ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva

par D. V. Ionescu (Cluj)

1. V. N. Fadeeva [1] a donné la formule de dérivation numérique

$$\Delta^2 f(x_1) = \frac{h}{2}[f'(x_3) - f'(x_1)] + R \tag{1}$$

où les noeuds x_1, x_2, x_3 sont en progression arithmétique dont la raison est h, sans préciser le reste R, en affirmant seulement, qu'il est de l'ordre de h^4. V. N. Fadeeva a appliqué cette formule à l'intégration numérique de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur.

Dans cette note [2], nous allons généraliser la formule de dérivation numérique (1), étudier son reste que nous mettrons sous la forme d'une intégrale définie, et faire quelques applications à l'intégration numérique des équations différentielles.

§ 1. La généralisation de la formule de V. N. Fadeeva

2. Considérons les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en progression arithmétique, dont la raison est h, et une fonction $f(x)$ de la classe C^{n+1} sur l'intervalle $[x_1, x_n]$, ce qui veut dire que la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$ sont continues sur l'intervalle $[x_1, x_n]$. Nous voulons établir une formule de dérivation numérique de la forme

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = A_1 f'(x_1) + A_2 f'(x_2) + \ldots + A_n f'(x_n) + R\,, \tag{2}$$

où

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = f(x_n) - C_{n-1}^1 f(x_{n-1}) + \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} f(x_1) \tag{3}$$

et où le reste R doit être nul lorsque $f(x)$ est un polynôme quelconque de degré n.

A cet effet, nous attachons aux intervalles $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ les polynômes $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ intégrales des équations différentielles

$$\varphi_1^{(n)}(x) = 1\,, \quad \varphi_2^{(n)}(x) = -C_{n-2}^1\,, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}^{(n)}(x) = (-1)^{n-2} C_{n-2}^{n-2} \tag{4}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1^{(r)}(x_1) = 0 && (r = 0, 1, \dots, n-2)\,, \\
(5)\qquad &\varphi_k^{(r)}(x_k) = \varphi_{k-1}^{(r)}(x_k) && (r = 0, 1, \dots, n-2\ ;\ k = 2, 3, \dots, n-1)\,, \\
&\varphi_{n-1}^{(r)}(x_n) = 0 && (r = 0, 1, \dots, n-2)\,.
\end{aligned}
$$

Dans ces conditions, nous avons

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^{(n+1)}(x) f(x)\, dx = 0\,, \quad \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2^{(n+1)}(x) f(x)\, dx = 0, \dots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}^{(n+1)}(x) f(x)\, dx = 0\,,$$

et en appliquant la formule généralisée d'intégration par parties nous pouvons ecrire

$$[\varphi_1^{(n)} f - \varphi_1^{(n-1)} f' + \dots + (-1)^n \varphi_1 f^{(n)}]_{x_1}^{x_2} = (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 f^{(n+1)} dx\,,$$

$$[\varphi_2^{(n)} f - \varphi_2^{(n-1)} f' + \dots + (-1)^n \varphi_2 f^{(n)}]_{x_2}^{x_3} = (-1)^n \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2 f^{(n+1)} dx\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$[\varphi_{n-1}^{(n)} f - \varphi_{n-1}^{(n-1)} f' + \dots + (-1)^n \varphi_{n-1} f^{(n)}]_{x_{n-1}}^{x_n} = (-1)^n \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1} f^{(n+1)} dx\,.$$

En ajoutant membre à membre ces équations, et en tenant compte des équations différentielles (4) et des conditions aux limites (5), nous obtenons la formule de dérivation numérique (2), avec

$$
\begin{aligned}
&A_1 = (-1)^{n-1} \varphi_1^{(n-1)}(x_1)\,, \\
(6)\qquad &A_k = (-1)^{n-1} [\varphi_k^{(n-1)}(x_k) - \varphi_{k-1}^{(n-1)}(x_k)] \qquad (k = 2, 3, \dots, n-1)\,, \\
&A_n = -(-1)^{n-1} \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x_n)\,,
\end{aligned}
$$

et

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x)\, dx\,, \tag{7}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide sur les intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ avec les polynômes $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

Le problème de la formule de dérivation numérique (2) et de son reste R, se réduit ainsi à l'intégration de l'équation différentielles (4) avec les conditions aux limites (5).

