NUMERICAL ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 24
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1990

АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

БОШКО С. ЙОВАНОВИЧ

Institute of Mathematics, Faculty of Sciences, University of Belgrade, Belgrade, Yugoslavia

В работе исследуется сходимость разностных схем аппроксимирующих различные краевые задачи с переменными коэффициентами. С помощью полилинейного варианта леммы Брамбла–Гильберта получены оценки скорости сходимости согласованы с гладкостью данных.

Введение

Известная лемма Брамбла–Гилыберта [1] имеет фундаментальное значение в теории метода конечных элементов. Заменяя, определенным способом, формулу Тейлора, она дает возможность получить оценки скорости сходимости в случае когда решение исходной задачи принадлежит пространствам Соболева W_2^s [2]. Для большого класса краевых задач таким способом получены оценки скорости сходимости согласованные с гладкостью решения, вида [3]:

$$\|u-u_h\|_{W_2^k(\Omega)} \leqslant Ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad s>k.$$

Здесь u — точное решение, u_h — приближенное решение и h — параметр дискретизации.

Недавно показано [4–9], что лемму Брамбла–Гильберта с таким же успехом можно использовать и для анализа сходимости метода конечных разностей. При этом получаются похожие оценки как в предыдущем случае, но в сеточных нормах:

$$\|u-u_h\|_{W_2^k(\omega)} \leqslant Ch^{s-k}\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad s>k.$$

Таким образом расширена область применимости метода конечных разностей на задачи с обобщенными решениями и показано, что между методами конечных элементов и конечных разностей существует близкое внутреннее родство.

В настоящей работе получен один полилинейный вариант леммы Брамбла–Гильберта. С его помощью получены оценки скорости сходимости на слабых решениях из пространств Соболева, разностных схем аппроксимирующих различные краевые задачи с переменными коэффициентами.

Некоторые обобщения леммы Брамбла–Гильберта

Пусть $\boldsymbol{R}$ обозначает множество действительных чисел, $\boldsymbol{R}_+$ — множество неотрицательных действительных чисел, и N_0 — множество неотрицательных целых чисел. Элементы множества $\boldsymbol{R}^n_+$ будем называть мультииндексами.

В дальнейшем через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ будем обозначать единичные векторы координатных осей в $\boldsymbol{R}^n$. Для $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \boldsymbol{R}^n_+$ положим:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$[\alpha] = ([\alpha_1], [\alpha_2], \ldots, [\alpha_n]), \qquad [\alpha]^+ = ([\alpha_1]^+, [\alpha_2]^+, \ldots, [\alpha_n]^+).$$

Здесь $[\alpha_k]$ — целая часть α_k и $[\alpha_k]^+ = -[-\alpha_k]$. Если $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — действительная функция n действительных переменных и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$ обозначим:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Положим также:

$$\Delta_k u(x) = u(x + h_k e_k) - u(x).$$

Пусть Ω — ограниченная, связная, выпуклая область в $\boldsymbol{R}^n$, с границей непрерывной по Липшицу. При $\alpha \in \boldsymbol{R}^n_+$ и $1 \leqslant p < \infty$ определим полунорму $|u|_{\alpha,p}$ следующим способом:

$$|u|^p_{\alpha,p} := \|u\|^p_{L_p(\Omega)}, \qquad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n,$$

$$:= \int\limits_\Omega \int\limits_{\Omega^i(x)} \frac{|\Delta_i u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}} \, dh_i \, dx,$$

$$\text{при } 0 < \alpha_i < 1; \ \alpha_k = 0, \ k \neq i,$$

$$:= \int\limits_\Omega \iint\limits_{\Omega^{ij}(x)} \frac{|\Delta_i \Delta_j u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i} |h_j|^{1+p\alpha_j}} \, dh_i \, dh_j \, dx,$$

$$\text{при } 0 < \alpha_i, \alpha_j < 1; \ \alpha_k = 0, \ k \neq i, j,$$

(1)

$$:= \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega^{1\ldots n}(x)} \!\!\ldots\!\! \int \frac{|\Delta_1 \ldots \Delta_n u(x)|^p}{|h_1|^{1+p\alpha_1} \ldots |h_n|^{1+p\alpha_n}} dh_1 \ldots dh_n \, dx,$$

при $0 < \alpha_1, \ldots, \alpha_n < 1$,

$$:= |D^{[\alpha]} u|^p_{\alpha-[\alpha],p}$$ если некоторое $\alpha_k \geqslant 1$.

