SINGULARITIES
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 20
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

STRUCTURES DOUBLES ET TRIPLES SUR UN SOUS-ESPACE COMPLEXE, APPLICATIONS*

CONSTANTIN BĂNICĂ

Département de Mathématiques, Increst,
Bucarest, Roumanie

Introduction

Les structures "multiples" sur un sous-espace d'un espace complexe, i.e. les sous-espaces qu'on peut les construire en conservant le support topologique et en faire épaissir le faisceau structurel à l'aide des éléments nilpotents, jouent un rôle important dans la question de savoir si le sous-espace est ensemblistement intersection complète. De même, dans le contexte algébrique. Pour des références récentes dans cette direction, voir [7], [19].

Les constructions de structures multiples s'avèrent utiles aussi dans l'étude des courbes de Cohen–Macaulay de multiplicité petite dans une variété de dimension 3 (on trouvera dans [2] une application à la classification des courbes de Cohen–Macaulay de degré 4 dans l'espace projectif $\boldsymbol{P}_3$). D'autres applications concernent les fibrés vectoriels ([10] et les références qu'on va les faire dans ce papier).

La construction de Ferrand [8] permet de "doubler" un sous-espace et dans ([10], Prop. 9.1) on décrit par un argument ad-hoc les courbes localement intersection complète de degré 3 de support une droite de $\boldsymbol{P}_3$. Dans [2] un étude plus systématique des structures multiples est fait, surtout sur une courbe lisse d'une variété de dimension 3.

Le présent travail a comme but de donner un aperçu de la partie de [2] qui se refére aux structures doubles et triples, et d'indiquer quellques applications. Pour l'auteur, à l'origine de cettes recherches se trouve un séjour à Münster, il y a quelques années, chez Otto Forster. Je lui exprime ma profonde reconnaissance.

* Version élargie de la conférence faite au Semestre de Singularités, Centre-Banach, Varsovie 1985.

Les constructions de structures multiples seront présentés dans le cas analytique, le cas algébrique est similaire. Tous les espaces complexes sont supposés de dimension pure. On va noter par N (résp. ν) le fibré normal (résp. conormal) et abréger intersection compléte (résp. localement..., ensemblistement...) par i.c. (résp. l.i.c., e.i.c.).

1. Structures doubles

1.1. D'abord on va présenter la méthode de Ferrand [8] de "doubler" un sous-espace l.i.c., sous la forme donée dans [2].

PROPOSITION 1. *Soient X un espace complexe, Y un sous-espace l.i.c., L un fibré en droites sur Y et supposons qu'on a un épimorphisme u: $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to L$. Alors le sous-espace Z de l'idéal $\mathscr{I}_Z = \ker(\mathscr{I}_Y \to \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \xrightarrow{u} L)$ est l.i.c., $Y \subset Z \subset Y^{(1)}$,*

$$\text{dét}(N_{Z/X})/Y \simeq \text{dét}(N_{Y/X}) \otimes L^{-1}$$

et il existe une suite exacte

$$H^1(Y, L) \to \text{Pic}(Z) \xrightarrow{\text{restr}} \text{Pic}(Y) \to H^2(Y, L)$$

($Y^{(1)} = (Y, \mathcal{O}_X/\mathscr{I}_Y^2 \mid Y)$ c'est le premier voisinage infinitésimel de X).

Pour la démonstration on va remarquer d'abord que localement on peut se ramener à la situation spéciale suivante: $\mathscr{I}_Y$ est donné par une suite régulière $f_1, \ldots, f_r$ ($r =$ codim Y) et u la première projection. Dans ce cas, $\mathscr{I}_Z = (f_1^2, f_2, \ldots, f_r)$. On voit donc que Z est l.i.c. et que $\mathscr{I}_Y^2 \subset \mathscr{I}_Z \subset \mathscr{I}_Y$. D'autre part, il y a une suite exacte

$$0 \to \mathscr{I}_Y^2/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z \to 0$$

dont les morphismes sont induits par inclusions et dont l'exactitude se vérifie localement. On a $L \simeq \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z$, $\nu_{Z|X} \mid Y \simeq \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z$. La multiplication définit un morphisme

$$\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z \otimes \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_Y^2/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z,$$

c'est un isomorphisme (vérification locale). Par conséquence, on obtient la suite exacte

$$0 \to L^2 \to \nu_{Z|X} \mid Y \to \nu_{Y|X} \to L \to 0$$

et d'ici, la formule sur dét. La suite exacte concernant le groupe de Picard résulte de la suite exacte

$$0 \to L \to \mathcal{O}_Z^* \to \mathcal{O}_Y^* \to 0,$$

qui se déduit de la suite exacte

$$0 \to \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Y \to 0,$$

car $L \simeq \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z$, regardé comme idéal dans $\mathcal{O}_Z$, est de carré nul.

Si X est lisse, alors en utilisant les formules d'adjunction on trouve pour les faisceaux dualisants: $\omega_Z | Y \simeq \omega_Y \otimes L^{-1}$.

On va regarder les deux cas suivantes, où on peut réaliser la construction de Ferrand. L'existence d'un épimorphisme u est équivalente à l'existence d'une section sans zéros du fibré holomorphe $N_{Y|X} \otimes L$.

Si X est de Stein et $\dim Y < \frac{2}{3} \dim X$ (même $\leqslant$ si $\dim Y$ est impaire), alors il existe toujours une telle section. En effet, d'après le théorème Andreotti–Frankel–Hamm un espace de Stein de dimension n a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension n; on conclut d'abord qu'il existe une section continue sans zéros, et ensuite une section holomorphe sans zéros par le principe de Oka pour les fibrés vectoriels démontré par Grauert (voir [3], [19] pour des renseignements exacts). On va considérer le cas particulier: $\dim Y \leqslant 3$ et $\operatorname{codim} Y \geqslant 2$. Si on prenne $L = \text{dét}(N_{Y|X})$, on trouvera une structure double Z sur Y ayant $\text{dét}(N_{Z|X})$ trivial; $N_{Z|X}$ résultera trivial par des arguments comme plus haut. Si on suppose de plus que $\dim Y < \frac{1}{2} \dim X$, par un résultat de Forster et Ramspott [9] Z est intersection complète, par consequence Y est e.i.c.. Donc: *tout sous-espace l.i.c. Y de dimension $\leqslant 3$ d'un espace de de Stein X, vérifiant* $\dim Y < \frac{1}{2} \dim X$, *est ensemblistement intersection complète.*

Dans la même direction, signalons aussi le résultat: *tout sous-espace l.i.c. de dimension 3 d'un espace de Stein contractible* (e.g. $\boldsymbol{C}^n$) *est ensemblistement intersection complète.*

Pour les détails concernant les deux résultats, comme pour d'autres résultats analytiques sur les sous-espaces e.i.c., voir [3], [16], [18], [19].

