MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

О СЛОЖНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

С. Б. ГАШКОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, СССР

§ 1. Введение

Многие задачи теории приближений могут быть сформулированы следующим образом (см. например [16], [17]. Для приближения функций из заданного класса $\mathscr{K} \subset C(I^n)$, где $I^n = \prod_i [a_i, b_i] \subset \boldsymbol{R}^n$, используются функции из некоторого класса $\mathfrak{A}$, на котором определено отображение $\mathscr{L}$: $\mathfrak{A} \to \boldsymbol{R}_+$, сопоставляющее каждой функции $g \in \mathfrak{A}$ число $\mathscr{L}(g) \in \boldsymbol{R}_+$, называемое *сложностью функции* g. На пространстве $C(I^n)$ задается какая-либо норма, превращающая его в банахово пространство, например, чебышевская норма $\|f\| = \max_{x \in I^n} |f(x)|$. *Сложностью* ε*-приближения произвольной функции* $f \in \mathscr{K}$ называется число $\mathscr{L}(f, \varepsilon)$, равное $\inf_{\substack{g \in \mathfrak{A} \\ \|g - f\| \leqslant \varepsilon}} \mathscr{L}(g)$. *Сложностью* ε*-приближения класса* $\mathscr{K}$ называется число $\mathscr{L}(\mathscr{K}, \varepsilon)$, равное $\sup_{f \in \mathscr{K}} \mathscr{L}(f, \varepsilon)$.

Например, в теории приближений в качестве класса $\mathfrak{A}$ часто используется класс алгебраических или тригонометрических полиномов, а мерой сложности полинома служит его степень. Однако, если мы хотим, чтобы мера сложности ε-приближения функции f более точно характеризовала количество труда, затраченного на вычисление этого ε-приближения, то в качестве такой меры лучше взять наименьшее число арифметических операций, необходимое для этого вычисления.

Поэтому представляет интерес изучение следующего класса мер сложности, к определению которого мы сейчас приступаем. Зафиксируем произвольное непустое множество B, состоящее из непрерывных функций $w_k(x_1, \ldots, x_m)$: $\boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$, $m = m(w_k)$, и назовем его *базисом*. *Схемой* (или *программой*) в базисе B назовем произвольную последовательность непрерывных функций $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_L(x_1, \ldots, x_n)$, в которой первые n

функций определяются равенствами $f_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = \overline{1, n}$, а каждая следующая функция $f_l(x_1, \dots, x_n)$ вычисляется через предшествующие функции с помощью некоторой базисной операции:

$$f_l(x_1, \dots, x_n) = w_k(f_{j_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, f_{j_m}(x_1, \dots, x_n));$$

$$k = k(l), \quad w_k \in B, \quad m = m(w_k), \quad j_1 = j_1(l), \dots, j_m = j_m(l), \quad j_1 < l, \dots, j_m < l.$$

Сложностью схемы называется число L, равное ее длине. *Глубиной схемы* называется число $\mathscr{D}$, равное максимальной длине подпоследовательности $f_{l_i}(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, \mathscr{D}}$, каждая функция f_{l_i} которой используется в этой схеме для вычисления следующей за ней функции $f_{l_{i+1}}$ этой подпоследовательности. Схема $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_L(x_1, \dots, x_n)$ называется *формулой*, если каждая функция f_l, $n < l < L$, используется при вычислении следующих за ней функций только один раз. Отметим, что приведенные определения эквивалентны соответствующим определениям, используемым в теории сложности булевых функций (см. [13]–[15]). Для сложности и глубины можно предложить и более общие определения (см., например, [10]). Класс $\mathfrak{A}_B$ определим как множество всех функций $f \in C(I^n)$, которые могут быть точно реализованы схемами в базисе B. Будем рассматривать три меры сложности, определенные на классе $\mathfrak{A}_B$, которые обозначим L_L, L^*_B и D_B,

$$L_B\colon \mathfrak{A}_B \to \boldsymbol{R}_+, \qquad L^*_B\colon \mathfrak{A}_B \to \boldsymbol{R}_+, \qquad D_B\colon \mathfrak{A}_B \to \boldsymbol{R}_+.$$