3. Les intégrales des équations différentielles (4) qui vérifient les conditions aux limites (5) relativement aux noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sont données par les formules

$$
(8) \quad
\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{(x-x_1)^n}{n!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\,, \\
\varphi_2(x) &= \frac{(x-x_1)^n}{n!} - C^1_{n-1}\frac{(x-x_2)^n}{n!} + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(x-x_2)^{n-1}}{(n-1)!}\,, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n-1}(x) &= \frac{(x-x_1)^n}{n!} - C^1_{n-1}\frac{(x-x_2)^n}{n!} + \ldots + (-1)^{n-2}C^{n-2}_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^n}{n!} + \\
&\quad + \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(x-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \lambda_{n-1}\frac{(x-x_{n-1})^{n-1}}{(n-1)!}\,,
\end{aligned}
$$

où $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des constantes arbitraires.

En écrivant que la fonction $\varphi_{n-1}(x)$ donnée par la dérnière formule (8) satisfait aux conditions aux limites (5) du point x_n, et en tenant compte des formules bien connues [6]

$$(n-1)^r - C^1_{n-1}(n-2)^r + \ldots + (-1)^{n-2}C^{n-2}_{n-1}1^r = 0$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n-2$ et

$$
\begin{aligned}
(n-1)^{n-1} - C^1_{n-1}(n-2)^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-2}C^{n-2}_{n-1}1^{n-1} &= (n-1)!\,, \\
(n-1)^n - C^1_{n-1}(n-2)^n + \ldots + (-1)^{n-2}C^{n-2}_{n-1}1^n &= (n-1)!\,n(n-1)/2
\end{aligned}
$$

nous avons les équations suivantes

$$
(9) \quad
\begin{aligned}
(n-1)\lambda_1 + (n-2)\lambda_2 + \ldots + 1\lambda_{n-1} &= 0\,, \\
(n-1)^2\lambda_1 + (n-2)^2\lambda_2 + \ldots + 1^2\lambda_{n-1} &= 0\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-1)^{n-3}\lambda_1 + (n-2)^{n-3}\lambda_2 + \ldots + 1^{n-3}\lambda_{n-1} &= 0\,, \\
(n-1)^{n-2}\lambda_1 + (n-2)^{n-2}\lambda_2 + \ldots + 1^{n-2}\lambda_{n-1} &= -(n-2)!\,h\,, \\
(n-1)^{n-1}\lambda_1 + (n-2)^{n-1}\lambda_2 + \ldots + 1^{n-1}\lambda_{n-1} &= -(n-1)!\,(n-1)h/2
\end{aligned}
$$

pour déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$.

On démontre que la solution du système d'équations linéaires (9) est donnée par les formules

$$(10) \qquad \lambda_k = (-1)^k \frac{C^{k-1}_{n-2}}{2(n-k)}[n-(2k-1)]h$$

où $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Donc la formule de dérivation numérique (2) existe et il nous reste à donner les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ de cette formule et d'étudier son reste.

4. D'après les formules (6), nous avons

$$A_k = (-1)^{n-1}\lambda_k \tag{11}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$ et

$$A_n = (-1)^n(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1}). \tag{12}$$

On démontre que les coefficients λ_k donnés par les formules (5) jouissent de la propriété exprimée par la formule

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = (-1)^k \frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-k)(n-2k)}{2(k-1)!} h \tag{13}$$

pour $k \geqslant 3$, d'où il résulte que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} = (-1)^n h/2 . \tag{14}$$

Cela nous permet d'écrire les formules

$$A_k = (-1)^{n+k-1} \frac{h}{2(n-1)} C_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$ d'où il résulte que la formule de dérivation numérique (2), prend la forme

$$\Delta^{n-1}f(x_1) = (-1)^n \frac{h}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(n-2k+1) C_{n-1}^{k-1} f'(x_k) + R . \tag{15}$$

On démontre facilement que dans la formule (2) ou (15) nous avons $A_k = (-1)^n A_{n-k+1}$ et que si $n = 2p+1$, alors $A_{(n+1)/2} = 0$.

