MATHEMATICAL PROBLEMS IN COMPUTATION THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 21
PWN - POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1988

ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЕДСТАВИТЕЛЬНЫХ НАБОРОВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА БИНАРНЫХ ТАБЛИЦ

Х. А. МАДАТЯН

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Целью этой статьи является получение оценок числа представительных наборов для почти всех бинарных таблиц. Получены также оценки числа интервалов для почти всех булевых функций принимающих значение 0 на v наборах.

Одной из актуальных задач математической кибернетики является проблема распознавания образов. В настоящее время существует разные подходы к решению той задачи. Выбор подхода зависит от типа обучающей информации, точности получения значений признаков, требуемый точности распознавания. Среди различных типов задач распознавания особое место занимает тот тип, в котором все признаки, описывающие объекты, являются бинарными, то есть принимают значения 0 или 1. Такие задачи достаточно часто встречаются на практике, но основное обстоятельство, определяющее их актуальность, связано с тем, что в задачах, возникающих в описательных науках (геология, медицина и т. д.) данные, как правило, задаются с весьма невысокой гарантированной точностью. Поэтому замена в этих задачах численных признаков бинарными, обычно не приводит к сколь-нибудь существенной потере точности решения.

Из вышесказанного вытекает особая важность изучения эвристических алгоритмов распознавания, работающих с бинарной информацией. Среди многочисленных эвристик этого типа наибольшее распространение получили разнообразные схемы, связанные с построением доопределений частичных булевых функций. Общая схема метода состоит в следующем. Формируется частичная функция f, принимающая значение 1 на эталонных объектах первого класса и значение 0 — на эталонных объектах второго класса. Выбирается некоторый способ доопределения функции f на весь n-мерный единичный куб B^n или на его часть (n-число признаков описания объектов). После доопределения функции f решающее правило для распознавания состоит в выяснении доопределенного значения f на описании нового объекта. Различные алгоритмы, основанные на применении указанного принципа, описывались в разных терминах и получили разные названия: „Тест", „Кора", „Метод перебора конъюнкций" и т. д. [1], [3]–[5]. В этих алгоритмах существенно используются частные виды представительных наборов, оценке числа которых и посвящена данная работа.

Перейдем к основным понятиям и определениям. Пусть задана бинарная матрица $T_{n,m}$ — состоящая из n столбцов и m строк. Множество строк матрицы разбиты на два класса $T^1_{n,u}$ и $T^2_{n,v}$. Пусть далее Ω произвольное подмножество множества признаков $\{1, 2, \ldots, n\}$. Сопоставим каждому подмножеству $\Omega = \{i_1, \ldots, i_t\}$ его характеристический вектор $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ следующим образом:

$$\omega_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in \Omega, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Подматрицу, полученную из T удалением всех столбцов, за исключением столбцов с номерами $i_1, \ldots, i_t$ принято называть *ω-частью матрицы T* (обозначение $\tilde{\omega}T$). В частности, $\tilde{\omega}\tilde{\alpha}$ обозначает ω — часть набора $\tilde{\alpha}$.

Набор $\tilde{\omega}\tilde{\alpha}$ называется *представительным* для класса $T^1_{n,u}$ по множеству Ω, если $\tilde{\omega}\tilde{\alpha} \in \tilde{\omega}T^1_{n,u}$ и $\tilde{\omega}\tilde{\alpha} \notin \tilde{\omega}T^2_{n,v}$. Представительный набор $\tilde{\omega}\tilde{\alpha}$ называется *тупиковым* для класса $T^1_{n,u}$ по Ω, если никакой его поднабор не является набором, представительным для $T^1_{n,u}$ по Ω.

Наша основная задача — оценить число представительных наборов таблицы $T_{n,m}$ для „типичного" случая.