Для любой функций $g \in \mathfrak{A}_B$ определим $L_B(g)$ как наименьшее число элементов, какое может быть в схеме, реализующей функцию g. Аналогично определяется значение $L^*_B(g)$, только вместо схем рассматриваются формулы в том же базисе B; поэтому $L^*_B(g) \geqslant L_B(g)$. Значение $D_B(g)$ определим как наименьшую глубину, которое может иметь схема в базисе B, реализующая функцию g. Нашей целью является изучение асимптотического поведения величин $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $L^*_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$, $D_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Эти величины, рассматриваемые как функции от ε, называются в теории сложности функциями Шеннона. Величина $L_B(f, \varepsilon)$, где B состоит из операций $x+y$, $x-y$, xy, x/y и константы 1, по-видимому, является достаточно естественной мерой трудоемкости ручного вычисления функции $f \in C(I^n)$ с точностью до ε.

Если же речь идет о вычислениях на ЭВМ, то более естественной мерой сложности приближенного вычисления функции f является, видимо, $D_B(f, \varepsilon)$, которая оценивает время, затраченное машиной на это вычисление (даже с учетом возможностей распараллеливания задачи). Целесообразность рассмотрения более широких базисов оправдывается, например, тем обстоятельством, что программы, вычисляющие на ЭВМ достаточно сложные функции, как правило, содержат модули, вычисляющие более элементарные функции. Кроме конечных базисов, интересно также рассмотреть базисы, состоящие из конечного числа непостоянных функций и множества $\boldsymbol{R}$ всех действительных констант (такие базисы далее называются *почтиконечными*). Схемы в почтиконечных базисах можно использовать в качестве математической модели для специализированных вычислительных устройств непрерывного действия (аналоговых устройств). Так как параметры, управляющие изменением функций, реализуемых элементами аналоговых устройств, имеют ограниченную область изменения, то в классе всех почтиконечных базисов целесообразно выделить подкласс, состоящий из базисов, имеющих лишь ограниченные константы.

Функции, реализуемые элементами аналоговых устройств, как правило, являются достаточно гладкими, поэтому особый интерес представляет рассмотрение почтиконечных базисов с ограниченными константами и функциями, удовлетворяющими условию Липшица (такие базисы называем далее *липшицевыми*). Отметим, что величину $L_B(f, \varepsilon)$ можно интерпретировать как стоимость аналогового устройства, вычисляющего функцию f с точностью ε, в предположении, что базисные функции реализуются его элементами достаточно точно. Формулы составляют важный подкласс класса схем, хотя бы поэтому, что любую схему можно преобразовать в формулу в том же базисе не изменяя глубины. Рассмотрение формул можно оправдать также тем обстоятельством, что некоторые типы аналоговых устройств моделируются не схемами, а формулами. Отметим, что возможна и другая постановка задачи о сложности приближения непрерывных функций, восходящая к А. Н. Колмогорову (см. [1] и указанную там литературу). В ней под *приближением непрерывной функции* f понимается не непрерывная же функция, а конечная таблица, эта таблица рассматривается как таблица некоторого булевского оператора, и сложность ε-приближенная функции f определяется как сложность реализации этого оператора схемами в булевском базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. На наш взгляд, большинство результатов по этой задаче можно рассматривать как результаты, относящиеся к теории сложности булевых функций и получаются они с помощью приложения результатов и методов этой теории. Задача, рассматриваемая нами, по-видимому, более близка к теории приближений; ни в одном из полученных нами результатов (исключая, конечно, энтропийные нижние оценки) не удается непосредственно применить результаты теории сложности булевых функций. Есть и другие существенные различия между упомянутыми задачами. Однако, хотя результаты теории сложности булевых функций непосредственно не удается применить в нашей задаче, но идеи этой теории, принадлежащие О. Б. Лупанову, все же можно применить, и именно на их применении во многих случаях основаны наши доказательства. Сама постановка задачи, и идея использования методов дискретной математики в теории приближений —

наиболее „дискретной" области непрерывной математики, подсказана автору О. Б. Лупановым, за что автор выражает ему глубокую благодарность.