Maintenant on va regarder un cas algebrique. Supposons que X est une variété algébrique de dimension 3 et Y une courbe l.i.c. de X. Si le fibré $N_{Y|X} \otimes L$ est engendré par les sections globales, alors par un résultat de Serre on peut trouver une section sans zéros, donc un épimorphisme $I_Y/I_Y^2 \to L$; par conséquence on peut faire la construction de Ferrand. C'est donc toujours possible si X est affine ou si X est projective et si on remplace L par $L \otimes P^{\otimes n}$, P étant fibré en droites ample et $n \gg 0$. On va ilustrer par l'exemple suivant. Soient $X = \boldsymbol{P}_3$, Y la courbe rationelle générale de dégré $d+1$ et $r \geqslant 1$. Si $i\colon \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_3$ est un plongement d'image Y, alors $i^*(\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2) \simeq \mathcal{O}_{\boldsymbol{P}_1}(-2d-1)$. Par conséquence on peut trouver des épimorphismes $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to \omega_Y(r)$, et pour les courbes l.i.c. Z ainsi obtenues on a:

$$|Z| = Y, \quad \deg Z = 2(d+1), \quad \omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-r).$$

1.2. Rappelons la méthode de Serre de construction de fibrés ([20], [17]), sous la forme plus générale regardée dans [1] (voir aussi la variante-préprint de [1], Préprint 27/1984, Increst–Bucarest). Soient X une variété complexe, $r \geqslant 2$ un entier, $Y \subset X$ l.i.c. de codimension 2 et F un fibré vectoriel de rang $r-1$ sur X. Supposons que $H^2(X, F) = 0$ et que le fibré

$F \otimes \det(N_{Y|X})$ de rang $r-1$ sur Y a une section sans zéros. Alors il existe un fibré E de rang r sur X, donné par une extension

$$0 \to F \to E \to \mathscr{I}_Y \to 0.$$

En effet, comme $F \otimes \det(N_{Y|X}) \simeq \mathscr{E}xt^1(\mathscr{I}_Y, F)$, une section globale t de $F \otimes \det(N_{Y|X})$ définit un élément de $H^0(X, \mathscr{E}xt^1(\mathscr{I}_Y, F))$ et soit e de $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y, F)$ une préimage de ceci (l'application $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_Y, F) \to H^0(X, \mathscr{E}xt^1(\mathscr{I}_Y, F))$ est surjective, car $H^2(X, F) = 0$). Alors e corrésponde à une extension comme plus haut et le faisceau cohérent E est localement libre si et seulement si t ne s'annule pas sur Y (la question est locale et on raisonne comme dans [17], Ch. I, Lemme 6.4.3).

Si $r = 2$, alors la condition sur $F \otimes \det(N_{Y|X})$ est équivalente au fait que $\omega_Y \simeq \omega_X \otimes F^{-1} | Y$, en particulier ω_Y doit être la restriction à Y d'un fibré en droites sur X. C'est une condition assez restrictive, mais la construction de Ferrand permet parfois de "doubler" la structure, afin qu'on peut utiliser la méthode de Serre. Soit par exemple $X =$ l'espace affine A_K^3 et Y une courbe l.i.c. de X. On peut réaliser la construction de Ferrand à l'aide d'un épimorphisme $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to \omega_Y$ et obtenir une courbe l.i.c. Z, de support Y et ayant $\omega_Z \simeq \mathscr{O}_Z$. Par la méthode de Serre on obtient donc une extension

$$0 \to \mathscr{O} \to E \to \mathscr{I}_Z \to 0,$$

E étant un fibré de rang 2 sur A_K^3. Mais E est trivial (Quillen, Suslin), par conséquence $\mathscr{I}_Z$ est engendré par 2 polynômes, donc Y est ensemblistement intersection complète. Ceci est le raisonnement bien connu de Ferrand et Szapiro. Dans le même esprit, Murthy [16] a prouvé que tout surface non-singulière de A_K^4 telle que $c_1(Y)^2$ soit un élément de torsion est e.i.c..

Il y a un analogue analytique [3], [19]: *tout sous-variété complexe Y de dimension 4 dans une variété de Stein contractible X de dimension 6* (e.g. $X = \mathbf{C}^6$), *telle que $c_1(Y)^2 \in H^4(Y, \mathbf{Z})$ soit un élément de torsion, est e.i.c.*.

1.3. Supposons dans cette section que X est projective, de dimension 3. Considérons des extensions

$$0 \to F \to E \to \mathscr{I}_Y \to 0$$

comme plus haut. Si $r = 1$, on a

$$c_1(E) = c_1(F), \qquad c_2(E) = [Y]$$

($[Y]$ étant la classe de cohomologie de Y). Si $r = 2$, on a

$$c_1(E) = c_1(F), \qquad c_2(E) = c_2(F) + [Y],$$

$$c_3(E) = \big((c_1(F) + c_1(X)\big) \cdot [Y] - 2\chi(\mathscr{O}_Y).$$

La détermination de c_1 est une conséquence du fait que $c_1 = 0$ pour un faisceau cohérent de codimension 2 (ou, du fait que l'application $H^2(X, \boldsymbol{Z}) \to H^2(X \setminus Y, \boldsymbol{Z})$ est injective), celle de c_2 résulte de la formule de Porteous et celle de c_3 du théorème de Riemann–Roch. Si $X = \boldsymbol{P}_3$, on peut déduire les formules en utilisant les polynômes de Hilbert. À l'aide de la construction de Ferrand et de la méthode de Serre, on construit dans ([10]. Th. 2.5) des familles larges de fibrés holomorphes sur un fibré vectoriel topologique de rang 2 sur $\boldsymbol{P}_3$. De même, en utilisant des structures doubles, des fibrés holomorphes F de rang 2 assez simples et des extensions

$$0 \to F \to E \to \mathcal{I}_Z \to 0$$

on démontre dans [2] que tout fibré vectoriel topologique de rang 3 sur une variété projective rationelle, homogène de dimension 3, admet une structure holomorphe.

Récemment, Hulek et Van de Ven [13] ont trouvé une surface de degré 10 dans $\boldsymbol{P}_4$, en doublant une quintique, à l'aide de la quelle on peut retrouver le fibré de Horrocks–Mumford.

On va illustrer encore le procédé ci-dessus par quelques exemples de fibrés stables de rang 2 sur $\boldsymbol{P}_3$ ayant $c_1 = -1$ (alors $c_2 = 2d$, $d \geqslant 1$), mais auparavant on va rappeler un exemple de Hartshorne ([11], § 9). On part d'une courbe plane Y de degré d, on construit sur Y des structures doubles Z ayant $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-2)$. À l'aide de ceci, par extensions, on construit des fibrés stables E de rang 2, de classes de Chern ($c_1 = 0$, $c_2 = 2d-1$) et de spectre maximal $(-d+1, \ldots, 0, \ldots, d-1)$. En fait, on peut montrer que tout fibré de $M(0, 2d-1)_{\max}$ est donné par cette construction et on obtient ainsi un moyen de parametriser le spectre maximal.