Определим частичную булеву функцию f, соответсвующую таблице $T_{n,m}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^1_{n,u}, \\ 0, & \text{если } (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T^2_{n,v}, \\ & \text{неопределена на остальных наборах.} \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим $N_f = \{\tilde{\alpha} | \ f(\tilde{\alpha}) = 1\}$ $N_{\bar{f}} = \{\tilde{\alpha} | \ f(\tilde{\alpha}) = 0\}$. ($|M|$ — мощность множества M.)

Частичную булевую функцию f, у которой $|N_f| = u$, $|N_{\bar{f}}| = v$ будем называть *(u, v)-функцией*. Обозначим через $P_n(u, v)$ множество всех (u, v)-функций зависящих от n переменных. Очевидно, что $|P_n(u, v)| = C^v_{2^n} C^u_{2^n - v}$. *Элементарной конъюнкцией* называется логическое произведение $k = x^{\sigma_1}_{i_1} x^{\sigma_2}_{i_2} \ldots x^{\sigma_r}_{i_r}$ переменных или их отрицания, в котором все x_{i_j} различны. Конъюнкция $k = x^{\sigma_1}_{i_1} \ldots x^{\sigma_r}_{i_r} (x_{i_j} \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ называется *импликантом функции* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует набор $\tilde{\alpha} \in N_f$, такой, что $k(\tilde{\alpha}) = 1$ и для любого набора $\tilde{\beta} \in N_{\bar{f}}$ имеет место $k(\tilde{\beta}) = 0$. Импликант функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *простым*, если при удалении любой буквы он перестает быть импликантом.

Известно, что всякой элементарной конъюнкции ранга r соответствует множество $N_k = \{\tilde{\alpha} | \ \tilde{\alpha} \in B^n, \ k(\tilde{\alpha}) = 1\}$, являющееся гранью размерности $n-r$ единичного n-мерного куба. Грань, соответствующая импликанту (ранга r) функции f, называется *интервалом* (*ранга* r) *функции* f. Грань, соответствующая простому импликанту, называется *максимальным интервалом*.

Нетрудно видеть, что между интервалами функции (1) и представительными наборами таблицы $T_{n,m}$ существует взаимно-однозначное соответствие. Поэтому количество представительных наборов таблицы $T_{n,m}$ совпадает с числом интервалов соответствующей частичной функции (1).

Пусть $P_n^E(u, v)$ — множество тех (u, v)-функций из $P_n(u, v)$, которые обладают заданным свойством E. Будем говорить, что почти все функции из $P_n(u, v)$ обладают *свойством* E, если $|P_n^E(u, v)|/|P_n(u, v)| \to 1$ при $n \to \infty$.

Перейдём к изложению основных положений. Метод доказательства ряда утверждений вполне аналогичен приведенному в [2]. Имеет место следующая

Лемма 1. *Для любых четных натуральных a и b справедливо неравенство*

$$C_a^l \cdot C_b^l \leqslant (C_{(a+b)/2}^l)^2, \qquad C_a^l + C_b^l \geqslant 2C_{(a+b)/2}^l.$$

Первое утверждение непосредственно вытекает из неравенства о среднем геометрическом и среднем арифметическом двух неотрицательных чисел, а второе неравенство — из вогнутости функции C_x^l при $x \geqslant l$.

Рассмотрим $P_n(v)$-множество всех функций алгебры логики принимающих значение 0 на v наборах. Пусть $l_k(f)$ обозначает число k-мерных граней, содержащихся в множестве N_f, а $\overline{l_k}(n)$ — его среднее значение:

$$\overline{l_k}(n) = \frac{1}{|P_n(v)|} \sum_{f \in P_n(v)} l_k(f).$$

Нетрудно установить (см. [6]), что

$$\overline{l_k}(n) = \frac{C_n^k 2^{n-k} C_{2^n-2^k}^v}{C_{2^n}^v}. \tag{2}$$

Пусть $P_{n,k}^v(m)$ — число булевых функций $f \in P_n(v)$, у которых в множестве N_f содержится ровно m k-мерных интервалов. Тогда $l_k(n) = M\xi_{n,k}$, где $M\xi_{n,k}$ — математическое ожидание случайной величины $\xi_{n,k}$, принимающий значение m с вероятностью $P_{n,k}^v(m)/C_{2^n}^v$, $m = 0, 1, \ldots, C_n^k 2^{n-k}$. Следовательно,

$$M\xi_{n,k} = \frac{C_n^k 2^{n-k} C_{2^n-2^k}^v}{C_{2^n}^v}.$$

Найдём дисперсию $\mathscr{D}\xi_{n,k}$ этой случайной величины.

