COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXXII 1975 FASC. 2

БЕСКВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТИЧНОЕ ПОЛЕ

И. Ш. СЛАВУТСКИЙ (ЛЕНИНГРАД)

0. Методами теории полей классов Шольц [14] изучил вопрос о том, как связана делимость на 3 числа классов мнимого и вещественного квадратичных полей, фундаментальные дискриминанты которых отличаются множителем 3. Элементарные исследования в этом направлении были проделаны Киселёвым [8], [9], который доказал сравнения

$$h(3n)\,U_1 \equiv T_1 h(-n) \pmod 3, \tag{1}$$

где $h(3n)$ и $h(-n)$ — число классов соответственно вещественного и мнимого квадратичных полей $Q(\sqrt{3n})$ и $Q(\sqrt{-n})$, $E_1 = T_1 + U_1\sqrt{3n}$ — основная единица поля $Q(\sqrt{3n})$, и

$$h(d)\frac{U_1T_1}{3} \equiv h(-3d) \pmod 3, \tag{2}$$

причём $h(d)$ и $h(-3d)$ — число классов соответственно поля $Q(\sqrt{d})$ и $Q(\sqrt{-3d})$, $d > 0$, $d \equiv 1 \pmod 3$, а $E_1 = T_1 + U_1\sqrt{d}$ — основная единица поля $Q(\sqrt{d})$, Q — поле рациональных чисел. Заметим также, что в случае $n \equiv 1 \pmod 3$ сравнение (1) было позднее доказано в совместной работе Анкени, Артина и Чоула [1], а в некоторых частных случаях имеются распространения этих результатов в различных направлениях.

В недавней работе Чоула и Хартунг [3] эффективно строят дискриминант мнимого квадратичного поля, число классов которого делится на 3, именно: если $d = 27k^2 + 4 \equiv 1 \pmod 3$ — простое число, то число классов мнимого квадратичного поля $h(-d)$ кратно трём.

Содержание этой заметки дополняет перечисленные результаты. С этой целью уточняются теоремы Нагелля [13] и Эстерманна [6] о бесквадратных числах, так что каждый из рассматриваемых нами вариантов аддитивной структуры дискриминанта квадратичного поля соответствует бесконечному количеству случаев.

1. Нагелль [13] установил, что для фиксированных $a, b \in Z$, $(a, b) = 1$, среди чисел вида $az^2 + b$, $z \in N$, существует бесконечно много бесквадратных (здесь и в дальнейшем Z и N соответственно множество натуральных и кольцо целых рациональных чисел). Позднее Эстерманн [6] доказал асимптотическую формулу для количества бесквадратных чисел вида $z^2 + l$, где $l \neq 0$ — фиксированное целое число, а $z \in N$. Ниже для целей дальнейшего методом Эстерманна доказывается

Теорема 1. *Если $H(n)$ — количество бесквадратных чисел, меньших n и вида $c^2 z^2 + l$, где $c \in N$, $l \neq 0$, $l \in Z$, всякий простой делитель p числа c удовлетворяет условию $p^2 \nmid l$, а z пробегает натуральные числа, тогда*

$$H(n) = B\sqrt{n} + O\left(\sqrt[3]{n}\ln n\right),$$

где B — постоянная (см. ниже (12) [1]).

Доказательство. Прежде всего из

$$\sum_{\substack{x,y \\ x^2 y = r}} \mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } r \text{ — бесквадратное число,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $r \in N$ и, как обычно, $\mu(x)$ — функция Мёбиуса, следует

$$(1) \qquad \sum_{\substack{x,y,z \\ x^2y = z^2c^2 + l \leqslant n}} \mu(x) = \sum_{\substack{z \\ z^2c^2 + l \leqslant n}} \sum_{\substack{x,y \\ x^2 y = z^2 c^2 + l}} \mu(x) = H(n).$$

Пусть

$$(2) \qquad H_1 = \sum_{\substack{x,y,z \\ x^2y = z^2c^2 + l \leqslant n \\ x \leqslant \sqrt[3]{n}}} \mu(x).$$

Из (1) и (2) следует

$$(3) \qquad |H(n) - H_1| < \sum_{\substack{x,y,z \\ x^2y = z^2c^2 + l \leqslant n \\ y < \sqrt[3]{n}}} 1 = \sum_{y < \sqrt[3]{n}} A(y),$$

где $A(y)$ — количество решений $x^2 y = z^2 c^2 + l \leqslant n$ для фиксированного y.