Le premier exemple est par analogie. On part d'une courbe plane Y de degré d et on construit des courbes Z de support X par des épimorphismes

$$\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \simeq \mathcal{O}_Y(-1) \oplus \mathcal{O}_Y(-d) \to \mathcal{O}_Y(d).$$

On a $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Y(-3)$, on obtient des fibrés E stables de rang 2 comme extensions

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to E \to \mathcal{I}_Z \to 0.$$

Les classes de Chern de E sont $c_1 = -1$, $c_2 = 2d$. Comme $h^1 E(-d) = h^1 \mathcal{I}_Z(-d) = h^0 \mathcal{O}_Z(-d) = 1$, E est de spectre maximal $(-d, \ldots, -1, 0, \ldots, d-1)$. La même méthode de [11] (plan instable, "reduction step") donne également dans ce cas une paramétrisation de $M(-1, 2d)_{\max}$, avec les mêmes propriétés que celles de $M(0, 2d-1)_{\max}$. D'autre part, $M(-1, 2d)_{\max}$ est un fermé du schéma $M(-1, 2d)$ de Maruyama, et regardons la structure réduite induite.

À l'aide du théorème de continuité on peut prouver que les deux paramétrisations coïncident. En somme: $M(-1, 2d)_{\max}$, *avec la structure réduite induite par le schéma de Maruyama, est quasi-projective, connexe, lisse, rationel, de dimension* $3d^2+7d+2$ *pour* $d \geqslant 2$.

Pour $d = 1$, $M(-1, 2) = M(-1, 2)_{\max}$ est lisse de dimension 11 (Hartshorne–Sols, Manolache). Pour $d = 2$, le résultat ci-dessus sur $M(-1, 4)_{\max}$ on peut l'obtenir sans utiliser [11], il est aussi une conséquence de la classification des courbes l.i.c. de degré 4 donnée dans [2]. De plus, pour un fibré E obtenu par une extension

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to E \to \mathcal{I}_Z \to 0,$$

Z étant une structure double sur une conique Y, on peut montrer que $h^1(\operatorname{End} E) = 28$. Par conséquence $M(-1, 4)_{\max}$ est une composante connexe lisse de $M(-1, 4)$ (voir [4] pour les détails). Nous ignorons si, pour $d \geqslant 3$, $M(-1, 2d)_{\max}$ est un ouvert lisse de $M(-1, 2d)$.

L'exemple suivant concerne le spectre minimal. On peut prendre Z réunion disjointe de d droites doubles, ayant $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-3)$. Par extensions

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to E \to \mathcal{I}_Z \to 0$$

on obtient des fibrés stables de rang 2, de classes de Chern ($c_1 = -1$, $c_2 = 2d$), de spectre minimal $(-1, -1, \ldots, 0, 0)$ (parce que $h^1 E(-2) = 0$), et $h^0 E(1) \neq 0$. Si $d = 1$, les fibrés obtenus ainsi épuissent $M(-1, 2)$, mais si $d \geqslant 2$ la famille est épaise. Une famille plus large est la suivante. On part d'une courbe rationelle Y de degré $d+1$ et on regarde des épimorphismes $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to \omega_Y(1)$. Les courbes doubles Z associées ont $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y(-1)$. Par extensions

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to E \to \mathcal{I}_Z(1) \to 0$$

on construiuit des fibrés stables de rang 2, de classes de Chern ($c_1 = -1$, $c_2 = 2d$), et de spectre minimal car

$$h^1 E(-2) \doteq h^1 \mathcal{I}_Z(-1) = h^0 \mathcal{O}_Z(-1) = 0.$$

Dans ce cas $h^0 E(1) = 0$ et $h^0 E(2) \neq 0$. Pour $d = 2$, la famille de fibrés obtenue est de dimension 27 et un calcul va montrer que $h^1(\operatorname{End} E) = 27$ pour un tel fibré, il s'agit donc d'un ouvert lisse du schéma de Maruyama $M(-1, 4)$, contenu dans le spectre minimal [4].

1.4. On va reprendre ici l'idée originale de Ferrand [8], de doubler une courbe de Cohen–Macaulay de $\boldsymbol{P}_3$, pour en arriver à une courbe qui est le schéme des zéros d'une section d'un fibré de rang 2 (en particulier, la courbe double est l.i.c.). On a l'énoncé suivant [4], inspiré à la fois de [8] et [2], et dont la motivation en [4] a été l'étude de $M(-1, 4)_{\min}$.

PROPOSITION 2. *Soient X un espace complexe, Y un sous-espace de Cohen–Macaulay, $L \in \operatorname{Pic}(Y)$ et $u\colon \mathcal{I}_Y \to \omega_Y \otimes L$ un épimorphisme. Alors le sous-espace Z défini par $\mathcal{I}_Z = \ker u$ est de Gorenstein, $Y^{(1)} \subset Z \subset Y$, pour tout x de Y on a $\operatorname{mult}_x(Z) = 2 \operatorname{mult}_x(Y)$, $\omega_Z \mid Y \simeq L^{-1}$ et on a une suite exacte*

$$H^1(Y, \omega_Y \otimes L) \to \operatorname{Pic}(Z) \xrightarrow{\text{restr}} \operatorname{Pic}(Y) \to H^2(Y, \omega_Y \otimes L).$$

Pour la démonstration on considère la suite exacte

$$0 \to \omega_Y \otimes L \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Y \to 0.$$

Come ω_Y est de Cohen–Macaulay, il résultera d'abord que Z est de Cohen–Macaulay. En utilisant comme dans [8] un argument de bidualité (ici pour les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{Z,x}}(*, \omega_{Z,x})$, $x \in Y$) on trouve que ω_Z est inversible, donc Z de Gorenstein. La relation entre multiplicités est une conséquence du fait que pour tout anneau local noethérien A, de Cohen–Macaulay, on a $\mathrm{mult}(\omega_A) = \mathrm{mult}(A)$. On va trouver des détails dans [4] (où le cas $X =$ lisse de dimension 3 et Y une courbe est regardé, mais la démonstration est la même dans le context ci-dessus). Si X est lisse et codim $Y = 2$, Z résultera l.i.c..