§ 2. Нижние оценки функций Шеннона

Всюду в этом параграфе предполагаем, что базис B и класс $\mathscr{K}$ таковы, что при любом $\varepsilon > 0$ $\mathfrak{A}_B$ образует ε-сеть для класса $\mathscr{K}$ и ε-энтропия класса $\mathscr{K}$, обозначаемая далее $H_\varepsilon(\mathscr{K})$, конечна (соответствующие определения см. в [9]). Следуя О. Б. Лупанову [13], обозначим $\varrho_B = 1/(m-1)$ и $\tau_B = 1/\log_2 m$, где m – наибольшее число существенных переменных у функций из базиса B (если $m > 1$).

Теорема 1 [4]. *Если B конечен, то при любом $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*(1):

$$L_B(\mathscr{K},\varepsilon) \geqslant \varrho_B \frac{H_\varepsilon(\mathscr{K})}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\left(1+\frac{\log_2\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K}) - O_{B,\mathscr{K}}(1)}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\right),$$

$$L_B^*(\mathscr{K},\varepsilon) \geqslant O_{B,\mathscr{K}}\big(H_\varepsilon(\mathscr{K})\big),$$

$$D_B(\mathscr{K},\varepsilon) \geqslant \tau_B \log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K}) - O_{B,\mathscr{K}}(1)\ (^2).$$

Теорема 1 является аналогом соответствующих теорем О. Б. Лупанова из [13], [14].

Теорема 2 [4], [5]. *Если B — полиномиальный почтиконечный или липшицев базис, то для любого $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*:

$$L_B(\mathscr{K},\varepsilon) \geqslant O_{B,\mathscr{K}}\left(\min\left(\sqrt{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}, \frac{H_{2\varepsilon}(\mathscr{K})}{\log_2(1/\varepsilon)}\right)\right),$$

$$D_B(\mathscr{K},\varepsilon) \geqslant \tau_B \log_2 H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}) - O_B\big(\max(\log_2\log_2 H_{2\varepsilon}(\mathscr{K}), \log_2\log_2 1/\varepsilon)\big).$$

В доказательстве теоремы 2 существенно используются идеи из книги А. Г. Витушкина [3]. За счет наложения на базис B дополнительных ограничений оценки теоремы 2 можно несколько усилить (см., например, [4], [5]). Существенно ослабить ограничения на базис B с сохранением результатов теоремы 2 нельзя ([4], [5]). Из дальнейшего будет видно, что вообще говоря, оценки теорем 1, 2 близки к наилучшим. В то же время для любого конечного базиса B и любой растущей

(1) $L_B(\mathscr{K},\varepsilon) = \sup_{f\in\mathscr{K}} L_B(f,\varepsilon)$, $L_B(f,\varepsilon) = \inf_{\|g-f\|\leqslant\varepsilon} L_B(g)$. Функции Шеннона $L_B^*(K,\varepsilon)$ и $D_B(\mathscr{K},\varepsilon)$ определяются аналогично.

(2) Здесь и далее $f = O_A(g)$ означает, что $0 < c_A < f/g < C_A$, где c_A и C_A, возможно, зависят от A.

функции $\Lambda(x)$ найдется класс $\mathcal{K}$, для которого $L_B(\mathcal{K},\varepsilon) > \Lambda(H_\varepsilon(\mathcal{K}))$ и $H_\varepsilon(K) > \Lambda(\varepsilon)$.

Некоторые конкретные примеры неэнтропийных нижних оценок можно найти в [6].