Для оценки $A(y)$ заметим предварительно, что если $y = u^2$, $u \in N$, тогда

$$(xu + cz)(xu - cz) = l, \qquad A(y) < \tau(|l|),$$

---

[1] При ссылках на формулы внутри одного пункта номер пункта опускается, т.е. (12) вместо (1.12), например.

где $\tau(k)$ — количество делителей натурального числа k. Если же y не является полным квадратом натурального числа, то

$$\left(cz+x\sqrt{y}\right)\left(cz-x\sqrt{y}\right) = -l \quad \text{или} \quad N\left(cz+x\sqrt{y}\right) = -l,$$

где $N(\alpha)$ — норма целого числа α, принадлежащего вещественному квадратичному полю k, которое порождено присоединением $\sqrt{y}$ к полю Q. Поскольку далее

$$2 < cz+x\sqrt{y} < 2\sqrt{n+|l|},$$

а основная единица $E_1 > \frac{3}{2}$, то количество целых чисел $cz+x\sqrt{y}$ поля k, лежащих в интервале $\left(2, 2\sqrt{n+|l|}\right)$ и соответствующих главным идеалам $\left(cz+x\sqrt{y}\right)$ поля k (общее число таких главных идеалов поля k меньше, чем $\tau(|l|)$), не превосходит $\ln\sqrt{n+|l|}/\ln\frac{3}{2}+1$, так что окончательно для любого y выполняется $A(y) = O(\ln n)$. Поэтому из (3) вытекает

$$H(n)-H_1 = O(n^{1/3}\ln n). \tag{4}$$

Обозначим далее

$$H_2(m) = \sum_{\substack{x,y,z \\ x^2y=c^2z^2+l\leqslant n \\ x\leqslant\sqrt[3]{n},(x,l)=m}} \mu(x). \tag{5}$$

Если m не свободно от квадратов, то $\mu(x) = 0$. Если же $\mu(x) \neq 0$, то из $(x, l) = m$ следует $m\,|\,c^2z^2$, откуда $m^2\,|\,c^2z^2$, так что $m^2|\,l$. Отсюда имеем

$$H_1 = \sum_{\substack{m \\ \mu(m)\neq 0,m^2|l}} H_2(m). \tag{6}$$

Полагая $x = ms$ и $z = mt$, из (5) получаем

$$H_2(m) = \mu(m)\sum_{s,y,t}\mu(s),$$

где суммирование ведётся при условиях $s^2y \leqslant nm^{-2}$, $s^2y-c^2t^2 = lm^{-2}$, $s<\sqrt[3]{n}\,m^{-1}$ и $(s, l) = 1$. Далее

$$H_2(m) = \mu(m)\sum_{\substack{(s,l)=1 \\ s<\sqrt[3]{n}\,m^{-1}}} \mu(s) \sum_{\substack{s^2y\leqslant nm^{-2} \\ s^2y-c^2t^2=lm^{-2}}} 1. \tag{7}$$

Оценим сначала, учитывая, что $(s, c) = 1$, внутреннюю сумму

$$\sum_{\substack{s^2y\leqslant nm^{-2}\\ s^2y-c^2t^2=lm^{-2}}} 1 = \sum_{\substack{-lm^{-2}<c^2t^2\leqslant(n-l)m^{-2}\\ c^2t^2\equiv -lm^{-2}\pmod{s^2}}} 1 = \sum_{\substack{-lm^{-2}c^{-2}<t^2\leqslant(n-l)m^{-2}c^{-2}\\ t^2\equiv -lm^{-2}c^{-2}\pmod{s^2}}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{t\leqslant s^2\\ t^2\equiv -lm^{-2}c^2\pmod{s^2}}} \left\{\sqrt{n-l}\,(mc)^{-1}s^{-2}+O(1)\right\}.$$