5. Les conditions aux limites (5), montrent que la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $[x_1, x_n]$ ainsi que ses dérivées successives $\varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-2)}(x)$. Nous allons démontrer que *la dérivée* $\varphi^{(n-2)}(x)$ *a* $n-2$ *zéros dans l'intervalle* (x_1, x_n) *qui sont les noeuds* $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$.

Nous nous appuyrons sur l'observation suivante: *la dérivée* $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ *a dans l'intervalle* $[x_j, x_{j+1}]$ *un seul zéro, le point* $x = (x_j + x_{j+1})/2$.

En effet, d'après les formules (8), nous avons

$$\varphi_j(x) = \frac{(x-x_1)^n}{n!} - C_{n-1}^1 \frac{(x-x_2)^n}{n!} + \ldots + (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} \frac{(x-x_j)^n}{n!} +$$
$$+ \lambda_1 \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_2 \frac{(x-x_2)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \lambda_j \frac{(x-x_j)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et il résulte que

$$\varphi_j^{(n-1)}(x_j) + \varphi_j^{(n-1)}(x_{j+1}) = (E_j + E_{j-1})h + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j) ,$$

où

$$E_j = j - C_{n-1}^1(j-1) + \dots + (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} \cdot 1 .$$

On voit facilement que

$$E_j = (-1)^{j-1} \frac{(n-3)(n-4)\dots(n-j-1)}{(j-1)!}$$

et tenant compte de la formule (14), on démontre sans difficultés, que

$$\varphi_j^{(n-1)}(x_j) + \varphi_j^{(n-1)}(x_{j+1}) = 0 . \tag{16}$$

La dérivée $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ étant un polynôme du premier degré il résulte de la formule (16) que $x = (x_j + x_{j+1})/2$ est le zéro de $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ dans l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$.

Les dérivées $\varphi_1^{(n-2)}(x), \varphi_2^{(n-2)}(x), \dots, \varphi_{n-1}^{(n-2)}(x)$ étant des polynômes du second degré, les conditions aux limites (5) et la propriété précédente des dérivées $\varphi_1^{(n-1)}(x), \varphi_2^{(n-1)}(x), \dots, \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)$ montrent que $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ sont les zéros de $\varphi^{(n-2)}(x)$ dans l'intervalle (x_1, x_n). Le nombre de ces zéros est $n-2$.

6. Nous allons démontrer maintenant que *la fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle* (x_1, x_n). Pour cela nous démontrerons d'abord que la fonction $\varphi(x)$, n'a qu'un seul extrêmum dans l'intervalle (x_1, x_n).

Nous avons vu que la fonction $\varphi(x)$ est continue dans l'intervalle $[x_1, x_n]$ et qu'elle a des dérivées successives continues jusqu'à l'ordre $n-2$ et satisfait aux points x_1, x_n aux conditions

$$\varphi(x_1) = 0 , \quad \varphi'(x_1) = 0 , \quad \dots , \quad \varphi^{(n-2)}(x_1) = 0 ,$$
$$\varphi(x_n) = 0 , \quad \varphi'(x_n) = 0 , \quad \dots , \quad \varphi^{(n-2)}(x_n) = 0 .$$

Pour $n > 2$, le théorème de Rolle montre que la dérivée $\varphi'(x)$ a au moins un zéro dans l'intervalle (x_1, x_n). Ce zéro est unique.