Здесь обозначено:

$$\Omega^i(x) = \{h_i \mid x + h_i e_i \in \Omega\},$$

$$\Omega^{ij}(x) = \{(h_i, h_j) \mid x + c_i h_i e_i + c_j h_j e_j \in \Omega;\ c_i, c_j = 0, 1\},$$

$$\Omega^{1\ldots n}(x) = \{(h_1, \ldots, h_n) \mid x + \sum_{k=1}^{n} c_k h_k e_k \in \Omega;\ c_k = 0, 1\}.$$

При $p = \infty$ интегралы в определении заменяются на sup ess:

(2)
$$|u|_{\alpha,\infty} := \|u\|_{L_\infty(\Omega)}, \qquad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0$$

$$:= \operatorname*{sup\,ess}_{x\in\Omega, h_i\in\Omega^i(x)} \frac{|\Delta_i u(x)|}{|h_i|^{\alpha_i}}, \qquad \text{при } 0 < \alpha_i < 1;\ \alpha_k = 0,\ k \neq i$$

и т.д.

Следуя [10] конечное множество мультииндексов $A \subset \boldsymbol{R}^n_+$ будем называть регулярным, если $0 = (0, 0, \ldots, 0) \in A$ и для каждого $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$ существуют действительные числа $\beta_k \geqslant \alpha_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $\beta_k e_k \in A$.

Если A – регулярное множество мультииндексов, с помощью полунорм (1) и (2) определим нормы:

$$\|u\|_{W^A_p(\Omega)} := \{\sum_{\alpha\in A} |u|^p_{\alpha,p}\}^{1/p}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|u\|_{W^A_\infty(\Omega)} := \max_{\alpha\in A} |u|_{\alpha,\infty}.$$

Замыкание множества $C^\infty(\bar{\Omega})$ в норме $\|\cdot\|_{W^A_p(\Omega)}$ будем обозначать через $W^A_p(\Omega)$.

Пример. Положим $A = A_0 \cup A_1$, где

$$A_0 = \left\{\alpha \in N^n_0 \mid \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{s_k} < 1\right\}, \qquad A_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_{1i},$$

$$A_{1i} = \left\{\alpha \in \boldsymbol{R}^n_+ \mid \alpha_k \in N_0 \quad \text{при } k \neq i;\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{s_k} = 1\right\}.$$

Тогда $W^A_p(\Omega) = W^{s_1,\ldots,s_n}_p(\Omega)$ – анизотропное пространство Соболева. При $s_1 = \ldots = s_n = s$, $W^A_p(\Omega) = W^{s,\ldots,s}_p(\Omega) = W^s_p(\Omega)$ – изотропное пространство Соболева.

Через $\varkappa(A)$ обозначим выпуклую оболочку регулярного множества мультииндексов A в пространстве R^n. Пусть $\partial_0 \varkappa(A)$ — часть границы множества $\varkappa(A)$, не принадлежащая координатным гиперплоскостям и $A_\partial = A \cap \overline{\partial_0 \varkappa(A)}$. Пусть $B \subset A_\partial$ и $B \cup \{0\}$ — регулярное множество мультииндексов. Обозначим: $\nu(B) = \{\beta \in N_0^n \mid D^{[\alpha]^+} x^\beta \equiv 0$ для каждого $\alpha \in B\}$. Пусть $\mathscr{P}(B)$ — множество многочленов вида: $P(x) = \sum\limits_{\alpha \in \nu(B)} p_\alpha x^\alpha$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [11]. *Пусть A, B и Ω удовлетворяют предыдущим условиям. Тогда существует постоянная $C = C(\Omega, A, B, p)$ такая, что для каждого $u \in W_p^A(\Omega)$ выполнено неравенство*:

$$\inf_{P \in \mathscr{P}(B)} \|u - P\|_{W_p^A(\Omega)} \leqslant C \sum_{\alpha \in B} |u|_{\alpha,p}.$$