Так что если $\nu(a, b)$ обозначает количество решений сравнения $u^2 \equiv a \pmod{b}$, $(a, b) = 1$, то

$$\nu(a, b^2) \leqslant 2\tau(b) \tag{8}$$

и окончательно

$$\sum_{\substack{s^2y\leqslant nm^{-2}\\ s^2y-c^2t^2=lm^{-2}}} 1 = \sqrt{n-l}\,(mc)^{-1}s^{-2}\nu(-l, s^2)+O\big(\tau(s)\big).$$

Тогда из (7) с помощью оценки для суммы делителей числа получаем

$$H_2(m) = \mu(m)\sqrt{n-l}\,(mc)^{-1} \sum_{\substack{(s,l)=1\\ s<\sqrt[3]{n}m^{-1}}} \mu(s)s^{-2}\nu(-l, s^2)+O\big(\sqrt[3]{n}\ln n\big). \tag{9}$$

Положим теперь

$$G(k) = \sum_{(s,k)=1} \mu(s)s^{-2}\nu(k, s^2). \tag{10}$$

Поскольку в силу (8)

$$\Big|G(-l)- \sum_{\substack{(s,l)=1\\ s<\sqrt[3]{n}m^{-1}}} \mu(s)s^{-2}\nu(-l,s^2)\Big| <2 \sum_{s>\sqrt[3]{n}m^{-1}} s^{-2}\tau(s) = O(n^{-1/3}\ln n),$$

тогда из (9)

$$H_2(m) = \mu(m)\sqrt{n-l}\,(mc)^{-1}G(-l)+O\big(\sqrt[3]{n}\ln n\big) \tag{11}$$

и, возвращаясь к (6) и (4), с помощью (11) получаем

$$H(n) = \sqrt{n-l}\,c^{-1}G(-l) \sum_{\substack{\mu(m)\neq 0\\ m^2|l}} \mu(m)m^{-1}+O\big(\sqrt[3]{n}\ln n\big)$$

или

$$H(n) = \sqrt{n}\,c^{-1}G(-l)\prod_{p^2|l} (1-p^{-1})+O\big(\sqrt[3]{n}\ln n\big), \tag{12}$$

где

$$G(-l)=\sum_{(s,l)=1}\mu(s)s^{-2}\nu(-l,s^2)=\prod_{p\nmid l}\left(1-\nu(-l,p^2)p^{-2}\right)>\prod_{p}(1-2/p^2)>0$$

в силу $\nu(k,p^2)\leqslant 2$, так что теорема доказана.

2. Сформулируем в виде лемм несколько известных результатов, используемых ниже. Пусть обобщённые (в смысле Берже-Леопольдта) числа Бернулли, принадлежащие первообразному характеру $\chi \bmod f$, $f\in N$, введены равенством

$$B_k(\chi)=f^{k-1}\sum_{r=1}^{f}\chi(r)B_k(r/f), \tag{1}$$

где $B_k(u)$ — многочлены Бернулли, определенные тождеством

$$B_k(u)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_iu^{k-i},$$

а B_k — числа Бернулли, удовлетворяющие символическому соотношению $(B+1)^k-B^k=k$, $k=2,3,\ldots$ и $B_0=1$, так что $B_1=\frac{1}{2}$.