En effet, supposons que la dérivée $\varphi'(x)$ ait deux zéros dans l'intervalle (x_1, x_n). En appliquant successivement le théorème de Rolle aux fonctions $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-3)}(x)$, on arrive à la conclusion que $\varphi''(x)$ doit avoir 3 zéros dans l'intervalle $(x_1, x_n), \dots,$ que $\varphi^{(n-2)}(x)$ doit avoir $n-1$ zéros dans l'intervalle (x_1, x_n), ce qui est impossible puisque nous avons démontré au nr. 5 que la dérivée $\varphi^{(n-2)}(x)$ a $n-2$ zéros dans l'intervalle (x_1, x_n). Donc la fonction $\varphi(x)$ a un seul extremum dans l'intervalle (x_1, x_n).

D'autre part la fonction $\varphi_1(x)$ donnée par la formule

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)^n}{n!} - \frac{h}{2} \cdot \frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

est nulle pour $x = x_1$ et est négative au voisinage de x_1. Il résulte alors que la fonction $\varphi(x)$ est négative dans l'intervalle (x_1, x_n).

Les raisonnements précédents ne s'appliquent pas pour $n = 2$. Dans ce cas la formule (2) devient

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{2}[f'(x_1) + f'(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) f'''(x)\, dx\,,$$

où $\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)/2$ et l'on voit que aussi dans ce cas nous avons $\varphi(x) < 0$ dans l'intervalle (x_1, x_2).

7. La fonction $\varphi(x)$ étant négative sur l'intervalle (x_1, x_n), le reste R de la formule de dérivation numérique (15) peut s'écrire sous la forme

$$R = f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x)\, dx\,,$$

où $\xi \in (x_1, x_n)$. L'intégrale du second membre se calcule par la formule (15) en remplaçant $f(x)$ par $(x - x_1)^2 (x - x_2) \ldots (x - x_n)/(n+1)!$ et l'on trouve finalement

$$R = -f^{(n+1)}(\xi) h^{n+1}/12 \tag{17}$$

d'où résulte l'évalution

$$|R| \leqslant M_{n+1} h^{n+1}/12\,, \tag{18}$$

où M_{n+1} est une borne supérieure de $|f^{(n+1)}(x)|$ sur l'intervalle (x_1, x_n).

§ 2. L'application de la formule de V. N. Fadeeva à l'intégration numérique des équations différentielles

8. Considérons l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{19}$$

et soit $y(x)$ l'intégrale qui satisfait à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Nous supposons que l'intégrale $y(x)$ existe sur l'intervalle $[x_0, x_0 + a]$ et que dans le rectangle D, défini par les inégalités

$$0 \leqslant x - x_0 \leqslant a\,, \quad |y - y_0| \leqslant b \tag{20}$$

la fonction $f(x, y)$ est continue ainsi que ses dérivées partielles successives par rapport à x et à y, jusqu'à l'ordre qui sera nécessaire pour les formules que nous avons en vue.

Dans ces conditions on déduit de l'équation différentielle (19) par des dérivations successives

$$y'' = f_1(x, y)\,, \quad y''' = f_2(x, y)\,, \tag{21}$$

les fonctions $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots,$ étant continues dans D.

Dans l'intervalle $[x_0, x_0+a]$ prenons les noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{2p}$ en progression arithmétique, dont la raison est h, et appliquons à l'intégrale $y(x)$ de l'équation différentielle (19) satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$ et aux noeuds $x_0, x_1, \dots, x_{2p}$, la formule de dérivation numérique (15). Nous aurons

$$\begin{aligned}(22)\qquad & [y(x_{2p})+y(x_0)] - C_{2p}^1[y(x_{2p-1})+y(x_1)] + \dots + \\ & \qquad + (-1)^{p-1}C_{2p}^{p-1}[y(x_{p+1})+y(x_{p-1})] + (-1)^p C_{2p}^p y(x_p) \\ & = \frac{h}{4p}\{2p[y'(x_{2p})-y'(x_0)] - (2p-2)C_{2p}^1[y'(x_{2p-1})-y'(x_1)] + \dots + \\ & \qquad + (-1)^{p-1}2C_{2p}^{p-1}[y'(x_{p+1})-y'(x_{p-1})]\} + \int_{x_0}^{x_{2p}} \varphi(x)y^{(2p+2)}(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Si nous supposons que l'intégrale $y(x)$ a été calculée au préalable sur les noeuds $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_{2p}$ alors la formule (22) conduit à une formule d'intégration numérique pour le calcul de $y(x_p)$, à savoir