On va illustrer la construction d'abord par un exemple global. Soit $X = \boldsymbol{P}^3$, L une droite $\{x = y = 0\}$ et $Y = L^{(1)}$. On a la résolution

$$0 \to 2\mathcal{O}(-3) \xrightarrow{A} 3\mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}_Y \to 0,$$

A étant donné par $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ et ε par $(y^2, -xy, x^2)$. On déduit la résolution

$$0 \to \mathcal{O}(-4) \xrightarrow{\varepsilon^t} 3\mathcal{O}(-2) \xrightarrow{A^t} 2\mathcal{O}(-1) \to \omega_Y \to 0.$$

Soient $r \geqslant 1$ et P, Q des polynômes homogènes de degré $r+1$ sans zéros communes sur X. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 2\mathcal{O}(-3) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B'"'] & 3\mathcal{O}(-2) \arrow[d, "B"] \\ 3\mathcal{O}(r-2) \arrow[r, "A^t"] & 2\mathcal{O}(r-1) \end{tikzcd}$$

où B est donné par $\begin{pmatrix} 0 & P & Q \\ P & Q & 0 \end{pmatrix}$. Ceci induit une surjection $\mathcal{I}_Y \to \omega_Y(r)$, par la construction de Ferrand ci-dessus on obtient une courbe l.i.c. Z de dégré 6, de support L, qui contient $L^{(1)}$, ayant $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z(-r)$.

On peut penser à utiliser la proposition dans la question ouverte si une courbe Y de $(\boldsymbol{C}^3, 0)$ est e.i.c.. Mais quand existe-elle une surjection $\mathcal{I}_Y \to \omega_Y$? Considérons l'exemple suivant, en context algébrique et en codimension 2 et dimension quelconque. Soit R un anneau local régulier et soit $I \subset R$ un idéal de codimension 2. Supposons que I est donné par les mineurs d'ordre n d'une matrice A de la forme $A = \begin{pmatrix} M \\ m \end{pmatrix}$, M étant symetrique $n \times n$. Alors I est ensemblistement intersection complète (i.e. il existe un idéal i.c. J, de même radical que I): c'est un résultat de Valla, obtenu dans (Compositio Math. 42 (1981), 3–11) par calculs. En fait, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\binom{I}{0}"'] & R^{n+1} \arrow[d, dashed, "(I,0)"] \\ R^{n+1} \arrow[r, "A^t"] & R^n \end{tikzcd}$$

induit une surjection $I \xrightarrow{u} \omega_{R/I}$ et on peut conclure par la proposition 2. D'ailleurs, dans [7] Valla reprend la question et démontre ad-hoc que l'idéal $J = \ker u$ est engendré par deux éléments.

1.5. Si X est une variété complexe et si $Y \subset X$ est une sous-variété, alors tout sous-espace Z de Cohen–Macaulay de support Y et multiplicité 2 est donné par la construction de la proposition 1, voir [2]. L'inverse de la construction de Ferrand a été abordé plus généralement par Boratynski–Greco, Manaresi [14]. Signalons aussi l'énoncé suivant [4]

PROPOSITION 3. *Soient X un espace complexe, Y un sous-espace de Cohen–Macaulay et $Z \subset X$ l.i.c.. Supposons que $Y^{(1)} \subset Z \subset Y$ et que* $\mathrm{mult}_x(Z) = 2\,\mathrm{mult}_x(Y)$ *pour tout x de Y. Alors Z s'obtient de Y par la construction de la proposition 2.*

Dans [4] le cas X = lisse de dimension 3 et Y courbe a été regardé, mais l'argument s'adapte dans le contexte général. On doit prouver que $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z$ est de la forme $\omega_Y \otimes L$, $L \in \mathrm{Pic}(Y)$. Comme $\mathcal{E}nd\,\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ (par bidualité), il suffit de prouver que localement $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z \simeq \omega_Y$. Mais localement $\omega_Z \simeq \mathcal{O}_Z$, donc $\omega_Y \simeq \mathcal{H}om\,\mathcal{O}_Z(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)$ s'identifie au l'idéal $(0\colon \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z)$ de $\mathcal{O}_Z$. Comme $\mathcal{I}_Y^2 \subset \mathcal{I}_Z$, on obtient une injection $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z \to \omega_Y$ et soit C le conoyau. On a le diagramme commutatif et exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & \omega_Y \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Z \arrow[r] & \mathcal{O}_Z \arrow[r] & \mathcal{O}_Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L'hypothèse, l'additivité de la multiplicité et l'égalité $\mathrm{mult}_x(\omega_Y) = \mathrm{mult}_x(Y)$ pour tout x de Y, impliquent: $\dim C < \dim Y$. L'application induite $C \to \mathcal{O}_Y$ étant injective et Y de Cohen–Macaulay, $C = 0$.

Les propositions 2 et 3 sont utiles dans la classification des courbes l.i.c. de degré 6 dans $\boldsymbol{P}_3$, on s'apercoit que beaucoup sont des structures doubles sur des courbes des Cohen–Macaulay de degré 3. Une telle classification est réalisée dans [4], pour les courbes de degré 6 et ayant $\omega \simeq \mathcal{O}(-1)$. À l'aide de ceci, on montre que l'ouvert de $M(-1, 4)$ mentionné à la fin de la section 3 est dense dans $M(-1, 4)_{\min}$. On peut maintenant énoncer le résultat principal de [4]: *Le schéma de Maruyama $M_{\boldsymbol{P}_3}(-1, 4)$ a deux composantes connexes: $M(-1, 4)_{\max}$ qui est lisse, rationelle, quasi-projective, de dimension 28 et $M(-1, 4)_{\min}$ qui est rationelle, quasi-projective, de dimension 27.*

Nous ignorons si $M(-1, 4)_{\min}$ est lisse partout. L. Ein a obtenu indépendament des résultats sur $M(-1, 4)$.

2. Structures triples

2.1. D'abord, la construction des structures triples l.i.c. ([2]). On reprend les notations et la construction de la proposition 1: X est un espace complexe, $Y \subset X$ est l.i.c., $L \in \operatorname{Pic}(Y)$ et Z est une structure double sur X donnée par un épimorphisme u: $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Y^2 \to L$. On a etabli une suite exacte de fibrés sur Y

$$0 \to L^2 \xrightarrow{i} \nu_{Z|X} \mid Y \to \nu_{Y|X} \xrightarrow{p} L \to 0.$$

Identifions L^2 à $\mathscr{I}_Y^2/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z$ et $\nu_{Z|X} \mid Y$ à $\mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z$.