Лемма 1 (см. [8], [10]). *Для числа классов идеалов $h(d)$ квадратичного поля $Q(\sqrt{d})$ выполняются сравнения*

$$h(d)\frac{U_l}{p^{l-1}}\equiv-\frac{T_l}{2m}B_m(\chi)\ (\mathrm{mod}\,p^l),\qquad d=np>0,\ n\geqslant 1,\ \chi \bmod n, \tag{2}$$

$$h(d)\frac{\bar U_l}{p^l}\equiv-\frac{\bar T_l}{4m}B_{2m}(\chi)\ (\mathrm{mod}\,p^l),\qquad d>0,\ (p,d)=1,\ \chi \bmod d, \tag{3}$$

$$h(d)\equiv-\frac{1}{m+1}B_{m+1}(\chi)\ (\mathrm{mod}\,p^l),\qquad d=-np<-4,\ n\geqslant 1,\ \chi \bmod n, \tag{4}$$

$$h(d)\equiv-\frac{1}{2m+1}B_{2m+1}(\chi)\ (\mathrm{mod}\,p^l)\qquad d<-4,\ (p,d)=1,\ \chi \bmod |d|, \tag{5}$$

где $E_1=T_1+U_1\sqrt{d}$ — основная единица поля $Q(\sqrt{d})$, $E_l=T_l+U_l\sqrt{d}=E_1^{p^{l-1}}$, $\bar E_l=\bar T_l+\bar U_l\sqrt{d}=E_1^{(p-\chi(p))p^{l-1}}$, $m=(p-1)p^{l-1}/2$, $l\in N$, а χ — символ Кронекера (по указанному модулю).

Замечание. Легко определить знак обобщённых чисел Бернулли в (2)-(5), если учесть, что для суммы Гаусса справедливо равенство

$$\sum_{u=1}^{f}\chi(u)\exp\left(\frac{2\pi iur}{f}\right)=\chi(r)\sqrt{f\chi(-1)},\qquad \chi \bmod f,$$

так что

$$\sum_{u=1}^{f} \chi(u) \sin \frac{2\pi r u}{f} = \chi(r) \sqrt{f}, \quad \chi(-1) = -1,$$

и

$$\sum_{u=1}^{f} \chi(u) \cos \frac{2\pi r u}{f} = \chi(r) \sqrt{f}, \quad \chi(-1) = 1,$$

а в интервале $(0, 1)$ многочлены Бернулли разлагаются в ряды Фурье

$$B_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1} \frac{2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m^{2k+1}}$$

и

$$B_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^{2k}}.$$

Объединяя эти результаты и используя представление L-функции Дирихле в виде произведения, видим, что

$$(-1)^{k-1} \sum_{u=1}^{f} \chi(u) B_{2k+1}\left(\frac{u}{f}\right) = \frac{2(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sqrt{f} \prod_{q} \left(1 - \chi(q) q^{-(2k+1)}\right)^{-1} > 0,$$

если $\chi(-1) = -1$ и $k \geqslant 1$, и

$$(-1)^{k-1} \sum_{u=1}^{f} \chi(u) B_{2k}\left(\frac{u}{f}\right) = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sqrt{f} \prod_{q} \left(1 - \chi(q) q^{-2k}\right)^{-1} > 0,$$

если $\chi(-1) = +1$ и $k \geqslant 1$. Здесь q пробегает все простые числа. Окончательно из (1) следует, что

$$\operatorname{sign} B_m(\chi) = (-1)^{[m/2]-1} \quad \text{при } m \geqslant 2,$$

где $[u]$ — целая часть числа u, χ — символ Кронекера и $\chi(-1) = (-1)^m$. Для единичного характера $\chi = \varepsilon$, когда обобщённые числа Бернулли совпадают с обычными числами Бернулли, получаем хорошо известный результат о знаках чисел Бернулли.