$$\begin{aligned}(23)\qquad y(x_p) = & \frac{(-1)^{p-1}}{C_{2p}^p}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j C_{2p}^j[y(x_{2p-j})+y(x_j)] + \\ & + \frac{(-1)^p h}{4p\,C_{2p}^p}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j(2p-2j)C_{2p}^j\{f[x_{2p-j}, y(x_{2p-j})] - f[x_j, y(x_j)]\} + R_p\,,\end{aligned}$$

où le reste R_p est donné par la formule

$$(24)\qquad R_p = \frac{(-1)^p}{C_{2p}^p}\int_{x_0}^{x_{2p}} \varphi(x) f_{2p+1}[x, y(x)]\,dx\,.$$

En désignant par F_{2p+1} une borne supérieure de $|f_{2p+1}(x, y)|$ dans le rectangle D, nous déduisons de la formule (24) une évaluation de la valeur absolue de R_p,

$$(25)\qquad |R_p| \leqslant \frac{h^{2p+2}}{12C_{2p}^p}F_{2p+1}\,.$$

Par exemple, pour $p = 1, 2$, nous avons les formules d'intégration numérique

$$(26)\qquad y(x_1) = \frac{y(x_0)+y(x_2)}{2} - \frac{h}{4}\{f[x_2, y(x_2)] - f[x_0, y(x_0)]\} + R_1$$

avec

$$(26')\qquad |R_1| \leqslant \frac{h^4}{24}F_3$$

et

$$y(x_2) = -\frac{1}{6}[y(x_4) - 4y(x_3) - 4y(x_1) + y(x_0)] + \tag{27}$$
$$+ \frac{h}{12}\{f(x_4, y(x_4)] - 2f([x_3, y(x_3)] + 2f[x_1, y(x_1)] - f[x_0, y(x_0)]\} + R_2$$

avec

$$|R_2| \leqslant \frac{h^6}{72} F_5 . \tag{27'}$$

9. Dans le cas où le nombre des noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ est pair, la formule de dérivation numérique (15) conduit encore à des formules d'intégration numérique des équations diférentielles (19), comme nous le montrerons dans la suite.

Supposons $n = 3$, et alors la formule (15) appliquée à la fonction $y(x)$ et aux noeuds x_0, x_1, x_2, x_3 est

$$y(x_3) - 3y(x_2) + 3y(x_1) - y(x_0) \tag{28}$$
$$= \frac{h}{2}[y'(x_3) - y'(x_2) - y'(x_1) + y'(x_0)] + \int_{x_0}^{x_3} \varphi(x) y^{(5)}(x)\, dx .$$

Nous avons vu (nr. 6) que dans cette formule la fonction $\varphi(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_3) et que nous avons

$$\int_{x_0}^{x_3} \varphi(x)\, dx = -\frac{h^5}{12} . \tag{29}$$

Il convient d'ajouter à la formule (28), la formule qui consiste à représenter la différence divisée $[x_0, x_0, x_1, x_1, x_3, x_3; y]$ de la fonction $y(x)$ sur les noeuds doubles x_0, x_1, x_3 par une intégrale définie [3]. Cette formule est

$$[x_0, x_0, x_1, x_1, x_3, x_3; y] = \int_{x_0}^{x_3} \psi(x) y^{(5)}(x)\, dx$$

et tenant compte que $x_1 = x_0 + h$, $x_3 = x_0 + 3h$, cette formule peut encore s'écrire

$$32y(x_0) - 27y(x_1) - 5y(x_3) \tag{30}$$
$$= -h[12y'(x_0) + 27y'(x_1) + 3y'(x_3)] + 108h^5 \int_{x_0}^{x_3} \psi(x) y^{(5)}(x)\, dx .$$