Лемма 2.

$$\mathscr{D}\xi_{n,k} = C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^{-j} \frac{(C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^v - C_{2^n-2^{k+1}}^v)}{C_{2^n}^v} +$$

$$+ (C_n^k 2^{n-k})^2 \frac{C_{2^n-2^{k+1}}^v}{C_{2^n}^v} - \left(\frac{C_n^k 2^{n-k} C_{2^n-2^k}^v}{C_{2^n}^v}\right)^2.$$

Доказательство. Извество, что

$$\mathscr{D}\xi_{n,k} = M\xi_{n,k}^2 - (M\xi_{n,k})^2.$$

Чтобы найти

$$M\xi_{n,k}^2 = \sum_{m=0}^{C_n^k 2^{n-k}} m^2 \frac{P_{n,k}^v(m)}{C_{2^n}^v},$$

рассмотрим величину

$$l(f_i, k_s, k_t) = \begin{cases} 1, & \text{если } k_s \leqslant N_{f_i} \text{ и } k_t \leqslant N_{f_i}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$M\xi_{n,k}^2 = \frac{1}{C_{2^n}^v} \sum_{i=1}^{C_{2^n}^v} (l_k(f_i))^2 = \frac{1}{C_{2^n}^v} \sum_{i=1}^{C_{2^n}^v} \sum_{s=1}^{C_n^k 2^{n-k}} \sum_{t=1}^{C_n^k 2^{n-k}} l(f_i, k_s, k_t) =$$

$$= \frac{1}{C_{2^n}^v} \sum_{s,t=1}^{C_n^k 2^{n-k}} \sum_{i=1}^{C_{2^n}^v} l(f_i, k_s, k_t) = \frac{1}{C_{2^n}^v} \sum_{s,t=1}^{C_n^k 2^{n-k}} \Phi(k_s, k_t),$$

где $\Phi(k_s, k_t)$ — число таких функций f, что $k_s \leqslant N_{f_i}$ и $k_t \leqslant N_{f_i}$. Если пересечение граней k_s и k_t есть j-мерная грань $(0 \leqslant j \leqslant k)$, то

$$\Phi(k_s, k_t) = \Phi_j = C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^v.$$

На множестве вершин $k_s \cup k_t$ функция f_i должна равняться единице. Из остальных вершин B^n функция должна быть равна 0 ровно в v вершинах. Если грани не пересекаются, то

$$\Phi(k_s, k_t) = \Phi_\Lambda = C_{2^n-2^{k+1}}^v.$$

Найдём число пар (k_s, k_t) таких, что их пересечение есть грань размерности j. Если $N_{x_{i_1}}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_{n-k}}^{\sigma_{n-k}}$, то k_t имеет вид $N_{x_{j_1} x_{j_2}}^{\tau_1 \tau_2} \ldots x_{j_{n-k}}^{\tau_{n-k}}$, где среди букв $x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_{n-k}}$, $k-j$ букв отличны от букв $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}$, а остальные $n-2^{k+j}$ совпадают с некоторыми из букв $x_{i_1}, \ldots x_{i_{n-k}}$ и берутся в тех же степенях. Отсюда ясно, что для каждой грани k_s грань k_t можно выбрать $C_k^j 2^{k-j} C_{n-k}^{n-2^{k+j}}$ способами, а общее число пар равно

$$C_n^k 2^{n-k} C_k^j 2^{k-j} C_{n-k}^{k-j} = C_n^k 2^{n-j} C_k^j C_{n-k}^{k-j}.$$

