpha(Q, t)\}_{\alpha=1,\ldots,N} = \varrho(Q, t)$ est définie, continue, intégrable et bornée sur la surface S, pour chaque valeur du temps $t \geqslant 0$. On suppose qu'on a uniformément sur S

$$\text{(1}'\text{.11)}\qquad \lim_{t\to\infty} \varrho_\alpha(Q, t) = \hat{\varrho}_\alpha(Q)\,, \qquad Q \in S\,,\ \alpha = 1, \ldots, N\,.$$

Définition 1.11. La fonction

$$\text{(2.11)}\qquad {}_{A}U_\alpha(X, t) = \int_0^{t}\int_S \sum_{\gamma=1}^{N} {}_{A}\Gamma_{\alpha\gamma}(X, t; Q, \tau)\,\varrho_\gamma(Q, \tau)\,dQ\,d\tau\,, \qquad Q \in S$$

est dite *potentiel généralisé spécial* (A) *de simple couche du système parabolique* (1.1) *de densité* $\{\varrho_\alpha(Q, t)\}$.

En généralisant les définitions des articles [2] et [1], [8] on définira le potentiel généralisé spécial du système elliptique limite.

Définition 2.11. La fonction

$$\text{(3.11)}\qquad {}^{A}u_\alpha(X) = \int_S \sum_{\gamma=1}^{N} {}^{A}\Gamma_{\alpha\gamma}(X, Q)\,\hat{\varrho}_\gamma(Q)\,dQ\,, \qquad X \in \Omega\,,\ \alpha = 1, \ldots, N$$

sera dite *potentiel généralisé spécial de simple couche du système elliptique limite et de densité limite* $\{\varrho_\alpha(Q)\}$.

On va démontrer

THÉORÈME 1.11. *Sous les hypothèses I-V, si l'ordre du système $M \geqslant n$ et si le temps $t \to \infty$, la limite du potentiel généralisé spécial (A) de simple couche du système parabolique est le potentiel généralisé spécial (A) de simple couche du système elliptique limite et de densité limite. C'est-à-dire*

$$(4.11) \qquad \lim_{t\to\infty} {}_AU_\alpha(X,t) = {}^Au_\alpha(X), \quad X \in \Omega \in \Omega'.$$

Démonstration. On a en vertu de la formule (1.10) au lieu de la formule (3.11) la formule suivante:

$$(5.11) \qquad {}^Au_\alpha(X) = \int_S \sum_{\gamma=1}^N \int_0^\infty {}^A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta)\varrho_\gamma(Q)\,dQ\,d\theta, \qquad \theta = t-\tau, \ X \in \Omega.$$

Les formules (3.11) et (2.11) donnent

$$(6.11) \qquad {}^Au_\alpha(X) - {}^AU_\alpha(X,t) = \int_S \sum_{\beta=1}^N \int_t^\infty {}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X,Q,\theta)\,d\theta\,\hat{\varrho}_\beta(Q)\,dQ + $$
$$+ \int_0^t\int_S \sum_{\beta=1}^N [{}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X,Q,t-\tau)\hat{\varrho}_\beta(Q) - {}_A\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Q,\tau)\,\varrho_\beta(Q,\tau)]\,dQ\,d\tau.$$

Il résulte de (1.10) que la première des intégrales (6.11) converge vers zéro avec $1/t$, $X \in \Omega$. En observant qu'on peut écrire

$${}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X,Q,t-\tau) = {}^A\Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Q,\tau)$$

la seconde intégrale $R(t)$ satisfait pour $t > T > 0$, à l'inégalité suivante

$$|R(t)| \leqslant \int_T^t\int_S \sum_{\gamma=1}^N |{}^A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,\tau) - {}_A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,\tau)|\,|\hat{\varrho}_\gamma(Q)|\,dQ\,d\tau +$$
$$+ \int_T^t\int_S \sum_{\gamma=1}^N |{}_A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,\tau)[\hat{\varrho}_\gamma(Q) - \varrho_\gamma(Q,\tau)]|\,dQ\,d\tau +$$
$$+ \int_0^T\int_S \sum_{\gamma=1}^N |{}^A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,\tau)\hat{\varrho}_\gamma(Q) - {}_A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,\tau)\,\varrho_\gamma(Q,\tau)|\,dQ\,d\tau.$$