Nous avons étudié la fonction $\psi(x)$ qui donne le reste de la formule (30) [3]. Nous avons démontré qu'elle est positive sur l'intervalle (x_0, x_3) et que nous avons

$$\int_{x_0}^{x_3} \psi(x)\, dx = \frac{1}{5!} .$$

Si nous éliminons $y'(x_1)$ entre les équations (28) et (30), nous obtenons la formule

$$86y(x_0)-189y(x_1)+162y(x_2)-59y(x_3)$$
$$=h[-39y'(x_0)+27y'(x_2)-30y'(x_3)]+\int_{x_0}^{x_3}[108h^5\psi(x)-54\varphi(x)]y^{(5)}(x)\,dx$$

et l'absence de $y'(x_1)$ dans le second membre nous conduit à la formule d'intégration numérique de l'équation différentielle (19)

$$(32)\qquad y(x_1)=\frac{1}{189}[86y(x_0)+162y(x_2)-59y(x_3)]+$$
$$+\frac{h}{63}\{13f(x_0,y_0)-9f[x_2,y(x_2)]+10f[x_3,y(x_3)]\}+R\,,$$

où le reste de cette formule est

$$(33)\qquad R=\int_{x_0}^{x_3}\theta(x)f_4[x,y(x)]\,dx$$

avec

$$(34)\qquad \theta(x)=-\tfrac{1}{7}[4h^5\psi(x)-2\varphi(x)]\,.$$

D'après les propriétés des fonctions $\varphi(x), \psi(x)$ la fonction $\theta(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_3) et nous avons

$$\int_{x_0}^{x_3}\theta(x)\,dx=-\frac{h^5}{35}\,,$$

d'où il résulte l'évaluation de la valeur absolue du reste de la formule d'intégration numérique (32)

$$(35)\qquad |R|\leqslant\frac{h^5}{35}F_4\,,$$

où F_4 est une borne supérieure de $|f_4(x,y)|$ dans le rectangle D.

Donc, *si l'intégrale de l'équation différentielle* (19) *a été calculée au préalable sur les noeuds $x_2=x_0+2h$, $x_3=x_0+3h$ nous pouvons calculer l'intégrale sur le noeud $x_1=x_1+h$ par la formule d'intégration numérique* (32), que nous avons déduit de la formule de dérivation numérique (28) de V. N. Fadeeva.

10. Considérons encore le cas des noeuds $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$, en progression arithmétique dont la raison est h. La formule de V. N. Fadeeva correspondante est

$$(36)\qquad y(x_5)-5y(x_4)+10y(x_3)-10y(x_2)+5y(x_1)-y(x_0)$$
$$=\frac{h}{2}[y'(x_5)-3y'(x_4)+2y'(x_3)+2y'(x_2)-3y'(x_1)+y'(x_0)]+\int_{x_0}^{x_5}\varphi(x)y^{(7)}(x)\,dx$$

et nous savons (nr. 6) que la fonction $\varphi(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_5) et que nous avons

$$\int_{x_0}^{x_5} \varphi(x)\,dx = -\frac{h^5}{12}. \tag{37}$$

Nous pouvons ajouter à la formule (36), la formule qui représente la différence divisée de la fonction $y(x)$ sur les noeuds $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ considérés comme doubles par une intégrale définie

$$[\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \xi_3, \xi_3, \xi_4, \xi_4; y] = \int_{\xi_1}^{\xi_4} \psi(x) y^{(7)}(x)\,dx \tag{38}$$

que nous avons étudiée dans un autre travail [3]. Nous avons démontré que la fonction $\psi(x)$ est positive sur l'intervalle $[\xi_1, \xi_4]$ et que nous avons

$$\int_{\xi_1}^{\xi_4} \psi(x)\,dx = \frac{1}{7!}. \tag{39}$$

Pour obtenir des formules d'intégration numérique des équations différentielles (19), nous procédons comme au nr. 9