PROPOSITION 4. *Soit* τ: $\nu_{Z|X} \mid Y \to L^2$ *une rétracte pour i et soit T le sous-espace d'idéal* $\mathscr{I}_T = \ker(\mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_Z/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z \xrightarrow{\tau} \mathscr{I}_Y^2/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z)$. *Alors T est l.i.c.,* $T \subset Y^{(2)}$ et $T \cap Y^{(1)} = Z$, $\operatorname{dét}(N_{T|X}) \mid Y \simeq \operatorname{dét}(N_{Y|X}) \otimes L^{-2}$ *et on a une suite exacte*

$$H^1(Y, L^2) \to \operatorname{Pic}(T) \xrightarrow{\text{restr.}} \operatorname{Pic}(Z) \to H^2(Y, L^2).$$

Envoyons à [2] pour les détails de la démonstration et bornons nous ici à indiquer pourquoi T est l.i.c.. Localement, il existe une suite régulière $f_1, \ldots, f_r$ telle que $\mathscr{I}_Y = (f_1, \ldots, f_r)$ et $\mathscr{I}_Z = (f_1^2, f_2, \ldots, f_r)$. Alors $L^2 \simeq \mathscr{I}_Y^2/\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z$ est engendré par $f_1^2 \operatorname{mod}(\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z)$ et $\nu_{Z|X} \mid Y$ par les classes $\operatorname{mod}(\mathscr{I}_Y \mathscr{I}_Z)$ de $f_1^2, f_2, \ldots, f_r$. On a $\tau(f_i) = \alpha_i f_1^2$ avec $\alpha_i \in \mathcal{O}_X$. On peut remplacer f_i par $f_i - \alpha_i f_1^2$ pour $i = 2, \ldots, r$, donc supposer en plus que $\tau(f_i) = 0$ pour $i = 2, \ldots, r$. On s'apercoit alors que $\mathscr{I}_T = (f_1^3, f_2, \ldots, f_r)$.

L'existence d'une rétracte de i est équivalente au scindage de la suite exacte de fibrés sur Y

$$0 \to L^2 \xrightarrow{i} \nu_{Z|X} \mid Y \to \ker p \to 0.$$

Si $\operatorname{codim}(Y) = 2$, alors $\ker p \simeq \operatorname{dét}(\nu_{Y|X}) \otimes L^{-1}$, et l'obstruction se trouve dans $H^1(Y, \operatorname{dét}(N_{Y|Z}) \otimes L^3)$. En particulier, en partant d'une structure double Z, si X est Stein alors on peut trouver des structures triples qui prolongent Z. De même dans le cas algébrique, si X est affine ou si X est projective et L suffisement positif.

Par la suite on va supposer X lisse de dimension 3 et Y une courbe lisse. Alors on peut démontrer que tout courbe l.i.c. de multiplicité 3 et de support Y peut s'obtenir par la construction ci-dessus. Pour ce résultat, et pour d'autres (paramétrisation des structures, passage aux voisinages infinitesimelles suivantes) renvoyons à [2]. À titre d'application on démontre dans [2] que les courbes l.i.c. de degré 3 et support une droite $Y = \{x = y$

$= 0\}$ dans $\boldsymbol{P}_3$ se stratifient par un entier $r \geqslant 0$ et, ceci étant fixé, se paramétrisent par

$$\{f, g \in H^0\, \mathcal{O}_Y(r),\ a, b, c \in H^0\, \mathcal{O}_Y(r-1) \mid f, g \text{ sans zéros communes}\}/\boldsymbol{C}^*.$$

L'idéal homogène d'une telle courbe T est $(fx+gy+ax^2+bxy+cy^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ et le faisceau dualisant $\omega_T \simeq \mathcal{O}_T(-2r)$.

Cette question a été abordé auparavant par un argument ad-hoc dans ([10], Prop. 9.1).

2.2. On va présenter une application aux fibrés vectoriels. Soit X une variété projective non-singulière, de dimension 3. Supposons qu'il existe un système de générateurs $\xi_1, \ldots, \xi_k$ de $H^2(X, \boldsymbol{Z})$ ayant la propriété suivante: il existe des courbes disjoines C_i^l, $1 \leqslant i \leqslant k$ et $l = 1, 2, \ldots$ telles que $[C_i^l] = \xi_i$ pour tout i et tout l. Alors, comme tout entier $\geqslant 2$ est combinaison à coefficients positifs de 2 et 3, en doublant et triplant des courbes C_i^l (à l'aide des fibrés en droites sur C_i^l, suffisament positifs) et en prenant des réunions disjointes, on peut obtenir des courbes l.i.c. Y ayant la classe de cohomologie $[Y]$ donné auparavant $\sum n_i \xi_i$ $(n_i \geqslant 2)$. D'autre part, dans les propositions 1 et 4 on a la possibilité de varier L et ainsi de réaliser la condition que ω_Y soit globalement induit. Par la méthode de Serre, on peut utiliser les courbes Y pour construire des fibrés vectoriels. En utilisant cette idée (et en classifiant d'abord topologiquement les fibrés) on peut montrer [5] que tout fibré vectoriel topologique de rang 2 sur une variété rationelle homogène de dimension 3 admet une structure holomorphe. En combinant avec le résultat sur le rang 3, rappelé dans 1.3, on peut enoncer les résultats de [1] et [5] sous la forme: *tout fibré vectoriel complexe topologique sur une variété rationelle homogène de dimension* 3 ($\boldsymbol{P}_3$, *la quadrique* Q_3, *la variété de drapeaux* $\boldsymbol{F}_{1,2}$, $\boldsymbol{P}_2 \times \boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_1$) *admet une structure de fibré holomorphe.*

Ceci généralise le résultat bien connu sur $\boldsymbol{P}_3$. Il semble assez difficile d'arriver à un résultat général (condition nécessaire et suffisante) sur une variété projective lisse de dimension 3 quelconque.

Une autre application des structures triples (en fait, on utilise seulement des droites triples) est dans la construction des fibrés instables de rang 2 sur $\boldsymbol{P}_3$, ayant le degré d'instabilité donné (si E est un tel fibré, normalisé, alors le degré d'instabilité est le plus grand entier $d \geqslant 0$ tel que $h^0 E(-d) \neq 0$), voir (l'auteur, Arch. Math. 43 (1984), 250–257).

2.3. On va supposer X lisse de dimension 3 et soit $Y \subset X$ une courbe lisse. Si T est une courbe de Cohen–Macaulay de support Y et de multiplicité 3, alors on a les cas suivantes:

1) Z est l.i.c., donc de la forme étudie auparavant;
2) Z n'est pas i.c. en aucun point, alors nécessairement $Z = Y^{(1)}$;
3) Z est génériquement i.c.

Soit Z une structure double sur X, obtenue à l'aide d'un épimorphisme $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2 \to L$, et soit i: $L^2 \to v_{Z|X} | Y$ l'injection de fibrés associée. Considérons un diviseur $D > 0$ sur Y. La classification des courbes de type 3) résulte du

PROPOSITION 5. *Soit* τ: $v_{Z|X} | Y \to L^2(D)$ *un épimorphisme tel que* $\tau \circ i$ *coincide à l'inclusion canonique* $L^2 \hookrightarrow L^2(D)$ *et soit* T *le sous-espace d'idéal* $\mathcal{I}_T = \ker(\mathcal{I}_Z \to \mathcal{I}_Z/\mathcal{I}_Y \mathcal{I}_Z \xrightarrow{\tau} L^2(D))$. *Alors* T *est une courbe de multiplicité* 3 *de support* Y, *intersection complète dans les points de* $Y \setminus |D|$, *de structure locale* $(t^d x + y^2, xy, x^2)$ *dans les points de* $|D|$. *Réciproquement, toute courbe de Cohen–Macaulay de support* Y, *génériquement i.c. et de multiplicité* 3, *s'obtient par cette méthode.*

Dans l'enoncé, d est l'ordre de D dans le point considéré et (x, y, z) un système de coordonnées locales convenables. Envoyons à [2] pour la démonstration. Les suites exactes

$$0 \to L \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Y \to 0, \qquad 0 \to L^2(D) \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

sont utiles pour lier les invariants de Y, Z et T.