Далее, сравнение (1.1) распространяется на случай $d \equiv 2 \pmod 3$, именно справедлива

Лемма 2. *Если $h(d)$ и $h(-3d)$ число классов идеалов соответственно полей $Q(\sqrt{d})$ и $Q(\sqrt{-3d})$, $E_1 = T_1 + U_1\sqrt{d}$ — основная единица вещественного квадратичного поля $Q(\sqrt{d})$ с нормой $N(E_1)$, $d \equiv 2 \pmod 3$ и $d > 0$, то выполняется сравнение*

$$h(d) \frac{U_1 T_1}{3} (T_1^2 + d U_1^2) \equiv -N(E_1) h(-3d) \pmod 3. \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, из сравнений (3) и (4) с $p = 3$ и $l = 1$ получаем

$$h(d)\frac{\overline{U}_1}{3} \equiv -\overline{T}_1 h(-3d) \pmod 3,$$

так что при $d \equiv 1 \pmod 3$ в силу $\overline{U}_1 = 2T_1U_1$ и $\overline{T}_1 = \overline{T}_1^2 + U_1^2 d \pmod 3$ имеем (0.2), а при $d \equiv 2 \pmod 3$ в силу

$$\frac{\overline{U}_1}{3} = 4\frac{T_1U_1(T_1^2+U_1^2d)}{3} \equiv \frac{T_1U_1(T_1^2+U_1^2d)}{3} \pmod 3$$

и

$$\overline{T}_1 \equiv T_1^4 + U_1^4 \equiv N(E_1) \pmod 3$$

приходим к (6).

Отметим также, что сравнение (0.1) есть следствие (2) с $l = 2$ и (5) для $l = 1$ при $p = 3$.

Лемма 3. *Для числа классов идеалов квадратичных полей справедлива оценка сверху*

$$h(d) < \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{если } d > 0, \\ \frac{1}{3}\sqrt{|d|}\ln|d|, & \text{если } d < -4. \end{cases}$$

Доказательство см. в [17]. Для достаточно больших по абсолютной величине дискриминантов возможно уточнение констант в правых частях неравенств с помощью известных результатов Берджесса об оценках сумм характеров.

3. Пусть $D = k^2 + r$ — бесквадратное число, $k \in N$, $r \in \boldsymbol{Z}$, $-k < r \leqslant k$, $|r| \neq 1$, 4 и $4k \equiv 0 \pmod r$. Вещественное квадратичное поле, фундаментальный дискриминант d которого имеет свободное от квадратов ядро указанного типа D, называется *полем Ришо-Дегерта* (в широком смысле в терминологии Иокои [19]). В этом случае основная единица поля $E_1 = T_1 + U_1\sqrt{d}$ имеет вид

$$(1) \qquad E_1 = \begin{cases} \dfrac{2k^2+r}{|r|} + \dfrac{2k}{|r|}\sqrt{d}, & \text{если } d = D \equiv 1 \pmod 4, \\[2ex] \dfrac{2k^2+r}{|r|} + \dfrac{k}{|r|}\sqrt{d}, & \text{если } \dfrac{d}{4} = D \equiv 3,\ 4 \pmod 4, \end{cases}$$

а её норма $N(E_1) = +1$ ([5], [19]).

Вещественные квадратичные поля типа Ришо-Дегерта (заметим, кстати, что соответствующие этим полям решения уравнения Пелля, определяющие основную единицу поля, были известны ещё Эйлеру [7], гл. 7, § 107-111; см. также таблицы Дегена [4]) в последнее время неоднократно служили удобным полигоном для испытания ряда гипотез и доказательства некоторых теорем теории квадратичных полей. Ниже с их помощью эффективно конструируются мнимые квадратичные поля, число классов которых кратно трём.

I. Пусть $D = (3zr)^2 + r$ свободно от квадратов (т.е. $k = 3|r|z$), $r \equiv 0 \pmod 3$. Тогда из (1) следует $T_1 \equiv \operatorname{sign} r \pmod 3$, а $U_1 \equiv 0 \pmod 3$, так что $3 \mid h(-d/3)$ в силу (0.1), причём d — фундаментальный дискриминант вещественного квадратичного поля с бесквадратным ядром D.