Имеем далее

$$C_{2^n}^{v} M\xi_{n,k}^2 = \sum_{j=0}^{k} C_n^k 2^{n-j} C_k^j C_{n-k}^{k-j} \Phi_j + ((C_n^k 2^{n-k})^2 - \sum_{j=0}^{k} C_n^k 2^{n-j} C_k C_{n-k}^{k-j}) \Phi_1 =$$

$$= C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^j (C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^{v} + C_{2^n-2^{k+1}}^{v}) + (C_n^k 2^{n-k})^2 C_{2^n-2^{k+1}}^{v},$$

отсюда находим $\mathscr{D}\xi_{n,k}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для почти всех функций $f \in Pn(v)$ число $l_k(f)$ k-мерных граней, содержащихся в множестве N_f, удовлетворяет неравенствам*

$$C_n^k \left(\frac{2^{n-k} C_{2^n-2^k}^{v}}{C_{2^n}^{v}} - \varphi(n) \sqrt{\frac{2^{n-k} C_{2^n-2^k}}{C_{2^n}^{v}}} \right) \leqslant l_k(f) \leqslant$$

$$\leqslant C_n^k \left(\frac{2^{n-k} C_{2^n-2^k}}{C_{2^n}^{v}} + \varphi(n) \sqrt{\frac{2^{n-k} C_{2^n-2^k}^{v}}{C_{2^n}^{v}}} \right).$$

Доказательство. Применим неравенство Чебышёва к определенной выше случайной величине $\xi_{n,k}$.

$$P\{|\xi_{n,k} - M\xi_{n,k}| \geqslant t\} \leqslant \frac{\mathscr{D}\xi_{n,k}}{t^2},$$

положив

$$t = \varphi(n) C_n^k \sqrt{\frac{2^{n-k} C_{2^n-2^k}^{v}}{C_{2^n}^{v}}}.$$

Из самого определения $\xi_{n,k}$ следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что $\mathscr{D}\xi_{n,k}/t^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим $\mathscr{D}\xi_{n,k}$. Заметим, что

$$(C_n^k 2^{n-k})^2 \frac{C_{2^n-2^{k+1}}^{v}}{C_{2^n}^{v}} - \left(\frac{C_n^k 2^{n-k} C_{2^n-2^k}^{v}}{C_{2^n}^{v}} \right) \leqslant 0.$$

Действительно,

$$\left(\frac{C_n^k 2^{n-k}}{C_{2^n}^{v}} \right)^2 (C_{2^n}^{v} C_{2^n-2^{k+1}}^{v} - (C_{2^n-2^k}^{v})^2) \leqslant 0$$

так как $C_{2^n}^{v} C_{2^n-2^{k+1}}^{v} \leqslant (C_{2^n-2^k}^{v})^2$ (лемма 1). Поэтому

$$\mathscr{D}\xi_{n,k} \leqslant C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^{-j} (C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^{v} - C_{2^n-2^{k+1}}^{v}).$$

Заметим, что величина

$$a_j = 2^{-j} (C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^{v} - C_{2^n-2^{k+1}}^{v})$$

возрастает с ростом j. В самом деле,

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{1}{2}\frac{C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}}-C^v_{2^n-2^{k+1}}}{C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}-C^v_{2^n-2^{k+1}}}\geqslant 1,$$

так как

$$C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}}-C^v_{2^n-2^{k+1}}\geqslant 2C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}-2C^v_{2^n-2^{k+1}},$$

$$C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}}+C^v_{2^n-2^{k+1}}\geqslant 2C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}\qquad \text{(лемма 1)}.$$

Поэтому

$$\mathscr{D}\xi_{n,k}\leqslant\frac{C^k_n2^n}{C^v_{2^n}}2^{-k}(C^v_{2^n-2^k}-C^v_{2^n-2^{k+1}})C^k_n\leqslant\frac{(C^k_n)^2 2^{n-k}C^v_{2^n-2^k}}{C^v_{2^n}}$$