À titre d'application on démontre dans [2] que les courbes de Cohen–Macaulay, génériquement i.c., de degré 3 et de support une droite Y de $\boldsymbol{P}_3$ se paramètrisent par un entier $r \geqslant 0$ (determiné par $L \simeq \mathcal{O}_Y(r-1)$), par un diviseur positif D de degré $d > 0$ et, pour (r, D) fixé, par $A/\boldsymbol{C}^* \times B$, ou

$$A = \{(f, g) \mid f, g \in H^0 \mathcal{O}_Y(r) \text{ sans zéros communs}\},$$

$$B = \{\tau \in H^0 \mathcal{O}_Y(3r-1+d) \mid \tau(P) \neq 0 \text{ pour tout } P \in |D|\}.$$

Pour une telle courbe T, $\chi(\mathcal{O}_T) = 3r + d$. Si $x = y = 0$ sont des équations pour Y et Q est un polynôme sur Y tel que $(Q) = D$, alors les courbes ci-dessus sont exactement celles d'idéal homogène de la forme

$$(Q(fx+gy) + ax^2 + bxy + cy^2,\ x(fx+gy),\ y(fx+gy),\ x^3,\ y^3),$$

a, b, et c étant homogènes de degré $r-1+d$ sur Y et ayant la propriété (qui corrésponde à la surjectivité de τ dans l'énoncé de la proposition)

$$(ag^2 - bfg + cf^2)(P) \neq 0 \qquad \text{pour tout } P \text{ de } |D|.$$

Bien que cette déscription n'est pas une paramétrisation (il y a plusieurs triplets (a, b, c) associés au même τ), elle fournit aisement des exemples.

Par réunion disjointe de droites doubles ou de multiplicité 3 comme plus haut, on peut construire des courbes de Cohen–Macaulay, génériquement i.c., ayant le degré donné, avec contrôle sur les points de Cohen–Macaulay et χ. Ceci, via la méthode de Hartshorne [11], peut être util dans l'étude des faisceaux réflexifs, voir par exemple [15].

2.4. On peut utiliser les structures multiples dans la construction de courbes lisses ou de surfaces à singularités A_{2k-1}, à l'aide des faisceaux réflexifs. Soient X une variété projective lisse de dimension 3 et $\mathscr{F}$ un faisceau réflexif de rang 2 sur X. $\mathscr{F}$ est libre à l'exception de l'ensemble fini $\mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathcal{O}))$, le lieu singulier de $\mathscr{F}$. On dira que $\mathscr{F}$ est spécial si pour tout point singulier x, on a

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}_x, \mathcal{O}_x) \simeq \mathcal{O}_x/(u, v, w^{n_x}),$$

(u, v, w) étant un système de coordonnées convenables au voisinage de x et $n_x \geqslant 1$. On a ([11], Remark 4.1.1 et [1], Prop. 4): si $\mathscr{F}$ est engendré par les sections globales, alors pour la section générale s de $H^0(\mathscr{F})$ le sous-schéma des zéros $Z(s)$ est une courbe lisse ($Z(s)$ est défini par l'idéal $\mathrm{Im}(\mathscr{F}^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X)$). De plus, si $X = \boldsymbol{P}_3$, on peut calculer dég et p_g par rapport aux $c_1(\mathscr{F})$, $c_2(\mathscr{F})$, $c_3(\mathscr{F})$.

Dans [12], la construction de Barth [6] des surfaces à noeuds à partir des formes quadratiques sur des fibrés a été généralisée aux faisceaux réflexives de rang 2. On a: si $\mathscr{F}$ (supposé special) est engendré par les sections globales, alors pour la section générale de $S^2\mathscr{F}$ la surface discriminant associée est de classe $2c_1(\mathscr{F})$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ et a seulement des singularités de type A_{2k-1}, en nombre de $4c_1(\mathscr{F})c_2(\mathscr{F})-3c_3(\mathscr{F})$ (en fait, dans [12] seulement le cas $n_x = 1$ est regardé, donant lieu aux surfaces à noeuds). Ici une singularité de type A_{2k-1} se compte avec multiplicité k, et si x est point singulier de $\mathscr{F}$, alors la surface a nécessairement une singularité A_{2n_x-1} en x.

Le moyen direct d'obtenir des faisceaux spécials est de partir d'une courbe lisse Y, d'un P de $\mathrm{Pic}(X)$ et d'un élément ξ de $\mathrm{dét}(N_{Y|X})\otimes P^{-1}$ qui éngendre génériquement ce faisceau: l'extension associée

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_Y \otimes P \to 0$$

définit un faisceau réflexif ([11], th. 4.1). On a $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathcal{O}) \simeq \delta\mathrm{ét}(N_{Y|X})\otimes P^{-1}/(\xi)$, donc $\mathscr{F}$ est spécial.

Par la suite on va prendre $X = \boldsymbol{P}_3$ et donner deux constructions de faisceaux spécials à l'aide des courbes non-réduites. Soit T une courbe l.i.c. dans X, de support lisse Y et de dimension Zariski 2 en tout point (par exemple une structure double ou triple sur Y). Localement on peut trouver v, w tels que $\mathscr{I}_Y = (v, w)$ et $\mathscr{I}_T = (v, w^n)$, n étant la multiplicité de T. Supposons en plus que $\omega_T \simeq \mathcal{O}_T(m)$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Soit k un entier tel que $k < m+4$ et soit ξ un polynôme homogène général de degré $m+n-k$ sur $\boldsymbol{P}_3$ (dont l'ensemble des zéros coupe transversalement Y). Ceci définit un élément dans $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{I}_T(k), \mathcal{O})$, donc une extension

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_T(k) \to 0$$

avec $\mathscr{F}$ réflexif. On a $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}_T(m+n-k)/(\xi)$, et les hypothèses faites montrerons que $\mathscr{F}$ est spécial.