II. Пусть $D = (9zr)^2 + r$ свободно от квадратов и $r \equiv 1 \pmod 3$. Тогда $d \equiv D \equiv 1 \pmod 3$, так что поскольку из (1) в этом случае $U_1 \equiv 0 \pmod 9$, то как следствие (0.2) получаем $3 \mid h(-3d)$.

III. Наконец, пусть $D = (9zr)^2 + r$ свободно от квадратов и $r \equiv$ $\equiv 2 \pmod 3$. Тогда $d \equiv D \equiv 2 \pmod 3$ и из (2.6) снова $3 \mid h(-3d)$.

IV. Аналогичные результаты могут быть получены для полей Ришо-Дегерта в узком смысле, когда $D = k^2 + r$ и $r = \pm 1, \pm 4$.

1. Если $d = (9z)^2 + 4$ — фундаментальный дискриминант вещественного квадратичного поля, так что $E_1 = \frac{1}{2}(9z + \sqrt{d})$, то из (0.2) в силу $T_1 \equiv 0 \pmod 9$ следует $3 \mid h(-3d)$.

2. Если $D = (9z)^2 + 1$ свободно от квадратов и, следовательно, $E_1 = 9z + \sqrt{d}$, когда $d = D$, или $E_1 = \frac{1}{2}(18z + \sqrt{d})$, когда $d = 4D$, так что из (0.2), как и выше, $3 \mid h(-3d)$, $d \equiv 1 \pmod 3$.

3. Если $D = (9z)^2 - 4$ или $D = (9z)^2 - 1$ — свободно от квадратов и, следовательно, $d \equiv 2 \pmod 3$, то для компонентов основной единицы $T_1 \equiv 0 \pmod 9$ и $U_1 \not\equiv 0 \pmod 3$, так что $3 \mid h(-3d)$.

Как следует из теоремы 1, существует бесконечно много вещественных квадратичных полей типа Ришо-Дегерта для любого числа r. В частности, каждая из форм дискриминанта, приведённая выше, соответствует бесконечному количеству полей (²).

4. Аналоги теоремы Куммера-Вандивера строились многими авторами для произвольных абсолютно абелевых полей ([11], [12], [16]-[18]). Здесь, в заключение, для вещественного квадратичного поля типа Ришо-Дегерта приводится некоторое уточнение этих результатов.

Теорема 2. *Пусть $k^2 + r$ — свободное от квадратов ядро фундаментального дискриминанта d вещественного квадратичного поля $Q(\sqrt{d})$ типа Ришо-Дегерта, так что $-k < r \leqslant k$, $k \in N$, $4k \equiv 0 \pmod r$, и $p \mid d$, но $(p, k) = 1$, $p > 3$ — простое число. Тогда*

$$p^l \mid h(d) \Leftrightarrow p^l \mid \frac{B_m(\chi)}{m}, \tag{1}$$

где $\chi \bmod n$ — символ Кронекера и $d = np$, $n \in N$, $m = (p-1)p^{l-1}/2$, $l \in N$.

(²) Более сложные эффективные конструкции приведены в [2] и [15].

Доказательство. Действительно, из $T_1^2 - U_1^2 d = \pm 1$ имеем $(p, T_1) = 1$ и, следовательно, в силу того, что $(p, k) = 1$ влечёт за собой $p \nmid U_1$ для полей типа Ришо-Дегерта, (1) следует из (2.2). При этом учтено, что U_1 и U_l/p^{l-1} делятся на одинаковые степени простого числа $p > 3$ ([17], лемма 1).

Подобные результаты имеют место и для полей типа Ришо-Дегерта в узком смысле.