(мы воспользовались тем, что $\sum\limits_{j=0}^{k}C^j_kC^{k-j}_{n-k}=C^k_n$). В силу последнего неравенства

$$\mathscr{D}\xi_{n,k}/t^2\leqslant 1/(\varphi(n))^2\to 0\qquad\text{при } n\to\infty.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если* $v=o(2^{n/2})$, *то для почти всех булевых функций* $f\in P_n(v)$ *выполнено*

$$l_k(f)\sim C^k_n2^{n-k}\left(1-\frac{v}{2^n}\right)^{2^k}.$$

Перейдём к оценке числа интервалов для почти всех частичных функций множества $P_n(u, v)$.

Обозначим через $i_k(f)$ число k-мерных граней функции $f\in P_n(u, v)$, и пусть $\overline{i_k(n)}$ — среднее значение величины $i_k(f)$. Нетрудно установить (см. [4]), что

$$\overline{i_k(n)}=C^k_n2^{n-k}\frac{(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}C^v_{2^n-2^k}. \tag{3}$$

Пусть $P^{u,v}_{n,k}(m)$ — число частичных функций $P\in P_n(u, v)$, у которых в множестве N_f содержится ровна m k-мерных граней. Тогда $\overline{i_k(n)}=M\eta_{n,k}$, где $M\eta_{n,k}$ — математическому ожиданию случайной величины $\eta_{n,k}$, принимающей значение m с вероятностью

$$\frac{P^{u,v}_{n,k}(m)}{C^v_{2^n}C^u_{2^n-v}},\qquad m=0, 1, \ldots, C^k_n2^{n-k}.$$

Из (3) следует, что $M\eta_{n,k}=\overline{i_k(n)}$. Подсчитаем дисперсию $\mathscr{D}\eta_{n,k}$ этой случайной величины.

Лемма 3.

$$\mathscr{D}\eta_{n,k} = C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^{-j}\left[\left(\frac{C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^k+2^j}}{C^u_{2^n-v}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}}{C^v_{2^n}}-\frac{(C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}}}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}\right]+$$

$$+\frac{(C_n^k 2^{n-1})^2 C^v_{2^n-2^{k+1}}(C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}})}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}-$$

$$-\left[\frac{C_n^k 2^{n-k}}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})C^v_{2^n-2^k}\right]^2.$$

Доказательство. Как и в лемме 2,

$$M\eta^2_{n,k} = \frac{1}{C^v_{2^n}C^u_{2^n-v}}\sum_{i=1}^{C^v_{2^n}C^u_{2^n-v}}(i_k(f))^2 = \frac{1}{C^v_{2^n}C^u_{2^n-v}}\sum_{s,t=1}^{C_n^k 2^{n-k}}\Phi(k_s, k_t).$$

Если пересечение k_s и k_t есть j-мерная грань $(0 \leqslant j \leqslant k)$, то

$$\Phi(k_s k_t) = \Phi_j = (C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^j})C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}$$

(на множестве вершин $k_s \cup k_t$ функция f_i должна равняться единице. Из остальных вершин B^n функция f_i должна.равняться 1 ровно на $u-(k_s\cup k_t)$ вершинах и в v вершинах должна принимать значение 0).

Если грани не пересекаются, то

$$\Phi(k_s k_t) = \Phi_\Lambda = (C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}}.$$

Тогда, как и в лемме 2, получаем

$$C^v_{2^n}C_{2^n-v}M\eta^2_{n,k} = \sum_{j=0}^{k} C_n^k 2^{n-j}C_k^j C_{n-k}^{k-j}\Phi_j + \left[(C_n^k 2^{n-k})^2 - \sum_{j=0}^{k} C_n^k 2^{n-j} C_k^j C_{n-k}^{k-j}\right]\Phi_\Lambda =$$

$$= C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^{-j}\left[(C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^j})C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}-\right.$$

$$\left.-(C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}}\right]+$$

$$+(C_n^k 2^{n-k})C^v_{2^n-2^{k+1}}(C^u_{2^n-v}-2C^u_{2^n-v-2^k}+C^u_{2^n-v-2^{k+1}}).$$