Pour la deuxième construction on va regarder d'abord une question locale. Soient $R = \mathcal{O}_{C^3,0} = C\langle t, u, v\rangle$ et

$$I = (t^n u + v^2, uv, u^2) \supset J = (t^n u + v^2, u^2) \quad (n \geqslant 1),$$

$\omega_{R/I}$ est isomorphe à $(J:I)/J$, donc à

$$(u, v, t^n u + v^2, u^2)/(t^n u + v^2, u^2) = (\dot{u}, \dot{v}).$$

On s'aperçoit que si η est la classe d'un élément $v + S(t, u, v)u$, alors η engendre $\omega_{R/I}$ en dehors de l'origine et

$$\omega_{R/I}/(\eta) \simeq C\langle u, v, t\rangle/(u, v, t^n).$$

Soit $I' = (u, v^2)$. I'/I est $R/(u, v)$-monogène, engendré par la classe de u.

On a la suite exacte

$$0 \to I'/I \to R/I \to R/I' \to 0$$

et par dualité la suite exacte

$$0 \to \omega_{R/I'} \to \omega_{R/I} \to R/(u, v) \to 0.$$

On peut identifier $\omega_{R/I'}$ à $(0:I')_{\omega_{R/I}} = R/I(\dot{u})$ et $\omega_{R/(u,v)}$ à $R/(u, v)$ de manière que la flèche $\omega_{R/I'} \to \omega_{R/I}$ devient l'inclusion $R/I(\dot{u}) \hookrightarrow \omega_{R/I} = (\dot{u}, \dot{v})$ et que la flèche $\omega_{R/I} \to R/(u, v)$ envoye $\dot{v}$ en 1. Il résultera alors que tout η de $\omega_{R/I'}$ de l'image inversible dans $R/(u, v)$, a les propriétés ci-dessus.

Maintenant le cadre global. Soit Y une courbe lisse de P_3 et T une courbe de Cohen-Macaulay, génériquement i.c., de support Y et de multiplicité 3. T est obtenu comme dans la section précédente, et conservons les notation L, Z, D. On a la suite exacte

$$0 \to L^2(D) \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_Z \to 0,$$

et la suite exacte duale

$$0 \to \omega_Z \to \omega_T \to \omega_Y \otimes L^{-2}(-D) \to 0.$$

Supposons que $\omega_Y \otimes L^{-2}(-D) \simeq \mathcal{O}_Y(m)$, $m \in Z$, et que $H^1(\omega_Z(-m)) = 0$. On trouve alors une section globale η de $\omega_T(-m)$ dont l'image dans $\mathcal{O}_Y$ soit 1. Par la discussion local, il résultera que η engengre $\omega_T(-m)$ sur $Y \setminus |D|$ et que dans un point x de $|D|$ la fibre de $\omega_T(-m)/\mathcal{O}_T(\eta)$ sera isomorphe à $C\langle u, v, t\rangle/(u, v, t^n)$, $n = v_x(D)$. Soit k un entier, $k \leqslant 4+m$. Si P est un polynôme homogène de degré $4+m-k$ tel que ses zéros coupent transversalement Y et évitent $|D|$, alors $\xi = P\eta$ définit une extension

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}_T(k) \to 0,$$

$\mathcal{F}$ étant réflexif spécial. De plus, dans un point x de $|D|$,

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_x, \mathcal{O}_x) \simeq \mathcal{O}_x/(u, v, t^n), \qquad n = v_x(D).$$

Dans les deux constructions il est difficile d'avoir des renseignements précis sur les entiers q, tels que $\mathscr{F}(q)$ soit globalement engendré: en utilisant le critère de Castelnuovo, on aura à vérifier les conditions ($q \geqslant 0$):

$$h^1 \mathscr{I}_T(q+k-1) = h^2 \mathscr{I}_T(q+k-2) = h^3 \mathscr{I}_T(q+k-3) = 0.$$

Regardons le cas particulier $Y =$ *une droite* et soit d'abord T *une structure double*. Soit $r \geqslant -1$ donné par $L = \mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_T = \mathcal{O}_Y(r)$. L'existence d'un faisceau special, donné par une extension

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_T(k) \to 0,$$

est assurée si $k \leqslant 1-r$. De plus, si $q \geqslant 2+r-k$ pour $r \geqslant 0$ et $q \geqslant 2-k$ pour $r = -1$, $\mathscr{F}(q)$ est globalement engendré. Les classes de Chern sont

$$c_1(\mathscr{F}(q)) = k+2q, \quad c_2(\mathscr{F}(q)) = 2+kq+q^2, \quad c_3(\mathscr{F}(q)) = 4-2r-2k.$$

On obtiendra alors des surfaces de degré $2(k+2q)$, ayant $4c_1(\mathscr{F}(q))c_2(\mathscr{F}(q)) - 3c_3(\mathscr{F}(q))$ points singulieres (comptés avec multiplicité), dont $2-r-k$ de type A_3 (ceci pouvant être donnés à priori, sur une droite) et les autres des noeuds. Les plus simples exemples sont: surface de degré 4 ayant un point A_3 et 8 noeuds, surface de degré 6 avec 2 points A_3 et 32 noeuds, surface de degré 8 avec 2 points A_3 et 80 noeuds ou 3 points A_3 et 72 noeuds.

Supposons maintenant que T *est une structure triple sur* Y et $L = \mathcal{O}_Y(r)$, $r \geqslant -1$. Si $k \leqslant 1-2r$, alors il existe $\mathscr{F}$ spécial, donnée par une extension

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_T(k) \to 0.$$

De plus, si $q \geqslant 3+r-k$ pour $r \geqslant 0$ et $q \geqslant 3-k$ pour $r = -1$, alors $\mathscr{F}(q)$ est globalement engendré. Pour ceci, on utilise les suites exactes

$$0 \to \mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_Y \to \mathcal{O}_Y(r) \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{I}_T \to \mathscr{I}_Z \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_Y(2r) \to 0,$$

le seul point plus difficile étant à prouver que l'application induite

$$H^0 \mathscr{I}_Z(q+k-1) \xrightarrow{\varepsilon} H^0 \mathcal{O}_X(2r+q+k-1)$$

est surjective. Pour ça, soient f, $g \in H^0 \mathcal{O}_Y(r+1)$, tels que l'idéal homogène de $\mathscr{I}_Z$ soit $(fx+gy, x^2, xy, y^2)$. L'image par ε de $fx+gy$ peut s'écrire sous la forme $-ag^2+bfg-cy^2$, où a, b et c sont de $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(r))$: on utilise le complexe de Koszul de (f, g) et sa puissance symétrique S^2. On s'aperçoit que si $P \in H^0 \mathcal{O}_Y(q+k-r-3)$ et A, B, $C \in H^0 \mathcal{O}_Y(q+k-3)$, alors l'image par ε de $(fx+gy)P+Ax^2+Bxy+Cy^2$ est $P(-ag^2+bfg-cf^2)+Ag^2-Bfg+Cf^2$ et on conclut en utilisant de nouveau le complexe de Koszul (il suffit de chercher des préimages ayant $P = 0$).