Теорема 3. *Если свободное от квадратов ядро фундаментального дискриминанта* $d = np > 0$, $n \in N$, *вещественного квадратичного поля* $Q(\sqrt{d})$ *одного из видов*

$$k^2+1 \equiv 2 \pmod 4, \quad k^2+1 \equiv 1 \pmod 4, \quad k^2+4 \equiv 1 \pmod 4,$$

$$k^2-1 \equiv 3 \pmod 4, \quad \frac{k^2-1}{4} \equiv 2 \pmod 4, \quad k^2-4 \equiv 1 \pmod 4,$$

p — *простое нечётное число, тогда*

$$p^l \mid h(d) \Leftrightarrow p^l \mid \frac{B_m(\chi)}{m}, \tag{2}$$

где $\chi \bmod n$ — *символ Кронекера и* $m = (p-1)p^{l-1}/2$.

Эквивалентность (2) — непосредственное следствие (2.2) в силу того, что в этих случаях $U_1 = 1$ или $\frac{1}{2}$. Как вытекает из леммы 3, в тех случаях, когда $p > \sqrt{d}$, теоремы 2 и 3 позволяют сделать некоторые заключения, относящиеся к арифметической теории обобщённых чисел Бернулли и связанные с так называемой гипотезой Анкени-Артина-Чоула ([1], [10]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] N. C. Ankeny, E. Artin and S. Chowla, *The class-number of real quadratic fields*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. 37 (1951), стр. 524-525.

[2] N. C. Ankeny and S. Chowla, *On the divisibility of the class number of quadratic fields*, Pacific Journal of Mathematics 5 (1955), стр. 321-324.

[3] S. Chowla and P. Hartung, *Congruences for class-numbers of imaginary quadratic fields* (mod 3), Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter 12 (1972).

[4] C. F. Degen, *Canon Pellianus*, 1817.

[5] G. Degert, *Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reeller quadratischer Zahlkörper*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 22 (1958), стр. 92-97.

[6] T. Estermann, *Einige Sätze über quadratfreie Zahlen*, Mathematische Annalen 105 (1931), стр. 653-662.

[7] L. Euler, *Algebra II*, 1770.

[8] А. А. Киселёв, *О некоторых сравнениях для числа классов идеалов вещественных квадратичных полей*, Учёные записки Ленинградского государственного университета, Серия математических наук, 16 (1949), стр. 20-31.

[9] — *Об одном сравнении, связывающем числа классов идеалов в двух квадратичных полях, дискриминанты которых отличаются множителем* — 3, Учёные записки Ленинградского педагогического института 1 (1955), стр. 52-56.

[10] А. А. Киселёв и И. Ш. Славутский, *Преобразование формул Дирихле и арифметическое вычисление числа классов идеалов квадратичных полей*, в сборнике Труды 4-го Всесоюзного математического съезда, т. 2, стр. 105-112, Ленинград 1964.

[11] H. W. Leopoldt, *Eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Zahlen*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 22 (1958), стр. 131-140.

[12] — *Über Fermatquotienten von Kreiseinheiten und Klassenzahlformeln modulo p*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, 9 (1960), стр. 39-50.

[13] T. Nagell, *Zur Arithmetik der Polynome*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 1 (1922), стр. 179-194.

[14] A. Scholz, *Über die Beziehung der Klassenzahlen quadratischer Körper zueinander*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 166 (1932), стр. 201-203.

[15] D. Shanks and P. Weinberger, *A quadratic field of prime discriminant requiring three generators for its class group, and related theory*, Acta Arithmetica 21 (1972), стр. 71-87.

[16] K. Shiratani, *Kummer's congruence for generalized Bernoulli numbers and its application*, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Series A, 26 (1972), стр. 119-138.

[17] И. Ш. Славутский, *Оценка сверху и арифметическое вычисление числа классов идеалов вещественных квадратичных полей*, Известия высших учебных заведений, Математика, 2 (45) (1965), стр. 161-165.

[18] — *Локальные свойства чисел Бернулли и обобщение теоремы Куммера-Вандивера*, ibidem 3 (118), стр. 61-69.

[19] H. Yokoi, *On real quadratic fields containing units with norm* —1, Nagoya Mathematical Journal 33 (1968), стр. 139-152.

Reçu par la Rédaction le 19. 11. 1973