Отсюда находим $\mathscr{D}\eta_{n,k}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для почти всех частичных функций $f\in P_n(u, v)$ число $i_k(f)$ k-мерных граней, содержащихся в множестве N_f, удовлетворяет неравенствам*

$$C_n^k\left(\frac{2^{nk}(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}-\varphi(n)\sqrt{\frac{2^{n-k}(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})C^v_{2^n-2^k}}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}}\right)\leqslant i_k(f)\leqslant$$

$$\leqslant C_n^k\left(\frac{2^{n-k}(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}+\varphi(n)\sqrt{\frac{2^{n-k}(C^u_{2^n-v}-C^u_{2^n-v-2^k})C^v_{2^n-2^k}}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}}\right).$$

Доказательство. Применим неравенство Чебышёва к случайной величине $\eta_{n,k}$ положив

$$t = \varphi(n) C_n^k \sqrt{\frac{2^{n-k}(C_{2^n-v}^u - C_{2^n-v-2^k}^u) C_{2^n-2^k}^v}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v}}.$$

Покажем, что $\mathscr{D}\eta_{n,k}/t^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим $\mathscr{D}\eta_{n,k}$. Обозначим

$$A = \frac{(C_n^k 2^{n-k})^2}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v} C_{2^n-2^{k+1}}^v (C_{2^n-v}^u - 2C_{2^n-v-2^k}^u + C_{2^n-v-2^{k+1}}^u) -$$
$$- \left[\frac{C_n^k 2^{n-k}}{C_{2^n-v}^u}(C_{2^n-v}^u - C_{2^n-v-2^k}^u) C_{2^n-2^k}^v\right]^2.$$

Покажем, что $A \leqslant 0$. Действительно,

$$A = \left(\frac{C_n^k 2^{n-k}}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v}\right)^2 \times$$
$$\times \{C_{2^n}^v C_{2^n-2^{k+1}} [(C_{2^n-v}^u)^2 - 2C_{2^n-v-2^{k+1}}^u C_{2^n-v}^u + C_{2^n-v}^u C_{2^n-v-2^{k+1}}^u] -$$
$$-(C_{2^n-2^k}^v)^2 [(C_{2^n-v}^u)^2 - 2C_{2^n-v}^u C_{2^n-v-2^k}^u + (C_{2^n-v-2^k}^u)^2]\}.$$

Из неравенства $C_{2^n}^v C_{2^n-2^{k+1}}^v \leqslant (C_{2^n-2^k}^v)^2$ (лемма 1) следует, что

$$A \leqslant \left(\frac{C_n^k 2^{n-k}}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v}\right)^2 [C_{2^n-v}^u C_{2^n-v-2^{k+1}}^u - (C_{2^n-v-2^k}^u)^2].$$

Согласно лемме 1 выражение в квадратных скобках не больше нуля. Поэтому $A \leqslant 0$. Отсюда

$$\mathscr{D}\eta_{nk} \leqslant C_n^k 2^n \sum_{j=0}^{k} C_k^j C_{n-k}^{k-j} 2^{-j} \times$$
$$\times \left[\frac{(C_{2^n-v}^u - 2C_{2^n-v-2^k}^u + C_{2^n-v-2^{k+1}+2^j}^u) C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^v}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v} - \right.$$
$$\left. - \frac{(C_{2^n-v}^u - 2C_{2^n-v-2^k}^u - C_{2^n-v-2^{k+1}}^u) C_{2^n-2^{k+1}}^v}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v}\right].$$