Les classes de Chern de $\mathscr{F}$ sont

$$c_1(\mathscr{F}(q)) = k+2q, \quad c_2(\mathscr{F}(q)) = 3+kq+q^2, \quad c_3(\mathscr{F}(q)) = 6-3k-6r.$$

On obtient des surfaces de degré $2(k+2q)$, ayant $2-2r-k$ singularités de type A_5 et des noeuds. Par exemple: surface de degré 6 avec un point A_5 et 24 noeuds, surface de degré 8 avec 2 points A_5 et 72 noeuds, surface de degré 10 avec 3 points A_5 et 144 noeuds ou un point A_5 et 168 noeuds.

Regardons enfin le cas: Z une structure double sur la droite Y tel que $\mathscr{I}_Y/\mathscr{I}_Z \simeq \mathcal{O}_Y(r)$, $r \geqslant -1$, D un diviseur positif de degré $d > 0$ sur Y et T *une courbe de multiplicité* 3 *comme dans la proposition* 5 (il existe toujours). Si $k \leqslant 2-2r-d$, alors la construction donnée permet de construire des faisceaux spécials $\mathscr{F}$, comme extensions

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathscr{F} \to \mathscr{I}_T(k) \to 0.$$

Si $q \geqslant d+2+r-k$ et $q \geqslant 0$ si $(r = -1,\ d = 1,\ k = 3)$, alors $\mathscr{F}(q)$ est globalement engendré. Pour vérification le point plus difficil sera de montrer la surjectivité de l'application

$$H^0\, \mathscr{I}_Z(q+k-1) \xrightarrow{\varepsilon} H^0\, \mathcal{O}_Y(d+2r+q+k-1),$$

induite par la suite exacte

$$0 \to \mathscr{I}_T \to \mathscr{I}_T \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{O}_Y(d+2r) \to 0.$$

On choisi d'abord $\varphi \in H^0\, \mathcal{O}_Y(r)$ tel que $(\varphi) = D$. On trouve $f,\ g \in H^0\, \mathcal{O}_Y(r+1)$ sans zéros communs et $a,\ b,\ c \in H^0\, \mathcal{O}_Y(d+r)$ tels que $ag^2-bfg+cf^2$ ne s'annule pas sur $|D|$, de maniere que $\varphi(fx+gy)+ax^2+bxy+cy^2$ soit dans $\mathscr{I}_T(d+r+2)$ (on écrit $\varepsilon(fx+gy)$ sous la forme ...). On s'aperçoit que si $P \in H^0\, \mathcal{O}_Y(q+k-r-3)$ et $A,\ B,\ C \in H^0\, \mathcal{O}_Y(q+k-3)$, alors l'image par ε de $(fx+gy)P+Ax^2+Bxy+Cy^2$ est $P(-ag^2+bfg-cf^2)+\varphi(Ag^2-Bfg+Cf^2)$. On conclut à l'aide des complexes de Koszul donnés par $(\varphi,\ ag^2-bfg+cf^2)$ et (f, g). Pour un tel $\mathscr{F}(q)$, $c_1(\mathscr{F}(q)) = k+2q$, $c_2(\mathscr{F}(q)) = 3+kq+q^2$ et $c_3(\mathscr{F}(q)) = 6-3k-6r-2d$. La surface discriminant de la section générale de $S^2(\mathscr{F}(q))$ est de degré $2(k+2q)$ et a des singularités de type $A_{2\nu-1}$, en nombre de $4c_1(\mathscr{F}(q))c_2(\mathscr{F}(q))-3c_3(\mathscr{F}(q))$; en tout point de $|D|$ on aura une singularité $A_{2\nu-1}$ avec $\nu = \nu_x(D)$, en déhors de $|D|$ on aura des noeuds ou des singularités A_5, les dernières en nombre de $2-2r-k-d$ et situées sur Y. On obtient par exemple: surface de degré 4 avec un point A_5 et 9 noeuds, surface de degré 6 avec 2 points A_5 et 33 noeuds, surface de degré 8 avec 3 points A_5 et 73 noeuds, surface de degré 10 avec un point A_3, un point A_5 et 160 noeuds. Pour arriver aux combinaisons plus variées des singularités, il faut que le degré de la surface soit assez élévé.

Références

[1] C. Bănică and I. Coandă, *Existence of rank 3 vector bundles with given Chern classes on homogeneous rational 3-folds*, Manuscripta Math. 51 (1985), 121–143.

[2] C. Bănică et O. Forster, *Sur les structures multiples*, manuscrit.

[3] —, —, *Complete intersections in Stein manifolds*, Manuscripta Math. 37 (1982), 343–356.
[4] C. Bănică and N. Manolache, *Rank 2 stable vector bundles on* $P^3(C)$ *with Chern classes* $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, Math. Z. 190 (1985), 315–339.
[5] C. Bănică and M. Putinar, *On complex vector bundles on rational threefolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 97 (1985), 279–288.
[6] W. Barth, *Counting singularities of quadratic forms on vector bundles*, in *Vector Bundles and Differential Equations*, Progr. Math. 7, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart 1980, 1–19.
[7] *Complete Intersections*, Lecture Notes in Math. 1092, Springer-Verlag, Berlin 1984.
[8] D. Ferrand, *Courbes gauches et fibrés de rang* 2, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 281 (1975), 345–347.
[9] O. Forster und K. J. Ramspott, *Analytische Modulgarben und Endromisbündel*, Invent. Math. 2 (1966), 145–170.
[10] R. Hartshorne, *Stable vector bundles of rank* 2 *on* P^3, Math. Ann. 238 (1978), 229–280.
[11] —, *Stable reflexive sheaves*, Math. Ann. 254 (1980), 121–176.
[12] A. Hirschowitz et R. Marlin, *Nouvelles surfaces à noeuds dans* P^3, Math. Ann. 267 (1984), 83–89.
[13] K. Hulek and A. van de Ven, *The Horrocks–Mumford bundle and the Ferrand construction*, Manuscripta Math. 50 (1985), 313–335.
[14] M. Manaresi, *Permanence of local properties under hyperplane sections*, this volume, 291–297.
[15] R. Miró, *Chern classes of rank* 2 *reflexive sheaves*, préprint.
[16] P. Murthy, *Affine varieties as complete intersections*, Int. Symp. Algebraic Geometry Kyoto 1977, 231–236.
[17] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart 1980.
[18] M. Schneider, *Vollständige, fast-vollständige und mengentheoretisch vollständige Durchschnitte in Steinschen Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 260 (1982), 151–174.
[19] —, *On the number of equations needed to describe a variety*, Proc. Sympos. Pure Math. 41, American Mathematical Society, Providence 1984.
[20] J. P. Serre, *Sur les modules projectifs*, Sem. Dubreil–Pisot, 14, 1960/1961.

Presented to the semester
Singularities
15 February–15 June, 1985