Непосредственным следствием леммы 1 являются следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть $\eta(u)$ — ограниченный линейный функционал на $W_p^A(\Omega)$ обращающийся в нуль при $u = x^\alpha$, $\alpha \in \nu(B)$. Тогда существует постоянная $C = C(\Omega, A, B, p)$ такая, что для каждого $u \in W_p^A(\Omega)$ выполнено неравенство*:

$$|\eta(u)| \leqslant C \sum_{\alpha \in B} |u|_{\alpha,p}.$$

Лемма 3. *Пусть A_k, B_k и Ω_k удовлетворяют в R^{n_k} ($k = 1, 2, \ldots, m$) таким же условиям как A, B и Ω. Пусть $\eta(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — ограниченный полилинейный функционал на $W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times \ldots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$, который обращается в нуль, если хоть один из его аргументов имеет вид: $u_k = x^\alpha$, $x \in \Omega_k$, $\alpha \in B_k$. Тогда существует постоянная $C = C(\Omega_1, A_1, B_1, p_1, \ldots, \Omega_m, A_m, B_m, p_m)$ такая, что для каждого $(u_1, \ldots, u_m) \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times \ldots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$ выполнено неравенство*:

$$|\eta(u_1, \ldots, u_m)| \leqslant C \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in B_k} |u_k|_{\alpha,p_k}.$$

Операторы усреднения

Определим следующие операторы усреднения Стеклова:

$$T_k^+ u(x) = \int_0^1 u(x + \sigma h_k e_k)\, d\sigma = T_k u(x + 0.5\, h_k e_k) = T_k^- u(x + h_k e_k).$$

Эти операторы коммутируют и отображают производные в разностные отношения:

$$T_k^+ \frac{\partial u}{\partial x_k} = u_{x_k}, \qquad T_k^- \frac{\partial u}{\partial x_k} = u_{\bar{x}_k}$$

где обозначено:

$$u_{x_k}(x) = \Delta_k u(x)/h_k = u_{\bar{x}_k}(x+h_k e_k).$$

Эллиптическая задача

В области $\Omega = (0,\ 1)^2$ рассмотрим задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$(3)\qquad \begin{gathered} -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+au = f, \quad \text{в } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{на } \partial\Omega = \Gamma. \end{gathered}$$

Будем считать, что обобщенное решение задачи (3) принадлежит пространству Соболева $W_2^s(\Omega)$, $1 < s \leqslant 3$, и что выполнены следующие условия:

$$(4)\qquad \begin{gathered} a_{ij} = a_{ji} \in W_\infty^{s-1}(\Omega), \\ \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \\ a \in W_\infty^{s'-2}(\Omega), \quad a \geqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega. \end{gathered}$$

Здесь c_0 — положительная постоянная и $s' = \max\{s,\ 2\}$.

В области $\bar{\Omega}$ обычным способом определим равномерную сетку $\bar{\omega}$ с шагом h $(= h_1 = h_2)$, и положим $\omega = \bar{\omega} \cap \Omega$, $\gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma$. Будем использовать обозначения:

$$v^{\pm k} = v^{\pm k}(x) = v(x \pm he_k), \qquad k = 1, 2.$$

Краевую задачу (3) аппроксимируем разностной схемой:

$$(5)\qquad \begin{gathered} (L+L_0)v = T_1^2 T_2^2 f, \quad \text{в } \omega, \\ v = 0, \quad \text{на } \gamma, \end{gathered}$$

где

$$Lv = -\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\left[(a_{ij}v_{x_j})_{\bar{x}_i}+(a_{ij}v_{\bar{x}_j})_{x_i}\right],$$

$$L_0 v = (T_1^2 T_2^2 a)v.$$

Погрешность $z = u-v$ удовлетворяет условиям:

$$(L+L_0)z = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij,\bar{x}_i}+\eta, \quad \text{в } \omega, \qquad z = 0, \quad \text{на } \gamma,$$

где

$$\eta_{ij} = T_i^+ T_{3-i}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - 0.5\,(a_{ij}u_{x_j} + a_{ij}^{+i}u_{\bar{x}_j}^{+i}),$$

$$\eta = (T_1^2 T_2^2 a)\,u - T_1^2 T_2^2 (au).$$

Определим разностный аналог скалярного произведения и нормы в $L_2(\Omega)$:

$$(v,\, w) = h^2 \sum_{x\in\omega} v(x)\,w(x), \qquad |v| = (v,\, v)^{1/2}.$$

Пусть $[\![v|_k$ обозначает разностную L_2-норму содержащую кроме значений $v(x)$ в узлах сетки ω еще и значения в узлах на отрезке $x_k = 0$ $(k = 1,\, 2)$. Разностную W_2^1-норму определим следующим способом:

$$\|v\|_{W_2^1(\omega)} = (|v|^2 + [\![v_{x_1}|_1^2 + [\![v_{x_2}|_2^2)^{1/2}.$$

Используя суммирование по частям и разностное неравенство Пуэнкаре–Фридрихса легко получаем следующую априорную оценку:

(6) $$\|z\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant c_1\Big(\sum_{i,j=1}^{2} [\![\eta_{ij}|_i^2 + |\eta|^2\Big)^{1/2},$$

где $c_1 = 17\sqrt{2}/(16c_0)$.

Чтобы получить оценку скорости сходимости разностной схемы (5) достаточно оценить слагаемые в правой части неравенства (6). Предварительно представим η_{ij} в виде:

$$\eta_{ij} = \eta_{ij,1} + \eta_{ij,2} + \eta_{ij,3} + \eta_{ij,4},$$

где

$$\eta_{ij,1} = T_i^+ T_{3-i}^2\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - (T_i^+ T_{3-i}^2 a_{ij})\left(T_i^+ T_{3-i}^2\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$\eta_{ij,2} = [T_i^+ T_{3-i}^2 a_{ij} - 0.5\,(a_{ij} + a_{ij}^{+i})]\left(T_i^+ T_{3-i}^2\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

$$\eta_{ij,3} = 0.5\,(a_{ij} + a_{ij}^{+i})\left[T_i^+ T_{3-i}^2\frac{\partial u}{\partial x_j} - 0.5\,(u_{x_j} + u_{\bar{x}_j}^{+i})\right],$$

$$\eta_{ij,4} = -0.25(a_{ij} - a_{ij}^{+i})(u_{x_j} - u_{\bar{x}_j}^{+i}).$$

Оценим сначала значение $\eta_{ij,1}$ в узле сетки. Из теоремы вложения [2] следует:

$$|\eta_{ij,1}| \leqslant c(h)\,\|a_{ij}\|_{W_\infty^\lambda(e_i)}\,\|u\|_{W_2^\mu(e_i)},$$

где $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 1$ и

$$e_i = e_i(x) = \{\,y\,|\,x_i < y_i < x_i + h,\ x_{3-i} - h < y_{3-i} < x_{3-i} + h\}.$$

Кроме того, $\eta_{ij,1} = 0$, если $a_{ij} = 1$, а также если $u = 1$, x_1 и x_2. Из леммы 3 следует:

$$|\eta_{ij,1}| \leqslant C_1(h)\,|a_{ij}|_{W_\infty^\lambda(e_i)}\,|u|_{W_2^\mu(e_i)},$$

где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $1 \leqslant \mu \leqslant 2$ и $C_1(h) = Ch^{\lambda+\mu-2}$.

Суммированием по узлам сетки получаем:

$$[\![\eta_{ij,1}|_i \leqslant Ch^{\lambda+\mu-1}\,|a_{ij}|_{W_\infty^\lambda(\Omega)}\,|u|_{W_2^\mu(\Omega)}.$$

Полагая $\lambda+\mu = s$ и проводя очевидные оценки получаем:

$$[\![\eta_{ij,1}|_i \leqslant Ch^{s-1}\,\|a_{ij}\|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)}\,\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad 1 < s \leqslant 3.$$

Подобным способом оцениваются и остальные слагаемые. Окончательно получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (5) (см. [8]):

$$\|u-v\|_{W_2^1(\omega)} \leqslant Ch^{s-1}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\|a_{ij}\|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)} + \|a\|_{W_\infty^{s'-2}(\Omega)}\Big\}\,\|u\|_{W_2^s(\Omega)}, \qquad 1 < s \leqslant 3.$$

Полученная оценка согласована с гладкостью данных.

Похожие результаты можно получить и в других сеточных нормах. В случае уравнений с постоянными коэффицентами такие оценки получены в [7].

Параболическая задача

В области $Q = \Omega\times(0, T] = (0, 1)^2\times(0, T]$ рассмотрим первую начаьно-краевую задачу для линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) - au + f, \qquad \text{в } Q,\\
(7)\qquad &u(x, 0) = u_0(x), \qquad \text{в } \Omega,\\
&u(x, t) = 0, \qquad \text{на } \Gamma\times[0, T].
\end{aligned}$$

Будем считать, что обобщенное решение задачи (7) принадлежит пространству Соболева $W_2^{s,s/2}(Q)$, $1 < s \leqslant 3$, и что выполнены условия (4).