Заметим, что величина

$$a_j = 2^{-j}\left[\frac{(C_{2^n-v}^u - 2C_{2^n-v-2^k}^u + C_{2^n-v-2^{k+1}+2^j}^u) C_{2^n-2^{k+1}+2^j}^v}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v} - \right.$$
$$\left. - \frac{(C_{2^n-v}^u - 2C_{2^n-v-2^k}^u + C_{2^n-v-2^{k+1}}^u) C_{2^n-2^{k+1}}^v}{C_{2^n-v}^u C_{2^n}^v}\right]$$

возрастает по j. В самом деле,

$$a_{j+1}/a_j = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left[\frac{(C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^{j+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}} - (C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}}}{(C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^j})C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j} - (C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^{k+1}} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}}}\right] \geqslant 1,$$

так как

$$(4) \quad (C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^{j+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}} + (C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}})C^v_{2^n-2^{k+1}} \geqslant 2(C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^j})C^v_{2^n-2^k+2^j}.$$

Легко заметить, что

$$(5) \quad C^u_{2^n-v-2^{k+1}+2^j}C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}} - 2C^v_{2^n-v-2^{k+1}+2^j}C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j} \geqslant C^u_{2^n-v-2^{k+1}}C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}} - 2C^u_{2^n-v-2^{k+1}}C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}.$$

Легко видет. что справедливо неравенство

$$(C^u_{2^n-v} - 2C^u_{2^n-v-2^k} + C^u_{2^n-v-2^{k+1}}) \times (C^v_{2^n-2^{k+1}+2^{j+1}} + C^v_{2^n-2^{k+1}} - 2C^v_{2^n-2^{k+1}+2^j}) \geqslant 0.$$

Отсюда и из (5) следует (4). Следовательно $a_{j+1} \geqslant a_j$. Поэтому

$$\mathscr{D}\eta_{n,k} \leqslant \frac{(C^k_n)^2 2^{n-k}(C^u_{2^n-v} - C^u_{2^n-v-2^k})C^v_{2^n-2^k}}{C^u_{2^n-v}C^v_{2^n}}.$$

В силу последнего неравенства $\mathscr{D}\eta_{n,k}/t^2 \leqslant 1/(\varphi(n)) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Следствие. *При $u, v = o(2^{n/2})$ для почти всех частичных функций $f \in P_n(u, v)$ имеет место*

$$i_k(f) \sim C^k_n 2^{n-k}(1-(1-u/2^n)^{2^k})(1-v/2^n)^{2^k}.$$

Замечание. Как доказано в работе [7], при $r < [\log v - \log\ln\log v]$ для класса функций $P_n(u, v)$ среднее число импликантов ранга r асимптотически совпадает со средним числом простых импликантов ранга r. Поэтому полученные выше оценки числа интервалов размерности k является также оценками числа максимальных интервалов той же размерности.

Литература

[1] В. Н. Вапник, А. Н. Червоненкис, *Теория распознавания образов*, Наука, Москва 1974.

[2] В. В. Глаголев, *Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функции алгебры логики*. Сб. Проблемы кибернетики 19, Наука, Москва 1967, 75 94.

[3] А. Н. Дмитрев, Ю. И. Журавлёв, Ф. П. Кренделев, *О математических принципах классификации предметов и явлений*, Сб. Дискретный анализ, вып. 7, Новосибирск, Наука (1966), 3–11.

[4] Е. В. Дюкова, *Асимптотически оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания*, Сб. Проблемы кибернетики 39, Наука, Москва 1982, 165–199.

[5] Ю. И. Журавлёв, *Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации*, сб. Проблемы кибернетики 33, Наука, Москва 1978, 5–68.

[6] F. Mileto and Z. Putzolu, *Average values of quantities appearing in Boolean function minimization*, IEEE Trans. EC-13 (2) (1964), 80–92.

[7] А. А. Сапоженко, *Оценка длины и числа тупиковых* д.н.ф. *для почти всех не всюду определенных булевых функций*, Математические заметки, т. 28, №2 (1980), 279–300.

Presented to the semester
Mathematical Problems in Computation Theory
September 16 – December 14, 1985