1°. En prenant $\xi_1 = x_0$, $\xi_2 = x_1$, $\xi_3 = x_2$, $\xi_4 = x_5$ et en éliminant $y'(x_1)$ entre l'équation (36) et l'équation (38), nous sommes conduits à la formule d'intégration numérique

$$\begin{aligned} y(x_1) = \frac{1}{19125}[-4547y(x_5) + 22500y(x_4) - 45000y(x_3) + \\ + 38000y(x_2) + 8172y(x_0)] + \\ + \frac{h}{1275}\{152f[x_5, y(x_5)] - 450f[x_4, y(x_4)] + 300f[x_3, y(x_3)] + \\ + 500f[x_2, y(x_2)] + 222f(x_0, y_0)\} + R_1, \end{aligned} \tag{40}$$

où le reste R_1 est donné par la formule

$$R_1 = \int_{x_0}^{x_5} \theta_1(x) f_6[x, y(x)]\,dx \tag{41}$$

avec

$$\theta_1(x) = -\frac{1}{17}[96h^7\psi_1(x) - 4\varphi(x)]. \tag{42}$$

La fonction $\theta_1(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_5) et nous avons

$$\int_{x_0}^{x_5} \theta_1(x)\,dx = -\frac{37}{19125}h^7. \tag{43}$$

Il résulte l'évaluation suivante de $|R_1|$

$$|R_1| \leqslant \frac{37h^7}{19125} F_6 < 0,02073 F_6 h^7 , \tag{44}$$

où F_6 est une borne supérieure de $|f_6(x, y)|$ dans le rectangle D.

2°. En prenant $\xi_1 = x_0, \xi_2 = x_1, \xi_3 = x_3, \xi_4 = x_5$ et en éliminant $y'(x_1)$ entre l'équation (36) et l'équation (38) nous sommes conduits à la formule d'intégration numérique

$$\begin{aligned} y(x_1) = \frac{1}{25875}[10388 y(x_0) + 45000 y(x_2) - 47000 y(x_3) + \\ + 22500 y(x_4) - 5013 y(x_5)] + \\ + \frac{h}{1725}\{278 f(x_0, y_0) + 300 f[x_2, y(x_2)] + 500 f[x_3, y(x_3)] - \\ - 450 f(x_4, y(x_4)] + 168 f[x_5, y(x_5)]\} + R_2 , \end{aligned} \tag{45}$$

où

$$R_2 = \int_{x_0}^{x_5} \theta_2(x) f_6[x, y(x)] dx \tag{46}$$

avec

$$\theta_2(x) = -\tfrac{1}{23}[384 h^7 \psi_2(x) - 4\varphi(x)] . \tag{47}$$

La fonction $\theta_2(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_5) et nous avons l'évaluation

$$|R_2| \leqslant \frac{43h^7}{2415} F_6 < 0,01781 F_6 h^7 . \tag{48}$$

3°. En prenant $\xi_1 = x_0, \xi_2 = x_1, \xi_3 = x_4, \xi_4 = x_5$ nous sommes conduits de la même manière à la formule d'intégration numérique de l'équations différentielle (19)

(49)

$$\begin{aligned} y(x_1) = \frac{1}{3125}[1283 y(x_0) + 5000 y(x_2) - 5000 y(x_3) + 3125 y(x_4) - 1283 y(x_5)] + \\ + \frac{h}{625}\{104 f(x_0, y_0) + 100 f[x_2, y(x_2)] + 100 f[x_3, y(x_3)] + 104 f[x_5, y(x_5)]\} + R_3 , \end{aligned}$$

où

$$R_3 = \int_{x_0}^{x_5} \theta_3(x) f_6[x, y(x)] dx \tag{50}$$

avec

$$\theta_3(x) = -\tfrac{1}{25}[864 h^7 \psi_3(x) - 4\varphi(x)] . \tag{51}$$

La fonction $\theta_3(x)$ est négative sur l'intervalle (x_0, x_5) et nous avons l'évaluation