La dernière intégrale converge vers zéro, pour $T = \text{const}$ et $t \to \infty$ comme le prouvent la formule (5'.10) et la remarque 1.10. Nous avons donc l'inégalité suivante:

$$\lim_{t\to\infty} R(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \int_0^{t-T} d\theta \int_S \sum_{\gamma=1}^N |{}^A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta) - {}_A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,t-\theta)|\,|\hat{\varrho}_\gamma(Q)|\,dQ +$$
$$+ \max_{\tau\geqslant T,\, Q\in S,\, \gamma=1,\dots,N} |\hat{\varrho}_\gamma(Q) - \varrho_\gamma(Q,\tau)| \int_0^\infty d\theta \int_S \sum_{\gamma=1}^N \Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta)\,dQ.$$

Comme on le sait (voir théorème 1.10 et la remarque 1.10), la dernière intégrale existe; l'hypothèse V prouve que le dernier terme converge vers zéro avec $1/T$. Remplaçons maintenant, pour $t > T_1+T$, $T_1 > 0$, le premier terme par la somme

$$2\lim_{t\to\infty}\Big[\int_{T_1}^{t-T}\int_S\sum_{\gamma=1}^{N}|\Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta)d\theta|\hat{\varrho}_\gamma(Q)|dQ+$$

$$+\int_0^{T_1}d\theta\int_S\sum_{\gamma=1}^{N}|{}^A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta)-{}_A\Gamma_{\alpha\gamma}(X,t;Q,t-\theta)|\,|\hat{\varrho}_\gamma(Q)|dQ\Big]$$

$$=2\int_{T_1}^{\infty}d\theta\int_S\sum_{\gamma=1}^{N}|\Gamma_{\alpha\gamma}(X,Q,\theta)|\hat{\varrho}_\gamma(Q)|dQ\,.$$

En effet, la limite du dernier terme pour $t\to\infty$, est égale à zéro, T_1 étant constant, [9]. La dernière intégrale est petite avec $1/T_1$ (théorème 1.10 et remarque 1.10). Ces résultats démontrent que $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)$ est arbitrairement petit, avec $1/T+1/T_1$, $T_1 > T$, d'où résulte le théorème 1.11.

Remarque 1.11. Observons encore qu'il résulte de la définition du potentiel spécial elliptique qu'on a

$$(5.11)\qquad \psi_X^{(a)}({}^Au)\equiv 0\,,\quad a=1,\dots,N\,,\ X\in\Omega$$

la densité étant intégrable sur la frontière S du domaine Ω, et en admettant les hypothèses I-IV. Comme nous le savons, on a

$$(5'.11)\qquad \hat{\Psi}_{X,t}^{(a)}({}_AU)\equiv 0\,,\quad a=1,\dots,N\,,\ X\in\Omega\,,$$

sous les hypothèses I et II (voir les formules (2.11), (5'.3) et (5''.10).

Travaux cités

[1] H. Milicer-Grużewska, *Propriété limite de la matrice du potentiel généralisé de simple couche du système parabolique d'équations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), pp. 251-256.

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations*, Ricerche Mat. 7 (1958), pp. 153-185.

[2'] D. Aronson, *On the initial value problem for parabolic systems of differential equations*, Ann. Math. Soc. 65 (5) (1959), pp. 310-318.

[3] M. Krzyżański, *Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), pp. 288-299.

[4] S. D. Eidelman, *De connection entre des matrices fondamentales de solutions des systemes paraboliques et elliptiques* (en russe), Математический сборник 35 (75), (1) (1954), pp. 57-72.

[5] J. B. Lopatinsky, *Système fondamental de solutions de système elliptique d'équations différentielles linéaires* (en russe), Украинский математический журнал 3 (1951), pp. 3-38.

[6] J. Petrovsky, *Über das Cauchy'sche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nicht analytischen Funktionen*, Bulletin de l'Université de Moscou 7 (1938), pp. 1-72.

[6'] J. M. Guelfand et M. I. Chilov, *Transformation de Fourier des fonctions de croissance rapide et problèmes de la solution unique du problème de Cauchy* (en russe), Успехи математических наук 8, 6 (58) (1953), pp. 3-54.

[7] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche Mat. 5 (1956), pp. 25-57.

[8] H. Milicer-Grużewska, *Propriété limite du potentiel généralisé de simple couche relativement à l'équation parabolique normale*, Scuola Normale Superiore-Pisa, 12 (4) (1958), pp. 359-396.

[9] — *Recherches sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), pp. 385-390.

[10] — *Propriétés de la solution fondamentale spéciale du système parabolique d'équations* (cas I), Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), pp. 565-570.

Reçu par la Rédaction le 16. 2. 1961