Пусть ω_τ равномерная сетка в $(0, T]$ с шагом τ, $\omega_\tau^- = \omega_\tau \setminus \{T\}$, $\omega_\tau^+ = \omega_\tau \cup \{0\}$ и $Q_{h\tau} = \omega\times\omega_\tau$, где ω – раньше определена. Предположим, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 такие что $c_1 h^2 \leqslant \tau \leqslant c_2 h^2$. Пусть $T_t^\pm$, T_t — стекловские операторы усреднения по переменной t, с шагом τ. Обозначим также:

$$v^\pm(x, t) = v(x, t\pm\tau), \qquad v_t = (v^+ - v)/\tau, \qquad v_{\bar t} = (v - v^-)/\tau.$$

Задачу (7) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$v_{\bar{t}}+(L+L_0)v = T_1^2\,T_2^2\,T_t^-f, \quad \text{в } Q_{h\tau},$$
$$(8)\qquad v = Pu_0, \quad \text{в } \omega\times\{0\},$$
$$v=0, \quad \text{на } \gamma\times\omega_\tau^+,$$

где

$$Pu = \begin{cases} u, & \text{при } 2<s\leqslant 3,\\ T_1^2\,T_2^2\,u, & \text{при } 1<s\leqslant 2.\end{cases}$$

Так как при $1<s\leqslant 2$ решение $u(x, t)$ не является непрерывной функцией, положим $z = Pu-v$. Таким способом определенная погрешность удовлетворяет априорной оценке:

$$(9)\qquad \|z\|_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \leqslant c\Big\{\sum_{i,j=1}^{2} |[\xi_{ij}\|_i^2+\|\xi\|^2$$
$$+|\psi|_{1/2}^2+h^2\tau\sum_{x\in\omega}\sum_{t\in\omega_\tau^-}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{T-t}\right)\psi^2(x, t)\Big\}^{1/2},$$

где

$$\xi_{ij} = T_i^+\,T_{3-i}^2\,T_t^-\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-0.5\,[a_{ij}(Pu)_{x_j}+a_{ij}^{+i}(Pu)_{\bar{x}_j}^{+i}],$$
$$\xi = (T_1^2\,T_2^2\,a)\,Pu-T_1^2\,T_2^2\,T_t^-(au),$$
$$\psi = Pu-T_1^2\,T_2^2\,u, \qquad \|z\|^2 = \tau\sum_{t\in\omega_\tau}|z|^2, \qquad |[z\|_i^2 = \tau\sum_{t\in\omega_\tau}[\![z|_i^2,$$
$$|z|_{1/2}^2 = h^2\tau^2\sum_{x\in\omega}\sum_{\substack{t,t'\in\omega_\tau\\ t\neq t'}}\left[\frac{z(x, t)-z(x, t')}{t-t'}\right]^2,$$

и

$$\|z\|^2_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} = \sum_{i=1}^{2}|[z_{x_i}\|_i^2+|z|_{1/2}^2+\|z\|^2.$$

Из априорной оценки (9), используя аналогичный поступок как в предыдущем случае, получаем следующую оценку скорости сходимости разностной схемы (8):

$$\|Pu-v\|_{W_2^{1,1/2}(Q_{h\tau})} \leqslant Ch^{s-1}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\|a_{ij}\|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)}$$
$$+\|a\|_{W_\infty^{s'-2}(\Omega)}+\theta(s-2)\sqrt{\ln\frac{1}{h}}\Big\}\|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}, \qquad 1<s\leqslant 3,$$

где $\theta(s) = \begin{cases}1, & s>0\\ 0, & s\leqslant 0\end{cases}$ — функция Хевисайда.

Гиперболическая задача

В области Q рассмотрим первую начально-краевую задачу для гиперболического уравнения с переменными коэффициентами:

$$
(10)\qquad
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - au + f, \quad \text{в } Q,\\
u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad \text{в } \Omega,\\
u(x,t) = 0, \quad \text{на } \Gamma \times [0, T].
\end{gathered}
$$

Будем считать, что решение задачи (10) принадлежит пространству Соболева $W_2^s(Q)$, $2 < s \leqslant 4$, и что выполнены условия (4).