$$|R_3| \leqslant \frac{53h^7}{2625} F_6 < 0,0202 F_6 h^7 . \tag{52}$$

En résumé *si l'intégrale de l'équation différentielle* (19) *satisfaisant à la condition* $y(x_0) = y_0$ *a été calculée au préalable sur les noeuds* x_2, x_3, x_4, x_5, *alors nous pouvons calculer l'intégrale sur le noeud* x_1 *avec l'une des formules* (40), *ou* (45), *ou* (49), *les restes de ces formules qui sont évalués par les formules* (44), (48), (52) *étant de l'ordre de* h^7.

11. On sait que si les noeuds $x_0, x_1, \ldots, x_6$ sont en progression arithmétique dont la raison est h, et si l'intégrale $y(x)$ de l'équation différentielle (19) a été calculée au préalable sur les noeuds x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, alors l'intégrale sur le noeud x_6 peut être calculée par la formule d'intégration numérique d'Adams

$$(53)\qquad \begin{aligned} y(x_6) = y(x_5) + h[g(x_5) + \tfrac{1}{2}\Delta^1 g(x_4) + \tfrac{5}{12}\Delta^2 g(x_3) + \\ + \tfrac{3}{8}\Delta^3 g(x_2) + \tfrac{251}{720}\Delta^4 g(x_1) + \tfrac{95}{288}\Delta^5 g(x_0)] + R\,, \end{aligned}$$

où

$$g(x) = f[x, y(x)]\,.$$

Nous avons démontré [4] que le reste R de cette formule peut être mis sous la forme d'une intégrale définie

$$(54)\qquad R = \int_{x_0}^{x_6} \varphi(x) f_6[x, y(x)]\, dx$$

et nous avons démontré que la fonction $\varphi(x)$ est positive sur l'intervalle (x_0, x_6) et que $|R|$ a par suite l'évaluation suivante

$$(55)\qquad |R| \leqslant \tfrac{19087}{60480} h^7 F_6 < 0{,}3156 F_6 h^7\,.$$

Ainsi le reste R de la formule d'intégration numérique d'Adams est de l'ordre de h^7, ce qui est en accord avec un résultat de W. Tollnien [5]. Mais il est important que nous ayons préciser le coefficient de h^7 dans l'inégalité (55).

Les résultats du nr. 10, montrent que pour appliquer la formule d'Adams, il n'est pas nécessaire que l'intégrale $y(x)$ satisfaisant à la condition $y(x_0) = y_0$ soit calculée au préalable sur les 5 noeuds $x_1, \ldots, x_5$. Il suffit qu'elle soit calculée au préalable seulement sur les 4 noeuds x_2, x_3, x_4, x_5, car $y(x_1)$ peut être calculé par l'une des formules (40), (45), (49) avec des restes de l'ordre de h^7. $y(x_6)$ se calcule ensuite par la formule d'Adams avec un reste du même ordre, c'est à dire de l'ordre de h^7.

Travaux cités

[1] V. N. Fadeeva, *La méthode des droites appliquée à quelques problèmes aux limites* (en russe), Труды Мат. Ин-та 28 (1949), pp. 73-103.

[2] D. V. Ionescu, *Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva*, Communication à la Société Mathématique Polonaise de Varsovie, Séance du 11 Novembre 1960.

[3] D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice,* Bucuresti 1957, cap. III, § 5.

[4] — *Le reste dans la formule d'intégration numérique d'Adams* (sous presse).

[5] W. Tollnnien, *Über die Fehlerabschätzung bei Adamsohen Verfahren zur Integration Gewöhnlicher Differential Gleichungen,* Zeitschrift für ang. Math. und Mech. 18 (1938), pp. 83-90.

[6] P. Aubert, G. Papelier, *Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie, II,* Paris 1920, p. 18, ex. 47, 48.

Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1961