§ 3. Верхние оценки функций Шеннона

Из предыдущего ясно, что верхние оценки, близкие к нижним оценкам теорем 1, 2, можно получить лишь ценой наложения некоторых ограничений на класс $\mathcal{K}$. По-видимому, без ограничений на базис B тоже не обойтись, во всяком случае это так, если $\mathcal{K} \subset \boldsymbol{R}$. Наибольший интерес, видимо, должны вызывать верхние оценки для классов $\mathcal{K}$, обычно изучаемых в классической теории приближений. Обозначим $W(r,N,M,I^n)$, где $I^n \subset \boldsymbol{R}^n, r, M \in \boldsymbol{R}^n_+, N \in \boldsymbol{R}_+$, множество всех ограниченных по модулю константой N функций $f(x_1,\ldots,x_n) \in C(I^n)$, у которых по каждой переменной x_i частная производная порядка m_i удовлетворяет условию Гельдера $H(\alpha_i, M_i)$ по той же переменной, где числа $m_i, \alpha_i, M_i, i = \overline{1,n}$, таковы, что $m_i \in \boldsymbol{Z}$, $0 < \alpha_i \leqslant 1$, $r_i = m_i + \alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, $r = (r_1,\ldots,r_n)$, $M = (M_1,\ldots,M_n)$. В работе [2] даны следующие оценки для ε-энтропии $H_\varepsilon(W(r,N,M,I^n))$:

$$a^h_{\|r\|}|I^n|\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\varrho} + b_{\|r\|}\log\frac{N}{\varepsilon} \leqslant H_\varepsilon(W(r,N,MI^n)) \leqslant$$
$$\leqslant (c_{\|r\|}n)^{1/\varrho}\left(\frac{M}{\varepsilon}\right)^{1/\varrho}|I^n| + \|r\|^n\log\frac{N}{\varepsilon} + d_{\|r\|},$$

где

$$\frac{1}{\varrho} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}, \qquad \mu^{1/\varrho} = \prod_{i=1}^{n} M_i^{1/r_i}, \qquad \|r\| = \max_i |r_i|,$$

$|I^n|$ — объем I^n, $a_{\|r\|}$, $b_{\|r\|}$, $c_{\|r\|}$, $d_{\|r\|}$ — некоторые константы.

В случае $n = 1$ и $r = 1$ в работе [9] найдена асимптотика для $H_\varepsilon(W)$:

$$H_\varepsilon(W) = \frac{M}{\varepsilon}|I| + O\left(\log\frac{N}{\varepsilon}\right).$$

Для базиса $B = \{x-y, xy, |x|, \frac{1}{2}\}$ справедлива следующая

Теорема 3 [7], [8]. *Если $\|r\|$, ϱ, n фиксированы, $0 \in I^n$, то найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon(M,N,r,I^n)$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ справедливы равенства*

$$L_B(W,\varepsilon) = O_{\|r\|,\varrho,n}\left(\frac{H_\varepsilon(W)}{\log H_\varepsilon(W)}\right),$$
$$L^*_B(W,\varepsilon) = O_{\|r\|,\varrho,n}(H_\varepsilon(W)),$$

где $W = W(r,N,M,I^n)$.

Если к тому же $n = 1$ и $r = 1$, то первое из этих равенств можно уточнить следующим образом:

$$\frac{H_\varepsilon(W)}{\log_2 H_\varepsilon(W)}\left(1+\frac{\log_2\log_2 H_\varepsilon(W)-O(1)}{\log_2 H_\varepsilon(W)}\right) \leqslant L_B(W,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H_\varepsilon(W)}{\log_2 H_\varepsilon(W)}\left(1+\frac{9\log_2\log_2 H_\varepsilon(W)+O(1)}{\log_2 H_\varepsilon(W)}\right).$$

Отметим, что в случае $n = 1$ и произвольных $r, M, N > 0$ понадобился метод доказательства, несколько отличный от случая $n = 1$. Отметим еще, что в случае $n = 1$, $r = 1$ неравенства теоремы 3 справедливы также и для базиса

$$B = \{x-y, |x|, x/2, 1\}.$$

Этот базис минимален в том случае, что после удаления любой из его функций он теряет свойство, сформулированное в начале § 2. Схемы в этом базисе являются довольно точной моделью ручных вычислений, т.к. все константы, вычислимые в этом базисе могут быть записаны в виде конечных двоичных дробей, а операция умножения при ручных вычислениях сводится к многократному выполнению операции сложения.