Задачу (10) аппроксимируем разностной схемой:

$$
(11)\qquad
\begin{gathered}
v_{t\bar t} + \tfrac{1}{4}(L+L_1)(v^+ + 2v + v^-) = T_1 T_2 T_t f, \quad \text{в } \omega\times\omega_\tau^-,\\
v^0 = u_0, \qquad v^1 = u_0 + \tau T_1 T_2 u_1 + \tfrac{1}{2}\tau^2\left(-(L+L_1)u_0 + T_1 T_2 T_t f^0\right), \quad \text{в } \omega\times\{0\},\\
v = 0, \quad \text{на } \gamma\times\omega_\tau^+
\end{gathered}
$$

где $L_1 v = av$, v^k обозначает сужение функции $v(x,t)$ при $t = k\tau$, а сетка определена так же как в предыдущем случае.

Для погрешности $z = u - v$ выполнена априорная оценка:

$$
(12)\qquad \|z\|_{2,\infty}^{(1)} \leqslant C\left(|\theta^0| + \tau|\varphi^0 - \varrho^0| + \tau\sum_{t\in\omega_\tau}|\varphi|\right),
$$

где

$$
\varphi = \sum_{i,j=1}^{2} \zeta_{ij} + \zeta + \chi + \varrho,
$$

$$
\zeta_{ij} = T_1 T_2 T_t \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - 0.5\left[(a_{ij}u_{x_j})_{\bar x_i} + (a_{ij}u_{\bar x_j})_{x_i}\right],
$$

$$
\zeta = au - T_1 T_2 T_t(au), \qquad \chi = u_{t\bar t} - T_1 T_2 T_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
$$

$$
\varrho = 0.5\tau^2(L+L_1)u_{t\bar t}, \qquad \theta = 0.5(u_t + u_{\bar t}) - T_1 T_2 \frac{\partial u}{\partial t},
$$

$$
\|z\|_{2,\infty}^{(1)} = \max_{t\in\omega_\tau}\left\{|z_{\bar t}|^2 + \sum_{i=1}^{2}[\![0.5(z+z^-)_{x_i}|]\!]^2\right\}^{1/2}.
$$

Из априорной оценки (12) и лемм 2 и 3, при $c_1 h \leqslant \tau \leqslant c_2 h$, аналогично как в предыдущих случаях, получаем оценку скорости сходимости разностной схемы (11) (см. [9]):

$$\|u-v\|_{2,\infty}^{(1)} \leqslant Ch^{s-2}\Big\{1+\sum_{i,j=1}^{2}\|a_{ij}\|_{W_\infty^{s-1}(\Omega)}+\|a\|_{W_\infty^{s-2}(\Omega)}\Big\}\|u\|_{W_2^s(Q)}, \qquad 2<s\leqslant 4.$$

Литература

[1] J. H. Bramble and S. R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation*, Numer. Math. 16 (1971), 362-369.

[2] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978.

[3] P. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1978.

[4] Р. Д. Лазаров, *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифф. Уравнения 17 (1981), 1285–1294.

[5] R. D. Lazarov, V. L. Makarov and W. Weinelt, *On the convergence of difference schemes for the approximation of solutions $u \in W_2^m$ ($m > 0.5$) of elliptic equations with mixed derivatives*, Numer. Math. 44 (1984), 223-232.

[6] L. D. Ivanović, B. S. Jovanović and E. E. Süli, *On the rate of convergence of difference schemes for the heat transfer equation on the solutions from $W_2^{s,s/2}$*, Mat. Vesnik 36 (1984), 206–212.

[7] E. Süli, B. Jovanović and L. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*, Math. Comp. 45 (1985), 319–327.

[8] B. S. Jovanović, L. D. Ivanović and E. E. Süli, *Convergence of finite-difference schemes for elliptic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987), 301–305.

[9] —, *Convergence of a finite-difference scheme for second-order hyperbolic equations with variable coefficients*, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987), 39–45.

[10] M. Dražić, *Convergence rates of difference approximations to weak solutions of the heat transfer equation*, Numerical Analysis Group Report No. 86/22, Oxford University Computing Laboratory, Oxford.

[11] T. Dupont and R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comp. 34 (1980), 441–463.

Presented to the Semester
Numerical Analysis and Mathematical Modelling
February 25—May 29, 1987