В работах [3], [12] для многих классов, состоящих из функций, разлагающихся в быстро сходящиеся ряды, вычислены асимптотики их ε-энтропии. Для тех же классов можно получить также и асимптотики для функции Шеннона $L_B(\mathscr{K}, \varepsilon)$ при соответствующем выборе базиса B. Например, пусть $A = A(Э^n, N)$ — класс всех функций $f \in C(I^n)$, имеющих аналитические продолжения на эллиптический полицилиндр $Э^n$ ($I^n \subset Э^n \subset \boldsymbol{C}^n$, $Э^n = Э_1 \times \ldots \times Э_n$, $Э_i$ — эллипс в $\boldsymbol{C}$ с фокусами a_i, b_i и суммой полуосей α_i, $i = \overline{1, n}$), ограниченные на $Э^n$ по модулю константой N. Тогда для базиса $B = \{x-y, xy, \frac{1}{2}\}$ справедлива

Теорема 4 [4], [6]. *Для любого $\varepsilon < \varepsilon(Э^n, N)$ при условии $0 \in I^n$ справедливы соотношения*

$$\frac{H_\varepsilon(A)}{\log_2 H_\varepsilon(A)}\left(1+\frac{\log_2\log_2 H_\varepsilon(A)-O(1)}{\log_2 H_\varepsilon(A)}\right) \leqslant L_B(A,\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{H_\varepsilon(A)}{\log_2 H_\varepsilon(A)}\left(1+\frac{3\log_2\log_2 H_\varepsilon(A)+O_n(1)}{\log_2 H_\varepsilon(A)}\right), \qquad L_B^*(A,\varepsilon) = O_n(H_\varepsilon(A)),$$

а при $\varepsilon \to 0$ и фиксированных $Э^n, N$

$$D_B(A,\varepsilon) \sim \log_2 H_\varepsilon(A). \text{ (}^3\text{)}$$

(3) $f \sim g$ означает, что $\lim(f/g) = 1$.

Отметим, что для некоторого конечного полиномиального базиса B

$$D_B(A,\varepsilon) = \log_2 H_\varepsilon(A) + O_{Э^n,N}(1).$$

Отметим еще, что в неравенстве теоремы 4 слагаемое $O_n(1)$ можно уточнить, как

$$O\left(\frac{n^3(\log\log(N/\varepsilon))^2 + n^2 \max\limits_l \log(2\alpha_l/|I_l|)}{\log(N/\varepsilon)} + 1\right),$$

при условии, что $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$, $N \to \infty$ таким образом, что

$$\frac{n(n\log\log(N/\varepsilon) + \max\limits_l \log(2\alpha_l/|I_l|))}{\log(N/\varepsilon)} \to 0,$$

где

$$|I_l| = |b_l - a_l|, \qquad I^n = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \boldsymbol{R}^n;$$

поэтому формулы теоремы 4 дают асимптотику также и в случае, когда $n \to \infty$, $N \to \infty$, правда, достаточно медленно по сравнению с $1/\varepsilon$. Если же n или $N \to \infty$ достаточно быстро, то формулы для ε-энтропии класса $A = A(Э^n, N)$, указанные в [12], уже не верны, и асимптотику для $H_\varepsilon(A)$ и $L_B(A,\varepsilon)$ получить не удается.

Теоремы 3, 4 показывают, что оценки теоремы 1, вообще говоря, близки к наилучшим. Пример, приведенный в [4], показывает, что оценки теоремы 2 тоже, вообще говоря, близки к наилучшим.

§ 4. Континуальные аналоги эффекта Шеннона

В отличие от теории булевых функций, в рассматриваемой задаче из наличия нижней оценки для некоторой функции Шеннона, вообще говоря, не следует никакой нетривиальной оценки для $L(f,\varepsilon)$ ни для какой функции f из рассматриваемого класса. Действительно, пусть B — произвольный конечный базис, $\Lambda(\varepsilon)$ — возрастающая (при $\varepsilon \to 0$) функция, $\mathscr{K} \subset C(I^n)$ — класс функций, у которого

$$H_\varepsilon(\mathscr{K}) > \Lambda(\varepsilon),$$

и $\mathfrak{A}_B \cap \mathscr{K}$ всюду плотно в $\mathscr{K}$. Тогда класс $\mathscr{K}_0 = \mathscr{K} \cap \mathfrak{A}_B$ удовлетворяет следующим условиям:

$$H_\varepsilon(\mathscr{K}_0) = H_\varepsilon(\mathscr{K}),$$

$$L_B(\mathscr{K}_0,\varepsilon) \gtrsim \varrho_B \frac{H_\varepsilon(\mathscr{K}_0)}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K}_0)},$$

но для любой функции $f \in \mathscr{K}_0$ и любого $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$

$$L_B(f, \varepsilon) \leqslant L_B(f) = O_{f,B}(1).$$

Тем не менее для „хороших" классов $\mathscr{K}$ теорему 1 можно уточнить, указав оценки для $L(f, \varepsilon)$ для многих индивидуальных функций $f \in \mathscr{K}$.

Теорема 5 [6]. *Для любого конечного базиса B и почти всех (в смысле лебеговской меры) констант $a \in \boldsymbol{R}$ справедливы неравенства*

$$L_B(a, \varepsilon) \geqslant \varrho_B \frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}\left(1 + \frac{\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon) - O_a(1)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}\right).$$

В [6] эта теорема приведена в несколько более общем виде. Для $B = \{x-y, xy, \frac{1}{2}\}$ из теоремы 5 и [4] следует, что наблюдается континуальный аналог эффекта Шеннона: для почти всех $a \in \boldsymbol{R}$

$$L_B(a, \varepsilon) \sim \varrho_B \frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}.$$

Для некоторых классов аналитических функций тоже удается наблюдать эффект Шеннона. Пусть, например, класс $\mathscr{K}$ состоит из всех функций $f(x) \in C[-1, 1]$, у которых коэффициенты Фурье–Чебышева удовлетворяют неравенствам

$$|c_k| \leqslant e^{-k}.$$

Теорема 6 [6]. *На классе $\mathscr{K}$ можно определить колмогоровскую вероятностную счетно-аддитивную меру так, что относительно нее для любого конечного B почти все $f \in \mathscr{K}$ удовлетворяют неравенствам*

$$L_B(f, \varepsilon) \geqslant \varrho_B \frac{H_\varepsilon(\mathscr{K})}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\left(1 + \frac{\log_2\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K}) - O_B(1)}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\right).$$

Из результатов [4], [6] следует, что для $B = \{x-y, xy, \frac{1}{2}\}$

$$L_B(\mathscr{K}, \varepsilon) \geqslant \varrho_B \frac{H_\varepsilon(\mathscr{K})}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\left(1 + \frac{3\log_2\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K}) + O_{\mathscr{K}}(1)}{\log_2 H_\varepsilon(\mathscr{K})}\right).$$

Поэтому в рассматриваемом случае тоже наблюдается эффект Шеннона.

Для классов W доказать подобное утверждение не удается, однако, используя идею из [1], для любого конечного B в этих классах можно указать функции f, у которых $L_B(f, \varepsilon)$ растет достаточно быстро, если $\varepsilon \to 0$. Отметим, что использование в [1] для этой цели понятий из теории сложности не имеет существенного значения, и этому доказательству можно придать чисто теоретикомножественную форму; эффективное построение функций f, у которых $L_B(f, \varepsilon)$ растет достаточно быстро, провести не удается.

§ 5. О сложности приближенного вычисления констант

Этот вопрос удается изучить более подробно. Наиболее близкими к реальным вычислениям из числа рассматриваемых далее базисов являются базисы $\{x-y, x/2, 1\}$, $\{x-y, 1/x, 1\}$ и им „эквивалентные" базисы, например $\{x+y, x-y, x/2, 1\}$, $\{x+y, x-y, xy, x/y, 1\}$ и т.п., причем базис $\{x-y, x/2, 1\}$ является линейным (т.е. позволяет приближенно вычислять только линейные функции), а потому более „простым", чем базис $\{x-y, 1/x, 1\}$, в котором можно вычислять приближенно любые непрерывные функции.

Теорема 7. *Для базиса $B = \{x-y,\ x/2,\ 1\}$ и почти всех чисел $a \in \boldsymbol{R}$ справедливы следующие соотношения*:

$$L_B(a,\ \varepsilon) = \log_2\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}\right),$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{\log_2(1/\varepsilon) - D_B(a,\ \varepsilon)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)} = 1.$$

Для всех рациональных, но не двоичнорациональных чисел a справедливо неравенство $D_B(a,\ \varepsilon) \geqslant \log_2(1/\varepsilon) - O_a(1)$. Для всех чисел $a \in \boldsymbol{R}$ справедливы неравенства

$$D_B(a,\ \varepsilon) \leqslant \log_2\frac{1}{\varepsilon} + O_a(1),$$

$$L_B(a,\ \varepsilon) \leqslant \log_2\frac{1}{\varepsilon} + (1 + o(1))\frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_2\log_2(1/\varepsilon)}.$$

Отметим, что теорема 7 означает, что для базиса $B = \{x-y,\ x/2,\ 1\}$ и класса $\boldsymbol{R}$ наблюдается эффект Шеннона, причем в „неэнтропийном" варианте (теорема 5 дает более слабую оценку). Интересно также то, что почти всегда $L_B(a,\ \varepsilon) \sim D_B(a,\ \varepsilon)$ и удается эффективно указать множество чисел, у которых сложность ε-приближения асимптотически совпадает с функцией Шеннона, „Монотонным аналогом" базиса $\{x-y,\ x/2,\ 1\}$ является базис $\{x+y,\ x/2,\ 1\}$, в котором вычисляются только монотонные линейные фынкции.

Теорема 8. *Для базиса $B = \{x+y,\ x/2,\ 1\}$ справедливы все утверждения теоремы 7, а также следующие*: *для любого $a \in \boldsymbol{R}_+$*

$$L^*_B(a,\ \varepsilon) \leqslant 3\log_2 1/\varepsilon + O_a(1),$$

для некоторых $a \in \boldsymbol{R}_+$, $L^*_B(a,\ \varepsilon) \sim 3\log_2 1/\varepsilon$,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{2\log_2(1/\varepsilon)-\sqrt{(2\log_2(1/\varepsilon))\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}-L_B^*(a,\varepsilon)}{\dfrac{(3/2\sqrt{2})\sqrt{\log_2(1/\varepsilon)\log_2\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}}{\sqrt{\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}}}=1,$$

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{L_B^*(a,\varepsilon)-2\log_2(1/\varepsilon)-\sqrt{(2\log_2(1/\varepsilon))\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}}{\dfrac{(3/2\sqrt{2})\sqrt{\log_2(1/\varepsilon)\log_2\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}}{\sqrt{\log_2\log_2\log_2(1/\varepsilon)}}}=1.$$

Теорема 8 показывает, что в случае меры сложности $L_B^*(a, \varepsilon)$, где $B = \{x+y, x/2, 1\}$, наблюдается полуэффект Шеннона в смысле, указанном в [15].

Можно указать базисы, в которых константы вычисляются еще более сложно, чем в базисе $\{x-y, x/2, 1\}$. Например, для базиса $\{x+y, x-y, 1, \sqrt{2}\}$ и любого $a\in \boldsymbol{R}_+$ справедливо равенство $L_B^*([-a, a], \varepsilon)\asymp \asymp 1/\varepsilon$ (4), причем для некоторых $b\in[-a, a]$ справедливо равенство $L_B^*(b, \varepsilon)\asymp 1/\varepsilon$, хотя в то же время

$$L_B([-a, a], \varepsilon) \sim \log_2(1/\varepsilon) \sim D_B([-a, a], \varepsilon).$$

Для любой функции $\psi(\varepsilon)$ такой, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon) = +\infty$ найдется число $\theta_\psi \in \boldsymbol{R}$ такое, что для базиса $B_\psi = \{x-y, \theta_\psi, 1\}$ справедливы соотношения

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{L_B(\frac{1}{2}, \varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} > 1,$$
$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{L_B(\frac{1}{2}, \varepsilon)}{\log_2[1/\varepsilon]} \leqslant 1.$$

Еще некоторые подобные примеры имеются в [6]. Базисы $\{x-y, 1/x, 1\}$ и $\{x+y, xy, -\frac{1}{2}\}$ являются более „правильными" и для них, как отмечалось выше, наблюдается эффект Шеннона в „энтропийном" варианте. Получение эффективных нижних оценок в этих базисах связано, по-видимому, с некоторыми трудностями, так как для любого алгебраического иррационального числа $a\in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство

$$L_B(a, \varepsilon) = O_a(\log\log(1/\varepsilon)),$$

где $B = \{x-y, 1/x, 1\}$, значит любое „достаточно сложное" число будет непеременно трансцендентным, причем не „лиувиллевским".

(4) $f\asymp g$ означает, что $0 < c < f/g < C$, где c и C не зависят от ε.

Литература

[1] Е. А. Асарин, *О сложности равномерных приближений непрерывных функций*, Успехи математических наук 39 (3) (1984), 157–169.

[2] И. К. Бабенко, и др., *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики*, М.: Наука (1979).

[3] А. Г. Витушкин, *Оценка сложности задачи табулирования*, М., Физматгиз (1959).

[4] С. Б. Гашков, *О сложности приближенной реализации аналитических функций схемами и формулами*, Вестн. Московск. ун-та, математ. механ. 4 (1983), 36–43.

[5] —, *О сложности приближенной реализации непрерывных функций в „липшицевых" базисах*, Тезисы докладов 7 Всесоюзной конф. Проблемы теоретической кибернетики, ч. I, Иркутск 1985, 52–53.

[6] —, *О сложности приближения функций схемами построенными из элементов, реализующих непрерывные функции из данного конечного множества*, Seminarbericht Nr. 56, Section Mathematik der Humboldt Universität zu Berlin, 1983.

[7] —, *О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной схемами из функциональных элементов*, Вестн. Моск. ун.-та, Матем. механ. 3 (1984), 35–41.

[8] —, *О сложности приближенной реализации некоторых классов дифференцируемых функций одной переменной формулами в некоторых непрерывных базисах*, Вестн. Моск. ун-та. Матем. механ. 6 (1984), 53–58.

[9] —, *О сложности приближенной реализации некоторых классов функций многих переменных при помощи схем и формул в некоторых базисах, состоящих из непрерывных функций*, Вестн. Моск. ун-та. матем. механ. 3 (1986), 48–57.

[10] —, *О сложности приближенной „схемной и формульной" реализации непрерывных функций и о континуальных аналогах „эффекта Шеннона"*, Вестн. Моск. ун-та, матем. механ. 6 (1986) (в печати).

[11] —, *О сложности приближенной реализации функций схемами и формулами*, В сб. *Теоретические проблемы кибернетики* (тезисы 6-й Всесоюзной конференции), ч. I, изд. Саратовского ун-та. (1986), 46–48.

[12] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, *ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах*, Успехи математических наук т. 14, 2(80) (1959), 3–86.

[13] О. Б. Лупанов, *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*, Изд. МГУ (1984).

[14] —, *Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования*, В кн.: Проблемы кибернетики, вып. 14, М.: Наука (1965), 31–110.

[15] Р. Г. Нигматуллин, *Сложность булевых функций*, Изд. Казанского университета (1983).

[16] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд. МГУ (1976).

[17] Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория алгоритмов*, М.: „Мир" (1983) (русский перевод).

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computation Theory
September 16–December 14, 1985